



HAL
open science

Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks. Version bilingue et commentée

Alfonso Shimbel, Laurent Beauguitte

► **To cite this version:**

Alfonso Shimbel, Laurent Beauguitte. Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks. Version bilingue et commentée. 2021. <hal-03192767>

HAL Id: hal-03192767

<https://hal.science/hal-03192767v1>

Submitted on 8 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of
Communication Networks
Bulletin of Mathematical Biophysics 15, p. 501-507
Version bilingue et commentée

groupe f.m.r.



Mars 2021

Version adaptée et commentée par Laurent Beauquitte, CNRS, UMR Géographie-cités.

Présentation

Cet article fait suite à celui de 1951 publié dans la même revue, les recherches étant financées par le même projet associant l'Université de Chicago, où Shimbel a rejoint l'équipe de Nicolas Rashevsky en 1951, et le laboratoire de recherche de Cambridge (Massachusetts) de l'*U.S. Air Force*. Il reprend les notions de matrice structure et de plus court chemin entre deux sommets (appelés sites) et propose différentes mesures caractérisant le réseau.

Le vocabulaire est plus stable que dans l'article de 1951 et la « traduction » en langage de théorie des graphes - que l'auteur ne mobilise toujours pas - devient plus aisée. On rencontre par exemple dans la deuxième partie de l'article différentes définitions correspondant aux notions d'isthme ou de point d'articulation.

Si l'on en croit Google Scholar, cet article est de très loin le plus cité de son auteur (plus de 530 citations, recherche effectuée le 25 février 2021). Sa postérité est intéressante : les géographes quantitativistes, depuis Garrison (1960), ont souvent utilisé les indicateurs de dispersion et d'accessibilité. Les sociologues de la *Social Network Analysis* n'ont pas retenu ces indicateurs - dont l'un est pourtant très proche de la centralité de proximité (*closeness centrality*) - mais considèrent le « stress » évoqué en fin d'article comme une première approche de la centralité d'intermédiarité (*betweenness centrality*) (Freeman 1978 ; Wasserman et Faust, 1994, p. 189).

Références

Freeman, Linton C. « Centrality in Social Networks. Conceptual Clarification ». *Social Networks* 1, n° 3 (1978) : 215-39.

Garrison, William L. « Connectivity of the Interstate Highway System ». *Papers and Proceedings of the Regional Science Association* 6 (1960) : 121-37.

Wasserman, Stanley, et Faust, Katherine. *Social Network Analysis. Methods and Applications*. Structural Analysis in the Social Sciences. Cambridge, Massachusetts : Cambridge University Press, 1994.

Les numéros entre crochets dans la version anglaise correspondent à la pagination de l'article paru en 1951. Toutes les notes en bleu dans la traduction française sont du traducteur.

STRUCTURAL PARAMETERS OF COMMUNICATION NETWORKS

COMMITTEE ON MATHEMATICAL BIOLOGY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

Certain parameters are defined which roughly characterize the internal structure of networks. A given network structure uniquely determines the values of the parameters, but the reverse is not true. The parameters therefore define certain classes of networks.

One of the parameters, the *dispersion* $D(S)$ gives an indication of the “compactness” of the internal structure.

Addition theorems and inequalities are derived relating the dispersions of subsystems to the dispersion of the complete structure.

Introduction. The terminology and definitions of this paper are consistent with those used in a previous one (Shimbel, 1951). It is assumed that the reader is familiar with the contents of that paper.

Structural parameters. If we choose any site i in an *adequate* network structure, then, by definition, it is possible to reach any other site j by passing through a chain of directed links which connect them.

In general there may be many different pathways from i to j of equal or unequal length. (Here length is taken to mean the number of links.)

One or more of the pathways from i to j will be the shortest, that is, will contain the least number of links. We shall call this number the distance from i to j and represent it by the symbol $l(i, j)$.

Notice that since the links between the sites are asymmetric, $l(i, j)$ may be different from $l(j, i)$. Also we will take $l(i, j)$ to be zero for all i equal to j .

The function $l(i, j)$, as we would expect of a metric, satisfies the triangular inequality. Thus

$$l(i, j) \leq l(i, k) + l(k, j) \tag{1}$$

In discussing networks we would like to use descriptive terms which would apply to large classes of nets no matter how different they may appear in their structural details. One such classifying property is the average number of links per site. Another is the *solution time* T .

Consider the sum of all the $l(i, j)$ taken over i and j for a given network [502] S . If this sum is small, the network is “compact” in its connections. If this sum is large, the network is highly dispersed.

We shall call this sum $D(S)$, the *dispersion* of S . By definition, then,

$$D(S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l(i, j). \tag{2}$$

Notice that $D(S)$ is a sum on a sum. The first summation on $l(i, j)$ taken over j is also of interest. If this sum is large, then we know that on the average the various sites of the network are far removed from site i . If it is small, then the various sites of S are readily reached from i . We shall call this sum the *accessibility* of S to i and label it $A(i, S)$. By definition, then,

$$A(i, S) = \sum_{j=1}^n l(i, j) \quad (3)$$

and

$$D(S) = \sum_{i=1}^n A(i, S). \quad (4)$$

On the other hand, if we sum $l(i, j)$ over i , then we have a number which tells us how accessible j is to S . We shall label this sum $A^{-1}(j, S)$. Note that

$$D(S) = \sum_{i=1}^n A(i, S) = \sum_{j=1}^n A^{-1}(j, S). \quad (5)$$

So far we have defined four parameters :

1. $l(i, j)$, the distance from i to j ,
2. $A(i, S)$, the accessibility of S to i ,
3. $A^{-1}(i, S)$, the accessibility of i to S , and
4. $D(S)$, the dispersion of S .

The first of these is a relation between any two sites. The second and third are relations between any given site and the rest of the structure. The last is an over-all property of the network.

Although every structure has a unique $D(S)$, the converse is not true. In Figure 1 two different structures are shown, but both have a dispersion of 18.

On the other hand, the totality of all the $l(i, j)$ does uniquely determine the structure of the network. In fact, if we would arrange them in a square array, placing $l(a, b)$ in the a th row and b th column, if we then replaced all of the $l(i, j) \neq 1$ by zeros and put ones along the major diagonal, we would have a structure matrix of the network. The square array $D(S)$ (we shall [503] call it the dispersion array) is therefore easily modified to give the structure matrix. The reverse is somewhat more involved.

In order to obtain the dispersion array $D(S)$ from the structure matrix S , we proceed as follows. First we must find all of the status matrices I_0, I_1, \dots, I_T , where T is the solution time of the network. But from a theorem previously derived (Shimbel, 1951), we know that these successive status matrices are simply the corresponding powers of the structure matrix

$S^0, S^1, S^2, \dots, S^T$. The element in the i th row and j th column of the dispersion array is formed by adding all of the *zeros* in the i th row and j th column of all of the matrices S^0 through S^T .

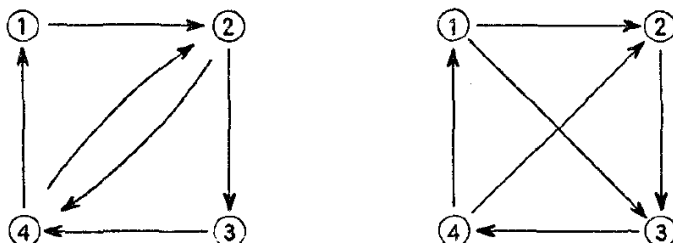


FIGURE 1

That this procedure is valid follows from the fact that $l(i, j)$ is the shortest distance from i to j and the number of zeros in the i th row and j th column of the status matrices is exactly equal to the time it takes for a message to go from i to j . These two numbers are of course equal.

It might be noted that the sum of all of the elements of the dispersion array $D(S)$ is equal to the dispersion of S , namely, $D(S)$.

Connection between networks. Suppose we are given two adequate networks M and N , of order m and n respectively, and that we must join them by a single symmetric link so as to form a single network S of order $(m + n)$. Let us suppose that one end of the symmetric link which joins the networks M and N is a^* (located in M), and the other end is joined to b^* (located in N). Let the sites of M be denoted by a_i , those of N by b_j .

Let us first derive the quantity $A(a_i, S)$, that is, the accessibility of the combined network to a typical member of M . Now since $A(a_i, S)$ is simply the sum of all distances $l(a_i, x)$, with x ranging over the combined network, $A(a_i, S)$ contains $A(a_i, M)$. But in addition to $A(a_i, M)$ we must find the sum of the path lengths from a_i to the sites in N . However any path from a_i to a typical site in N (say, b_k) must pass through a^* and b^* since these are the only two sites linking the component networks M and N .

[504] Since every site in N can be reached by a site in M only by passing through b^* , $A(a_i, S)$ must contain $A(b^*, N)$. For each such path we must pass first from a_i to a^* so that $A(a_i, S)$ also contains $nl(a_i, a^*)$. Finally we must add the integer n to the total to account for the fact that the symmetric link must be crossed exactly n times in order to account for all of the paths from a_i to N . This leads us to our first expression, namely,

$$A(a_i, S) = A(a_i, M) + A(b^*, N) + nl(a_i, a^*) + n. \quad (6)$$

Now if we sum the expression (6) over all a_i we obtain

$$\sum_{i=1}^m A(a_i, S) = D(M) + mA(b^*, N) + nA^{-1}(a^*, M) + mn. \quad (7)$$

Without further argument we can write an expression completely symmetric to (7), namely,

$$\sum_{j=1}^n A(b_j, S) = D(N) + nA(a^*, M) + mA^{-1}(b^*, N) + mn. \quad (8)$$

It can be seen from the definition that $D(S)$ is simply the sum of the left-hand members of expressions (7) and (8).

Thus we obtain

$$D(S) = D(M) + D(N) + m[A(b^*, N) + A^{-1}(b^*, N)] + n[A(a^*, M) + A^{-1}(a^*, M)] + 2mn. \quad (9)$$

Expression (9) relates the dispersion of a network made by joining two networks with a symmetric link to the dispersions of the constituent networks and certain properties of the joining sites.

Mean path length. If we define $\bar{l}(M)$ to be the average $l(i, j)$ taken over all pairs (i, j) , then, by definition,

$$m^2\bar{l}(M) = D(M). \quad (10)$$

This of course assumes that $l(i, i) = 0$ for all i .

Furthermore, if we define $\bar{l}(i, M)$ as the average path from i to any other site in M and $\bar{l}^{-1}(i, M)$ as the average path length from any site in M to i , we have

$$n\bar{l}(i, M) = A(i, M) \quad (11)$$

and

$$n\bar{l}^{-1}(i, M) = A^{-1}(i, M). \quad (12)$$

[505] Now by using expressions (10), (11), and (12) and substituting in equation (9), we obtain

$$(m+n)^2\bar{l}(S) = m^2\bar{l}(M) + n^2\bar{l}(N) + mn[\bar{l}(b^*, N) + \bar{l}^{-1}(b^*, N)] + mn[\bar{l}(a^*, M) + \bar{l}^{-1}(a^*, M)] + 2mn, \quad (13)$$

from which it follows that

$$\bar{l}(S) = \frac{m^2}{(m+n)^2} \bar{l}(M) + \frac{n^2}{(m+n)^2} \bar{l}(N) + \frac{mn}{(m+n)^2} \{ \bar{l}(a^*, M) + \bar{l}(b^*, N) + \bar{l}^{-1}(a^*, M) + \bar{l}^{-1}(b^*, N) \} + \frac{2mn}{(m+n)^2}. \quad (14)$$

Expression (14) gives the mean path in the combined network as a function of the mean paths in the constituent nets, the size of the constituent nets and the particular sites used to join them.

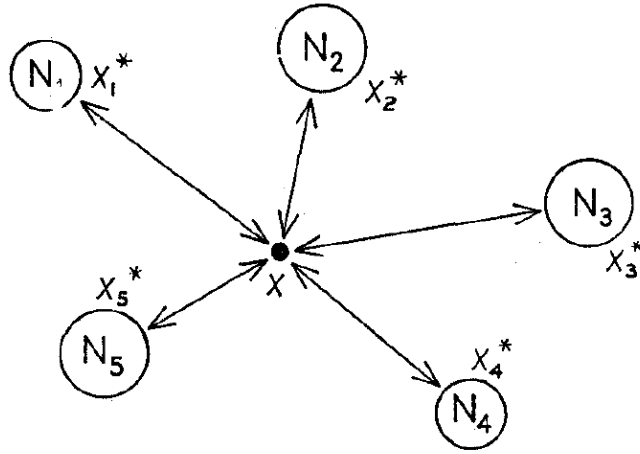


FIGURE 2

If short communication paths are considered desirable (and there are many reasons why they might be so considered), then the *best* way to join two networks by a single symmetric link would be to choose the joining sites in such a way as to minimize the right-hand member of (14).

Note, however, that if the constituent networks M and N are given, then, according to expression (14), the mean path length of the combined network can be minimized only by choosing the sites a^* and b^* in such a way that the *sum* of their mean outgoing *and* mean incoming paths is a minimum.

The central station. Suppose that a group of k adequate networks are joined together by symmetric links to a central station as indicated in Figure 2. Let the i th network be identified by the symbol N_i and let the [506] joining site of the i th network be labeled x_i^* . Also let n_i be the number of sites in N_i . Finally, let the newly formed total network be called C .

By reasoning similar to that which led to expression (9) we can arrive at an analogous equation for the combined network C , namely,

$$\begin{aligned}
D(C) &= \sum_{i=1}^k D(N_i) \\
&+ \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \delta_{ij} n_i [A(x_j, N_j) + A^{-1}(x_j^*, N_j)] \\
&+ 2 \sum_{i=1}^k + 4 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k d_{ij} n_i n_j \\
&+ \sum_{i=1}^k [A(x_1^*, N_i) + A^{-1}(x_i^*, N_i)].
\end{aligned} \tag{15}$$

Now it follows from expression (14) that

$$\begin{aligned}
\bar{l}(C) &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{\left(\sum_{a=1}^k n_a\right)^2} \bar{l}(N_i) \\
&+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{ij} \frac{n_i}{\left(\sum_{a=1}^k n_a\right)^2} [n_j \bar{l}(x_j^*, N_j) + n_j \bar{l}^{-1}(x_j^*, N_j)] \\
&+ 2 \left(\sum_{i=1}^k n_i\right)^{-1} + 4 \left(\sum_{a=1}^k n_a\right)^{-2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{ij} n_i n_j \\
&+ \left(\sum_{a=1}^k n_a\right)^{-2} \sum_{i=1}^k [n_i \bar{l}(x_i^*, N_i) + n_i \bar{l}^{-1}(x_i^*, N_i)].
\end{aligned} \tag{16}$$

In both expressions (15) and (16) the symbol δ_{ij} is the familiar Kronecker delta.

Expression (16) gives the mean path length of the combined network C as a function of the mean path lengths of the constituent networks, their sizes, and the connecting points.

One point of interest is that the minimization of the mean path length of C can be achieved only by the same process as that used in minimizing the mean path length of S . That is, for all of the connecting sites x_i^* , the quantities

$$\bar{l}(x_i^*, N_i) + \bar{l}^{-1}(x_i^*, N_i)$$

must be minimum.

[507] *The triangle inequality.* Returning now to expression (1), note that if we sum over all the sites i of the network S , we obtain the expression

$$A^*(S, j) \leq A^*(S, k) + nl(k, j). \quad (17)$$

Now if we sum expression (17) over the sites j we obtain the inequality

$$D(S) \leq n[A^{-1}(k, S) + A(k, S)]. \quad (18)$$

An alternative form of (17) is

$$\bar{l}(S) \leq \bar{l}^{-1}(k, S) + \bar{l}(k, S). \quad (19)$$

The inequalities (18) and (19) can be easily substituted in equations (9), (14), (15), and (16), thus obtaining inequalities which *contain only the dispersions of the constituent networks and their sizes or only mean path lengths*.

These inequalities would put lower bounds on the dispersions and mean path lengths of the connected systems. These estimates, however, can probably be greatly improved.

Other parameters. The parameters used so far say little or nothing about the amount of “work” done by each site in a communication net.

Suppose that in order for site i to contact site j , site k *must* be used as an intermediate station. Site k in such a network has a certain “responsibility” to sites i and j .

If we count *all* of the *minimum* paths which pass through site k , then we have a measure of the “stress” which site k must undergo during the activity of the network. A vector giving this number for each number of the network would give us a good idea of stress conditions throughout the system.

It would be interesting to investigate this vector for a combined network in a manner similar to the analysis of mean path length and dispersion carried out in the foregoing.

This “stress” vector can be derived directly from the structure matrix but unfortunately the process is not simple.

This investigation is part of the work done under Contract N° AF 19(122)-161 between the U.S. Air Force Cambridge Research Laboratories and the University of Chicago.

LITERATURE

Shimbel, A. 1951. “Applications of Matrix Algebra to Communication Nets.” *Bull. Math. Biophysics*, 13, 165-78.

RECEIVED 2-17-52

PARAMÈTRES STRUCTURELS DES RÉSEAUX DE COMMUNICATION

COMMITTEE ON MATHEMATICAL BIOLOGY

UNIVERSITÉ DE CHICAGO

Certains paramètres sont définis qui caractérisent grossièrement la structure interne des réseaux. Une structure donnée de réseau détermine de manière unique les valeurs des paramètres mais l'inverse n'est pas vrai. Les paramètres définissent donc certaines classes de réseaux.

Un des paramètres, la *dispersion* $D(S)$ donne une indication de la « compacité » de la structure interne.

Des théorèmes d'addition et des inégalités sont dérivés, reliant les dispersions des sous-systèmes à la dispersion de la structure complète.

Introduction. La terminologie et les définitions de cet article sont conformes à celles utilisées dans un article précédent (Shimbel, 1951). Le lecteur est supposé familier avec le contenu de ce article.

Paramètres structurels. Si l'on choisit un site ¹ quelconque i dans une structure de réseau *adéquate* ², alors, par définition, il est possible d'atteindre tout autre site j en passant par une chaîne de liens dirigés ³ qui les relient.

Il peut y avoir de nombreux chemins différents de i à j , de longueur égale ou inégale. (Par longueur, on entend ici le nombre de liens).

Un ou plusieurs des chemins de i à j sera le plus court, c'est-à-dire qu'il contiendra le plus petit nombre de liens. Nous appellerons ce nombre la distance de i à j et nous le représenterons par le symbole $l(i, j)$.

Les liens entre les sites étant asymétriques, $l(i, j)$ peut être différent de $l(j, i)$. De plus, $l(i, j)$ est égal à zéro pour tout i égal à j .

La fonction $l(i, j)$, comme on peut l'attendre d'une métrique, satisfait l'inégalité triangulaire. Ainsi,

$$l(i, j) \leq l(i, k) + l(k, j) \tag{1}$$

En parlant de réseaux, nous aimerions utiliser des termes descriptifs qui s'appliqueraient à de grandes classes de réseaux, même si leurs détails structurels diffèrent. L'une de ces propriétés de classification est le nombre moyen de liens par site ⁴. Une autre est le *temps de solution* T ⁵.

1. Le terme, absent de l'article de 1951, équivaut à sommet.

2. Une matrice adéquate, définie dans l'article de 1951, correspond à un graphe connexe.

3. La terminologie utilisée évoque la théorie des graphes - qui n'est pas citée -, les termes *link* et *directed* n'étaient pas utilisés en 1951.

4. Appelé degré moyen en théorie des graphes.

5. Cet indicateur, mis au point en 1951, correspond à une matrice élevée à la puissance T , T étant le nombre minimum pour que la matrice ne contienne plus de zéro. Correspond au diamètre d'un graphe connexe.

Considérons la somme de tous les $l(i, j)$ dans un réseau S . Si cette somme est faible, le réseau est « compact ». Si cette somme est importante, le réseau est très dispersé.

Nous appellerons cette somme $D(S)$, la *dispersion* de S . Par définition, donc,

$$D(S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l(i, j). \quad (2)$$

$D(S)$ est une somme de sommes. La première somme $l(i, j)$ pour j est également intéressante. Si cette somme est importante, alors on sait qu'en moyenne les différents sites du réseau sont très éloignés du site i . Si elle est faible, alors les différents sites de S sont facilement accessibles à partir de i . Nous appellerons cette somme l'*accessibilité* de i dans S et la nommerons $A(i, S)$ ⁶. Par définition, donc,

$$A(i, S) = \sum_{j=1}^n l(i, j) \quad (3)$$

et

$$D(S) = \sum_{i=1}^n A(i, S). \quad (4)$$

D'autre part, si nous additionnons $l(i, j)$ pour i , nous avons un chiffre qui nous indique dans quelle mesure j est accessible dans S . Nous appellerons cette somme $A^{-1}(j, S)$. Notez que

$$D(S) = \sum_{i=1}^n A(i, S) = \sum_{j=1}^n A^{-1}(j, S). \quad (5)$$

À ce stade, nous avons défini quatre paramètres :

1. $l(i, j)$, la distance de i à j ,
2. $A(i, S)$, l'accessibilité de S depuis i ,
3. $A^{-1}(i, S)$, l'accessibilité de i depuis S et
4. $D(S)$, la dispersion de S .

Le premier est une relation entre deux sites quelconques. Le deuxième et le troisième sont des relations entre un site donné et le reste de la structure. Le dernier est une propriété globale du réseau.

Bien que chaque structure ait un $D(S)$ unique, l'inverse n'est pas vrai. La figure 1 montre deux structures différentes, mais toutes deux ont une dispersion de 18.

6. L'inverse de cette formule correspond à la centralité de proximité (*closeness centrality*).

D'autre part, la totalité de tous les $l(i, j)$ détermine uniquement la structure du réseau. En fait, si nous les disposons dans un tableau carré, en plaçant $l(a, b)$ dans la ligne a et la colonne b , si nous remplaçons ensuite tous les $l(i, j) \neq 1$ par des zéros et que nous plaçons des 1 le long de la diagonale principale, nous aurons une matrice structure⁷ du réseau. Le tableau carré $D(S)$ (nous l'appellerons tableau de dispersion) peut facilement être modifié pour obtenir la matrice structure. L'inverse est un peu plus compliqué.

Afin d'obtenir le tableau de dispersion $D(S)$ à partir de la matrice structure S , nous procédons comme suit. Nous devons d'abord trouver toutes les matrices de statut I_0, I_1, \dots, I_T , où T est le temps de solution du réseau. Mais d'après un théorème précédemment dérivé (Shimbel, 1951), nous savons que ces matrices d'état successives sont simplement les puissances correspondantes de la matrice structure $S^0, S^1, S^2, \dots, S^T$. L'élément de la ligne i et de la colonne j du tableau de dispersion est formé par l'addition de tous les zéros de la ligne i et de la colonne j de toutes les matrices S^0 à S^T .

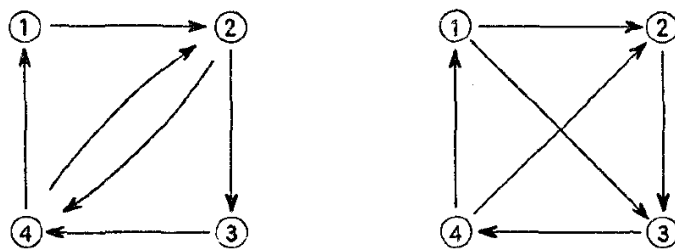


FIGURE 1

La validité de cette procédure découle du fait que $l(i, j)$ est la distance la plus courte entre i et j et que le nombre de zéros dans la ligne i et la colonne j des matrices de statut est exactement égal au temps qu'il faut à un message pour passer de i à j . Ces deux nombres sont bien sûr égaux.

On peut noter que la somme de tous les éléments du tableau de dispersion $D(S)$ est égale à la dispersion de S , à savoir $D(S)$.

Connexion entre réseaux. Supposons qu'on nous donne deux réseaux adéquats M et N , d'ordre respectif m et n , et que nous devons les relier par un seul lien symétrique de manière à former un seul réseau S d'ordre $(m + n)$. Supposons qu'une extrémité du lien symétrique qui relie les réseaux M et N soit a^* (situé dans M), et que l'autre extrémité soit b^* (situé dans N). Les sites de M sont notés a_i , ceux de N b_j .

Dérivons d'abord la quantité $A(a_i, S)$, c'est-à-dire l'accessibilité du réseau combiné à un membre typique⁸ de M . Puisque $A(a_i, S)$ est simplement

7. Comme pour l'article de 1951, je traduis structure matrix par matrice structure; elle correspond à la matrice d'adjacence.

8. Terme équivalent à site.

la somme de toutes les distances $l(a_i, x)$, avec x s'étendant sur le réseau combiné, $A(a_i, S)$ contient $A(a_i, M)$. Mais en plus de $A(a_i, M)$, nous devons trouver la somme des longueurs des chemins entre a_i et les sites de N . Cependant, tout chemin entre a_i et un site typique de N (disons b_k) doit passer par a^* et b^* puisque ce sont les deux seuls sites reliant les composantes M et N ⁹.

Comme chaque site de N ne peut être atteint par un site de M qu'en passant par b^* , $A(a_i, S)$ doit contenir $A(b^*, N)$. Pour chaque chemin de ce type, nous devons d'abord passer de a_i à a^* , de sorte que $A(a_i, S)$ contienne également $nl(a_i, a^*)$. Enfin, nous devons ajouter l'entier n au total pour tenir compte du fait que le lien symétrique doit être traversé exactement n fois afin de prendre en compte tous les chemins de a_i à N . Cela nous amène à notre première expression, à savoir,

$$A(a_i, S) = A(a_i, M) + A(b^*, N) + nl(a_i, a^*) + n. \quad (6)$$

Maintenant, si nous additionnons l'expression (6) pour l'ensemble des a_i , nous obtenons

$$\sum_{i=1}^m A(a_i, S) = D(M) + mA(b^*, N) + nA^{-1}(a^*, M) + mn. \quad (7)$$

Sans argument supplémentaire, nous pouvons écrire une expression complètement symétrique à (7), à savoir,

$$\sum_{j=1}^n A(b_j, S) = D(N) + nA(a^*, M) + mA^{-1}(b^*, N) + mn. \quad (8)$$

On peut voir que $D(S)$ est simplement la somme des termes de gauche des expressions (7) et (8).

Nous obtenons ainsi

$$D(S) = D(M) + D(N) + m[A(b^*, N) + A^{-1}(b^*, N)] \\ + n[A(a^*, M) + A^{-1}(a^*, M)] + 2mn. \quad (9)$$

L'expression (9) met en relation la dispersion d'un réseau faite en joignant deux réseaux avec un lien symétrique avec les dispersions des réseaux constitutifs et certaines propriétés des sites de liaison.

Longueur moyenne du chemin. Si nous définissons $\bar{l}(M)$ comme étant la moyenne des $l(i, j)$ pour toute paire (i, j) , alors, par définition,

$$m^2\bar{l}(M) = D(M). \quad (10)$$

9. Reformulé en théorie des graphes, par construction, a^* et b^* sont des points d'articulation et le lien $\{a^*, b^*\}$ un isthme du graphe S .

Cela suppose bien sûr que $l(i, i) = 0$ pour tout i .

En outre, si nous définissons $\bar{l}(i, M)$ comme le chemin moyen entre i et tout autre site de M et $\bar{l}^{-1}(i, M)$ comme la longueur moyenne du chemin de tout site de M à i , nous avons

$$n\bar{l}(i, M) = A(i, M) \quad (11)$$

et

$$n\bar{l}^{-1}(i, M) = A^{-1}(i, M). \quad (12)$$

Maintenant, en utilisant les expressions (10), (11) et (12) et en les substituant dans l'équation (9), nous obtenons

$$(m+n)^2\bar{l}(S) = m^2\bar{l}(M) + n^2\bar{l}(N) + mn[\bar{l}(b^*, N) + \bar{l}^{-1}(b^*, N)] \\ + mn[\bar{l}(a^*, M) + \bar{l}^{-1}(a^*, M)] + 2mn, \quad (13)$$

d'où

$$\bar{l}(S) = \frac{m^2}{(m+n)^2}\bar{l}(M) + \frac{n^2}{(m+n)^2}\bar{l}(N) + \frac{mn}{(m+n)^2}\{\bar{l}(a^*, M) \\ + \bar{l}(b^*, N) + \bar{l}^{-1}(a^*, M) + \bar{l}^{-1}(b^*, N)\} + \frac{2mn}{(m+n)^2}. \quad (14)$$

L'expression (14) donne le chemin moyen dans le réseau combiné en fonction des chemins moyens dans les réseaux constitutifs, de la taille des réseaux constitutifs et des sites particuliers utilisés pour les lier.

Si des chemins de communication courts sont considérés comme souhaitables (et il y a de nombreuses raisons pour lesquelles ils pourraient l'être), alors la *meilleure* façon de joindre deux réseaux par un seul lien symétrique serait de choisir les sites de liaison de manière à minimiser le terme droit de (14).

Cependant, si les réseaux constitutifs M et N sont donnés, alors, selon l'expression (14), la longueur moyenne du chemin du réseau combiné ne peut être minimisée qu'en choisissant les sites a^* et b^* de telle sorte que la *somme* de leur moyenne de chemins sortants *et* moyens entrants soit un minimum.

Le site central. Supposons qu'un groupe de k réseaux adéquats soit relié par des liaisons symétriques à un site central comme indiqué dans la figure 2. Le réseau i est identifié par le symbole N_i et le site de liaison du réseau i est étiqueté x_i^* . Soit également n_i le nombre de sites de N_i . Le réseau total nouvellement formé est appelé C .

Par un raisonnement similaire à celui qui a conduit à l'expression (9), nous pouvons arriver à une équation analogue pour le réseau combiné C , à savoir,

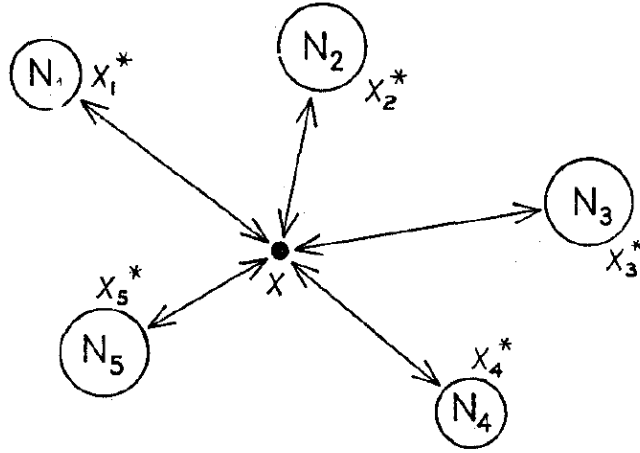


FIGURE 2

$$\begin{aligned}
 D(C) &= \sum_{i=1}^k D(N_i) \\
 &+ \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \delta_{ij} n_i [A(x_j, N_j) + A^{-1}(x_j^*, N_j)] \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^k + 4 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k d_{ij} n_i n_j \\
 &+ \sum_{i=1}^k [A(x_1^*, N_i) + A^{-1}(x_i^*, N_i)].
 \end{aligned} \tag{15}$$

Il découle maintenant de l'expression (14) que

$$\begin{aligned}
\bar{l}(C) &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{\left(\sum_{a=1}^k n_a\right)^2} \bar{l}(N_i) \\
&+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{i,j} \frac{n_i}{\left(\sum_{a=1}^k n_a\right)^2} [n_j \bar{l}(x_j^*, N_j) + n_j \bar{l}^{-1}(x_j^*, N_j)] \\
&+ 2 \left(\sum_{i=1}^k n_i\right)^{-1} + 4 \left(\sum_{a=1}^k n_a\right)^{-2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{ij} n_i n_j \\
&+ \left(\sum_{a=1}^k n_a\right)^{-2} \sum_{i=1}^k [n_i \bar{l}(x_i^*, N_i) + n_i \bar{l}^{-1}(x_i^*, N_i)].
\end{aligned} \tag{16}$$

Dans les deux expressions (15) et (16), le symbole δ_{ij} est le delta de Kronecker bien connu¹⁰.

L'expression (16) donne la longueur moyenne du chemin du réseau combiné C en fonction de la longueur moyenne des chemins des réseaux constitutifs, de leur taille et des points de liaison.

Un point intéressant est que la minimisation de la longueur moyenne du chemin de C ne peut être réalisée que par le même processus que celui utilisé pour minimiser la longueur moyenne du chemin de S . C'est-à-dire que, pour tous les sites de liaison x_i^* , les quantités

$$\bar{l}(x_i^*, N_i) + \bar{l}^{-1}(x_i^*, N_i)$$

doivent être minimales.

L'inégalité triangulaire. Pour revenir à l'expression (1), notons que si on additionne sur l'ensemble des sites i du réseau S , on obtient l'expression

$$A * (S, j) \leq A^*(S, k) + nl(k, j). \tag{17}$$

Maintenant, si nous additionnons l'expression (17) sur les sites j nous obtenons l'inégalité

$$D(S) \leq n[A^{-1}(k, S) + A(k, S)]. \tag{18}$$

Une autre forme de (17) est

$$\bar{l}(S) \leq \bar{l}^{-1}(k, S) + \bar{l}(k, S). \tag{19}$$

10. Le delta de Kronecker, appelé aussi symbole de Kronecker et noté δ , est une fonction de deux variables qui est égale à 1 si celles-ci sont égales, et 0 sinon (source wikipédia).

Les inégalités (18) et (19) peuvent être facilement substituées dans les équations (9), (14), (15) et (16), obtenant ainsi des inégalités qui *contiennent seulement les dispersions des réseaux constitutifs et leurs tailles ou seulement les longueurs moyennes des chemins*.

Ces inégalités limiteraient les dispersions et les longueurs moyennes des chemins des systèmes connectés. Toutefois, ces estimations peuvent probablement être grandement améliorées.

Autres paramètres. Les paramètres utilisés jusqu'à présent ne disent rien ou presque sur la quantité de « travail » effectué par chaque site dans un réseau de communication.

Supposons que pour que le site i puisse contacter le site j , le site k *doive* être utilisé comme site intermédiaire. Le site k dans un tel réseau a une certaine « responsabilité » envers les sites i et j .

Si nous comptons *tous* les chemins de longueur *minimale* qui passent par le site k , nous avons alors une mesure du « stress » que le site k doit subir pendant l'activité du réseau. Un vecteur donnant ce nombre pour chaque site¹¹ du réseau nous donnerait une bonne idée des conditions de stress dans l'ensemble du système¹².

Il serait intéressant d'étudier ce vecteur pour un réseau combiné d'une manière similaire à l'analyse de la longueur moyenne du chemin et de la dispersion effectuée dans ce qui précède.

Ce vecteur « stress » peut être dérivé directement de la matrice structure, mais malheureusement le processus n'est pas simple.

Cette enquête fait partie des travaux effectués dans le cadre du contrat n° AF 19(122)-161 entre les laboratoires de recherche de l'*U.S. Air Force* de Cambridge et l'Université de Chicago.

Référence

Shimbel, A. 1951. "Applications of Matrix Algebra to Communication Nets." *Bull. Math. Biophysics*, 13, 165-78.

Reçu le 17 février 1952

11. Il y a vraisemblablement une coquille dans le texte original où on lit « A vector giving this number for each number of the network ... ».

12. Ces intuitions trouveront une formalisation mathématique *via* la centralité d'intermédiarité. Pour l'anecdote, la seule fois où Shimbel est cité dans le volumineux manuel de Wasserman et Faust, *Social Network Analysis. Methods and Applications*, 1994, c'est page 189 pour introduire la notion d'*Actor Betweenness Centrality* à l'aide de ces deux phrases.

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Parus

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « Alfonso Shimbel, 1951, « [Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « Alfonso Shimbel, 1953, « Structural Parameters of Communication Networks ».