



**HAL**  
open science

## Mersenne et la conjecture de Collatz

Jacques Prado

► **To cite this version:**

| Jacques Prado. Mersenne et la conjecture de Collatz. 2021. hal-03195174v1

**HAL Id: hal-03195174**

**<https://hal.science/hal-03195174v1>**

Preprint submitted on 10 Apr 2021 (v1), last revised 29 Jul 2023 (v10)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mersenne et la conjecture de Collatz

*J. Prado*

04/avril/21

## Résumé

En donnant une interprétation différente de la conjecture de Collatz, aussi dite conjecture de Syracuse ou encore conjecture  $3n + 1$ , il est possible de montrer assez simplement qu'il n'existe pas de cycles de longueur  $p \neq 1$ . De plus, cette nouvelle formulation permet aussi de modifier la notion de convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs, notés  $Q_{2^m}$  des nombres de Mersenne de la forme  $M_{2^m} = 2^{2^m} - 1 = 3 \cdot Q_{2^m}$ . Cette soumission a pour but de présenter la conjecture sous une forme qui ne semble pas avoir été explorée jusqu'à aujourd'hui et qui, semble-t-il, permettrait de montrer que la conjecture s'avère exacte, en montrant qu'il existe une bijection entre la partition des nombres impairs modulo 3 et la partition des nombres impairs associés aux trajectoires se terminant en  $Q_{2^m}$ .

## 1 Introduction

Nous rappelons que la conjecture de Collatz est liée à la suite d'entiers positifs définis par les relations suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases} \quad (1)$$

La conjecture de Collatz dit que pour tout  $n$  la suite se termine toujours en 1.

Il est possible de reformuler (1) en ne faisant apparaître que les valeurs impaires de  $n$  ce qui s'écrit :

$$2^{\gamma_k} n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (2)$$

Où les  $n_k$  sont tous des entiers positifs impairs. On en déduit simplement que si  $n_k = 1$ , alors :

$$n_{k-1} = \frac{2^{\gamma_k} - 1}{3} \quad (3)$$

L'équation (3) n'a de solution que si  $(2^{\gamma_k} - 1)$  est divisible par 3. En écrivant  $3 = (2^2 - 1)$  on est ramené à la solution simple :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2^m} - 1}{2^2 - 1} \quad (4)$$

où  $(2^{2^m} - 1) = M_{2^m}$  est un nombre de Mersenne défini par  $M_p = (2^p - 1)$  qui est divisible par 3 quand  $p$  est pair.

Lorsque  $n_k \neq 1$  alors (3) devient :

$$n_{k-1} = \frac{2^{\gamma_k} n_k - 1}{3} \quad (5)$$

De manière évidente (5) n'a pas de solution si  $n_k$  est un multiple de 3. Dans ces conditions,  $n_k$  étant impair ne peut prendre que les formes suivantes :

$$\begin{cases} n_k = 3q_k + 1 & \text{où } q_k \text{ est pair} \\ n_k = 3q_k + 2 & \text{où } q_k \text{ est impair} \end{cases} \quad (6)$$

De même,  $\gamma_k$  peut être pair ( $\neq 0$ ) ou impair :  $\begin{cases} \gamma_k = 2m_k \\ \gamma_k = 2m_k - 1 \end{cases}$

Si  $n_k$  est un multiple de 3 impair alors  $n_k = n_0$  est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme  $3q_1 + 1$  ou  $3q_1 + 2$ .

## 2 Autre écriture des nombres impairs

À partir de ce qui précède il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à 0, 1, ou 2 modulo 3.

### 2.1 $n_0 = 3q_0$ , où $q_0$ est impair

Dans ce cas la première itération de la suite de Collatz est donnée par :

$$2^{\gamma_1} n_1 = 3^2 q_0 + 1 \quad (7)$$

#### 2.1.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$ , $\gamma_1 = 2m_1 - 1$ et $q_1$ pair

Alors :

$$2^{2m_1-1} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \quad (8)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1-1} q_1 + \frac{2^{2m_1-1} - 1}{3} \quad (9)$$

L'équation (9) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m_1-1} - 1$  n'est pas divisible par 3.

#### 2.1.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$ , $\gamma_1 = 2m_1$ et $q_1$ pair

Alors :

$$2^{2m_1} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \quad (10)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1}q_1 + \frac{2^{2m_1} - 1}{3} \quad (11)$$

L'équation (11) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m_1} - 1 = 3Q_{2m_1}$  est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1}q_1 + Q_{2m_1} \quad \text{où } q_1 \text{ est pair} \quad (12)$$

### 2.1.3 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$ , $\gamma_1 = 2m_1 - 1$ et $q_1$ impair

Alors :

$$2^{2m_1-1}(3q_1 + 2) = 3^2q_0 + 1 \quad (13)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1-1}q_1 + \frac{2^{2m_1} - 1}{3} \quad (14)$$

L'équation (14) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m_1} - 1 = 3Q_{2m_1}$  est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1}q_1 + Q_{2m_1} \quad \text{où } q_1 \text{ est impair} \quad (15)$$

### 2.1.4 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$ , $\gamma_1 = 2m_1$ et $q_1$ impair

Alors :

$$2^{2m_1}(3q_1 + 2) = 3^2q_0 + 1 \quad (16)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m_1}q_1 + \frac{2^{2m_1+1} - 1}{3} \quad (17)$$

L'équation (17) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m_1+1} - 1$  n'est pas divisible par 3.

## 2.2 $n_k = 3q_k + 1$ , $\gamma_k = 2m_k$ et $q_k$ pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m_k}(3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \quad (18)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m_k} 3q_k + 2^{2m_k} - 1}{3} \quad (19)$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne :  $M_{2m_k} = 2^{2m_k} - 1 = 3Q_{2m_k}$ .  
Alors (19) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m_k} q_k + Q_{2m_k} \quad (20)$$

### 2.3 $n_k = 3q_k + 1$ , $\gamma_k = 2m_k - 1$ et $q_k$ pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m_k-1} (3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \quad (21)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m_k-1} 3q_k + 2^{2m_k-1} - 1}{3} \quad (22)$$

Dans la mesure où  $M_{2m_k-1} = 2^{2m_k-1} - 1$ , n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

### 2.4 $n_k = 3q_k + 2$ , $\gamma_k = 2m_k$ et $q_k$ impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m_k} (3q_k + 2) = 3n_{k-1} + 1 \quad (23)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m_k} 3q_k + 2^{2m_k+1} - 1}{3} \quad (24)$$

Dans la mesure où  $M_{2m_k+1} = 2^{2m_k+1} - 1$ , n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

### 2.5 $n_k = 3q_k + 2$ , $\gamma_k = 2m_k - 1$ $q_k$ impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (6) nous avons :

$$2^{2m_k-1} (3q_k + 2) = 3n_{k-1} + 1 \quad (25)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m_k-1} 3q_k + 2^{2m_k} - 1}{3} \quad (26)$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne  $M_{2m_k} = 2^{2m_k} - 1 = 3Q_{2m_k}$  :  
Alors (26) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m_k-1} q_k + Q_{2m_k} \quad (27)$$

En conclusion si dans la suite des valeurs  $n_k$  toutes impaires :

- $n_0 = 3q_0$  : alors  $n_0$  est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme  $3q_1 + 1$  ou de la forme  $3q_1 + 2$  selon les équations (12) ou (15).
- $n_k = 3q_k + 1$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (20) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est pair et  $\gamma_k = 2m_k$ .
- $n_k = 3q_k + 2$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (27) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est impair et  $\gamma_k = 2m_k - 1$ .

### 3 Trajectoires de Collatz

Cela permet de définir une équivalence entre les deux écritures des nombres impairs et de les relier par l'intermédiaire de la suite de Collatz. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous où  $Q_{2m} = (2^{2m} - 1)/3$  :

$f(n) = 3n + 1$	$\Leftrightarrow$	$n \in \{3q, 3q + 1, 3q + 2\}$
$2^{2m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n = 3q + 1$ ou $3q + 2$
$2^{2m}(3q_k + 1)$	$=$	$3(2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n = 3q + 1$ ou $3q + 2$
$2^{2m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n = 3q \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(3q_k + 1)$	$=$	$3(2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n = 3q \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(1)$	$=$	$3Q_{2m} + 1$

Cette correspondance des écritures permet de construire, à partir des valeurs  $Q_{2m}$  et en inversant la relation des suites de Collatz, l'ensemble des nombres impairs qui définiront les trajectoires se terminant en  $Q_{2m}$  en partant de n'importe quel de ces nombres. Comme ceci permet de parcourir l'ensemble des nombres impairs, on peut en conclure que toute trajectoire se termine de cette manière et conduit donc au dernier terme :

$$2^{2m} \bullet 1 = 3Q_{2m} + 1 = M_{2m} + 1 \quad (28)$$

soit la convergence vers 1.

Nous donnons quelques exemples de construction des termes impairs prédécesseurs des valeurs  $Q_{2m}$  pour  $m = [1, 2, \dots, \infty[$  :

$m$	1	2	3	4	5	6	...
$M_{2m}$	3	15	63	255	1023	4095	...
$Q_{2m}$	1	5	<i>21</i>	85	341	<i>1365</i>	...

Les valeurs de  $Q_{2m}$  en italique correspondent à des trajectoires à un seul terme puisqu'elles sont multiples de 3. La première valeur  $Q_{2m} = 1$  correspond au cycle 4 : 2 : 1 puisque l'on a :

$$2^2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 1 \quad (29)$$

Prenons les prédécesseurs de  $Q_4 = 5$ , comme 5 est de la forme  $3q + 2 = 3 \cdot 1 + 2$ , alors les prédécesseurs immédiats ont la forme donnée par la relation (27) avec  $q_k = 1$  :

$$n_{k-1} = 2^{2m-1} \cdot 1 + Q_{2m} \quad (30)$$

Soit :

$m$	1	2	3	...
$n_{k-1}$	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$2^3 \cdot 1 + 5 = 13$	$2^5 \cdot 1 + 21 = 53$	...

Il y a une infinité de prédécesseurs et pour chaque prédécesseur qui n'est pas multiple de 3 on peut recommencer la procédure. Ainsi avec 13 de la forme  $3q + 1 = 3 \cdot 4 + 1$ , alors  $n_{k-1}$  prend les formes données par la relation (20) avec  $q_k = 4$  :

Soit :

$m$	1	2	3	...
$n_{k-1}$	$2^2 \cdot 4 + 1 = 17$	$2^4 \cdot 4 + 5 = 69$	$2^8 \cdot 4 + 21 = 1045$	...

On construit progressivement toutes les valeurs qui vont former des trajectoires finissant en 5 c'est à dire convergeront vers 1. Les nombres en italique sont des multiples de 3 et n'ont donc pas de prédécesseurs, pour les autres on peut recommencer éventuellement jusqu'à l'infini.

Dans l'exemple qui précède, pour construire la trajectoire qui commence en 3, comme 5 succède à 3 et que  $5 = Q_4$ , on obtient :  $3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ . Ce qui est conforme à la suite de Collatz.

De même en partant de 17 prédécesseur de 13, on obtient :  $17 \rightarrow 13 \rightarrow 1$ . Comme 17 n'est pas multiple de 3, on aurait pu remonter jusqu'à 9, ce qui aurait donné la trajectoire :  $9 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ .

Pour prendre un exemple plus complexe, en partant de 5 on aurait pu remonter par 53 et l'un des chemins tracé serait remonté jusqu'à 27 dont on sait qu'il génère une trajectoire de longueur 111, nombres pairs compris, en suivant un chemin chaotique. Un autre chemin suivi depuis 5 et 53 se termine en 165. Il se trouve que la trajectoire partant de 27 et celle partant de 165 sont exactement de même longueur, les deux se rejoignant au nombre 31 et suivent le même chemin jusqu'à 5.

Si il est difficile de prédire le comportement en partant d'un nombre impair quelconque, la procédure proposée de construction des trajectoires permet de conclure que ce nombre choisi au hasard appartient nécessairement à une trajectoire qui finira en un nombre  $Q_{2m}$  donc en 1.

La figure [1] illustre la construction, les nombres en gras n'ont pas de prédécesseurs.

Avec cette procédure il est possible de définir des ensembles de nombres impairs, notés  $E(Q_{2m})$  associés à chaque valeur de  $Q_{2m}$ . Chaque ensemble contient les valeurs des nombres impairs qui appartiennent à des trajectoires finissant en  $Q_{2m}$  c'est à dire en 1. Certains ensembles sont de dimension infinie, d'autres peuvent être de dimension 1, comme par exemple  $E(Q_6) = \{21\}$ . Comme il y a correspondance entre les éléments de ces ensembles et l'ensemble des nombres impairs définis modulo 3, tout nombre impair est l'élément d'une trajectoire au sens de la suite de Collatz.

Il reste à montrer que ces ensembles de trajectoires sont disjoints, c'est à dire qu'il n'y a pas de cycle possible autre que le cycle  $4 : 2 : 1$ .

## 4 Application à l'étude des cycles possibles.

Si la suite  $n_k$  converge vers 1, la valeur suivante  $n_{k+1}$  est donnée par (cf(2))  $2^{\gamma_k} n_{k+1} = 4$ , dont la solution est  $\gamma_k = 2$  et  $n_{k+1} = 1$ . C'est le cycle connu  $4 : 2 : 1$ .

Bien que, d'après ce qui précède, cela ne soit pas possible, la question est de savoir si il existe d'autres cycles possibles. Pour cela nous avons pour information que ces cycles ne contiennent pas de valeurs multiples de 3 car ces valeurs n'ont pas de précédent. Nous devons donc nous

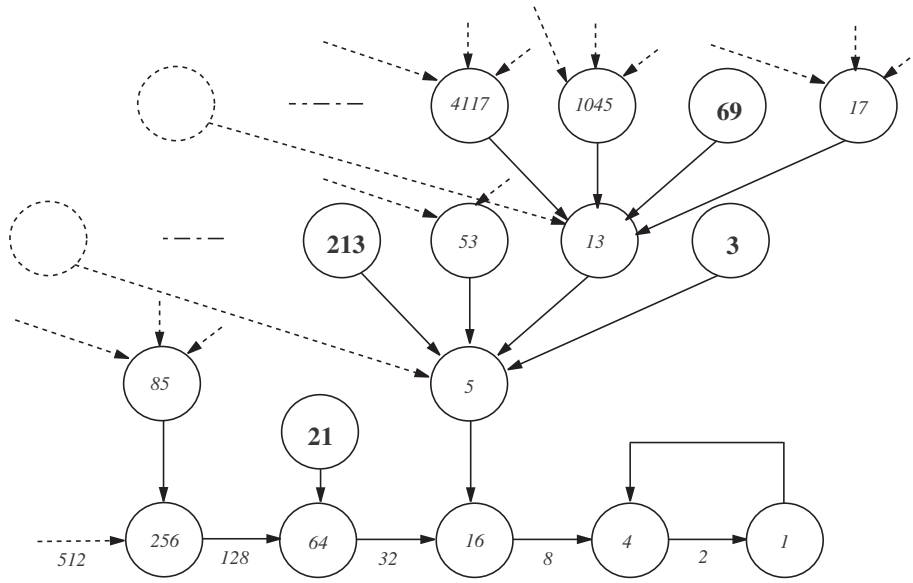


FIG. 1: Trajectoire

intéresser aux cycles constitués de valeurs impaires de la forme  $n_k = 3q_k + 1$  ou  $n_k = 3q_k + 2$  en faisant référence aux équations (20) et (27).

Supposons l'existence d'un cycle de longueur  $p$ , il s'écrit :

$$\begin{aligned}
 2^{\gamma_1} n_1 &= 3n_0 + 1 \\
 2^{\gamma_2} n_2 &= 3n_1 + 1 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 2^{\gamma_{p-1}} n_{p-1} &= 3n_{p-2} + 1 \\
 2^{\gamma_0} n_0 &= 3n_{p-1} + 1
 \end{aligned} \tag{31}$$

Compte-tenu de ce qui précède, que  $\gamma_k$  soit égal à  $2m_k$  ou à  $2m_k - 1$ , les valeurs des  $n_k$  peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned}
 n_0 &= 2^{\gamma_1} q_1 + Q_{2m_1} \\
 n_1 &= 2^{\gamma_2} q_2 + Q_{2m_2} \\
 &\vdots \\
 n_{k-1} &= 2^{\gamma_k} q_k + Q_{2m_k} \\
 &\vdots \\
 n_{p-2} &= 2^{\gamma_{p-1}} q_{p-1} + Q_{2m_{p-1}} \\
 n_{p-1} &= 2^{\gamma_0} q_0 + Q_{2m_0}
 \end{aligned} \tag{32}$$

En multipliant la première ligne de (31) par  $2^{\gamma_0}$  on obtient :  $2^{\gamma_0 + \gamma_1} n_1 = 3 \cdot 2^{\gamma_0} n_0 + 2^{\gamma_0}$  et en substituant  $2^{\gamma_0} n_0$  par la dernière ligne de (31) on obtient :



$$2^{\gamma_0+\gamma_1}n_1 = 3(3n_{p-1} + 1) + 2^{\gamma_0} \quad (33)$$

Remplaçons  $n_{p-1}$  par son équivalent donné par la dernière ligne de (32) :

$$2^{\gamma_0+\gamma_1}n_1 = 3^2 2^{\gamma_0} q_0 + 3Q_{2m_0} + 1 + 2^{\gamma_0} \quad (34)$$

La propriété des nombres de Mersenne nous permet d'écrire  $3Q_{2m_0} + 1 = 2^{2m_0}$ , d'où :

$$\begin{aligned} 2^{\gamma_0+\gamma_1}n_1 &= 3^2 2^{\gamma_0} q_0 + 2^{2m_0} + 2^{\gamma_0} \\ 2^{\gamma_1}n_1 &= 3^2 q_0 + 1 + 2^{2m_0-\gamma_0} \end{aligned} \quad (35)$$

Il reste à vérifier que la relation (35) est cohérente sachant que  $n_0$  et  $n_1$  ne peuvent prendre que les formes  $3q + 1$  ou  $3q + 2$  et  $2^{\gamma_1}n_1 = 3n_0 + 1$ .

#### 4.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$

Dans ce cas nous savons (20) que  $\gamma_1 = 2m_1$

##### 4.1.1 Cas $n_0 = 3q_0 + 1$

Dans ce cas nous savons (20) que  $\gamma_0 = 2m_0$ , alors (35) s'écrit :

$$2^{2m_1}n_1 = 3^2 q_0 + 2 = 3n_0 - 1 \quad (36)$$

ce qui est contradictoire.

##### 4.1.2 Cas $n_0 = 3q_0 + 2$

Dans ce cas nous savons (27) que  $\gamma_0 = 2m_0 - 1$ , alors (35) s'écrit :

$$2^{2m_1}n_1 = 3^2 q_0 + 3 = 3(n_0 - 1) \quad (37)$$

ce qui est contradictoire.

#### 4.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$

Dans ce cas nous savons (27) que  $\gamma_1 = 2m_1 - 1$

##### 4.2.1 Cas $n_0 = 3q_0 + 1$

Dans ce cas nous savons (20) que  $\gamma_0 = 2m_0$ , alors (35) s'écrit :

$$2^{2m_1-1}n_1 = 3^2 q_0 + 2 = 3n_0 - 1 \quad (38)$$

ce qui est contradictoire.

#### 4.2.2 Cas $n_0 = 3q_0 + 2$

Dans ce cas nous savons (27) que  $\gamma_0 = 2m_0 - 1$ , alors (35) s'écrit :

$$2^{2m_1-1}n_1 = 3^2q_0 + 3 = 3(n_0 - 1) \quad (39)$$

ce qui est contradictoire.

On en conclut qu'il n'existe pas de cycle de longueur  $p \neq 1$ .

## 5 Conclusion

- De ce qui précède on peut conclure que toute trajectoire de nombres impairs au sens de la suite de Collatz commence par un multiple de 3, qui peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut, et se termine sur un diviseur des nombres de Mersenne de puissance paire c'est à dire indirectement par 1. Convergence vers 1 qui se traduit par  $2^{2m} \cdot 1 = 3 \cdot Q_{2m} + 1$ .
- Même si le multiple de 3 initial est très grand, la trajectoire associée peut être très courte si ce multiple de 3 est lui même un diviseur d'un nombre de Mersenne. Autrement dit les nombres de Mersenne multiple de 9 sont associés à des trajectoires à 2 éléments, le premier représentant est 21 qui donne la trajectoire  $21 \rightarrow 1$ , associée à  $Q_6$ .
- Le nombre de nombres de Mersenne de la forme  $2^{2m} - 1$  étant infini, il y a un nombre infini de nombres de la forme  $Q_{2m}$  tel que  $2^{2m} - 1 = 3 \cdot Q_{2m}$  et probablement, mais non démontré, un nombre infini de nombres  $Q_{2m}$  multiple de 3. Ce qui indiquerait qu'il peut exister un nombre infini de trajectoires à 2 éléments, même en partant de valeurs très grandes.
- La valeur initiale ne présageant en rien de la longueur de la trajectoire, existe-t-il une trajectoire de longueur maximale?

De nombreuses questions peuvent encore se poser, mais la difficulté d'exprimer la convergence vers 1, qui est liée au désordre généré par l'expression de la suite donnée par les relations (1), semble trouver une explication dans le fait que l'on puisse écrire un nombre impair ( $3q, 3q + 1$  ou  $3q + 2$ ) de manière unique sous la forme  $2^\gamma q + Q_{g(\gamma)}$  où  $g(\gamma)$  dépend de la parité de  $\gamma$ . Ceci tend à prouver que la conjecture de Collatz s'avère exacte.

## 6 Référence

On trouvera dans la référence ci-dessous un état suffisamment exhaustif des travaux concernant les études sur la suite de Collatz (Syracuse).

Luc-Olivier Pochon, Alain Favre. La suite de Syracuse, un monde de conjectures.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181v2>