



HAL
open science

Genre des corps surcirculaires

Jean-François Jaulent

► **To cite this version:**

Jean-François Jaulent. Genre des corps surcirculaires. Publications Mathématiques de Besançon : Algèbre et Théorie des Nombres, 1986. hal-03189205

HAL Id: hal-03189205

<https://hal.science/hal-03189205>

Submitted on 2 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Genre des corps surcirculaires*

Jean-François JAULENT

Résumé. Nous montrons que les formules de translation du genre à la Riemann-Hurwitz obtenues par Kuz'min, Kida, Iwasawa, Wingberg et alii pour l'invariant lambda attaché à certains modules d'Iwasawa d'une \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique de corps de nombres sont essentiellement équivalentes. Plus précisément, nous montrons que toutes ces formules, y compris celles énoncées à la Chevalley-Weil en termes de représentations, résultent identiquement pour des raisons purement algébriques du calcul arithmétique d'un quotient de Herbrand convenable qu'il suffit de mener dans le cas cyclique de degré premier.

Abstract. We show that Riemann-Hurwitz-style translation formulas obtained by Kuz'min, Kida, Iwasawa, Wingberg et alii for the lambda invariant attached to certain Iwasawa moduli in cyclotomic \mathbb{Z}_ℓ -extension of number fields are essentially equivalent. More precisely, we prove that all these formulas, including those stated in terms of representations, result identically for purely algebraic reasons from the arithmetic computation of a suitable Herbrand quotient which it suffices to carry out in the cyclic case of prime degree ℓ .

Avertissement Le texte qui suit est la mise au format L^AT_EX de l'article dactylographié original paru aux Publications Mathématiques de Besançon en 1986. Il n'en diffère que par la correction de diverses coquilles, par l'harmonisation de quelques notations avec celles des articles ultérieurs (notamment l'inversion de position de S et T) ainsi que par la numérotation des théorèmes.

Table des matières

Introduction	1
1 Description des paramètres lambda attachés à un corps surcirculaire	3
1.1 Présentation des corps surcirculaires	3
1.2 Les théorèmes de structure de la théorie d'Iwasawa	4
1.3 Le problème de la capitulation	5
1.4 Correspondance entre les divers paramètres lambda	7
2 La formule des genres dans une ℓ-extension de corps surcirculaires	9
2.1 Position du problème	9
2.2 Étude algébrique du cas cyclique de degré premier	10
2.2.1 Modules libres	10
2.2.2 Modules divisibles	10
2.2.3 Énoncé des résultats	11
2.3 Étude arithmétique du cas cyclique de degré premier impair	11
2.3.1 Cohomologie des groupes de classes	12
2.3.2 Cohomologie des groupe de Galois	14
2.3.3 Comparaison des résultats obtenus	16
2.4 Énoncé des résultats	18
Bibliographie	20

*Pub. Math. Besançon n° 2 (1986), 1–40.

Introduction

On sait, depuis les travaux essentiels d'Iwasawa sur les corps cyclotomiques, que l'invariant λ associé aux ℓ -groupes de classes imaginaires dans une tour cyclotomique de corps à conjugaison complexe est, sous réserve de nullité de l'invariant μ , un bon analogue pour la théorie des nombres de la notion classique de genre attachée aux corps de fonctions d'une variable¹.

Un exemple particulièrement frappant de cette analogie est la formule, démontrée par Kida [20], qui relie les invariants λ associés aux ℓ -groupes de classes imaginaires dans une ℓ -extension finie arbitraire de corps à conjugaison complexe et joue dans la théorie d'Iwasawa le rôle de la formule de Riemann-Hurwitz dans celle des corps de fonctions d'une variable. De fait, une formule semblable avait été établie peu avant par Kuz'min [22] pour les invariants λ associés aux ℓ -groupes de ℓ -classes imaginaires de ces corps (i.e. aux quotients des ℓ -groupes de classes imaginaires par leurs sous-groupes respectifs engendrés par les classes des idéaux premiers au-dessus de ℓ)². Ultérieurement Wingberg [25, 26] a montré qu'une formule identique vaut pour les invariants λ associés aux ℓ -groupes de classes infinitésimales³. Plus récemment des démonstrations simplifiées de ces résultats ont été données par D'Mello et Madan [2] dans le cas étudié par Kida ; par Gold et Madan [4] dans celui considéré par Kuz'min.

Auparavant, Iwasawa, remarquant que la formule de Kida se généralise en une identité entre représentations en tout point analogue à la formule de Chevalley-Weil pour les corps de fonctions (cf. [1]), en déduisit une preuve cohomologique du résultat de Kida [14], que Gold et Madan [5] ont récemment simplifiée.

À ces démonstrations algébriques il convient d'ajouter, pour être complet, celles obtenues par voie analytique, qui utilisent la correspondance, établie par Iwasawa, entre invariants λ et μ , et fonctions L ℓ -adiques. La plus ancienne dans cette perspective est incontestablement la formule obtenue par Gras [9] pour les corps abéliens à l'aide des fonctions L_ℓ de Kubota-Leopoldt. La preuve générale de Sinnott [23] s'appuie sur la notion de pseudo-mesure ℓ -adique introduite par Serre. Tout récemment Gold et Madan ont montré que les méthodes de Sinnott s'appliquent encore dans un cadre métacyclique où le degré des extensions n'est plus une puissance de ℓ . Les relations entre fonctions L qu'ils utilisent peuvent être regardées comme la version ℓ -adique des identités complexes étudiées par Brauer et Walter (cf. [15]).

Cela dit, l'objet de cet article est triple :

(i) En premier lieu, nous montrons que les multiples formules évoquées plus haut ne sont que les diverses formulations d'une seule et même identité arithmétique. L'argument essentiel est ici la correspondance, exposée dans [18] et établie dans [17], entre les invariants λ associés aux différents groupes étudiés, qui affirme que tous les paramètres considérés se ramènent, sous les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min, à l'un quelconque d'entre eux au moyen de formules standard.

(ii) Nous établissons ensuite que les deux expressions possibles de cette identité (en termes numériques ou bien en termes de représentations, c'est-à-dire de caractères) sont rigoureusement équivalentes. Ce point résulte d'un argument classique de Herbrand, qui ramène l'étude d'une représentation galoisienne à la détermination des restrictions de son caractère aux sous-groupes cycliques de son groupe de Galois.

(iii) Enfin, nous prouvons que, par une heureuse coïncidence du vocabulaire, l'identité en question relève intégralement de la théorie habituelle des genres pour les corps de nombres. Nous en donnons deux démonstrations algébriques : la première, écrite en termes de groupes de classes, s'obtient simplement par passage à la limite inductive à partir des suites exactes classiques de la théorie des genres ; la seconde, écrite en termes de groupes de Galois, s'obtient par passage à la limite projective. Nous renvoyons à [11] pour une théorie analytique des genres basée sur la notion de pseudo-mesure p -adique.

1. Une extension de corps imaginaires est dite admettre une conjugaison complexe lorsqu'elle provient d'une extension de même degré de leurs sous-corps réels

2. Le résultat de Kuz'min semble, aujourd'hui encore, curieusement méconnu. Il est vrai que la traduction anglaise de son long article aux Izvestija est légèrement postérieure au travail de Kida.

3. En fait, Wingberg travaille sur des groupes de Galois. L'interprétation infinitésimale provient de [16].

1 Description des paramètres lambda attachés à un corps surcirculaire

1.1 Présentation des corps surcirculaires

Le nombre premier ℓ étant fixé une fois pour toutes, nous désignons par \mathbb{Q}_∞ la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique du corps des rationnels. Les invariants que nous nous proposons d'étudier sont attachés à une catégorie bien particulière de corps, stable par extension finie :

Définition 1. *Nous appelons corps surcirculaire (relativement au nombre premier ℓ) toute extension algébrique finie de la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique \mathbb{Q}_∞ du corps des rationnels.*

Remarque. Iwasawa appelle \mathbb{Z}_ℓ -corps les extensions obtenues comme \mathbb{Z}_ℓ -extensions d'un corps de nombres (de degré fini). Cette notion ne nous paraît pas exactement adaptée au problème que nous considérons, puisque les résultats que nous avons en vue supposent explicitement que la \mathbb{Z}_ℓ -extension étudiée soit la cyclotomique.

Tout corps surcirculaire K_∞ peut être regardé d'une infinité de façons comme la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique d'un corps de nombres K . Par exemple, si x est un élément primitif de K_∞ sur \mathbb{Q}_∞ , il est immédiat que $K = \mathbb{Q}[x]$ convient. Quoique non canonique, cette description va nous être utile pour appliquer les théorèmes de structure de la théorie d'Iwasawa.

Notons auparavant qu'en vertu de la loi de décomposition des idéaux premiers dans une tour cyclotomique, le fait que tout corps surcirculaire s'écrive $K\mathbb{Q}_\infty$ pour un corps de nombres convenable K , montre que les places ultramétriques de \mathbb{Q} sont finiment décomposées dans K_∞/\mathbb{Q} . Plus précisément, nous avons le résultat bien connu suivant :

Lemme 2. *Soient K_∞ un corps surcirculaire et K un corps de nombres vérifiant $K_\infty = K\mathbb{Q}_\infty$.*

- (i) *Les places de K au-dessus de ℓ sont presque totalement ramifiées dans K_∞/K ; c'est-à-dire qu'il existe une sous-extension K_{n_ℓ} de K_∞ , de degré fini ℓ^{n_ℓ} sur K , telle que les places au-dessus de ℓ soient totalement ramifiées dans K_∞/K_{n_ℓ} .*
- (ii) *Les autres places ultramétriques sont presque totalement inertes dans K_∞/K ; c'est-à-dire qu'il existe, pour chaque premier \mathfrak{p} de K , une sous-extension $K_{n_\mathfrak{p}}$ de K_∞ , de degré fini $\ell^{n_\mathfrak{p}}$ sur K , telle que les places au-dessus de \mathfrak{p} soient totalement inertes dans $K_\infty/K_{n_\mathfrak{p}}$.*
- (iii) *Les places archimédiennes sont complètement décomposées dans K_∞/K .*

Une conséquence élémentaire mais peu citée de l'assertion (ii) concerne les corps résiduels : si \mathfrak{p} est une place de K au-dessus d'un premier p différent de ℓ , le corps résiduel $F_{\mathfrak{p}_\infty} = \mathcal{O}_\infty/\mathfrak{p}_\infty$ associé à l'une quelconque \mathfrak{p}_∞ des places de K_∞ au-dessus de \mathfrak{p} est la \mathbb{Z}_ℓ -extension (cyclotomique) de $F_{\mathfrak{p}}$. En particulier, dans une ℓ -extension de corps surcirculaires L_∞/K_∞ , il ne peut y avoir d'inertie aux places ultramétriques étrangères à ℓ .

Enfin, il résulte du Lemme que le groupe des diviseurs d'un corps surcirculaire peut se décrire comme suit :

- (i) Les diviseurs construits sur les places au-dessus de ℓ forment un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie :

$$D_{K_\infty}(\ell) = \bigoplus_{\mathfrak{p}_\infty|\ell} \mathfrak{p}_\infty^{\mathbb{Q}}$$

- (ii) Les diviseurs construits sur les places au-dessus d'un premier $p \neq \ell$ forment un \mathbb{Z} -module libre de dimension finie :

$$D_{K_\infty}(p) = \bigoplus_{\mathfrak{p}_\infty|p} \mathfrak{p}_\infty^{\mathbb{Z}}$$

- (iii) Les diviseurs construits sur les places archimédiennes forment un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel qui est soit nul (si K n'admet aucun plongement réel), soit infini dénombrable (si K admet un et donc une infinité de plongements réels) :

$$D_{K_\infty}(\infty) = \bigoplus_{\mathfrak{p}_\infty|\infty} \mathfrak{p}_\infty^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}.$$

Et il vient alors :
$$D_{K_\infty} = D_{K_\infty}(\ell) \oplus \left(\bigoplus_{p \neq \ell} D_{K_\infty}(p) \right) \oplus D_{K_\infty}(\infty).$$

1.2 Les théorèmes de structure de la théorie d'Iwasawa

Reprenons la description des corps surcirculaires donnée plus haut. Partons d'un corps de nombres K (de degré fini sur \mathbb{Q} ; et considérons la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K_∞ de K .

Notons $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$ le groupe de Galois correspondant, identifié à \mathbb{Z}_ℓ par le choix d'un générateur topologique γ ; et $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ l'algèbre d'Iwasawa associée. Écrivons de même K_n l'unique sous-corps de K_∞ cyclique de degré ℓ^n sur K et $\Gamma_n = \text{Gal}(K_\infty/K_n)$ le sous-groupe de Γ associé à K_n par la théorie de Galois.

Supposons choisis deux ensembles finis disjoints S et T de places de \mathbb{Q} et considérons les (pro)- ℓ -groupes $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ de T -classes S -infinitésimales des corps K_n ⁴. Disons simplement ici que $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ est le (pro)- ℓ -groupe de classes de diviseurs qui s'identifie canoniquement, via la théorie du corps de classes, au groupe de Galois $G_T^S(K_n)$ de la (pro)- ℓ -extension abélienne maximale de K_n qui est S -ramifiée et T décomposée (c'est-à-dire non ramifiée aux places étrangères à S , complètement décomposée aux places au-dessus de T , et maximale sous ces deux conditions).

Au sommet de la tour cependant, cet isomorphisme n'a plus lieu et il importe de distinguer entre groupes de classes et groupes de Galois. C'est pourquoi nous posons :

Définition 3. *Étant donné un corps surcirculaire $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ et deux ensembles finis disjoints S et T de places de \mathbb{Q} , nous écrivons :*

(i) $\mathcal{C}_T^S(K_\infty) = \varprojlim \mathcal{C}_T^S(K_n)$ la limite du système projectif des $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ pour la norme arithmétique. Le groupe $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ est un Λ -module compact, canoniquement isomorphe au groupe de Galois $G_T^S(K_\infty)$ de la pro- ℓ -extension abélienne S -ramifiée T -décomposée maximale de K_∞ .

(ii) $\mathcal{C}_T^S(K_\infty) = \varinjlim \mathcal{C}_T^S(K_n)$ la limite du système inductif des $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ pour l'extension des diviseurs. Et nous disons que $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ est le ℓ -groupe des T -classes S -infinitésimales de K_∞ .

Les théorèmes de structure de la théorie d'Iwasawa affirment alors l'existence de trois invariants ρ_T^S , μ_T^S et λ_T^S qui mesurent la croissance avec n des quotients d'exposant ℓ^n respectifs des groupes $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ et d'une constante ν_T^S (éventuellement négative) telle qu'on ait pour $n \gg 0$:

$$|\ell^n \mathcal{C}_T^S(K_n)| = \ell^{x_n}, \text{ avec } x_n = \rho_T^S n \ell^n + \mu_T^S \ell^n + \lambda_T^S n + \nu_T^S.$$

Les paramètres ρ_T^S et μ_T^S , qui dépendent du choix de K , ne sont pas à proprement parler des invariants de K_∞ contrairement à l'invariant λ_T^S , qui est au cœur de cette étude. Précisons cela :

Proposition 4. *Le groupe $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ est un Λ -module de torsion si et seulement si l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) ou bien l'ensemble T ne contient pas la place ℓ ,
- (ii) ou bien T contient ℓ et K est totalement réel.

Dans tous les autres cas, le paramètre ρ_T^S est égal au nombre de places complexes du corps K .

Preuve. Ce résultat étant essentiellement connu, contentons-nous d'une esquisse de démonstration :

(i) Si T ne contient pas ℓ , les groupes $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ sont finis et leur limite projective est donc Λ -module de torsion par un argument classique de théorie d'Iwasawa.

(ii) Si T contient ℓ , les groupes $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ sont infinis et deux cas se présentent :

- Lorsque le corps K n'est pas totalement réel, il possède au moins un conjugué imaginaire et K_∞ admet alors une infinité de \mathbb{Z}_ℓ -extensions indépendantes, lesquelles sont non-ramifiées en dehors de ℓ et T -décomposées (car il ne peut y avoir inertie aux places ultramétrique étrangères à ℓ). Et le groupe $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ n'est donc pas un Λ -module de torsion.
- Lorsque, en revanche, K est totalement réel, K_∞ n'admet qu'un nombre fini de \mathbb{Z}_ℓ -extensions indépendantes ℓ -ramifiées, en vertu de l'exactitude de la conjecture faible de Leopoldt dans les tours cyclotomiques (cf. e.g. [19], Ch. IV, §2). Le groupe $\mathcal{C}_T^{\{\ell\}}(K_\infty)$ est ainsi un Λ -module de torsion. Et il en va de même pour le groupe $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$, puisque les places de K_∞ sont en nombre fini et que le sous-module de $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ engendré par les sous-groupes d'inertie associés est donc un \mathbb{Z}_ℓ -module de type fini.

4. La définition générale précise des groupes \mathcal{C}_T^S est sans importance ici, car nous ne serons intéressés que par des spécialisations très particulières de S et T . Pour la définition et leurs principales propriétés, cf. [19], Ch. II, §1.

Dans les deux cas, le paramètre ρ_T^S est celui du groupe $C_\emptyset^{\{\ell\}}(K_\infty)$ qui correspond à la pro- ℓ -extension abélienne ℓ -ramifiée maximale du corps K_∞ . Et comme il est bien connu que celui-ci est égal au nombre de places complexes du corps K ⁵, la proposition est ainsi établie.

Proposition 5. *Lorsque le corps K contient les racines 2ℓ -ièmes de l'unité, les groupes C_T^S ont même paramètre μ quels que soient les ensembles finis S et T de places de \mathbb{Q} . En particulier, l'égalité $\mu_T^S = 0$ a lieu, en dehors de toute autre hypothèse sur K_∞ , dès que le groupe de Galois $G_{\{\ell\}}^\emptyset(K_\infty[\zeta_{2\ell}])$ associé à la pro- ℓ -extension abélienne non-ramifiée ℓ -décomposée maximale de corps surcirculaire $K_\infty[\zeta_{2\ell}]$ est un \mathbb{Z}_ℓ -module de type fini⁶.*

Preuve. Les résultats de [17] montrent que les groupes $\mathcal{C}(K_\infty) = C_\emptyset^\emptyset(K_\infty)$, $C_{\{\ell\}}(K_\infty) = C_{\{\ell\}}^\emptyset(K_\infty)$ et $C^{\{\ell\}}(K_\infty) = C_\emptyset^{\{\ell\}}(K_\infty)$, qui correspondent respectivement à la pro- ℓ -extension abéliennes non-ramifiée maximale, à celle qui est non-ramifiée et ℓ -décomposée et à celle qui est ℓ -ramifiée, ont même paramètre μ dès lors que le corps K_∞ contient le groupe μ_{ℓ^∞} des racines de l'unité d'ordre ℓ -primaire⁷. La proposition en résulte immédiatement, puisque les places de S ou T qui sont étrangères à ℓ sont sans influence sur le paramètre μ , les une parce qu'il ne peut y avoir d'inertie dans une ℓ -extension de K_∞ en une place étrangère à ℓ , les autres parce le sous-groupe d'inertie d'une telle place dans une pro- ℓ -extension de K_∞ est un \mathbb{Z}_ℓ -module de type fini⁸.

Iwasawa a conjecturé la nullité du paramètre μ attaché au groupe $\mathcal{C}(K_\infty)$. D'après la Proposition 5, cela revient à postuler que l'on a : $\mu_S^T(K_\infty) = 0$ pour tout corps surcirculaire K_∞ quels que soient les ensembles finis S et T de places de \mathbb{Q} . Il en est bien ainsi, par le théorème de Ferrero et Washington, dès que le corps K_∞ est abélien sur \mathbb{Q} (cf. e.g. [24], Th. 7.15). Mais ce n'est plus vrai en général pour les \mathbb{Z}_ℓ -corps non-surcirculaires (cf. [13]).

1.3 Le problème de la capitulation

Nous avons dit plus haut que les valeurs exactes des paramètres ρ_T^S et μ_T^S attachés à un corps surcirculaire K_∞ dépendent du choix du corps de base K . Il n'en est pas de même, en revanche, des conditions $\rho_T^S = 0$ et $\mu_T^S = 0$.

- (i) La première $\rho_T^S = 0$ signifie, en effet, que le \mathbb{Q}_ℓ -espace vectoriel $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} C_T^S(K_\infty)$ construit sur le \mathbb{Z}_ℓ -module $C_T^S(K_\infty)$ est de dimension finie.
- (ii) La seconde $\mu_T^S = 0$ affirme, elle, que le sous-module de \mathbb{Z}_ℓ -torsion de $C_T^S(K_\infty)$ est fini.

Lorsqu'elles sont vérifiées, le groupe $C_T^S(K_\infty)$ est ainsi un \mathbb{Z}_ℓ -module de type fini, somme directe comme tel d'un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de dimension λ_T^S et du sous-groupe de \mathbb{Z}_ℓ -torsion $\mathcal{T}_T^S(K_\infty)$:

$$C_T^S(K_\infty) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{\lambda_T^S} \oplus \mathcal{T}_T^S(K_\infty).$$

Dans ce cas, les résultats de [8] interprètent le sous-groupe $\mathcal{T}_T^S(K_\infty)$ comme la limite projective des noyaux $\text{Cap}_T^S(K_n)$ des applications naturelles j_n des ℓ -groupes de T -classes S -infinitésimales $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ des corps K_n dans leur limite inductive $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$, laquelle est dans les cas considérés ici soit un \mathbb{Z}_ℓ -module divisible de codimension λ_T^S , soit (sous la conjecture de Leopoldt) somme directe d'un tel module et d'un exemplaire de \mathbb{Z}_ℓ :

- (i) Le premier cas $\mathcal{C}_T^S \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\lambda_T^S}$ se produit lorsque l'ensemble S ne contient pas ℓ . Les groupes $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ sont alors finis, et les arguments de [8] donnent directement le résultat.
- (ii) Le second cas $\mathcal{C}_T^S \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\lambda_T^S} \oplus \mathbb{Z}_\ell$ se produit lorsque S contient ℓ . L'hypothèse $\rho_T^S = 0$ implique que les corps K_n sont totalement réels, de sorte que les groupes $\mathcal{C}_T^S(K_n)$ s'écrivent, sous la conjecture de Leopoldt, comme somme directe de leurs sous-modules de torsion respectifs $\mathcal{T}_T^S(K_n)$ et d'un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de dimension 1, isomorphe à $\text{Gal}(K_\infty/K_n)$. Ce dernier module disparaît par passage à la limite projective, mais non par passage à la limite

5. L'égalité $\rho_\emptyset^{\{\ell\}} = c_K$ est, en fait, équivalente à l'exactitude de la conjecture faible de Leopoldt dans K_∞/K .

6. On ne connaît pas de corps surcirculaire dans lequel cette condition est en défaut.

7. Pour une autre démonstration de ce résultat, voir [19], Ch. IV, §2.

8. Cet argument serait en défaut dans un \mathbb{Z}_ℓ -corps non-surcirculaire, où les places de S étrangères à ℓ seraient susceptibles d'être infiniment décomposées.

inductive, de sorte que $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ est bien, comme annoncé, somme directe d'un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de dimension 1 et de la limite inductive des $\mathcal{T}_T^S(K_n)$, qui est un \mathbb{Z}_ℓ -module divisible de codimension λ_T^S par les mêmes arguments que plus haut.

Les groupes $\text{Cap}_T^S(K_n)$ mesurent ce qu'il est convenu d'appeler, depuis Hilbert, une capitulation ; en l'occurrence la T -capitulation S -infinésimale dans l'extension profinie K_∞/K_n . Avouons tout de suite qu'ils sont en général très mal connus et que c'est là un des obstacles essentiel au calcul de l'invariant λ_T^S . La seule information directe que nous possédons sur eux provient de la suite exacte des classes ambiges de Chevalley, en fait de sa généralisation aux pro- ℓ -groupe de T -classes S -infinésimales (cf. [19], Ch. II, §2), qui interprète $\text{Cap}_T^S(K_n)$ comme un sous-groupe du premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma_n, \mathcal{E}_T^S(K_\infty))$ construit sur les T -unités S -infinésimales dans l'extension profinie K_∞/K_n . Faute de mieux, on est alors amené à restreindre l'étude des invariants λ_T^S aux seuls cas où le groupe $H^1(\Gamma_n, \mathcal{E}_T^S(K_\infty))$ est trivial pour des raisons évidentes :

- (i) Lorsque S contient ℓ (auquel cas les hypothèses faites implique que K_∞ est totalement réel), l'exactitude de la conjecture faible de Leopoldt montre que les groupes $\mathcal{E}_T^S(K_n)$ sont ultimement constants⁹, ce qui entraîne banalement $H^1(\Gamma_n, \mathcal{E}_T^S(K_\infty)) = H^1(\Gamma_n, \mathcal{E}_T^S(K_n)) = 1$ d'où $\text{Cap}_T^S(K_n) = 1$, comme attendu.
- (ii) Lorsque, en revanche, S ne contient pas ℓ , la cohomologie des groupes \mathcal{E}_T^S n'est pas connue en général, ce qui amène à faire des hypothèses restrictive sur K_∞ ; dans la pratique, à se restreindre aux seules composantes imaginaires :

Définition 6. *Nous disons qu'une extension algébrique de \mathbb{Q} admet une conjugaison complexe lorsque c'est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel. Un corps surcirculaire à conjugaison complexe est donc une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps surcirculaire totalement réel.*

En présence d'une conjugaison complexe $\bar{\tau}$, il est naturel de dire qu'un module multiplicatif est réel lorsque $\bar{\tau}$ opère trivialement dessus ; qu'il est imaginaire lorsqu'elle opère par passage à l'inverse. Si le nombre premier ℓ est impair, tout \mathbb{Z}_ℓ -module M s'écrit ainsi comme somme directe :

$$M = M^\oplus \oplus M^\ominus = M^{(1+\bar{\tau})/2} \oplus M^{(1-\bar{\tau})/2}$$

de ses composantes réelles et imaginaires. Cependant, si ℓ vaut 2, la même somme $M^\oplus + M^\ominus$ peut n'être ni directe, ni totale. Cela n'interdit pas, bien sûr, de continuer à parler de composantes réelles ou imaginaires, mais requiert à l'occasion quelques précautions. C'est pourquoi, nous supposons dans tout ce qui suit que ℓ est impair.

Ce point acté, l'intérêt de se restreindre aux composantes imaginaires est que dans une tour cyclotomique e corps à conjugaison complexe, il n'est d'autres unités imaginaires que les racines de l'unité présentes dans la tour, lesquelles sont cohomologiquement triviales. Cela suffit à entraîner la nullité des groupes $H^1(\Gamma_n, \mathcal{E}_T^S(K_n))^\ominus$ pour $n \gg 0$, et donc celle de la composante imaginaire $\text{Cap}_T^S(K_\infty)^\ominus$ du sous-groupe de torsion de $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$.

Proposition 7. *Supposons que ℓ soit impair, que le corps surcirculaire K_∞ admette une conjugaison complexe et que les invariants μ_T^S soient nuls.*

- (i) *Si S contient la place ℓ , la composante réelle du groupe $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ est un \mathbb{Z}_ℓ -module libre :*

$$\mathcal{C}_T^S(K_\infty)^\oplus \simeq \mathbb{Z}_\ell^{\lambda_T^S \oplus}.$$

Et si la conjecture de Leopoldt est vérifiée dans K_∞ (pour ℓ), la composante réelle du groupe $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ est la somme directe d'un exemplaire de \mathbb{Z}_ℓ et d'un \mathbb{Z}_ℓ -module divisible :

$$\mathcal{C}_T^S(K_\infty)^\oplus \simeq \mathbb{Z}_\ell \oplus (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\lambda_T^S \oplus}.$$

- (ii) *Si S ne contient pas ℓ , la composante imaginaire de $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ est un \mathbb{Z}_ℓ -module libre :*

$$\mathcal{C}_T^S(K_\infty)^\ominus \simeq \mathbb{Z}_\ell^{\lambda_T^S \ominus}.$$

Et dans ce cas la composante imaginaire de $\mathcal{C}_T^S(K_\infty)$ est un \mathbb{Z}_ℓ -module divisible :

$$\mathcal{C}_T^S(K_\infty)^\ominus \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\lambda_T^S \ominus}.$$

9. La conjecture faible de Leopoldt revient à affirmer que les pro- ℓ -groupes d'unités infinésimales sont ultimement constants dans une \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique. (cf. e.g. [17]). L'extension de ce résultat aux groupes de T -unités S -infinésimales est sans malice.

1.4 Correspondance entre les divers paramètres lambda

Pour voir que les paramètres lambda correspondant aux divers choix de S et de T se ramènent tous à l'un quelconque d'entre eux dans chacun des trois cas fondamentaux évoqués plus haut, nous pouvons nous appuyer sur les résultats de [19] :

- (i) Le cas $S = \emptyset, T = \emptyset$ est celui considéré par Kida [20] : le groupe $\mathcal{C}(K_\infty) = \mathcal{C}_\emptyset^\emptyset(K_\infty)$ s'identifie au groupe de Galois de la pro- ℓ -extension non-ramifiée maximale de K_∞ ; et le ℓ -groupe de classes associé $\mathcal{C}\ell(K_\infty) = \mathcal{C}\ell_\emptyset^\emptyset(K_\infty)$ n'est autre que le ℓ -groupe des classes de diviseurs au sens ordinaire du corps K_∞ . Nous notons $\lambda = \lambda_\emptyset^\emptyset$ l'invariant λ correspondant.
- (ii) Le cas $S = \emptyset, T = \{\ell\}$ est celui considéré par Kuz'min : le groupe $\mathcal{C}^{\{\ell\}}(K_\infty) = \mathcal{C}_\emptyset^{\{\ell\}}(K_\infty)$ s'identifie au groupe de Galois de la pro- ℓ -extension non-ramifiée ℓ -décomposée maximale de K_∞ ; et le ℓ -groupe de classes associé $\mathcal{C}\ell^{\{\ell\}}(K_\infty) = \mathcal{C}\ell_\emptyset^{\{\ell\}}(K_\infty)$ n'est autre que le ℓ -groupe des ℓ -classes de diviseurs du corps K_∞ . Nous notons $\lambda^{\{\ell\}} = \lambda_\emptyset^{\{\ell\}}$ l'invariant λ correspondant.
- (iii) Le cas $S = \{\ell\}, T = \emptyset$ est celui considéré par Wingberg : le groupe $\mathcal{C}_{\{\ell\}}(K_\infty) = \mathcal{C}_{\{\ell\}}^\emptyset(K_\infty)$ s'identifie au groupe de Galois de la pro- ℓ -extension ℓ -ramifiée maximale de K_∞ ; et le ℓ -groupe de classes associé $\mathcal{C}\ell_{\{\ell\}}(K_\infty) = \mathcal{C}\ell_{\{\ell\}}^\emptyset(K_\infty)$ n'est autre que le ℓ -groupe des ℓ -classes de diviseurs du corps K_∞ . Nous notons $\lambda_{\{\ell\}} = \lambda_{\{\ell\}}^\emptyset$ l'invariant λ correspondant.

La correspondance entre ces divers paramètres résulte d'arguments classiques de dualité qui font intervenir les groupes de racines d'ordre ℓ -primaire de l'unité. Le corps K étant supposé donné, nous sommes donc amenés à raisonner dans l'extension cyclotomique $K' = K[\mu_\ell]$ engendrée sur K par les racines ℓ -ièmes de l'unité. Les paramètres à considérer sont ainsi ceux du corps K' .

Du point de vue galoisien, la situation se présente donc comme suit :

- K_∞ est un corps surcirculaire à conjugaison complexe ;
- K_∞^+ est son sous-corps réel ;
- K' est l'extension cyclotomique $K[\mu_\ell]$.

Le groupe de Galois $\Delta = \text{Gal}(K'/K_\infty^+)$ est donc un groupe abélien d'ordre d étranger à ℓ et d'exposant divisant $(\ell - 1)$. Cette dernière condition entraîne que l'algèbre ℓ -adique $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est une algèbre semi-locale, produit direct de d exemplaires de l'anneau \mathbb{Z}_ℓ , indexés par les caractères ℓ -adiques irréductibles du groupe Δ . En particulier, les invariants respectivement attachés à K_∞ ou à K_∞^+ s'interprètent comme les ψ -parties de ceux attachés à K'_∞ , pour des caractères ℓ -adiques convenables ψ de Δ . Par exemple, la composante réelle de K_∞ correspond au caractère unité 1 ; et la composante imaginaire à l'unique caractère $\bar{1}$ de Δ qui relève le caractère d'augmentation de $\text{Gal}(K_\infty/K_\infty^+)$.

Dans ce contexte, il est commode de regarder les invariants lambda non plus comme des entiers mais comme des caractères du groupe Δ :

Convention 8. Soient, comme plus haut ℓ un nombre premier impair, S et T deux ensembles finis disjoints de places de \mathbb{Q} , puis K_∞ un corps surcirculaire à conjugaison complexe, K_∞^+ son sous-corps réel maximal, K'_∞ le corps $K_\infty[\zeta_\ell]$; et Δ le groupe de Galois $\text{Gal}(K'_\infty/K_\infty^+)$.

Par λ_T^S nous entendons désormais le caractère ℓ -adique du groupe Δ construit sur les φ -composantes du groupe $\mathcal{C}_T^S(K'_\infty)$; c'est-à-dire que, pour chaque caractère ℓ -adique irréductible φ de Δ , l'invariant numérique lambda habituel de la φ -composante du $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module $\mathcal{C}_T^S(K'_\infty)$ est donné par le produit scalaire $\langle \lambda_T^S, \varphi \rangle$.

Cela posé, convenons de dire qu'un caractère ℓ -adique irréductible de Δ est réel ou imaginaire suivant qu'il agit trivialement ou non sur ma conjugaison complexée $\bar{\tau}$; et écrivons :

$$\chi = \chi^\oplus + \chi^\ominus$$

la décomposition d'un caractère ℓ -adique en ses composantes réelle et imaginaire. L'application

$$\varphi \mapsto \varphi^* = \omega\varphi^{-1},$$

où ω est le caractère cyclotomique (i.e. le caractère de l'action de Δ sur les racines de l'unité) et φ^{-1} le contragrédient de φ (défini par $\varphi^{-1}(\sigma) = \varphi(\sigma^{-1})$) est une involution du groupe des caractères ℓ -adiques virtuels de Δ appelée, dans la tradition bisontine, *involution du miroir*.

Avec ces notations, les résultats de dualité de [19] s'énoncent comme suit :

Proposition 9. *Dés lors que le corps K'_∞ satisfait les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min, regardés comme caractères du groupe Δ les trois invariants λ , $\lambda_{\{\ell\}}$ et $\lambda^{\{\ell\}}$ (attachés respectivement au ℓ -groupe des classes au sens ordinaire $\mathcal{C}\ell(K'_\infty)$, au ℓ -groupe des ℓ -classes $\mathcal{C}\ell_{\{\ell\}}(K'_\infty)$ et au ℓ -groupe des classes infinitésimales $\mathcal{C}\ell^{\{\ell\}}(K'_\infty)$) sont liés par les identités :*

$$\lambda_{\{\ell\}} = \lambda - \chi_\ell^\circ \quad \text{et} \quad \lambda^{\{\ell\}} = \lambda^* + (\chi_\ell^\circ - 1)^*,$$

où $\chi_\ell = \sum_{\mathfrak{p}^+|\ell} \chi_{\mathfrak{p}^+}$ désigne la somme des induits à Δ des caractères unités des sous-groupes de décomposition dans K'_∞/K_∞^+ des places de K_∞^+ au-dessus de ℓ .

Plus précisément, posant de même $\chi_S = \sum_{\mathfrak{p}^+|S} \chi_{\mathfrak{p}^+}$, nous avons ici :

Théorème 10. *Soient S et T deux ensembles finis disjoints de places de \mathbb{Q} ne contenant pas ℓ , puis $\bar{S} = S \cup \{\ell\}$ et $\bar{T} = T \cup \{\ell\}$. Avec les conventions précédentes et sous les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min, les paramètres lambda attachés aux ℓ -groupes de T -classes S -infinitésimales du corps K'_∞ , regardés comme caractères du groupe Δ , vérifient les identités :*

- (i) $\lambda_T^{S^\circ} = \lambda^\circ + \omega[(\chi_S^\circ - 1) \vee 0]$.
- (ii) $\lambda_T^{S^\circ} = \lambda_{\{\ell\}}^\circ + \omega[(\chi_S^\circ - 1) \vee 0] = (\lambda - \chi_\ell)^\circ + \omega[(\chi_S^\circ - 1) \vee 0]$.
- (iii) $\lambda_T^{\bar{S}^\circ} = \lambda^{\{\ell\}^\circ} + \omega \chi_S^\circ = \lambda^{*\circ} + \omega \chi_S^\circ$.

Preuve. Nous avons supposé ici que ni S ni T ne contiennent ℓ . Il en résulte immédiatement que les places de T sont sans influence sur les paramètres lambda, puisque toute ℓ -extension de corps surcirculaires qui est non-ramifiée au-dessus de T est nécessairement T -décomposée. Reste à déterminer l'influence des places de S , c'est-à-dire la nature, dans chacun des trois groupes de galois $\mathcal{C}_S^T(K'_\infty)$, $\mathcal{C}_S^{\bar{T}}(K'_\infty)$ et $\mathcal{C}_S^{\bar{S}}(K'_\infty)$, du sous-module engendré par les places d'inertie attachés aux places de S .

Prenons appui pour cela sur la théorie du corps de classes : pour chaque place \mathfrak{p}'_∞ de K'_∞ au-dessus de S et tout n assez grand, le ℓ -sous-groupe des unités principales du complété en \mathfrak{p}'_∞ du sous-corps K'_n de K_∞ de degré ℓ^n sur K' s'identifie au ℓ -sous-groupe de Sylow μ'_n du groupe des racines de l'unité de K'_n . La limite projective $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}'_\infty} = \varprojlim \mu'_n$ s'identifie donc au module de Tate

$$\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}.$$

Maintenant, le groupe de Galois Δ permute transitivement les places \mathfrak{p}'_∞ de K'_∞ au-dessus d'une même place \mathfrak{p}^+ de K_∞^+ ; et il opère sur \mathbb{T}_ℓ par le caractère cyclotomique ω . Le produit

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{p}^+} = \prod_{\mathfrak{p}'_\infty|\mathfrak{p}^+} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}'_\infty}$$

est donc un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module projectif qui a pour caractère le translaté par ω de l'induit à Δ du sous-groupe de décomposition de \mathfrak{p}^+ ; c'est à dire le reflet $\chi_{\mathfrak{p}^+}^* = \omega \chi_{\mathfrak{p}^+}^{-1} = \omega \chi_{\mathfrak{p}^+}$ du caractère $\chi_{\mathfrak{p}^+}$.

(i) Le sous-module de $\mathcal{C}_S^T(K'_\infty)^\circ$ engendré par l'image des sous-groupes d'inertie attachés aux places au-dessus de S est le quotient de la composante imaginaire du produit $\mathcal{U}_S = \prod_{\mathfrak{p}^+|S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}^+}$ par l'image des pro- ℓ -groupes d'unités des K'_n . Comme, restreints à leur composante imaginaire, ces groupes se réduisent aux sous-groupes μ'_n , l'image de leur limite projective s'identifie au module de Tate $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}$. Le caractère cherché est donc donné par la différence $(\omega \chi_S)^\circ - \omega$, sauf si le terme de gauche est nul, ce qui ne se produit que lorsque S est vide, auquel cas le caractère cherché est nul. D'où le résultat attendu (où $\alpha \vee \beta$ désigne le plus petit caractère contenant à la fois α et β) : $((\omega \chi_S)^\circ - \omega) \vee 0 = \omega((\chi_S^\circ - 1) \vee 0)$.

(ii) Le cas de $\mathcal{C}_S^{\bar{T}}(K'_\infty)^\circ$ se traite de la même façon, à ceci près qu'il convient de remplacer les unités par les ℓ -unités. Mais, comme sous la conjecture de Gross-Kuz'min, la composante imaginaire de la limite projective des ℓ -unités est identique à celle des unités (cf. [19], Ch. IV, §2), le caractère cherché est le même que précédemment.

(iii) Enfin, pour $\mathcal{C}_S^{\bar{S}}(K'_\infty)^\circ$, ce sont les unités infinitésimales qui remplacent les unités. Sous la conjecture de Leopoldt, elles sont triviales et le caractère cherché est $(\omega \chi_S)^\circ = \omega \chi_S^\circ$.

2 La formule des genres dans une ℓ -extension de corps surcirculaires

2.1 Position du problème

Nous avons vu dans la section 1 que le choix de deux ensembles finis S et T de places de \mathbb{Q} permet d'attacher, sous certaines hypothèses, à chaque corps surcirculaire à conjugaison complexe L_∞ un \mathbb{Z}_ℓ -module libre, disons \mathcal{X}_{L_∞} , de dimension finie, et un \mathbb{Z}_ℓ -module divisible de même codimension¹⁰ \mathcal{X}'_{L_∞} ; à savoir la composante réelle ou imaginaire du groupe de Galois $\mathcal{C}_S^T(L_\infty)$ de la pro- ℓ -extension abélienne T -décomposée S -ramifiée maximale de L_∞ ; et celle du sous-module de \mathbb{Z}_ℓ -torsion du ℓ -groupe $\mathcal{C}_S^T(L_\infty)$ des T -classes S -infinésimales de L_∞ .

Ces deux groupes sont canoniquement des modules galoisiens, de sorte que si L_∞ est une ℓ -extension d'un sous-corps surcirculaire à conjugaison complexe K_∞ , le groupe $G = \text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ opère de façon naturelle sur \mathcal{X}_{L_∞} comme sur \mathcal{X}'_{L_∞} . Nous nous proposons de déterminer le caractère de cette action. Nous allons voir qu'il suffit pour ce faire de savoir le calculer dans un cas très particulier.

L'argument essentiel repose sur l'existence de deux morphismes naturels entre les groupes \mathcal{X}_{L_∞} et \mathcal{X}_{K_∞} d'une part, \mathcal{X}'_{L_∞} et \mathcal{X}'_{K_∞} d'autre part : le premier j_{L_∞/K_∞} (respectivement j'_{L_∞/K_∞}), induit par l'extension des diviseurs, correspond au transfert en termes galoisiens; le second N_{L_∞/K_∞} (respectivement N'_{L_∞/K_∞}), qui provient de la norme arithmétique, correspond à la restriction en termes de groupes de Galois. De plus, les identités entre opérateurs

$$N_{L_\infty/K_\infty} \circ j_{L_\infty/K_\infty} = [L_\infty : K_\infty] \quad \text{et} \quad N'_{L_\infty/K_\infty} \circ j'_{L_\infty/K_\infty} = [L_\infty : K_\infty]$$

montrent que j_{L_∞/K_∞} (resp. j'_{L_∞/K_∞}) est un pseudo-isomorphisme de \mathcal{X}_{K_∞} vers $\mathcal{X}_{L_\infty}^G$ (resp. de \mathcal{X}'_{K_∞} vers $\mathcal{X}'_{L_\infty}^G$). Les identités qui s'ensuivent

$$\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}_{L_\infty}^G = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}_{K_\infty} \quad \text{et} \quad \text{codim}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}_{L_\infty}^G = \text{codim}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}'_{K_\infty}$$

vont nous permettre de dévisser la structure de \mathcal{X}_{L_∞} comme de \mathcal{X}'_{L_∞} . Distinguons trois étapes :

Étape 1 : réduction au cas cyclique

Pour établir que deux représentations galoisiennes sont isomorphes, il suffit de vérifier qu'elles ont même caractère. Or, l'égalité de deux caractères se teste sur les éléments du groupe de Galois. Et la valeur d'un caractère sur un élément est celle de la restriction de ce caractère au sous-groupe cyclique engendré par cet élément. Nous ne restreignons donc pas la généralité de la démonstration, si nous supposons que G est un ℓ -groupe cyclique.

Étape 2 : réduction au calcul du rang

Si G est cyclique d'ordre ℓ^m , la décomposition de l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}_\ell[G]$ s'écrit :

$$\mathbb{Q}_\ell[G] \simeq \bigoplus_{i=0}^m \mathbb{Q}_\ell[\zeta^{\ell^i}];$$

et celle du caractère régulier est donnée par :

$$\text{Rég}_G = \sum_{i=0}^m \psi_i, \text{ avec } \psi_0 = 1_G \text{ et } \deg \psi_i = (\ell - 1)\ell^{i-1} \text{ pour } i = 1, \dots, m.$$

En particulier, tout caractère ℓ -adique χ du groupe G est alors de la forme

$$\chi = \sum_{i=0}^m n_i \psi_i, \text{ avec } (n_0, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^{m+1};$$

c'est-à-dire qu'il est entièrement déterminé par la donnée des $m + 1$ entiers n_0, \dots, n_m .

Cela étant, si M est un $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -module noethérien, et si M_0, \dots, M_m sont les sous-modules fixés par les $m + 1$ sous-groupes G_i de G d'ordres respectifs ℓ^i , les relations

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} M_k = \sum_{i=1}^k n_i \deg \psi_i$$

montrent que la détermination du caractère de M et le calcul des dimensions des M_i sont un seul et même problème.

Étape 3 : réduction au cas cyclique élémentaire

Ce point acquis, il est clair maintenant qu'il nous suffit de donner une démonstration dans le seul cas où le groupe G est cyclique d'ordre premier. En effet, tout ℓ -groupe étant résoluble, une

10. la codimension d'un \mathbb{Z}_ℓ -module divisible est la dimension sur \mathbb{Z}_ℓ de son dual de Pontrjagin.

ℓ -extension (galoisienne) de corps de nombres s'obtient toujours par empilement d'un nombre fini de ℓ -extensions cycliques élémentaires. Si donc nous venons à disposer d'une formule de rang dans le cas cyclique de degré premier, nous tiendrons de ce fait une formule de rang valable dans toute ℓ -extension ; et donc, en fin de compte, une identité sur les caractères dans une telle extension.

Conclusion : schéma de démonstration

Dans tout ce qui suit, nous supposons que G est un ℓ -groupe cyclique de degré premier (impair) et nous raisonnons directement sur les caractères des modules considérés. D'après ce qui précède, les formules obtenues dans ce cas particulier valent en fait pour un ℓ -groupe quelconque. Les équations aux dimensions s'en déduisent simplement en prenant les degrés des caractères.

2.2 Étude algébrique du cas cyclique de degré premier

Supposons donc le groupe G cyclique d'ordre ℓ ; notons Rég_G le caractère de la représentation régulière et $\text{Aug}_G = \text{Rég}_G - 1_G$ celui de la représentation d'augmentation.

Distinguons deux cas, suivant que le $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module étudié \mathcal{X} est libre ou divisible.

2.2.1 Modules libres

Si \mathcal{X} est \mathbb{Z}_ℓ -libre et de type fini, sa décomposition comme somme directe de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules indécomposables est de la forme :

$$\mathcal{X} \simeq \mathbb{Z}_\ell[G]^\alpha \oplus \mathbb{Z}_\ell[\zeta_\ell]^\beta \oplus \mathbb{Z}_\ell^\gamma,$$

avec α, β et γ dans \mathbb{N} . Le caractère qui lui correspond est donc :

$$\chi = \alpha \text{Rég}_G + \beta \text{Aug}_G + \gamma 1_G = (\alpha + \gamma) \text{Rég}_G - (\gamma - \beta) \text{Aug}_G ;$$

et la dimension x de \mathcal{X} est ainsi : $x = \ell(\alpha + \gamma) - (\ell - 1)(\gamma - \beta)$.

Dans l'identité obtenue, les deux indices $\alpha + \gamma$ et $\gamma - \beta$ ont une interprétation simple :

— Le premier est la dimension du sous-module des points fixes : $\alpha + \gamma = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}^G$.

— Le second n'est autre que le quotient de Herbrand dimensionnel $q(\mathcal{X})$ du module \mathcal{X} :

$$\gamma - \beta = h^2(\mathcal{X}) - h^1(\mathcal{X}) \text{ avec } \gamma = h^2(\mathcal{X}) = \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^2(G, \mathcal{X}) \text{ et } \beta = h^1(\mathcal{X}) = \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^1(G, \mathcal{X}).$$

Dans ce cas, nous obtenons donc :

Lemme 11. *Si G est un groupe cyclique d'ordre ℓ , le caractère d'un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module \mathcal{X} noethérien et sans \mathbb{Z}_ℓ -torsion est donné par la formule :*

$$\chi = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}^G \text{Rég}_G - q(\mathcal{X}) \text{Aug}_G,$$

où $q(\mathcal{X})$ représente le quotient de Herbrand dimensionnel de \mathcal{X} . Et $x = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}$ est ainsi :

$$x = \ell \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}^G - (\ell - 1)q(\mathcal{X}).$$

2.2.2 Modules divisibles

Si \mathcal{X}' est \mathbb{Z}_ℓ -divisible et de cotype fini, sa décomposition comme somme directe de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules indécomposables est de la forme :

$$\mathcal{X}' \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell[G]^{\alpha'} \oplus (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell[\zeta_\ell]^{\beta'} \oplus (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\gamma'},$$

avec α', β' et γ' dans \mathbb{N} . Le caractère qui lui correspond est donc :

$$\chi' = \alpha' \text{Rég}_G + \beta' \text{Aug}_G + \gamma' 1_G = (\alpha' + \gamma') \text{Rég}_G + (\beta' - \gamma') \text{Aug}_G ;$$

et la codimension x' de \mathcal{X}' est ainsi : $x' = \ell(\alpha' + \gamma') + (\ell - 1)(\beta' - \gamma')$.

Comme plus haut, les deux indices $\alpha' + \gamma'$ et $\beta' - \gamma'$ ont une interprétation simple :

— Le premier est la codimension du sous-module des points fixes : $\alpha' + \gamma' = \text{codim}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}'^G$.

— Le second n'est autre que le quotient de Herbrand dimensionnel $q(\mathcal{X}')$ du module \mathcal{X}' :

$$\beta' - \gamma' = h^2(\mathcal{X}') - h^1(\mathcal{X}') \text{ avec } \beta' = h^2(\mathcal{X}') = \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^2(G, \mathcal{X}') \text{ et } \gamma' = h^1(\mathcal{X}') = \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^1(G, \mathcal{X}').$$

Dans ce cas, nous obtenons donc :

Lemme 12. *Si G est un groupe cyclique d'ordre ℓ , le caractère d'un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module \mathbb{Z}_ℓ -divisible et de cotype fini \mathcal{X}' est donné par la formule :*

$$\chi' = \text{codim}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}'^G \text{Rég}_G + q(\mathcal{X}') \text{Aug}_G,$$

où $q(\mathcal{X}')$ représente le quotient de Herbrand dimensionnel de \mathcal{X}' . Et $x' = \text{codim}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}$ est ainsi :

$$x' = \ell \text{codim}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}'^G + (\ell - 1)q(\mathcal{X}').$$

Nota. Dans les applications arithmétiques plus loin, on a toujours $x' = x$ et $q(\mathcal{X}') = -q(\mathcal{X})$, de sorte qu'il est possible de raisonner indifféremment sur \mathcal{X} ou sur \mathcal{X}' . Cela ne veut pas dire, en revanche, que l'on a systématiquement $\beta' = \beta$ et $\gamma' = \gamma$, le groupe \mathcal{X} n'étant pas, en général, isomorphe au dual de Pontrjagin de \mathcal{X}' en tant que module galoisien (cf. Scolie 22 infra) ; l'égalité des caractères signifie seulement que cet isomorphisme a lieu après extension des scalaires à \mathbb{Q}_ℓ .

2.2.3 Énoncé des résultats

Dans la section précédente, nous avons convenu de regarder les paramètres λ_S^T associés aux groupes \mathcal{C}_S^T ou \mathcal{C}_S^T attachés à un corps surcirculaire à conjugaison complexe non plus comme des entiers, mais comme des caractères ℓ -adiques d'un groupe abélien fini Δ d'exposant divisant $\ell - 1$.

Pour reformuler dans ce contexte les Lemmes 11 et 12, nous considérons la situation suivante :

- K_∞ est un corps surcirculaire à conjugaison complexe ; K_∞^+ est son sous-corps réel maximal ; $K'_\infty = K_\infty[\mu_\ell]$ est engendré par les racines ℓ -ièmes de l'unité pour un premier impair ℓ .
- L_∞ est une ℓ -extension (galoisienne) de K_∞ qui provient par composition avec K_∞ d'une ℓ -extension totalement réelle L_∞^+ de K_∞^+ ; et L'_∞ est le corps $L_\infty[\mu_\ell]$.
- G est le groupe de Galois $\text{Gal}(L'_\infty/K'_\infty) \simeq \text{Gal}(L_\infty^+/K_\infty^+)$; et Δ est le groupe abélien $\text{Gal}(L'_\infty/L_\infty^+) \simeq \text{Gal}(K'_\infty/K_\infty^+)$.
- Les objets étudiés sont équipés d'une action naturelle de G et de Δ , c'est-à-dire que ce sont des $\mathbb{Z}_\ell[\Delta \times G]$ -modules.

Cela posé, par application des arguments précédents à chacune des composantes Δ -isotypiques de \mathcal{X} et de \mathcal{X}' , nous obtenons immédiatement :

Proposition 13. *Soit G cyclique d'ordre ℓ , Rég_G le caractère de sa représentation régulière et $\text{Aug}_G = \text{Rég}_G - 1_G$ celui de sa représentation d'augmentation. Alors :*

- (i) *Si X est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta \times G]$ -module, de type fini et libre sur \mathbb{Z}_ℓ , son caractère χ est donné par la formule :*

$$\chi = \chi_\Delta(\mathcal{X}^G) \text{Rég}_G - q_\Delta(G, \mathcal{X}) \text{Aug}_G,$$

où $\chi_\Delta(\mathcal{X}^G)$ est le caractère de \mathcal{X}^G regardé comme $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module et $q_\Delta(G, \mathcal{X})$ le Δ -quotient de Herbrand du G -module \mathcal{X} , i.e. l'unique caractère virtuel du groupe Δ à valeurs dans \mathbb{Z}_ℓ qui relève la différence $h_\Delta^2(G, \mathcal{X}) - h_\Delta^1(G, \mathcal{X})$ des caractères respectifs des $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$ -modules $H^2(G, \mathcal{X})$ et $H^1(G, \mathcal{X})$.

- (ii) *Si X' est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta \times G]$ -module, de cotype fini et divisible sur \mathbb{Z}_ℓ , son caractère χ' est donné par la formule :*

$$\chi' = \chi'_\Delta(\mathcal{X}'^G) \text{Rég}_G + q_\Delta(G, \mathcal{X}') \text{Aug}_G,$$

où $\chi'_\Delta(\mathcal{X}'^G)$ et $q_\Delta(G, \mathcal{X}')$ sont définis comme plus haut.

2.3 Étude arithmétique du cas cyclique de degré premier impair

Plaçons-nous dans le contexte arithmétique de la Proposition 13 ci-dessus. Sous réserve de trivialité de l'invariant mu, le \mathbb{Z}_ℓ -module libre qui nous intéresse est la composante imaginaire $\mathcal{X}'_{L'_\infty} = \mathcal{C}'_{L'_\infty}$ du groupe de Galois de la pro- ℓ -extension abélienne non-ramifiée maximale de L'_∞ ; et le \mathbb{Z}_ℓ -module divisible qui lui correspond est la composante imaginaire $\mathcal{X}'_{L'_\infty} = \mathcal{C}'_{L'_\infty}$ du ℓ -groupe des classes de diviseurs (au sens ordinaire) du corps surcirculaire L'_∞ .

Comme plus haut, nous notons $\chi_{L'_\infty}$ le caractère de $\mathcal{X}'_{L'_\infty}$ et $\chi'_{L'_\infty}$ celui de $\mathcal{X}'_{L'_\infty}$, l'un et l'autre regardés comme $\mathbb{Z}_\ell[\Delta \times G]$ -modules. Nous réservons la notation $\lambda_{L'_\infty}$ pour désigner indifféremment le

caractère de $\mathcal{X}'_{L'_\infty}$, regardé comme $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module, ou celui de $\mathcal{X}'_{L'_\infty}$. L'invariant lambda traditionnel d'Iwasawa n'est autre que le degré de $\lambda_{L'_\infty}$; c'est aussi le degré commun de $\chi_{L'_\infty}$ et de $\chi'_{L'_\infty}$.

Cela étant, la Proposition 13 nous dit que pour exprimer $\chi_{L'_\infty}$ et $\chi'_{L'_\infty}$ à partir de $\chi_{K'_\infty} = \chi'_{K'_\infty}$, il suffit de déterminer l'action de Δ sur les groupes de cohomologie $H^1(G, \mathcal{C}^\ominus_{L'_\infty})$ et $H^2(G, \mathcal{C}^\ominus_{L'_\infty})$, d'une part; $H^1(G, \mathcal{C}^\ominus_{L'_\infty})$ et $H^2(G, \mathcal{C}^\ominus_{L'_\infty})$, d'autre part.

2.3.1 Cohomologie des groupes de classes

Lemme 14. *Soient L_∞/K_∞ une ℓ -extension cyclique élémentaire de corps surcirculaires et G son groupe de Galois. Alors :*

(i) *Le groupe multiplicatif L_∞^\times est cohomologiquement trivial; autrement dit, on a :*

$$H^1(G, L_\infty^\times) = 1 \quad \text{et} \quad H^2(G, L_\infty^\times) = 1.$$

(ii) *La cohomologie du groupe des diviseurs est donnée par les formules :*

$$H^1(G, D_{L_\infty}) = 1 \quad \text{et} \quad H^2(G, P_{L_\infty}) \simeq \text{Ram}'_{L_\infty/K_\infty} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}_\infty \nmid \ell} \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{p}_\infty} \mathbb{Z},$$

où $\text{Ram}'_{L_\infty/K_\infty}$ mesure la ramification modérée, \mathfrak{p}_∞ parcourt les places étrangères à ℓ qui se ramifient dans L_∞/K_∞ et $e_{\mathfrak{p}_\infty} = \ell$ est l'indice de ramification.

(iii) *La cohomologie du groupe des diviseurs principaux est duale de celle du groupe des unités :*

$$H^1(G, P_{L_\infty}) \simeq H^2(G, E_{L_\infty}) \quad \text{et} \quad H^2(G, P_{L_\infty}) \simeq H^1(G, E_{L_\infty}).$$

Preuve. La trivialité des groupes de cohomologie $H^1(G, L^\times)$ et $H^1(G, D_{L_\infty})$ est bien connue, du moins pour les corps de nombres : c'est ce qu'il est convenu d'appeler le théorème 90 de Hilbert¹¹. Son extension aux corps surcirculaires ne pose pas de difficulté : il suffit d'écrire L_∞/K_∞ comme limite inductive de sous-extensions de corps de nombres relativement cycliques et de leur appliquer le résultat de Hilbert. Le cas des groupes $H^2(G, L^\times)$ et $H^2(G, D_{L_\infty})$, en revanche, est plus surprenant, puisque, pour les corps de nombres, aucun de ces deux groupes n'est fini.

Cela dit, examinons successivement les diverses assertions du Lemme.

(i) L'identité $H^2(G, L^\times) = 1$ est signalée par Iwasawa ([14], Lem. 5) et vaut de fait pour tout ℓ -groupe G . Lorsque G est cyclique, elle dit simplement que les éléments de K_∞^\times sont normes d'éléments de L_∞^\times (cf. [2], Lem. 3) : $K_\infty^\times = N_{L_\infty/K_\infty}(L_\infty^\times)$.

Et pour l'établir dans ce cas, d'après le principe de Hasse, il suffit de vérifier que tout élément x de K_∞^\times est norme locale partout dans l'extension L_∞/K_∞ . Les places à l'infini ne faisant pas problème, puisque ℓ est pris impair, donnons une place finie \mathfrak{p}_∞ de K_∞ . Écrivons $L_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ et $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ comme réunions croissantes de corps de nombres avec L_n/K_n cyclique de groupe G et $[L_{n+1} : L_n] = [K_{n+1} : K_n] = \ell$; puis fixons n assez grand pour avoir $x \in K_n$ et \mathfrak{p}_∞ non-décomposée dans K_∞/K_n . Prenant alors les symboles de Hasse attachés aux places en dessous de \mathfrak{p}_∞ , nous obtenons :

$$\left(\frac{x, L_{n+1}/K_{n+1}}{\mathfrak{p}_{n+1}} \right) = \left(\frac{N_{n+1/n}(x, L_n/K_n)}{\mathfrak{p}_n} \right) = \left(\frac{x^\ell, L_n/K_n}{\mathfrak{p}_n} \right) = \left(\frac{x, L_n/K_n}{\mathfrak{p}_n} \right)^\ell = 1,$$

et x est norme locale en \mathfrak{p}_{n+1} dans L_{n+1}/K_{n+1} , donc norme locale en \mathfrak{p}_∞ dans L_∞/K_∞ .

(ii) L'identité $H^2(G, D_{L_\infty}) \simeq \text{Ram}'_{L_\infty/K_\infty}$, (où le groupe $\text{Ram}'_{L_\infty/K_\infty}$ est défini par l'énoncé) s'obtient comme suit : G étant cyclique, nous avons l'isomorphisme :

$$H^2(G, D_{L_\infty}) \simeq D_{L_\infty}^G / \nu_{L_\infty/K_\infty}(D_{L_\infty}),$$

où ν_{L_∞/K_∞} désigne la norme algébrique $\sum_{\sigma \in G} \sigma$; ce que nous pouvons encore écrire :

$$H^2(G, D_{L_\infty}) \simeq D_{L_\infty}^G / N_{L_\infty/K_\infty}(D_{L_\infty}),$$

où N_{L_∞/K_∞} désigne cette fois la norme arithmétique, en convenant d'identifier les diviseurs de K_∞ avec leurs étendus à L_∞ . Maintenant, tout diviseur de K_∞ est banalement la norme d'un diviseur de L_∞ : les diviseurs premiers au-dessus de ℓ , parce qu'ils sont ℓ -divisibles; ceux étrangers à ℓ , parce qu'ils ne présentent plus d'inertie. Il vient donc :

11. Bien entendu, dans son traité de 1913, Hilbert n'énonçait pas son résultat sous forme cohomologique, mais seulement dans le cas cyclique : D. Hilbert, *Théorie des corps de nombres algébriques*, Hermann, Paris (1913).

$$H^2(G, D_{L_\infty}) \simeq D_{L_\infty}^G / (D_{K_\infty});$$

et la formule annoncée en résultat, les diviseurs ambiges étant engendrés par les diviseurs ramifiés modulo ceux étendus. Comme les diviseurs au-dessus de ℓ sont ℓ -divisibles, donc étendus, seuls restent les diviseurs ramifiés étrangers à ℓ , ce qui donne bien :

$$H^2(G, D_{L_\infty}) \simeq \sum_{\mathfrak{p}_\infty \nmid \ell} D_{L_\infty}(\mathfrak{p}_\infty)^G / (D_{K_\infty}(\mathfrak{p}_\infty)) \simeq \sum_{\mathfrak{p}_\infty \nmid \ell} \mathbb{Z} / e_{\mathfrak{p}_\infty} \mathbb{Z}.$$

(iii) Enfin, le fait que les groupes d'unités E_{L_∞} et de diviseurs principaux P_{L_∞} soient en dualité cohomologique résulte immédiatement du point (i). La suite exacte courte canonique

$$1 \rightarrow E_{L_\infty} \rightarrow L_\infty^\times \rightarrow P_{L_\infty} \rightarrow 1$$

fournit, en effet, l'hexagone exact, où les sommets supérieur et inférieur sont nuls :

$$\begin{array}{ccccc}
& & H^1(G, L_\infty^\times) & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
H^1(G, E_{L_\infty}) & & & & H^1(G, P_{L_\infty}) \\
\uparrow \simeq & & & & \downarrow \simeq \\
H^2(G, P_{L_\infty}) & & & & H^2(G, E_{L_\infty}) \\
& \nwarrow & & \swarrow & \\
& & H^2(G, L_\infty^\times) & &
\end{array}$$

D'où le résultat annoncé.

Lemme 15. *Supposons maintenant que L_∞/K_∞ est une ℓ -extension cyclique élémentaire de corps surcirculaires à conjugaison complexe ; et notons : $\Delta = \text{Gal}(L'_\infty/L_\infty^+) \simeq \text{Gal}(K'_\infty/K_\infty^+)$. Dans ce cadre, les identités précédentes se traduisent par les isomorphismes de $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$ -modules :*

$$(i) \quad H^1(G, P_{L'_\infty}^\ominus) \simeq H^2(G, E_{L'_\infty}^\ominus) = 1 ; \text{ et } H^2(G, P_{L'_\infty}^\ominus) \simeq H^1(G, E_{L'_\infty}^\ominus) \simeq \mu_\ell.$$

$$(ii) \quad H^1(G, D_{L'_\infty}^\ominus) = 1 ; \text{ et } H^2(G, D_{L'_\infty}^\ominus) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}_\infty^+ \nmid \ell} (\mathbb{Z}/e_{\mathfrak{p}_\infty^+} \mathbb{Z})[\Delta/\Delta_{\mathfrak{p}_\infty^+}].$$

En particulier, les caractères des groupes $H^1(G, P_{L'_\infty}^\ominus)$ et $H^2(G, P_{L'_\infty}^\ominus)$ sont donnés par :

$$h^1(G, P_{L'_\infty}^\ominus) = \omega \quad \text{et} \quad h^2(G, P_{L'_\infty}^\ominus) = \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ \nmid \ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus,$$

Dans ces formules μ_ℓ est le groupe des racines ℓ -ièmes de l'unité et μ_{ℓ_∞} le groupe des racines d'ordre ℓ -primaire ; ω désigne le caractère cyclotomique ; la somme à droite porte sur les places $\mathfrak{p}_\infty^+ \nmid \ell$ de K_∞^+ qui se ramifient dans L_∞^+/K_∞^+ ; et $\chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus$ est la composante imaginaire de l'induit à Δ du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{p}_\infty^+}$ de \mathfrak{p}_∞^+ dans K'_∞/K_∞^+ .

Preuve. En présence d'une conjugaison complexe, les unités imaginaires se réduisent aux seules racine de l'unité. Il vient donc :

$$H^1(G, E_{L'_\infty}^\ominus) = H^1(G, \mu_{\ell_\infty}) = \mu_\ell \quad \text{et} \quad H^2(G, E_{L'_\infty}^\ominus) = H^2(G, \mu_{\ell_\infty}) = \mu_{\ell_\infty} / \mu_{\ell_\infty}^\ell = 1.$$

D'où le résultat annoncé. Les autres assertions sont immédiates en vertu du Lemme 14.

Ce point acquis, nous pouvons énoncer :

Proposition 16. *Dans une ℓ -extension cyclique élémentaire de corps surcirculaires à conjugaison complexe le quotient de Herbrand dimensionnel du ℓ -groupe des classes imaginaires est donné, avec les notations précédentes, par la formule :*

$$q_\Delta(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = h_\Delta^2(G, D_{L'_\infty}^\ominus) - h_\Delta^2(G, P_{L'_\infty}^\ominus) = \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ \nmid \ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus - \omega.$$

Preuve. La suite exacte courte $1 \rightarrow P_{L'_\infty}^\ominus \rightarrow D_{L'_\infty}^\ominus \rightarrow \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus \rightarrow 1$ qui définit le groupe $\mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus$ donne la suite exacte longue de cohomologie, où les termes extrêmes sont nuls en vertu du Lemme 15 :

$$H^1(G, D_{L'_\infty}^\ominus) \rightarrow H^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) \rightarrow H^2(G, P_{L'_\infty}^\ominus) \rightarrow H^2(G, D_{L'_\infty}^\ominus) \rightarrow H^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) \rightarrow H^1(G, P_{L'_\infty}^\ominus).$$

Lemme 17. Avec les notations ci-dessus et sous réserve de nullité de l'invariant μ , le groupe de cohomologie $H^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$ est donné, comme $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module, par l'isomorphisme des genres :

$$H^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) \simeq [\oplus \text{In}_{\mathfrak{p}'_\infty}(\tilde{L}'_\infty/K'_\infty)]^\ominus / \mathfrak{h}_\infty(\mathbb{T}_\ell),$$

où la somme (restreinte à la formule du produit) porte sur les groupes d'inertie des places de K'_∞ dans l'extension abélienne $\tilde{L}'_\infty/K'_\infty$ et l'application \mathfrak{h} est induite par les symboles de Hasse.

En particulier, le caractère de $H^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$ est ainsi :

$$h_\Delta^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = \sum_{\mathfrak{p}'_\infty} \chi_{\mathfrak{p}'_\infty}^\ominus - \delta\omega,$$

$\chi_{\mathfrak{p}'_\infty}^\ominus$ et ω étant définis comme dans le Lemme 15 et l'entier δ valant 0 ou 1 suivant que le générateur topologique ζ de \mathbb{T}_ℓ est norme ou pas dans L'_∞/K'_∞ .

Preuve. Par restriction aux composantes imaginaires, la suite exacte des genres prend la forme :

$$1 \rightarrow \mu_{K'_n} / (\mu_{K'_n} \cap N_{L'_n/K'_n}(L'_n{}^\times) \xrightarrow{h_n} [\bigoplus_{\mathfrak{p}'_n} \text{In}_{\mathfrak{p}'_n}(\tilde{L}'_n/K'_n)]^\ominus \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}'_n/L'_n \hat{K}'_n)^\ominus \rightarrow 1;$$

ce qui nous donne, par passage à la limite projective, la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules finis :

$$1 \rightarrow \mathbb{T}_\ell / \mathbb{T}_\ell^{\delta} \xrightarrow{h_\infty} [\bigoplus_{\mathfrak{p}'_\infty} \text{In}_{\mathfrak{p}'_\infty}(\tilde{L}'_\infty/K'_\infty)]^\ominus \rightarrow \text{Gal}(\tilde{L}'_\infty/L'_\infty \hat{K}'_\infty)^\ominus \rightarrow 1;$$

d'où la première assertion du lemme. Notons que la formule du produit, qui est réelle, disparaît côté imaginaire. L'expression du caractère $h_\Delta^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$ s'en déduit immédiatement, via l'isomorphisme :

$$[\bigoplus_{\mathfrak{p}'_\infty} \text{In}_{\mathfrak{p}'_\infty}(\tilde{L}'_\infty/K'_\infty)]^\ominus \simeq [\bigoplus_{\mathfrak{p}'_\infty} \text{In}_{\mathfrak{p}'_\infty}(L'_\infty/K'_\infty)]^\ominus \simeq [\bigoplus_{\mathfrak{p}'_\infty} \text{In}_{\mathfrak{p}'_\infty}(\tilde{L}'_\infty/K'_\infty)]^\ominus.$$

Lemme 18. Avec les notations du Lemme 17 le caractère du groupe $H^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$ est donné par la formule (où la somme porte sur les places de K_∞^+ au-dessus de ℓ qui se ramifient dans L_∞^+/K_∞^+) :

$$h_\Delta^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = \sum_{\mathfrak{p}'_\infty | \ell} \chi_{\mathfrak{p}'_\infty}^\ominus + (1 - \delta)\omega.$$

Preuve. Regardons le groupe de cohomologie $H^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) \simeq \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\ominus G} / \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\ominus \nu}$ comme limite projective des groupes $H^2(G, \mathcal{C}_{L'_n}^\ominus) \simeq \mathcal{C}_{L'_n}^{\ominus G} / \mathcal{C}_{L'_n}^{\ominus \nu}$. Dans ce dernier quotient $\mathcal{C}_{L'_n}^{\ominus G}$ est la composante imaginaire du sous-groupe ambige de $\mathcal{C}_{L'_n}$; et $\mathcal{C}_{L'_n}^{\ominus \nu} = j_{L'_n/K'_n} \circ N_{L'_n/K'_n}(\mathcal{C}_{L'_n}^\ominus) = \mathcal{C}_{L'_n}^{\text{ét} \ominus}$ celle du sous-groupe de $\mathcal{C}_{L'_n}^\ominus$ engendré par les classes des étendus à L'_n des diviseurs imaginaires de K'_n ¹².

Introduisons le groupe intermédiaire $\mathcal{C}_{L'_n}^{\text{amb} \ominus}$ construit sur les classes des diviseurs imaginaires ambiges (i.e. des diviseurs imaginaires invariants par G); et formons la suite exacte courte (qui est une étape classique de la démonstration par Chevalley de sa formule des classes ambiges) :

$$1 \rightarrow \mathcal{C}_{L'_n}^{\text{amb} \ominus} / \mathcal{C}_{L'_n}^{\text{ét} \ominus} \rightarrow \mathcal{C}_{L'_n}^{\ominus G} / \mathcal{C}_{L'_n}^{\text{ét} \ominus} \rightarrow \mathcal{C}_{L'_n}^{\ominus G} / \mathcal{C}_{L'_n}^{\text{amb} \ominus} \rightarrow 1.$$

Dans celle-ci le groupe à droite s'identifie au quotient ¹³

$$\mathcal{C}_{L'_n}^{\ominus G} / \mathcal{C}_{L'_n}^{\text{amb} \ominus} \simeq (E_{K'_n} \cap N_{L'_n/K'_n}(L'_n{}^\times) / N_{L'_n/K'_n}(E_{L'_n}))^\ominus \simeq \mu_{K'_n} \cap N_{L'_n/K'_n}(L'_n{}^\times) / \mu_{K'_n}^\ell.$$

Et, par passage à la limite projective, nous obtenons donc, avec des notations évidentes, la suite :

$$1 \rightarrow \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{amb} \ominus} / \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{ét} \ominus} \rightarrow \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\ominus G} / \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{ét} \ominus} \rightarrow \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\ominus G} / \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{amb} \ominus} \rightarrow 1,$$

où le quotient à droite fait ainsi apparaître l'entier δ défini plus haut : $\mathcal{C}_{L'_\infty}^{\ominus G} / \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{amb} \ominus} \simeq \mathbb{T}_\ell^\delta / \mathbb{T}_\ell^\ell$.

Reste donc à examiner le quotient à gauche. Aux niveaux finis les diviseurs imaginaires ambiges de L'_n sont engendrés par les diviseurs imaginaires étendus de K'_n et par ceux ramifiés dans L'_n/K'_n . Les ramifiés étrangers à ℓ sont ultimement inertes dans L'_∞/L'_n donc disparaissent dans la limite projective. Le quotient $\mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{amb} \ominus} / \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{ét} \ominus}$ est ainsi engendré par les classes des familles cohérentes construites sur les seules places au-dessus de ℓ qui sont décomposées dans L/L^+ et ramifiées dans L/K . Ce point acquis, fixons n_0 assez grand pour que les diviseurs imaginaires primitifs (i.e. non puissances ℓ -ièmes) de L'_{n_0} construits sur les places au-dessus de ℓ ne soient pas principaux ¹⁴. À

12. Le quotient $\mathcal{C}_{K'_n} / N_{L'_n/K'_n}(\mathcal{C}_{L'_n}) \simeq \mathcal{C}_{K_n^+} / N_{L_n^+/K_n^+}(\mathcal{C}_{L_n^+})$ étant réel, en vertu de l'isomorphisme du corps de classes, la restriction aux composantes imaginaires de la norme arithmétique est un épimorphisme.

13. L'isomorphisme annoncé s'obtient en envoyant la classe d'un diviseur imaginaire \mathfrak{a} représentant une classe de $\mathcal{C}_{L'_n}^{\ominus G}$ sur l'unité $\varepsilon = N_{L'_n/K'_n}(\alpha)$, où α est un générateur imaginaire du diviseur principal $\mathfrak{a}^{\sigma^{-1}}$.

14. L'existence d'un tel n_0 fait l'objet de la Proposition 20 infra.

chaque tel diviseur \mathfrak{a}_{n_0} correspond alors une classe d'ordre ℓ dans le quotient $\mathcal{C}_{L'_{n_0}}^{\text{amb}\ominus}/\mathcal{C}_{L'_{n_0}}^{\text{ét}\ominus}$ et plus généralement dans chacun des quotients $\mathcal{C}_{L'_n}^{\text{amb}\ominus}/\mathcal{C}_{L'_n}^{\text{amb}\ominus}$ pour $n \geq n_0$, à savoir la classe du diviseur $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n_0}^{1/\ell^{n-n_0}}$, donc finalement une classe d'ordre ℓ dans la limite projective $\mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{amb}\ominus}/\mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{ét}\ominus}$.

Il suit de là que le quotient étudié $\mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{amb}\ominus}/\mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{ét}\ominus}$ est un $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$ -module de caractère $\sum_{\mathfrak{p}_\infty^+|\ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus$.

Réunissant les Lemmes 17 et 18, nous obtenons une seconde version de la Proposition 16 :

Proposition 19. *Dans une ℓ -extension cyclique élémentaire de corps surcirculaires à conjugaison complexe le quotient de Herbrand dimensionnel de la composante imaginaire du groupe de Galois $\mathcal{C}_{L'_\infty}$ est donnée, sous réserve de nullité de l'invariant μ , par la formule :*

$$q_\Delta(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = h_\Delta^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) - h_\Delta^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = \omega - \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+|\ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus.$$

2.3.3 Comparaison des résultats obtenus

Remarquons tout d'abord que le rapprochement des Propositions 16 et 19 donne bien l'identité :

$$q_\Delta(G, \mathcal{C}^\ominus) + q_\Delta(G, \mathcal{C}^\ominus) = 0.$$

Cependant le calcul du premier quotient $q_\Delta(G, \mathcal{C}^\ominus)$ vaut en toute généralité, tandis que celui du second $q_\Delta(G, \mathcal{C}^\ominus)$ présuppose la trivialité de l'invariant μ d'Iwasawa, qui garantit la finitude du groupe $H^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$. D'un autre côté, dans le calcul du caractère du groupe $H^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$, nous avons utilisé en outre un résultat sur les diviseurs imaginaires au-dessus de ℓ dans une \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique, qui est une conséquence facile des conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min (cf. [19], Th. IV.2.19), mais dont il peut être intéressant de donner une démonstration autonome :

Proposition 20. *Soient $L'_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L'_n$ la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique associée à un corps de nombres à conjugaison complexe L' contenant les racines ℓ -ièmes de l'unité, et n_0 le rang à partir duquel les places au-dessus de ℓ se ramifient totalement dans la tour. Alors :*

(i) *Pour tout $n \geq n_0$ les ℓ -unités imaginaires du corps L'_n sont les produits des ℓ -unités de L'_{n_0} par les racines de l'unité contenues dans L'_n ; ce qui s'écrit :*

$$E'_{L'_n}{}^\ominus = \mu_{L'_n} E'_{L'_{n_0}}{}^\ominus.$$

(ii) *Les diviseurs imaginaires principaux de L'_n construits sur les places au-dessus de ℓ sont les étendus à L'_n des diviseurs imaginaires principaux de L'_{n_0} construits sur ces mêmes places.*

(iii) *La composante imaginaire $\mathcal{C}_{L'_\infty}^{[\ell]\ominus}$ de la limite inductive des ℓ -sous-groupes de classes des corps L'_n construit sur les classes des places au-dessus de ℓ est un \mathbb{Z}_ℓ -module divisible qui a pour codimension le nombre d de places de L'_∞ au-dessus de ℓ décomposées par la conjugaison complexe.*

(iv) *La composante imaginaire $\mathcal{C}_{L'_\infty}^{[\ell]\ominus}$ de la limite projective est un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de rang d .*

Preuve. Désignons par $D_{L'_\infty}^{[\ell]\ominus}$ le groupe des diviseurs imaginaires de L'_∞ construits sur les places au-dessus de ℓ . D'après la suite exacte courte canonique

$$1 \rightarrow E'_{L'_\infty}{}^\ominus / \mu_{L'_\infty} \rightarrow D_{L'_\infty}^{[\ell]\ominus} \rightarrow \mathcal{C}_{L'_\infty}^{[\ell]\ominus} \rightarrow 1$$

il s'agit de vérifier que le quotient $E'_{L'_n}{}^\ominus / \mu_{L'_n}$ à gauche est constant pour $n \geq n_0$. Or, cela résulte d'un argument classique de théorie de Kummer (cf. [19], Prop. I.2.2) : l'égalité des rangs montre que $E'_{L'_n}{}^\ominus / \mu_{L'_n}$ est d'indice fini dans $E'_{L'_{n+1}}{}^\ominus / \mu_{L'_{n+1}}$ pour $n \geq n_0$. Cela étant, si x est un élément de $E'_{L'_n}{}^\ominus$ dont la classe modulo $\mu_{L'_n}$ est une puissance ℓ -ième dans $E'_{L'_{n+1}}{}^\ominus / \mu_{L'_{n+1}}$, nous avons $x = \zeta y^\ell$ avec $\zeta \in \mu_{L'_{n+1}}$ et $y \in E'_{L'_{n+1}}{}^\ominus$, puis, en prenant la norme $N = N_{L'_{n+1}/L'_n}$, l'égalité $x^\ell = \zeta^\ell N(y)^\ell$, i.e. $x/\zeta N(y) \in \mu_\ell \subset L'_n$; donc $\zeta \in L'_n$, et finalement : $\zeta \in \mu_{L'_n} = \mu_{L'_{n+1}}^\ell$. Écrivant donc $\zeta = \xi^\ell$, et $z = \xi y$, nous obtenons $x = z^\ell$, donc $L'_n[\sqrt[\ell]{x}] = L'_n[z] \subset L'_{n+1}$; et la théorie de Kummer nous dit que x est le produit dans L'_n d'une puissance ℓ -ième et d'une racine de l'unité. Et $E'_{L'_n}{}^\ominus / \mu_{L'_n}$ coïncide avec $E'_{L'_{n+1}}{}^\ominus / \mu_{L'_{n+1}}$ pour $n \geq n_0$. La Proposition en découle.

Revenons maintenant sur le quotient $q_\Delta(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & H^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) & \longrightarrow & H^2(G, P_{L'_\infty}^\ominus) & \longrightarrow & H^2(G, D_{L'_\infty}^\ominus) & \longrightarrow & H^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
1 & \longrightarrow & \text{Cap}_{L'_\infty/K'_\infty}^\ominus & \longrightarrow & H^1(G, \mu_\ell) & \longrightarrow & \text{Ram}'_{L'_\infty/K'_\infty}{}^\ominus & \longrightarrow & \mathcal{C}_{L'_\infty}^{G, \ominus} / \mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{ét}, \ominus} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

l'isomorphisme à gauche, induit par la norme arithmétique $N_{L'_\infty/K'_\infty}$, identifie le groupe $H^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$ à la capitulation imaginaire $\text{Cap}_{L'_\infty/K'_\infty}^\ominus$ dans L'_∞/K'_∞ . Comme le groupe $H^1(G, \mu_\ell) \simeq \mu_\ell$ est un $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$ -module de caractère ω , deux cas peuvent se produire :

- ou bien $\text{Cap}_{L'_\infty/K'_\infty}^\ominus = 1$ et $|H^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)| = |\text{Ram}'_{L'_\infty/K'_\infty}{}^\ominus|/\ell$;
- ou bien $\text{Cap}_{L'_\infty/K'_\infty}^\ominus \simeq H^1(G, \mu_\ell)$ et $H^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) \simeq \text{Ram}'_{L'_\infty/K'_\infty}{}^\ominus$.

Le premier cas nécessite que le groupe $\text{Ram}'_{L'_\infty/K'_\infty}{}^\ominus$ soit non-trivial, i.e. qu'il existe au moins une place \mathfrak{p}_∞^+ étrangère à ℓ , décomposée dans LK_∞/K_∞^+ qui se ramifie dans L_∞^+/K_∞^+ . Le second cas implique, en revanche, que l'extension $L_\infty^+/K_\infty^+ \delta_\infty$ soit ℓ -ramifiée : en effet, si \mathfrak{a} est un diviseur de K'_∞ représentant une classe de $\mathcal{C}_{K'_\infty}^\ominus$ qui capitule dans $\mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus$, son étendu à L'_∞ est un diviseur principal (α) engendré par un élément imaginaire α qui vérifie $(\alpha)^{\sigma-1} = 1$, i.e. $\alpha^{\sigma-1} \in \mu_\ell$. Posant $a = \alpha^\ell$, nous obtenons donc $L'_\infty = K'_\infty[\sqrt[\ell]{a}]$, avec $(a) = \mathfrak{a}^\ell$, de sorte que l'extension L'_∞/K'_∞ est ℓ -ramifiée. L'ensemble des résultats précédents peut donc se résumer comme suit :

Théorème 21. *Soient L_∞/K_∞ une ℓ -extension cyclique élémentaire de corps surcirculaires à conjugaison complexe, G son groupe de Galois, L_∞^+/K_∞^+ la sous-extension réelle maximale et $L'_\infty/K'_\infty = L_\infty[\zeta_\ell]/K_\infty[\zeta_\ell]$ l'extension obtenue en adjoignant les racines ℓ -ièmes de l'unité, Δ enfin le groupe abélien $\text{Gal}(L'_\infty/L_\infty^+) \simeq \text{Gal}(K'_\infty/K_\infty^+)$. Alors, sous réserve de nullité de l'invariant μ , les caractères de Δ attachés aux groupes de cohomologie relatifs à l'action de G sur les composantes imaginaires du ℓ -groupe des classes de diviseurs $\mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus$ et du groupe de Galois $\mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus$ de la pro- ℓ -extension abélienne non-ramifiée maximale de L'_∞ sont donnés par les formules :*

$$\begin{array}{ll}
(i) \quad h_\Delta^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = \delta' \omega & (i)' \quad h_\Delta^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ | \ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus + (1 - \delta) \omega \\
(ii) \quad h_\Delta^2(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ | \ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus + (1 - \delta') \omega & (ii)' \quad h_\Delta^1(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus - \delta \omega
\end{array}$$

Dans celles-ci, ω est le caractère du module de Tate $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n} = \zeta^{\mathbb{Z}_\ell}$; l'indice δ vaut 0 ou 1 suivant que ζ est norme ou non dans l'extension L'_∞/K'_∞ ; l'indice δ' vaut 0 ou 1 suivant qu'il existe ou non une place de K_∞^+ décomposée dans K_∞/K_∞^+ qui se ramifie modérément dans L_∞^+/K_∞^+ ; et $\chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus$ désigne la composante imaginaire de l'induit à Δ du caractère unité du sous-groupe de décomposition de \mathfrak{p}_∞^+ dans l'extension abélienne K'_∞/K_∞^+ .

Scolie 22. *Sous les hypothèses du Théorème 21, l'identité $h_\Delta^i(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) = h_\Delta^{i+1}(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$ a lieu exactement dans les deux cas suivants :*

- (i) *Dans le cas modéré, i.e. lorsque toutes les places de K_∞^+ , décomposées dans l'extension quadratique K_∞/K_∞^+ et ramifiées dans l'extension cyclique L_∞/K_∞ , sont étrangères à ℓ .*
- (ii) *Dans un cas sauvage exceptionnel, lorsqu'il existe exactement une place \mathfrak{p}_∞^+ de K_∞^+ décomposée dans K_∞/K_∞^+ , qui se ramifie dans l'extension L_∞/K_∞ : si \mathfrak{p}_∞^+ est au-dessus de ℓ , sous réserve qu'il y ait exactement deux places \mathfrak{p}'_∞ et $\bar{\mathfrak{p}}'_\infty$ de K'_∞ au-dessus de \mathfrak{p}_∞^+ et que ζ ne soit norme locale dans L'_∞/K'_∞ en aucune d'elles.*

Preuve. Écrivons Σ pour $\sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ | \ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus$. D'après le théorème 21, les cohomologies de $\mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus$ et de $\mathcal{C}_{L'_\infty}^{\text{ét}, \ominus}$ sont duales lorsqu'on a : $\Sigma + (1 - \delta - \delta')\omega = 0$, i.e. $\Sigma = 0$ et $\delta + \delta' = 1$ ou bien $\Sigma = \omega$ et $\delta = \delta' = 1$.

Dans le premier cas ($\Sigma = 0$), nous disons que la ramification imaginaire est modérée. Suivant qu'il existe ou non une place \mathfrak{p}_∞^+ de K_∞^+ , décomposée dans K_∞/K_∞^+ qui se ramifie modérément dans L_∞^+/K_∞^+ , nous avons alors $\delta' = 1$ et $\delta = 0$ ou $\delta' = 0$ et $\delta = 1$ ¹⁵ donc toujours : $\delta + \delta' = 1$.

15. Conformément au principe de Hasse, la condition $\delta = 0$ se lit localement. Elle est automatiquement vérifiée

2.4 Énoncé des résultats

Revenons maintenant au problème posé dans l'introduction : désignons par L_∞/K_∞ une ℓ -extension de corps surcirculaires à conjugaison complexe ; notons G son groupe de Galois, L_∞^+/K_∞^+ la sous-extension réelle maximale et $L'_\infty/K'_\infty = L_\infty[\zeta_\ell]/K_\infty[\zeta_\ell]$ l'extension obtenue en adjoignant les racines ℓ -ièmes de l'unité, Δ enfin le groupe abélien $\text{Gal}(L'_\infty/L_\infty^+) \simeq \text{Gal}(K'_\infty/K_\infty^+)$.

Pour chaque sous-extension M'_∞/K'_∞ de L'_∞/K'_∞ , nous savons par la Proposition 7, sous réserve de nullité de l'invariant mu, que la composante imaginaire $\mathcal{C}_{M'_\infty}^\ominus$ du groupe de Galois de la pro- ℓ -extension abélienne non-ramifiée maximale de M'_∞ est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module projectif dont nous avons convenu d'écrire $\lambda_{M'_\infty}^\ominus$ le caractère (de sorte que c'est son degré $\deg \lambda_{M'_\infty}^\ominus$ qui désigne l'invariant lambda d'Iwasawa de $\mathcal{C}_{M'_\infty}^\ominus$). Si, en outre, M'_∞/K'_∞ est galoisienne, le groupe $\mathcal{C}_{M'_\infty}^\ominus$ est muni d'une action naturelle de G et nous écrivons $\chi_{M'_\infty}^\ominus$ le caractère de $\mathcal{C}_{M'_\infty}^\ominus$ regardé comme $\Delta \times G$ -module.

Notre propos est d'exprimer $\chi_{L'_\infty}^\ominus$ à partir de $\chi_{K'_\infty}^\ominus$.

Restreignons-nous un instant au cas élémentaire où le groupe G est cyclique d'ordre premier ℓ . Dans ce cas, la Proposition 13 nous donne l'identité :

$$\chi_{L'_\infty}^\ominus = \chi_{K'_\infty}^\ominus \text{Rég}_G - q(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus) \text{Aug}_G$$

où Rég_G est le caractère régulier de G et Aug_G le caractère d'augmentation. Quant au quotient de Herbrand dimensionnel $q(G, \mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus)$, il est donné par la Proposition 19 : il est égal à la différence

$$\omega - \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ \nmid \ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus$$

où la sommation porte sur les places \mathfrak{p}_∞^+ de K_∞^+ étrangères à ℓ qui se ramifient dans L_∞^+/K_∞^+ .

Nous pouvons donc réécrire l'identité précédente sous la forme :

$$\chi_{L'_\infty}^\ominus - \omega = (\chi_{K'_\infty}^\ominus - \omega) \text{Rég}_G + \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ \nmid \ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus \rho_{\mathfrak{p}_\infty^+}$$

en convenant de désigner par $\rho_{\mathfrak{p}_\infty^+}$ l'induit à $G \simeq \text{Gal}(L_\infty/K_\infty^+)$ du caractère d'augmentation du sous-groupe de décomposition $G_{\mathfrak{p}_\infty^+}$ de \mathfrak{p}_∞^+ dans L_∞^+/K_∞^+ . Dans cette dernière formulation, la sommation à droite porte indifféremment sur les seules places étrangères à ℓ ramifiées dans L_∞^+/K_∞^+ ou sur l'ensemble des places de K_∞^+ étrangères à ℓ , puisque le caractère $\rho_{\mathfrak{p}_\infty^+}$, égal à Aug_G lorsque \mathfrak{p}_∞^+ se ramifie dans L_∞^+/K_∞^+ , est nul dans le cas contraire faute d'inertie aux places étrangères à ℓ .

Maintenant, comme expliqué au début de cette section, la formule ainsi obtenue, établie dans le cas où G est d'ordre ℓ , vaut en fait pour un ℓ -groupe arbitraire. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 23. *Soient L_∞/K_∞ une ℓ -extension cyclique élémentaire de corps surcirculaires à conjugaison complexe, G son groupe de Galois, L_∞^+/K_∞^+ la sous-extension réelle maximale et $L'_\infty/K'_\infty = L_\infty[\zeta_\ell]/K_\infty[\zeta_\ell]$ l'extension obtenue en adjoignant les racines ℓ -ièmes de l'unité, Δ enfin le groupe abélien $\text{Gal}(L'_\infty/L_\infty^+) \simeq \text{Gal}(K'_\infty/K_\infty^+)$. Alors, sous réserve de nullité de l'invariant mu d'Iwasawa dans L'_∞ , les composantes imaginaires respectives $\mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus$ et $\mathcal{C}_{K'_\infty}^\ominus$ des groupes de Galois des pro- ℓ -extensions abéliennes non-ramifiées maximales de L'_∞ et K'_∞ sont des $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules projectifs et leurs caractères $\chi_{L'_\infty}^\ominus$ et $\chi_{K'_\infty}^\ominus$ comme $\Delta \times G$ -modules sont liés par l'identité :*

$$\chi_{L'_\infty}^\ominus - \omega = (\chi_{K'_\infty}^\ominus - \omega) \text{Rég}_G + \sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ \nmid \ell} \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus \rho_{\mathfrak{p}_\infty^+}.$$

Dans celle-ci, ω est le caractère cyclotomique ; Rég_G est le caractère régulier de G ; la sommation porte sur les places \mathfrak{p}_∞^+ de K_∞^+ qui sont étrangères à ℓ ; le caractère $\chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}^\ominus$ est l'induit à Δ du caractère unité du sous-groupe de décomposition $\Delta_{\chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}}$ de \mathfrak{p}_∞^+ dans K'_∞/K_∞^+ et $\rho_{\mathfrak{p}_\infty^+}$ est l'induit à G du caractère d'augmentation du sous-groupe de décomposition de \mathfrak{p}_∞^+ dans L_∞^+/K_∞^+ .

Corollaire 24 (Formule d'Iwasawa). *Notons $\Delta' = \text{Gal}(L'_\infty/L_\infty) \simeq \text{Gal}(K'_\infty/K_\infty)$. Avec les notations du Théorème 23, les caractères respectifs des groupes $\mathcal{C}_{L'_\infty}^\ominus$ et $\mathcal{C}_{K'_\infty}^\ominus$ pour leur structure de G -module sont liés par l'identité :*

$$\chi_{L'_\infty}^\ominus - \langle \omega, 1_{\Delta'} \rangle 1_G = (\chi_{K'_\infty}^\ominus - \langle \omega, 1_{\Delta'} \rangle 1_G) \text{Rég}_G + \left(\sum_{\mathfrak{p}_\infty^+ \nmid \ell} \langle \chi_{\mathfrak{p}_\infty^+}, 1_{\Delta'} \rangle \right) \rho_{\mathfrak{p}_\infty^+}.$$

en l'absence de place ramifiée. En revanche, en présence d'une place modérément ramifiée, le corps de classes local montre que les racines primitives de l'unité ne peuvent être normes, ce qui donne $\delta = 1$.

Dans celle-ci, $1_{\Delta'}^{\Delta}$, est l'induit à Δ du caractère unité de Δ' ; la quantité $\langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle$ vaut 1 si K_{∞} contient les racines ℓ -ièmes de l'unité et 0 sinon ; et la quantité $\langle \chi_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle$ vaut 1 ou 0 selon que la place \mathfrak{p}_{∞}^+ est décomposée ou non par la conjugaison complexe.

Preuve. Les invariants attachés aux corps L_{∞} et K_{∞} s'obtiennent à partir de ceux respectivement attachés à L'_{∞} et K'_{∞} par projection au moyen de l'idempotent associé au caractère $1_{\Delta'}^{\Delta}$.

Corollaire 25 (Formule de Kida). *Sous les hypothèses du Théorème 23, les invariants lambda d'Iwasawa des groupes $\mathcal{C}_{L'_{\infty}}^{\circ}$ et $\mathcal{C}_{K'_{\infty}}^{\circ}$ sont liés par l'identité :*

$$\lambda_{L'_{\infty}}^{\circ} - \langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle = (\lambda_{K'_{\infty}}^{\circ} - \langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle)[L_{\infty} : K_{\infty}] + \sum_{\mathfrak{p}_{\infty}^+ | \ell} (e_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} - 1),$$

où la sommation porte sur les places \mathfrak{p}_{∞}^+ de L_{∞}^+ modérément ramifiées dans $L_{\infty}^+/K_{\infty}^+$ et décomposées dans L_{∞}/L_{∞}^+ ; et $e_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}$ est l'indice de ramification de \mathfrak{p}_{∞}^+ dans $L_{\infty}^+/K_{\infty}^+$.

Corollaire 26 (Formule de Wingberg). *Sous les mêmes hypothèses, les invariants lambda des ℓ -groupes de classes infinitésimales des corps totalement réels L_{∞}^+ et K_{∞}^+ sont liés, sous la conjecture de Leopoldt, par l'identité :*

$$\lambda_{\{\ell\} L_{\infty}^+} - \langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle = (\lambda_{\{\ell\} K_{\infty}^+} - \langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle)[L_{\infty} : K_{\infty}] + \sum_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} (e_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} - 1).$$

Preuve. Prenant les degrés des divers caractères dans la formule d'Iwasawa, on obtient la formule de Kida. D'après la Proposition 7, la même identité vaut sous la conjecture de Leopoldt pour les invariants $\lambda_{\{\ell\}}$ en vertu de l'égalité $\lambda_{\{\ell\}}^{\circ} = \lambda^{\circ}$; ce qui redonne la formule de Wingberg.

Revenons enfin sur le Théorème 23 et remplaçons $\mathcal{C}_{L'_{\infty}}$ par le groupe de Galois $\tilde{\mathcal{C}}_{L'_{\infty}}$ de la pro- ℓ -extension abélienne non-ramifiée ℓ -décomposée du corps L'_{∞} ; regardons-le comme $\Delta \times G$ -module et notons $\tilde{\chi}_{L'_{\infty}}^{\circ}$ le caractère de sa composante imaginaire. Par le corps de classes, $\tilde{\mathcal{C}}_{L'_{\infty}}$ s'identifie à la limite projective $\varprojlim \mathcal{C}_{L'_n}^{\ell}$ des ℓ -groupes de ℓ -classes des corps L'_n , autrement dit au quotient $\mathcal{C}_{L'_{\infty}}/\mathcal{C}_{L'_{\infty}}^{[\ell]}$ de $\mathcal{C}_{L'_{\infty}}$ par le sous-groupe $\mathcal{C}_{L'_{\infty}}^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}_{L'_n}^{[\ell]}$ construit sur les classes des diviseurs au-dessus de ℓ . D'après la Proposition 20, les caractères χ° et $\tilde{\chi}^{\circ}$ sont donc liés par les identités :

$$\chi_{K'_{\infty}}^{\circ} = \tilde{\chi}_{K'_{\infty}}^{\circ} + \sum_{\mathfrak{p}_{\infty}^+ | \ell} \chi_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}^{\circ} 1_G \quad \text{et} \quad \chi_{L'_{\infty}}^{\circ} = \tilde{\chi}_{L'_{\infty}}^{\circ} + \sum_{\mathfrak{p}_{\infty}^+ | \ell} \chi_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}^{\circ} 1_{G_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}^G},$$

où $1_{G_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}^G}$ désigne l'induit à G du caractère unité du sous-groupe de décomposition $G_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}$ dans $L_{\infty}^+/K_{\infty}^+$ de l'une quelconque \mathfrak{p}_{∞}^+ des places de L_{∞}^+ au-dessus de \mathfrak{p}_{∞}^+ .

Par différence, nous avons donc :

$$\chi_{L'_{\infty}}^{\circ} - \chi_{K'_{\infty}}^{\circ} \text{Rég}_G = \tilde{\chi}_{L'_{\infty}}^{\circ} - \tilde{\chi}_{K'_{\infty}}^{\circ} \text{Rég}_G + \sum_{\mathfrak{p}_{\infty}^+ | \ell} \chi_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}^{\circ} \rho_{\mathfrak{p}_{\infty}^+},$$

où $\rho_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} = \text{Aug}_{G_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}^G}$ est l'induit à G du caractère d'augmentation de $G_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}$. Il suit :

Théorème 27. *Sous les hypothèses et avec les notations du Théorème 23, les composantes imaginaires respectives $\tilde{\mathcal{C}}_{L'_{\infty}}^{\circ}$ et $\tilde{\mathcal{C}}_{K'_{\infty}}^{\circ}$ des groupes de Galois des pro- ℓ -extensions abéliennes non-ramifiées ℓ -décomposées maximales de L'_{∞} et K'_{∞} sont des $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$ -modules projectifs et leurs caractères $\tilde{\chi}_{L_{\infty}^+}$ et $\tilde{\chi}_{K_{\infty}^+}$ comme $\Delta \times G$ -modules sont liés par l'identité :*

$$\tilde{\chi}_{L_{\infty}^+}^{\circ} - \omega = (\tilde{\chi}_{K_{\infty}^+}^{\circ} - \omega) \text{Rég}_G + (\sum_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} \chi_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}^{\circ}) \rho_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}.$$

où la sommation porte ici sur l'ensemble des places \mathfrak{p}_{∞}^+ du corps K_{∞}^+ .

Corollaire 28. *Toujours avec les mêmes notations, les caractères respectifs des groupes $\tilde{\mathcal{C}}_{L'_{\infty}}^{\circ}$ et $\tilde{\mathcal{C}}_{K'_{\infty}}^{\circ}$ regardés comme G -modules sont liés par l'identité :*

$$\tilde{\chi}_{L'_{\infty}}^{\circ} - \langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle 1_G = (\tilde{\chi}_{K'_{\infty}}^{\circ} - \langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle 1_G) \text{Rég}_G + (\sum_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} \langle \chi_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}^{\circ}, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle) \rho_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}.$$

Corollaire 29 (Formule de Kuz'min). *Sous les mêmes hypothèses, les invariants lambda des composantes imaginaires des ℓ -groupes $\tilde{\mathcal{C}}_{L_{\infty}^+}$ et $\tilde{\mathcal{C}}_{K_{\infty}^+}$ sont liés par l'identité :*

$$\tilde{\lambda}_{L_{\infty}^+}^{\circ} - \langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle = (\tilde{\lambda}_{K_{\infty}^+}^{\circ} - \langle \omega, 1_{\Delta'}^{\Delta} \rangle)[L_{\infty} : K_{\infty}] + \sum_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} (d_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} - 1),$$

où la sommation porte sur les places \mathfrak{p}_{∞}^+ de L_{∞}^+ modérément ramifiées dans $L_{\infty}^+/K_{\infty}^+$ et décomposées dans L_{∞}/L_{∞}^+ ; et $d_{\mathfrak{p}_{\infty}^+} = e_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}$ est l'ordre du sous-groupe de décomposition $G_{\mathfrak{p}_{\infty}^+}$ de \mathfrak{p}_{∞}^+ dans $L_{\infty}^+/K_{\infty}^+$.

Références

- [1] C. CHEVALLEY & A. WEIL, *Über das Verhalten der Integrale Erster Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers*, Ham. Ann. **10** (1934), 358–361.
- [2] J. D’MELLO & M. MADAN, *Class group rank relations in \mathbb{Z}_ℓ -extensions*, Manuscripta Math. **41** (1983), 75–107.
- [3] R. GOLD, *Kida’s theorem and ℓ -adic L -functions*, Prépublication.
- [4] R. GOLD & M. MADAN, *Iwasawa invariants*, Communications in Algebra **13** (1985), 1559–1578.
- [5] R. GOLD & M. MADAN, *Galois representation of Iwasawa modules*, Acta Arith. **46** (1986), 243–255.
- [6] R. GOLD & M. MADAN, *An application of a theorem of Deuring and Šafarevič*, Math. Z. **191** (1986), 247–251.
- [7] R. GOLD & M. MADAN, *Kida’s theorem for a class of non-normal extensions*, Proc. Am. Math. Soc. **104** (1988), 55–59.
- [8] M. GRANDET & J.-F. JAULENT, *Sur la capitulation dans une \mathbb{Z}_ℓ -extension*, J. reine angew. Math. **362** (1985), 213–217.
- [9] G. GRAS, *Sur les invariants lambda d’Iwasawa des corps abéliens*, Pub. Math. Besançon Théor. Nombres 1978-79 (1979).
- [10] G. GRAS, *Groupe de Galois de la p -extension abélienne maximale d’un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **333** (1982), 86–132.
- [11] G. GRAS, *Théorie des genres analytique des corps de nombres*, Inv. Math. **86** (1986), 1–17.
- [12] R. GREENBERG, *On a certain ℓ -adic representation*, Invent. Math. **21** (1973), 117–124.
- [13] K. IWASAWA, *On the μ -invariant of \mathbb{Z}_ℓ -extensions*, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Kinokuniya, Tokyo (1973), 1–11.
- [14] K. IWASAWA, *Riemann-Hurwitz formula and p -adic representations for number fields*, Tôhoku Math. J. **33** (1984), 263–288.
- [15] J.-F. JAULENT, *Unités et classes dans les extensions métabéliennes de corps de nombres*, Ann. Sci. Inst. Fourier **31** (1981), 39–62.
- [16] J.-F. JAULENT, *\mathcal{S} -classes infinitésimales d’un corps de nombres algébriques*, Ann. Sci. Inst. Fourier **34** (1984), 1–27.
- [17] J.-F. JAULENT, *Représentations ℓ -adiques et invariants cyclotomiques*, Pub. Math. Besançon, Théor. Nombres (1983–1984).
- [18] J.-F. JAULENT, *Représentations ℓ -adiques associées aux invariants cyclotomiques*, Proc. Japan Acad. **61** (1985), 149–152.
- [19] J.-F. JAULENT, *L’arithmétique des ℓ -extensions (Thèse d’État)*, Pub. Math. Besançon Théor. Nombres 1985-86, (1986), vii+348 pp.
- [20] Y. KIDA, *ℓ -extensions of CM-fields and Iwasawa invariants*, J. Number Th. **12** (1980), 519–528.
- [21] Y. KIDA, *Cyclotomic \mathbb{Z}_ℓ -extensions and J -fields*, J. Number Th. **14** (1982), 340–352.
- [22] L. KUZ’MIN, *Some duality theorems for cyclotomic Γ -extensions over algebraic number fields*, Math. USSR Izv. **14** (1980), 441–480.
- [23] W. SINNOT, *On p -adic L -functions and the Riemann-Hurwitz genus formula*, Compositio Math. **51** (1984), 3–17.
- [24] L. WASHINGTON, *Introduction to cyclotomic fields*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics **83**, Springer-Verlag, New York, 1997, xiv+487 pp.
- [25] K. WINGBERG, *Freie Produktzerlegungen von Galoisgruppen und Iwasawa Invarianten für p -Erweiterungen von \mathbb{Q}* , J. reine angew. Math. **341** (1983), 11–129.
- [26] K. WINGBERG, *Duality theorems for Γ -extensions of algebraic number fields*, Compositio Math. **55** (1985), 333–381.

ADRESSE : Institut de Mathématiques de Bordeaux,
351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex
COURRIEL : jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux.fr
URL : <https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/>