



**HAL**  
open science

## Alfonso Shimbel, 1951, Applications of Matrix Algebra to Communication Nets. Version bilingue et commentée

Alfonso Shimbel, Laurent Beauguitte

### ► To cite this version:

Alfonso Shimbel, Laurent Beauguitte. Alfonso Shimbel, 1951, Applications of Matrix Algebra to Communication Nets. Version bilingue et commentée. 2021. <hal-03187071>

**HAL Id: hal-03187071**

**<https://hal.science/hal-03187071v1>**

Submitted on 31 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Alfonso Shimbel, 1951, Applications of Matrix  
Algebra to Communication Nets  
*Bulletin of Mathematical Biophysics* 13, p. 165-178  
Version bilingue et commentée

groupe f.m.r.



Mars 2021

*Version adaptée et commentée par Laurent Beauquitte, CNRS, UMR Géographie-cités.*

## Présentation

La postérité d'Alfonso Shimbel en géographie des réseaux d'infrastructures est due à deux mesures proposées dans un article paru en 1953 ; la seule référence bibliographique de l'article de 1953 est cet article de 1951. Comme la plupart de ses articles, ils paraissent dans le *Bulletin of Mathematical Biophysics*, revue créée en 1939 par le biologiste Nicolas Rashevsky. Ce dernier, physicien de formation, souhaite développer une approche mathématique de la biologie et s'entoure au début des années 1950 de jeunes mathématiciens comme Anatol Rapoport ou Alfonso Shimbel à l'Université de Chicago. Rashevsky est alors très présent dans des séminaires pluridisciplinaires, dialogue volontiers avec des praticiens de sciences sociales, ce qui explique sans doute que sa revue soit largement lue en dehors de sa discipline - où son approche, très minoritaire, est fortement critiquée (Shmailov, 2016).

Dans cet article, Shimbel utilise le calcul matriciel pour proposer une méthode d'analyse de réseaux de communication. Il n'utilise jamais le terme de graphe et ses références ne sont pas celles de la théorie des graphes - un seul mathématicien spécialiste de la théorie des nombres est cité - ses références étant largement issues de la sociométrie et des travaux récents de Rapoport sur la « sociologie animale ». Si l'article ne traite pas de graphe, la méthode qu'il propose, fondée sur les puissances de matrices, permet d'en calculer le diamètre ainsi que le nombre de plus courts chemins de longueur  $n$  entre toute paire de sommets.

Le vocabulaire utilisé est intéressant car il est un certain nombre de termes qui deviendront usuels en théorie des graphes comme chemin, dont l'usage ici n'est pas stabilisé, cycle, chaîne ou connectivité (le terme renvoyant à ce que nous appellerions plutôt connexité aujourd'hui).

### Références

Shimbel, Alfonso. « Structural Parameters of Communication Networks ». *The Bulletin of Mathematical Biophysics* 15, n°4 (1953) : 501-7.

Shmailov, Maya M. *Intellectual Pursuits of Nicolas Rashevsky The Queer Duck of Biology*. Birkhäuser, 2016.

Les numéros entre crochets dans la version anglaise correspondent à la pagination de l'article paru en 1951. Toutes les notes en bleu dans la traduction française sont du traducteur.

# APPLICATIONS OF MATRIX ALGEBRA TO COMMUNICATION NETS

COMMITTEE ON MATHEMATICAL BIOLOGY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

A “generic” problem amenable to matrix algebraic treatment is outlined. Several examples are given and one, a communication system, is studied in some detail.

A typical structure matrix is used to describe the channels of communication and a “status” matrix is used to describe the distribution of information in the system at any time.

A theorem is proved relating the status matrix at any time  $t$  to the  $t$ th power of the structure matrix.

The elements of the communication system are interpreted as individuals who can send messages to each other. For the individuals attempting to solve a “group problem” certain relations are derived between the structure and status matrices and time of solution.

The structure of the communication system is permitted to vary with time. A general theorem is proved relating the status matrix to the matrix product of the series of structure matrices representing the changing structure of the system.

Some suggestions are made for further generalizations. In particular, it is suggested that so-called “higher order” information transmission can be similarly treated.

*Introduction.* A variety of problems which have been (or could be) studied by the use of matrix representations have some interesting properties in common. The kinds of problems which we refer to are exemplified by : the mathematics of radiation and cosmic ray counters, the theory of neutron production and absorption, mathematical genetics, experimental design, the mathematics of peck right, epidemiology, the ontogeny of neural nets, stereochemistry, communication systems, and a host of others.

This wide range of problems (or significant aspects of them) may be regarded as special cases of the following “generic” problem :

A certain number ( $n$ ) of essentially “equivalent” objects are the elements of a system. Associated with every *ordered pair* of elements (which may be regarded as distinguishable) is the *affirmation or negation* of  $k$  relations. We may symbolize the affirmation of the  $p$ th relation between the  $i$ th and  $j$ th elements by the expression  $iR_pj$ . This, of course, need not imply that  $jR_pi$ , that is, the relation  $R_p$ , need not be symmetric.

[166] The negation of the  $p$ th relation between the  $i$ th and  $j$ th elements may be written as  $iR_p^{-1}j$ .

In addition to the *relations* associated with the ordered pairs of the system each *element* may be associated with one or more of  $m$  *intrinsic* properties. Thus the affirmation (of possession) of intrinsic property  $q$  by element  $i$  can be symbolized by the expression  $iP_q$ , and its negation by  $iP_q^{-1}$ .

The relations and intrinsic properties of the system may, in general, imply a dynamics which is reflected by a quantized temporal shift of relational and intrinsic property *affirmations* to *negations* or vice versa.

*Matrix Representation.* For any given problem of this kind our attention may be focused upon the “structures” implied by the relations between the elements or upon the dynamics of the system. In either case matrix representation can be used to advantage. Such a system can be described by matrices in the following way :

First, number the elements of the system from one to  $n$  in some arbitrary fashion. Assume for illustration that only one type of relation will be considered. In other words, for each ordered pair of elements  $i, j$  we will say either  $iRj$  or  $iR^{-1}j$ , i.e.,  $i$  is related to  $j$ , or  $i$  is not related to  $j$ .

The set of all such relations can be conveniently described by an  $n \times n$  matrix whose elements are either  $R$  or  $R^{-1}$ . Thus if a typical element of the matrix  $e_{ij}$  is  $R$ , then we will say  $iRj$ . If, however, the typical matrix element  $e_{ij}$  is  $R^{-1}$ , then we will say  $iR^{-1}j$ . Such a matrix can be called a *structure* matrix insofar as the relations between the elements imply a structure of the system. The matrix representation can be extended to include any number, say  $k$ , of different kinds of relations. In this case it would be necessary to use an  $nk \times n$  matrix or  $kn \times n$  matrices to represent the totality of relationships.

In a similar way the distribution of intrinsic properties among the elements of the system can also be represented by a matrix. If we consider a system possessing  $m$  different classes of intrinsic properties, then an  $n \times m$  matrix will do the job. Such a matrix can be called a *status* matrix insofar as the distribution of properties among the elements of the system describes a status of the elements as compared to each other.

*An Example.* For the sake of illustration, consider the following problem. *How many structurally different compounds are represented by the formula  $C_\mu H_\nu$  (only saturated hydrocarbons considered) ?*

[167] If we picture such a compound in a conventional steric diagram, it becomes evident that every carbon atom in the molecule (except for the special case of methane) *is chemically bound* to one or more other carbon atoms. In the most general case such bonds may be single, double, or triple, but for saturated compounds only single bonds occur.

Now, if we let the integer 1 represent the relation “*has a single bond with*” and if we let 0 represent its negation, that is, “*is not bound to,*” then, by arbitrarily numbering the carbon atoms from 1 to  $\mu$  we can write a series of propositions of the form  $i1j$  and  $p0q$ . In words, these expressions mean “carbon atom  $i$  *has a single bond with* carbon atom  $j$ ” and “carbon atom  $p$  *is not bound to* carbon atom  $q$ .”

According to the procedure outlined above, the totality of relations among the carbon atoms can be represented by a  $\mu \times \mu$  *structure* matrix.

For the trivial case of  $CH_4$  (methane) we have a  $1 \times 1$  matrix whose

only element is 0. In other words, the only carbon atom in the molecule has no bonds with itself. Ethane ( $C_2H_6$ ) is represented by the  $2 \times 2$  *structure* matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The elements of the major diagonal of such a structure matrix will always be 0 since the statement “atom  $i$  has a single bond with atom  $i$ ” is meaningless. The relation “has a single bond with” as used here is always reciprocal, so it follows that the structure matrix will always be symmetric around the major diagonal. Also note that the sum of the elements of the structure matrix is exactly twice the number of carbon atoms used in forming the “backbone” of the molecule. It follows then that

$$4\mu - 1/2 \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} e_{ij} = v. \quad (1)$$

The class of all pure saturated hydrocarbons having the formula  $C_{\mu}H_v$  can, therefore, be represented by a class of  $\mu \times \mu$  matrices. It must be noted, however, that the total number of isomers of the form  $C_{\mu}H_v$  is considerably smaller than the number of different  $\mu \times \mu$  matrices which can be used to represent them. This is due to the fact that the numbering of the carbon atoms is arbitrary and that renumbering does not change the structure. It is further complicated by the fact that renumbering also may leave the matrix unchanged.

[168] For these reasons many matrices are equivalent in the sense that they represent the same substance. The original problem, therefore, of finding the number of different substances represented by the formula  $C_{\mu}H_v$  reduces to the problem of *counting the number of subclasses of equivalent matrices making up the class of  $\mu \times \mu$  matrices representing the formula  $C_{\mu}H_v$ .*

The fact is that this particular problem has been attacked and partially solved by number and group theoretical methods (Polya, 1936). These results are, of course, translatable into the language of matrices and, therefore, should have a direct bearing on all of the other phenomena subsumed by the aforementioned “generic” problem.

*Other Examples.* In the above example no *status* matrix is involved and the attention is focused on the *structure* of the system. However, as was mentioned in the introduction, the existence of a structure matrix and status matrix describing the same system frequently implies a dynamics. Accordingly, the dynamics of a neural net conforming to the postulates of McCulloch and Pitts has been described and analyzed by the use of matrix algebra (Landahl and Runge, 1946).

In this case the elements of the system are neurons. The *relations* appearing in the *structure* matrix are “can stimulate” and “can inhibit.” The

intrinsic properties associated with the status vector are “is active” and “is not active.” In this paper it is shown that consecutive products of the status vector with the structure matrix give consecutive status vectors which represent the “state” of the net for different moments.

In a subsequent paper H. D. Landahl (1947) extends the results of the first paper and treats the “reverse problem,” i.e., instead of describing the behavior of a given net he starts out with a given dynamics and defines the kind of net which will exhibit such behavior.

As a final example A. Rapoport (1949) and H. G. Landau (1950) use matrix theory in the study of the dynamics of chicken “societies” organized by the relation of “peck right.”

The foregoing is not intended as a proof for the wide applicability of matrix representation, for this is well known. The point is that in the cases cited above the structure matrix represents, in one way or another, a connected system, a network, an organization, or “lace-work” of simple relations. The structure matrix can, therefore, be interpreted as an important invariant of what may be loosely termed [169] “group order.” An extensive study of square matrices, therefore, with an eye to the structures they imply may lead to useful definitions of such vague concepts as organization, group stability, and so on.

Some important steps in this direction appear in recent literature (Luce and Perry, 1949 ; Luce, 1950). The authors define an organizational concept which they call a *clique* and the more general notion of an *n-clique*. Roughly speaking, a clique is a certain ordering of relations in a subgroup of a system. R. D. Luce and A. D. Perry show certain relations between the existence of cliques and certain properties of the matrices representing the system.

In addition, these authors apply matrix algebra to a simple “communication system” in a manner quite analogous to the Landahl-Runge treatment of neural nets. They arrive at a recursion formula for consecutive states of the system which is also analogous to the formula of Landahl and Runge.

*Group Communication.* The Problem. The following problem, although in a way more general than that approached by Landahl and Runge, Luce and Perry, is nevertheless treated in a similar manner. The statement of the problem and some of the definitions may, therefore, be expected to overlap somewhat.

Suppose that a group of  $n$  persons are asked to play the following game. Each member is told at the outset that he must send “messages” to certain other *specified* members of the group. On the other hand, he is not told who the recipients of the other members’ “messages” are. In fact, at the beginning of the game he does not even know who, if anyone, will send messages to him. The point of the game is for each member to know the complete structure of their communication system. In other words, each member must know the destination of every other member’s messages.

Accordingly, the messages themselves must contain such information. A typical message will read “The destination of  $C$ ’s messages is  $D$ , the destinations of  $B$ ’s messages are  $A$  and  $D$ , and so on.” The expression “the destinations of  $B$ ’s messages are  $A$  and  $D$ ” is actually a statement of all the information which member  $B$  possessed at the beginning of the game. Accordingly we shall refer to such expressions as *primary elements* of information.

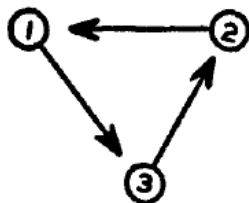
Now since there are  $n$  members in the group, there must also be  $n$  primary elements of information. The game will end, therefore, when every member possesses  $n$  different primary elements of information.

[170] *The Method.* If we number the members of the group from 1 to  $n$  in some arbitrary fashion we can proceed in the usual manner to construct a structure matrix which will represent the communication system. The matrix can be constructed by rows. To write down the  $j$ th row of the matrix we ask “Does member  $j$  send messages to member  $i$ ”? If the answer is *yes*, then the element  $e_{ij}$  of the structure matrix is one. If the answer is *no*, then the element  $e_{ij}$  is zero. By repeating this procedure  $n^2$  times the complete structure matrix can be written down.

For example, see the three member group diagrammed below in Figure 1 and a corresponding structure matrix as follows :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Figure 1



Notice that the diagonal elements of the structure matrix are all 1’s. This would be as though each member of the group sends himself messages. This notation is useful in the operations which follow. We can think of it as though each number repeatedly “reminds himself of” or “remembers” the information which he has already obtained.

A status matrix describing the distribution of primary information throughout the group can also be constructed. This can be done columnwise. To write down the  $j$ th element of the  $i$ th column we must ask : “Does member

$i$  possess the primary element of information associated with member  $j$ ? If the answer is *yes*, then the  $j$ th element of the  $i$ th column is one. If the answer is *no*, then the  $j$ th member of the  $i$ th column is zero. This process defines the status matrix.

At the beginning of the game each member of the group will possess only the primary information associated with himself. In other words, all that he will know is where he sends his own messages. The status matrix at the beginning of the game will, therefore, be the identity matrix. The matrix will have 1's along the major diagonal and zeros everywhere else.

*Successive States.* As the game proceeds the information will begin to shuttle from person to person according to the pathways of the system. This will result in a constantly changing status matrix. Now, if the rate of flow of messages were in no way controlled, certain differences between the various people playing the game would begin to show themselves. Some members of the group may find themselves, for example, sending only one-third as many messages per unit time as other members. In order to remove such differences between the individuals from our considerations we will stipulate that each member must send messages along all of his permissible channels exactly once per unit time. The problem is now well defined and we can ask the first question, namely, "How long will the game last"?

Before going on to answer this question it should be noted that a slight change in the definition of the status matrix makes it possible for us to prove a useful theorem. To this end we will say that if the general element of the status matrix  $e_{ij}$  is some *positive integer*, then member  $i$  possesses the primary element of information associated with member  $j$ . However, as before, if  $e_{ij}$  is zero, then we shall say that the member  $i$  is ignorant of the primary element of information associated with member  $j$ .

*Fundamental Theorem.* The status matrix, representing the distribution of primary elements of information among the members of the system after  $t$  units of time, is given by the  $t$ th power of the structure matrix in the sense of ordinary matrix multiplication.

Proof : *Lemma.* If  $S$  denotes the structure matrix and  $I_t$  denotes the status matrix after  $t$  units of time then,

$$I_{t+1} = I_t S. \quad (3)$$

Let  $e_{ij}^{(t)}$  denote the typical element of the status matrix after  $t$  units of time. Also, let  $s_{ij}$  denote the typical element of the structure matrix. According to the definition of ordinary matrix multiplication, we have

$$p_{ij} = s_{i1}e_{1j}^{(t)} + s_{i2}e_{2j}^{(t)} + \cdots + s_{in}e_{nj}^{(t)}, \quad (4)$$

where  $p_{ij}$  is the typical element of the matrix product  $I_t S$ .

Since none of the elements  $s_{ik}$  or  $e_{kj}^{(t)}$  is ever negative, it follows that neither the right-hand member of expression (4) nor any of its terms  $s_{ik}e_{kj}^{(t)}$  can ever be negative. This implies that if the right-hand member of expression (4) is zero then all of its terms [172]  $s_{ik}e_{kj}^{(t)}$  are individually zero. However,  $s_{ik}e_{kj}^{(t)} = 0$  means either  $s_{ik} = 0$ ,  $e_{kj}^{(t)} = 0$ , or both. But, according to the definition of the structure matrix,  $s_{ik} = 0$  tells us that member  $i$  never receives messages from member  $k$ . From the definition of the status matrix  $e_{kj}^{(t)} = 0$  tells us that member  $k$  (at the time  $t$ ) *does not* possess the primary element of information associated with member  $j$ . If *either* (or both) of these conditions hold, it follows that member  $i$  *could not* obtain the primary element of information associated with member  $j$  *at the time*  $t + 1$  *from member*  $k$ . If this is true for *all of the terms* in the right-hand member of expression (4), then it follows that member  $i$  *could not* obtain the primary element of information associated with member  $j$  *at the time*  $t + 1$  *from any other member*. We must conclude then that, given these conditions, the general element of the status matrix at the time  $t + 1$  must be zero, i.e.,  $e_{ij}^{(t+1)} = 0$ . But, given these conditions, we see from expression (4) that  $p_{ij}$  is zero. Hence, for this case we find that  $p_{ij} = e_{ij}^{(t+1)}$ .

The only remaining possibility is for the right-hand-member of expression (4) to be a positive integer. This means that  $s_{ik}e_{kj}^{(t)}$  (for at least one  $k$ ) is a positive integer. In order for this to be true we must have  $s_{ik} = 1$  and  $e_{kj}^{(t)} = +$  integer. But  $s_{ik} = 1$  means that member  $i$  *does* receive messages from member  $k$ . Also,  $e_{kj}^{(t)} = +$  integer means that member  $k$  (at the time  $t$ ) *does* possess the primary element of information associated with member  $j$ . From this we must conclude that member  $i$ , at the time  $t + 1$ , *will* possess the primary element of information associated with member  $j$ . This implies that  $e_{ij}^{(t+1)}$  must be a positive integer. But under these conditions  $p_{ij}$  is a positive integer, as a glance at expression (4) will show. Hence again  $e_{ij}^{(t+1)} = p_{ij}$ . Thus the lemma is proved. In other words, expression (3) is a valid recursion formula.

Now let us recall that the status matrix  $I_0$  (at the beginning of the game) is simply the identity matrix. Using expression (3), we get  $I_1 = I_0S$ . But  $I_0S = S$ ; hence  $I_1 = S^1$ . It follows by induction that the fundamental theorem is true, that is,

$$I_t = S^t. \tag{5}$$

Expression (5) makes it possible for us to give at least a formal solution to the original problem, namely : "How long will the game last" ?

If any element of the status matrix  $I_t$ , is zero, then we know that at least one member of the group does not yet possess the primary information associated with at least one other member, and so the [173] game is not

finished. The game will end at the first moment when every element of the status matrix is non-zero. *The game will end, therefore after T units of time, where T is the smallest power of the structure matrix containing no zero elements.*

*Adequate Systems.* Not all groups will be able to end their game. Their channels of communication may be inadequate. Such inadequacy may be due to an insufficient number of channels or an inadequate arrangement of those which are available. We shall refer to the structure matrix of such an inadequate communication system as an *inadequate* matrix. Similarly, the structure matrix of an adequate communication system can be called an *adequate* matrix. Some interesting details relating to these notions of adequate and inadequate matrices are developed by Luce (1950) in the section on *connectivity in a structure*.

In order for a structure to be adequate, it is *necessary* for every member to send messages to at least one other member and to receive messages from at least one other member. In fact, there must exist at least one path of channels from any given member of the group to every other member. If this were not so, that is, if no such path existed between member  $i$  and member  $j$ , for example, then the primary element of information associated with member  $i$  would never be available to member  $j$ . In terms of the structure matrix this means that there must exist some sequence of integers  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$  (not necessarily all different) such that  $s_{ik_1}, s_{k_1k_2}, s_{k_2k_3}, \dots, s_{k_mj}$  are all 1's.

*The Cycle.* Since every member must send messages to at least one other member, it follows that *at least n* channels are *necessary* in order to construct an adequate system. In fact, this number is sufficient if the channels are laid out in a simple closed chain which includes all of the members of the group. We shall refer to the matrix of such a structure as a *minimal-cyclic* matrix.

*Changing Structure.* The game can be complicated somewhat by permitting the members to shift their channels of communication in some prescribed temporal order. The structure matrix, under these conditions, would change from time to time.

In order to describe such a system it would be necessary to write down a series of structure matrices  $S_1, S_2, \dots, S_t, \dots$ , where  $S_t$  represents the particular communication structure being used at the time  $t$ . We shall refer to such a series of matrices as a *structure series*.

*The General Theorem.* *The status matrix, representing the dis-[174] tribution of primary information among the members of the system after t units of time, is given by the matrix product  $S_1S_2S_3 \dots S_t$ , in the sense of ordinary matrix multiplication.*

Proof : In proving recursion formula (3) we assumed that the structure matrix  $S$  was constant with time. But this assumption in no way affects the argument, since it deals only with the  $t$ th exchange of information. This

permits us to write the slightly more general recursion formula :

$$I_{t+1} = I_t S_t. \quad (6)$$

But since  $I_1 = I_0 S_1 = S_1$ , the general theorem follows by a simple induction on expression (6).

*Adequate Structure Series.* We have already shown that certain trivial structure series (constant adequate structure) results in a finite game. We may now ask for more general conditions on the structure series such that it will be *adequate*.

*Theorem.* *The maximum number of different structure matrices representing possible communication systems between  $n$  labeled members is given by the expression  $2^{(n-1)n}$ .*

*Proof :* The 1's appearing in the  $i$ th row of a structure matrix tell us (by definition) to whom member  $i$  sends his messages. It may be that he sends no messages to anyone, in which case the only 1 appearing in the  $i$ th row would be element  $s_{ii}$ . But this can happen in only one way. It may be that member  $i$  *does* send messages to exactly one other member, in which case a 1 would appear elsewhere in the row. This could happen in  $n - 1$  different ways. In general, member  $i$  may send messages to  $k$  other members. This could happen in  $\binom{n-1}{k}$  different ways, where  $\binom{n-1}{k}$  is the number of ways in which we can choose  $k$  objects from  $n - 1$  objects, all different. The number of ways  $N$  in which a given row can be "disposed of" is given by the expression

$$N = 1 + (n - 1) + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1} \quad (7)$$

It follows that the number of ways in which all of the rows can be disposed of together is  $N^n = 2^{(n-1)n}$ , which proves the theorem.

*Definition :* Any structure series which indefinitely repeats a sub-series of structure matrices will be called a *cyclic structure series*.

*Theorem.* *Any cyclic structure series which contains one or more adequate matrices is an adequate structure series.*

[175] *Proof :* If a positive integer appears in some element of the status matrix at some time  $t$ , then, by virtue of the fact that each member "reminds himself of" his already acquired information (every diagonal element of any structure matrix is 1), that particular element of the status matrix can never again be zero, for any time after  $t$ . It follows that if a given adequate matrix is applied to the changing status matrix every  $k$  units of time, then every element of the status matrix will be a positive integer in at most  $kT$  units of time, where  $T$  is the minimum power of the adequate structure

matrix containing no zeros. Such a cyclic structure series must, therefore, be adequate.

Since the game always ends at the moment when zeros no longer appear in the status matrix, it follows that the game will last  $T$  units of time, where  $T$  is the *minimum* subscript of the structure matrix for which the product  $S_1 S_2 S_3 \dots S_T$  contains no zeros. That this product contains no zeros for *some*  $T$  is, in fact, the definition of an adequate structure series.

It is possible for every matrix of a structure series to be inadequate and still form an adequate structure series. For example, consider the structure series  $S_1 S_2 S_1 S_2 \dots$ , where

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

It is readily seen that the element  $e_{21}$  of structure matrix  $S_1$  and element  $e_{12}$  of structure matrix  $S_2$  will remain zeros for all powers of these matrices. This means that both  $S_1$  and  $S_2$  are *inadequate* matrices. The product  $S_1 S_2$ , however, contains no zeros; hence, the *structure series is adequate*.

*Efficiency.* For a group of any given size certain structure matrices or structure series end the game faster than others. The *solution time*  $T$  is, therefore, a kind of measure of the efficiency of the communication system. The various adequate structure matrices and series can, therefore, be ordered in a preferential hierarchy.

If every member of a group could communicate directly with every other member of the group, only *one* interchange of information would end the game. However, such a communication system would require  $n(n - 1)$  channels. On the other hand, a minimal-cyclic structure has a solution time of  $T = n - 1$ , but it has only  $n$  channels. For some purposes we may be interested in the efficiency of a communication system as reflected by its economical use of channels. The number  $C$  of channels in a given structure is simply the [176] sum of the elements of the structure matrix minus the number of elements in the major diagonal; thus we have

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} - n. \quad (8)$$

Now let us return to the structure matrix (2) of the three member group example. The status matrices associated with this structure are as follows :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

The solution time of this structure is 2 units, since  $I_2$  is the first status matrix containing no zeros. Notice, however, that three of the elements of  $I_2$  are 2's. This means that each member of the group received one primary element of information on two different occasions.

For some purposes such a repetition of information may be considered an advantage insofar as information received many times may perhaps be more likely accurate.

We may, however, be more interested in an economy of messages. This may be particularly true when the system is such that each message is very likely to be accurate. In this case it would be ideal if the solution matrix contained only 1's.

From the above considerations it would seem that the ratio  $\mathcal{M}$  of the number of elements in the solution matrix ( $n^2$ ) to the sum of the elements of that matrix could serve as a useful measure of the system's efficiency in regard to message economy; thus

$$\mathcal{M} = \frac{n^2}{\sum_{i,j=1}^n e_{ij}}. \quad (10)$$

It should be noted, however, that the sum of the elements of the solution matrix does not give the total number of messages sent. This sum is usually larger than the number of actual messages. To interpret the meaning of the operations between the structure and status matrices accurately, we must say that a given member who has received a primary element of information  $k$  times by the time  $t$  will *repeat* that element of information  $k$  times in all of the messages he sends at the time  $t + 1$ . Actually, this simply implies that the sum of the elements of the solution matrix reflects a "weighting" of the [177] evils of redundancy. It is as though this sum were saying: "It is bad to send the same information three times, but it is more than twice as bad to send it six times."

So far we have three possible measures of efficiency: the inverse of the solution time  $T^{-1}$ , the number of channels per member  $C/n$ , and the redundancy ratio  $\mathcal{M}$ .

*Minimal-Cyclic Structure.* In a minimal-cyclic structure the most remote member from any given member is  $n - 1$  steps away. This means that the solution time  $T$  of a minimal-cyclic structure is  $n - 1$  units. The efficiency of such a system (in regard to speed) drops linearly with increasing size of the group.

This structure has exactly 1 channel per member so that in this sense it is perfectly efficient.

By elementary considerations we find that the redundancy ratio  $\mathcal{M}$  of a minimal-cyclic structure is given by the expression

$$\mathcal{M} = n/2^{n-1}. \quad (11)$$

This means that the redundancy rises sharply with increasing size of the group.

*Theorem.* The redundancy ratio  $\mathcal{M}$  of any series structure  $S_1S_2S_3\dots$  which consists entirely of minimal-cyclic matrices is always less than 1.

Proof : In order for the redundancy ratio  $\mathcal{M}$  to be 1 it is necessary that all of the elements of the solution matrix also be 1. The determinant of such a matrix, however, is zero. This means that the ideal solution matrix is *singular*.

It can be readily shown that a minimal-cyclic matrix is never singular. But the solution matrix is given by a product of the form  $S_1S_2\dots S_T$  in which all of the factors are non-singular matrices. The theorem follows from the fact that the product of a non-singular matrix with a non-singular matrix is also non-singular.

*Partial Solution.* An interesting variation of this game would be to stop it after a designated playing time. We would undoubtedly find that some structures had progressed further toward solution than others (as measured by the number of zeros in the final status matrix).

It may be that under certain circumstances a communication system of this kind is in constant danger of being completely blocked. It may also be that certain structures which are highly efficient according to the previously mentioned standards actually transmit most of the information just near solution time.

[178] Such a structure would not be very useful in such “dangerous” circumstances, since its disruption before solution time would leave most of the members ignorant of most of the information.

Other structures not quite as efficient according to the previous standards may exhibit a rapidly growing spread of information in the system. If it were disrupted before solution time at least much of the information would have already been transmitted.

Also in this connection, if we permit negative numbers in the status matrices to represent false information and in the structure matrices to represent “chronic” liars, we would have situations analogous to the spreading and checking of false “rumors.” Perhaps simple matrix operations can be devised to represent these phenomena.

*Higher Order Information.* So far the players of the game were all interested in only one question, namely, “What is the structure of the system”? In a *higher order* game the participants might be interested not only in what they know about the structure of the system, but also in *what everyone else knows* about the system.

The distribution of information in such a system can be represented by a matrix whose elements are also matrices. A discussion of such higher order games will appear in a subsequent paper.

This investigation is part of the work done under Contract N° AF 19(122)-161 between the U. S. Air Force Cambridge Research Laboratories and The University of Chicago.

## LITERATURE

- Landahl, H. D. and Richard Runge. 1946. "Outline of a Matrix Algebra for Neural Nets." *Bull. Math. Biophysics*, 8, 75-81.
- Landahl, H. D. 1947. "Outline of a Matrix Calculus for Neural Nets." *Bull. Math. Biophysics*, 9, 99-108.
- Landau, H. G. 1951. "On Dominance Relations and the Structure of Animal Societies. I, The Effect of Inherent Characteristics." *Bull. Math. Biophysics*, 13, 1-19.
- Luce, R. D, and A. D. Perry. 1949. "A Method of Matrix Analysis of Group Structure." *Psychometrika*, 14, 95-116.
- Luce, R. D. 1950. "Connectivity and Generalized Cliques in Sociometric Group Structure," *Psychometrika*, 15, 169-90.
- Polya, G. 1936. "Sur le nombre des isomères de certains composés chimiques." *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 202, 1554-6.
- Rapoport, A. 1949. "Outline of a Probabilistic Approach to Animal Sociology : I." *Bull. Math. Biophysics*, 11, 183-96.
- Rapoport, A. 1949. "Outline of a Probabilistic Approach to Animal Sociology ; II." *Ibid.*, 11, 273-81.

# APPLICATIONS DE L'ALGÈBRE MATRICIELLE AUX RÉSEAUX DE COMMUNICATION

COMMITTEE ON MATHEMATICAL BIOLOGY

UNIVERSITÉ DE CHICAGO

Un problème « générique » pouvant être traité par l'algèbre matricielle est décrit. Plusieurs exemples sont donnés et l'un d'eux, un système de communication, est étudié en détail.

Une matrice structure typique est utilisée pour décrire les canaux de communication et une matrice « d'état »<sup>1</sup> est utilisée pour décrire la distribution des informations dans le système à tout moment.

Un théorème est prouvé qui relie la matrice d'état à tout moment  $t$  à la matrice structure élevée à la puissance  $t$ .

Les éléments du système de communication sont interprétés comme des individus qui peuvent s'envoyer des messages. Pour les individus qui tentent de résoudre un « problème de groupe », certaines relations sont dérivées entre les matrices structure, les matrices d'état et le temps de solution.

La structure du système de communication peut varier dans le temps. Un théorème général est prouvé qui relie la matrice d'état au produit matriciel de la série de matrices structure représentant la structure changeante du système.

Quelques suggestions sont faites pour d'autres généralisations. En particulier, il est suggéré que la transmission d'informations dite « d'ordre supérieur » peut être traitée de la même manière.

*Introduction.* Divers problèmes qui ont été (ou pourraient être) étudiés par l'utilisation de représentations matricielles ont en commun certaines propriétés intéressantes. Les types de problèmes auxquels nous faisons référence sont : les mathématiques des compteurs de rayonnements et de rayons cosmiques, la théorie de la production et de l'absorption des neutrons, la génétique mathématique, la conception expérimentale, les mathématiques du droit du pic<sup>2</sup>, l'épidémiologie, l'ontogénie des réseaux neuronaux, la stéréochimie<sup>3</sup>, les systèmes de communication, et une foule d'autres.

Ce large éventail de problèmes (ou d'aspects importants de ceux-ci) peut être considéré comme des cas particuliers du problème « générique » suivant :

Un certain nombre ( $n$ ) d'objets « équivalents » par essence sont les éléments d'un système. À chaque *paire ordonnée* d'éléments (qui peuvent être

---

1. *Matrix structure* est traduit par *matrice structure*; *status matrix* par *matrice d'état*. La *matrice structure* correspond à la *matrice d'adjacence*; la *matrice d'état*  $n$  correspond à la *matrice structure élevée à la puissance*  $n$ .

2. Ce que Shimbel appelle les *mathématiques du peck right* renvoie à deux articles de Rapoport cités plus loin et concernant des interactions entre poulets. Shimbel et Rapoport ont publié ensemble à plusieurs reprises dans *The Bulletin of Mathematical Biophysics* en 1947 et 1948.

3. Sous-discipline de la chimie étudiant l'arrangement spatial relatif des atomes au sein des molécules (source wikipédia).

considérés comme distincts) est associée l'*affirmation ou la négation* de  $k$  relations<sup>4</sup>. On peut symboliser l'affirmation de la relation  $p$  entre les éléments  $i$  et  $j$  par l'expression  $iR_pj$ . Bien entendu, cela n'implique pas nécessairement  $jR_pi$ , la relation  $R_p$ , n'est pas obligatoirement symétrique.

La négation de la relation  $p$  entre les éléments  $i$  et  $j$  peut s'écrire  $iR_p^{-1}j$ .

En plus des *relations* associées aux paires ordonnées du système, chaque *élément* peut être associé à une ou plusieurs  $m$  propriétés *intrinsèques*. Ainsi, l'affirmation (de la possession) de la propriété intrinsèque  $q$  par l'élément  $i$  peut être symbolisée par l'expression  $iP_q$ , et sa négation par  $iP_q^{-1}$ .

Les relations et les propriétés intrinsèques du système peuvent, en général, impliquer une dynamique qui se traduit par une évolution temporelle quantifiée des propriétés relationnelles et intrinsèques - *affirmations* vers *négations* ou vice versa<sup>5</sup>.

*Représentation matricielle.* Pour tout problème de ce type, notre attention peut se porter sur les « structures » qu'impliquent les relations entre les éléments ou sur la dynamique du système. Dans les deux cas, la représentation matricielle peut être avantageusement utilisée. Un tel système peut être décrit par des matrices de la manière suivante :

Premièrement, numérotez les éléments du système de un à  $n$  de manière arbitraire. Supposons, à titre d'illustration, qu'un seul type de relation soit pris en compte. En d'autres termes, pour chaque paire ordonnée d'éléments  $i, j$ , nous dirons soit  $iRj$  soit  $iR^{-1}j$ , c'est-à-dire que  $i$  est lié à  $j$ , ou que  $i$  n'est pas lié à  $j$ .

L'ensemble de toutes ces relations peut être aisément décrit par une matrice  $n \times n$  dont les éléments sont soit  $R$  soit  $R^{-1}$ . Si un élément type de la matrice  $e_{ij}$  est  $R$ , alors nous dirons  $iRj$ . Si, en revanche, l'élément type de la matrice  $e_{ij}$  est  $R^{-1}$ , alors nous dirons  $iR^{-1}j$ . Une telle matrice peut être appelée matrice *structure* dans la mesure où les relations entre les éléments impliquent une structure du système. La représentation matricielle peut être étendue pour inclure n'importe quel nombre, disons  $k$ , de relations de types différents. Dans ce cas, il serait nécessaire d'utiliser une matrice  $nk \times n$  ou des matrices  $kn \times n$  pour représenter la totalité des relations.

De la même manière, la distribution des propriétés intrinsèques entre les éléments du système peut également être représentée par une matrice. Si nous considérons un système possédant  $m$  différentes classes de propriétés intrinsèques, alors une matrice  $n \times m$  fera l'affaire. Une telle matrice peut être appelée matrice d'*état*<sup>6</sup> dans la mesure où la répartition des propriétés entre les éléments du système décrit un état des éléments les uns par rapport

4. Comprendre présence et absence.

5. Le système est dynamique, les liens entre entités peuvent apparaître ou disparaître de  $t$  à  $t + 1$ .

6. L'expression est employée ensuite dans un sens sensiblement différent. Ici, Shimbél évoque de fait une table individus - variables de taille  $n \times m$ . Dans la suite du texte, l'expression matrice d'état au temps  $t$  désigne la matrice structure élevée à la puissance  $t$ .

aux autres.

*Un exemple.* À titre d'illustration, examinons le problème suivant. *Combien de composés structurellement différents sont représentés par la formule  $C_\mu H_\nu$  (seuls les hydrocarbures saturés sont pris en compte) ?*

Si nous représentons un tel composé par un diagramme stérique classique<sup>7</sup>, il devient évident que chaque atome de carbone de la molécule (sauf le cas particulier du méthane) *est chimiquement lié* à un ou plusieurs autres atomes de carbone. Dans le cas le plus général, ces liaisons peuvent être simples, doubles ou triples, mais pour les composés saturés, il n'y a que des liaisons simples.

Maintenant, si l'entier 1 représente la relation « *a une liaison simple avec* » et si 0 représente sa négation, c'est-à-dire « *a n'est pas lié à* » alors, en numérotant arbitrairement les atomes de carbone de 1 à  $\mu$ , nous pouvons écrire une série de propositions de la forme  $i1j$  et  $p0q$ . En d'autres termes, ces expressions signifient « l'atome de carbone  $i$  a une liaison simple avec l'atome de carbone  $j$  » et « l'atome de carbone  $p$  n'est pas lié à l'atome de carbone  $q$  ».

Selon la procédure décrite ci-dessus, la totalité des relations entre les atomes de carbone peut être représentée par une matrice *structure*  $\mu \times \mu$ .

Pour le cas trivial de  $CH_4$  (méthane), nous avons une matrice de  $1 \times 1$  dont le seul élément est 0. En d'autres termes, le seul atome de carbone de la molécule n'a aucune liaison avec lui-même. L'éthane ( $C_2H_6$ ) est représenté par la matrice *structure*  $2 \times 2$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments de la diagonale principale d'une telle matrice structure seront toujours 0 puisque l'affirmation « l'atome  $i$  a une liaison simple avec l'atome  $i$  » est dénuée de sens. La relation « a une liaison simple avec » telle qu'elle est utilisée ici est toujours réciproque, de sorte que la matrice structure sera toujours symétrique autour de la diagonale principale. Notez également que la somme des éléments de la matrice structure est exactement le double du nombre d'atomes de carbone utilisés pour former l'« épine dorsale » de la molécule. Il s'ensuit donc que

$$4\mu - 1/2 \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} e_{ij} = v. \quad (1)$$

---

7. L'expression diagramme stérique n'est pas ou peu utilisée, que ce soit en français ou en anglais, y compris à l'époque (aucune occurrence dans JSTOR Data par exemple). L'auteur évoque la représentation graphique conventionnelle des atomes.

8. La matrice étant symétrique, somme en lignes et somme en colonnes sont identiques d'où la formule *a priori* étrange de l'auteur.

La classe de tous les hydrocarbures saturés purs ayant la formule  $C_\mu H_\nu$  peut donc être représentée par une classe de matrices  $\mu \times \mu$ . Il faut toutefois noter que le nombre total d'isomères de la forme  $C_\mu H_\nu$  est considérablement plus petit que le nombre de matrices  $\mu \times \mu$  différentes qui peuvent être utilisées pour les représenter. Cela est dû au fait que la numérotation des atomes de carbone est arbitraire et que la renumérotation ne modifie pas la structure. La situation est encore compliquée par le fait que la renumérotation peut également laisser la matrice inchangée.

Pour ces raisons, de nombreuses matrices sont équivalentes dans le sens où elles représentent la même substance. Le problème initial consistant à trouver le nombre de substances différentes représentées par la formule  $C_\mu H_\nu$  se réduit donc à déterminer le *nombre de sous-classes de matrices équivalentes constituant la classe de  $\mu \times \mu$  matrices représentant la formule  $C_\mu H_\nu$* .

Le fait est que ce problème particulier a été traité et partiellement résolu par des méthodes de théorie des nombres et des groupes (Polya, 1936). Ces résultats sont, bien entendu, traduisibles en langage matriciel et, par conséquent, devraient avoir une incidence directe sur tous les autres phénomènes subsumés par le problème « générique » mentionné ci-dessus.

*Autres exemples.* Dans l'exemple ci-dessus, aucune matrice d'état n'est impliquée et l'attention est portée sur la *structure* du système. Cependant, comme il a été mentionné dans l'introduction, l'existence d'une matrice structure et d'une matrice d'état décrivant le même système implique fréquemment une dynamique. En conséquence, la dynamique d'un réseau neuronal conforme aux postulats de McCulloch et Pitts a été décrite et analysée par l'utilisation de l'algèbre matricielle (Landahl et Runge, 1946).

Dans ce cas, les éléments du système sont des neurones. Les *relations* apparaissant dans la matrice *structure* sont « peuvent stimuler » et « peuvent inhiber ». Les propriétés intrinsèques associées au vecteur d'état sont « est actif » et « n'est pas actif ». Dans cet article, il est montré que des produits consécutifs du vecteur d'état avec la matrice structure donnent des vecteurs d'état consécutifs qui représentent l'« état » du réseau pour différents moments.

Dans un article ultérieur, H. D. Landahl (1947) étend les résultats du premier article et traite du « problème inverse », c'est-à-dire qu'au lieu de décrire le comportement d'un réseau donné, il part d'une dynamique donnée et définit le type de réseau qui présentera un tel comportement.

Dernier exemple, A. Rapoport (1949) et H. G. Landau (1950) utilisent la théorie matricielle dans l'étude de la dynamique des « sociétés » de poulets organisées par la relation du « droit du pic ».

Ce qui précède n'a pas pour but de prouver l'applicabilité étendue de la représentation matricielle, car celle-ci est bien connue. Le fait est que dans les cas cités ci-dessus, la matrice structure représente, d'une manière ou d'une autre, un système connecté, un réseau, une organisation ou une « dentelle »

de relations simples. La matrice structure peut donc être interprétée comme un invariant important de ce que l'on peut appeler de manière vague « l'ordre des groupes ». Une étude approfondie des matrices carrées, en tenant compte des structures qu'elles impliquent, peut donc conduire à des définitions utiles de concepts aussi vagues que l'organisation, la stabilité du groupe, etc.

Quelques pas importants dans cette direction apparaissent dans la littérature récente (Luce et Perry, 1949 ; Luce, 1950). Les auteurs définissent un concept d'organisation qu'ils appellent une *clique* et la notion plus générale de *n-clique*. En gros, une clique est une certaine organisation des relations dans le sous-groupe d'un système. R. D. Luce et A. D. Perry montrent des relations entre l'existence de cliques et certaines propriétés des matrices représentant le système.

En outre, ces auteurs appliquent l'algèbre matricielle à un simple « système de communication » d'une manière assez analogue à celle de Landahl et Runge pour les réseaux neuronaux. Ils arrivent à une formule de récursion pour les états consécutifs du système qui est également analogue à la formule de Landahl et Runge.

*Communication de groupe.* Le problème. Le problème suivant est traité de manière similaire, bien que plus générale, à celui abordé par Landahl et Runge, et Luce et Perry. On peut donc s'attendre à ce que l'énoncé du problème et certaines des définitions se recoupent quelque peu.

Supposons qu'un groupe de  $n$  personnes soit invité à participer au jeu suivant. Chaque membre doit envoyer des « messages » à des membres *précis* du groupe. Il ne sait pas qui sont les destinataires des « messages » des autres joueurs. Au début du jeu, il ne sait même pas qui lui enverra des messages, si tant est qu'il y en ait. Le but du jeu est que chaque joueur parvienne à connaître la structure complète du système de communication. En d'autres termes, chaque joueur doit connaître la destination des messages de tous les autres joueurs.

Les messages eux-mêmes doivent contenir ces informations. Un message typique se lit comme suit : « Le destinataire des messages de  $C$  est  $D$ , les destinataires des messages de  $B$  sont  $A$  et  $D$ , et ainsi de suite ». L'expression « les destinataires des messages de  $B$  sont  $A$  et  $D$  » est en fait une déclaration de toutes les informations que le joueur  $B$  possède au début du jeu. Nous appellerons donc ces expressions *éléments primaires* d'information.

Le groupe comprenant  $n$  joueurs, il doit aussi y avoir  $n$  éléments primaires d'information. Le jeu se termine lorsque chaque joueur possède  $n$  d'éléments d'information primaires différents.

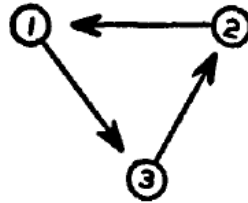
*La méthode.* Si nous numérotions les membres du groupe de 1 à  $n$  de manière arbitraire, nous pouvons procéder de la manière habituelle pour construire une matrice structure qui représentera le système de communication. La matrice peut être construite par lignes. Pour écrire la  $j^{\text{e}}$  ligne de la matrice, nous demandons : « Le membre  $j$  envoie-t-il des messages au

membre  $i$  » ? Si la réponse est *oui*, alors l'élément  $e_{ij}$  de la matrice structure est 1. Si la réponse est *non*, alors l'élément  $e_{ij}$  est 0. En répétant cette procédure  $n^2$  fois, on peut écrire la matrice structure complète.

Par exemple, voici le diagramme d'un groupe de trois membres (figure 1) et la matrice structure correspondante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

FIGURE 1



La diagonale de la matrice structure est remplie de 1. On considère que chaque membre du groupe s'envoie des messages. Cette notation est utile dans les opérations qui suivent. On peut imaginer que chaque joueur se « rappelle » ou se « souvient » de manière répétée des informations qu'il a déjà obtenues.

Une matrice d'état décrivant la distribution des informations primaires dans le groupe peut également être construite. Cela peut se faire par colonne. Pour écrire l'élément  $j$  de la colonne  $i$ , nous devons demander : « Le membre  $i$  possède-t-il l'élément primaire d'information associé au membre  $j$  ? » Si la réponse est oui, alors l'élément  $j$  de la colonne  $i$  est 1. Si la réponse est non, alors l'élément  $j$  de la colonne  $i$  est 0. Ce processus permet de définir la matrice d'état.

Au début du jeu, chaque membre du groupe ne possède que les informations primaires qui lui sont associées. En d'autres termes, tout ce qu'il sait est l'endroit où il doit envoyer ses propres messages. La matrice d'état au début du jeu est donc la matrice identité. La matrice a des 1 le long de la diagonale principale et des zéros partout ailleurs.

*États successifs.* Au fur et à mesure du déroulement du jeu, les informations commencent à circuler d'une personne à l'autre selon les chemins<sup>9</sup> du système. Il en résulte une matrice d'état en constante évolution. Si le débit

9. Le terme n'annonce pas exactement le *path* de la théorie des graphes, Shimbel évoquant les *pathways*.

des messages n'était aucunement contrôlé, des différences entre les joueurs commenceraient à se manifester. Certains membres du groupe pourraient se retrouver, par exemple, à n'envoyer qu'un tiers du nombre de messages envoyés par les autres membres par unité de temps. Afin d'éliminer de nos considérations ces différences entre les individus, nous stipulons que chaque membre doit envoyer des messages par tous les canaux autorisés, une fois exactement par unité de temps. Le problème est maintenant bien défini et nous pouvons poser la première question, à savoir : « Combien de temps durera le jeu ? »

Avant de répondre à cette question, il convient de noter qu'un léger changement dans la définition de la matrice d'état nous permet de prouver un théorème utile. À cette fin, nous dirons que si l'élément général de la matrice d'état  $e_{ij}$  est un *entier positif*, alors le membre  $i$  possède l'élément primaire d'information associé au membre  $j$ . Cependant, comme précédemment, si  $e_{ij}$  est égal à zéro, alors nous dirons que le membre  $i$  ignore l'élément primaire d'information associé au membre  $j$ .

*Théorème fondamental.* La matrice d'état, représentant la répartition des éléments primaires d'information entre les membres du système après  $t$  unités de temps, est donnée par la matrice structure élevée à la puissance  $t$  dans le sens d'une multiplication matricielle ordinaire.

Preuve : *Lemme.* Si  $S$  désigne la matrice structure et  $I_t$  désigne la matrice d'état après  $t$  unités de temps, alors,

$$I_{t+1} = I_t S. \quad (3)$$

Soit  $e_{ij}^{(t)}$  désignant un élément de la matrice d'état après  $t$  unités de temps. Soit également  $s_{ij}$  un élément de la matrice structure. Selon la définition de la multiplication matricielle ordinaire, nous avons

$$p_{ij} = s_{i1}e_{1j}^{(t)} + s_{i2}e_{2j}^{(t)} + \cdots + s_{in}e_{nj}^{(t)}, \quad (4)$$

où  $p_{ij}$  est un élément du produit matriciel  $I_t S$ .

Comme aucun des éléments  $s_{ik}$  ou  $e_{kj}^{(t)}$  n'est jamais négatif, il s'ensuit que ni le terme droit de l'expression (4) ni aucun de ses éléments  $s_{ik}e_{kj}^{(t)}$  ne peuvent jamais être négatifs. Cela signifie que si la partie droite de l'expression (4) est égale à zéro, tous ses termes  $s_{ik}e_{kj}^{(t)}$  sont individuellement égaux à zéro. Cependant,  $s_{ik}e_{kj}^{(t)} = 0$  signifie soit  $s_{ik} = 0$ , soit  $e_{kj}^{(t)} = 0$ , soit les deux. Mais, selon la définition de la matrice structure,  $s_{ik} = 0$  nous indique que le membre  $i$  ne reçoit jamais de messages du membre  $k$ . D'après la définition de la matrice d'état,  $e_{kj}^{(t)} = 0$  nous indique que le membre  $k$  (au moment  $t$ ) ne possède pas l'élément primaire d'information associé au membre  $j$ . Si l'une ou l'autre (ou les deux) de ces conditions se vérifie, il s'ensuit que le membre  $i$  ne peut pas obtenir du membre  $k$  l'élément primaire d'information

associé au membre  $j$  au moment  $t + 1$ . Si cela est vrai pour *tous les termes* dans la partie droite de l'expression (4), alors il s'ensuit que le membre  $i$  ne peut obtenir l'élément primaire d'information associé au membre  $j$  d'aucun autre membre au moment  $t + 1$ . Nous devons donc conclure que, dans ces conditions, l'élément général de la matrice d'état à l'instant  $t + 1$  doit être nul, c'est-à-dire  $e_{ij}^{(t+1)} = 0$ . Mais, compte tenu de ces conditions, nous voyons dans l'expression (4) que  $p_{ij}$  est égal à zéro. Par conséquent, pour ce cas, nous trouvons que  $p_{ij} = e_{ij}^{(t+1)}$ .

La seule possibilité restante est que la partie droite de l'expression (4) soit un entier positif. Cela signifie que  $s_{ik}e_{kj}^{(t)}$  (pour au moins un  $k$ ) est un entier positif. Pour que cela soit vrai, nous devons avoir  $s_{ik} = 1$  et  $e_{kj}^{(t)} = +$  entier. Mais  $s_{ik} = 1$  signifie que le membre  $i$  reçoit des messages du membre  $k$ . De plus,  $e_{kj}^{(t)} = +$  entier signifie que le membre  $k$  (au moment  $t$ ) possède l'élément primaire d'information associé au membre  $j$ . Nous devons en conclure que le membre  $i$ , à l'instant  $t + 1$ , possède l'élément primaire d'information associé au membre  $j$ . Cela implique que  $e_{ij}^{(t+1)}$  doit être un entier positif. Mais dans ces conditions,  $p_{ij}$  est un entier positif, comme le montre un coup d'œil à l'expression (4). D'où à nouveau  $e_{ij}^{(t+1)} = p_{ij}$ . Ainsi, le lemme est prouvé. En d'autres termes, l'expression (3) est une formule de récursion valide.

Rappelons maintenant que la matrice d'état  $I_0$  (au début du jeu) est simplement la matrice identité. En utilisant l'expression (3), nous obtenons  $I_1 = I_0S$ . Mais  $I_0S = S$ ; d'où  $I_1 = S^1$ . Il s'ensuit par induction que le théorème fondamental est vrai, c'est-à-dire,

$$I_t = S^t. \quad (5)$$

L'expression (5) nous permet de donner au moins une solution formelle au problème initial, à savoir : « Combien de temps durera la partie ? »

Si un élément de la matrice d'état  $I_t$  est égal à zéro, nous savons qu'au moins un membre du groupe ne possède pas encore les informations primaires associées à au moins un autre membre, et le jeu n'est donc pas terminé. Le jeu se termine dès que chaque élément de la matrice d'état est non nul. *Le jeu se termine donc après T unités de temps, où T est la plus petite puissance de la matrice structure ne contenant pas d'élément égal à zéro*<sup>10</sup>.

*Systèmes adéquats.* Tous les groupes ne pourront pas finir le jeu. Leurs canaux de communication peuvent être inadéquats. Ceci peut être dû à un nombre insuffisant de canaux ou à une disposition inadéquate des canaux disponibles. Nous appellerons la matrice structure d'un tel système de communication une matrice *inadéquate*. La matrice structure d'un système de communication adéquat peut être appelée matrice *adéquate*. Certains détails intéressants relatifs à ces notions de matrices adéquates et inadéquates sont

10. Si l'on considère que la matrice d'adjacence symbolise un graphe connexe - ce que ne fait pas Shimbel - alors  $T$  correspond au diamètre du graphe.

développés par Luce (1950) dans la section sur la *connectivité*<sup>11</sup> *dans une structure*.

Pour qu'une structure soit adéquate, il est *nécessaire* que chaque membre envoie des messages à au moins un autre membre et reçoive des messages d'au moins un autre membre. En fait, il doit exister au moins une voie de communication entre un membre donné du groupe et tout autre membre. Si tel n'était pas le cas, c'est-à-dire si un tel chemin<sup>12</sup> n'existait pas entre le membre  $i$  et le membre  $j$ , par exemple, alors l'élément principal d'information associé au membre  $i$  ne serait jamais disponible pour le membre  $j$ . En termes de matrice structure, cela signifie qu'il doit exister une séquence d'entiers  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$  (pas nécessairement tous différents) tels que  $s_{ik_1}, s_{k_1k_2}, s_{k_2k_3}, \dots, s_{k_mj}$  sont tous des 1.

*Le cycle.* Comme chaque membre doit envoyer des messages à au moins un autre membre, il s'ensuit qu'*au moins*  $n$  canaux sont *nécessaires* afin de construire un système adéquat. En fait, ce nombre est suffisant si les canaux sont disposés dans une simple chaîne fermée qui comprend tous les membres du groupe. Nous appellerons la matrice d'une telle structure une matrice *minimale-cyclique*.

*Changement de structure.* Le jeu peut être quelque peu compliqué en permettant aux membres de modifier leurs canaux de communication dans un laps de temps donné. Dans ces conditions, la matrice structure changerait de temps en temps.

Afin de décrire un tel système, il serait nécessaire d'écrire une série de matrices structure  $S_1, S_2, \dots, S_t, \dots$ , où  $S_t$  représente la structure de communication particulière utilisée au moment  $t$ . Nous appellerons une telle série de matrices une *série de structures*.

*Le théorème général.* La matrice d'état, représentant la répartition des informations primaires entre les membres du système après  $t$  unités de temps, est donnée par le produit matriciel  $S_1S_2S_3 \dots S_t$ , au sens de la multiplication matricielle ordinaire.

Preuve : Pour prouver la formule de récursivité (3), nous avons supposé que la matrice structure  $S$  était constante dans le temps. Mais cette hypothèse n'affecte en rien l'argument, puisqu'elle ne concerne que l'échange d'informations au moment  $t$ . Cela nous permet d'écrire la formule de récursivité un peu plus générale :

$$I_{t+1} = I_t S_t. \tag{6}$$

---

11. On parlerait aujourd'hui de connectivité : comme Shimbel l'indique par la suite, il faut qu'il existe un chemin entre toute paire de sommets ; la connectivité au sens contemporain s'intéresse davantage à la redondance des liens entre sommets. Cette terminologie n'est cependant pas totalement unifiée entre autrices.

12. Ici, le terme utilisé est *path*. Le terme a également été utilisé dans l'expression *path of channels* au début du paragraphe.

Mais puisque  $I_1 = I_0 S_1 = S_1$ , le théorème général suit par une simple induction de l'expression (6).

*Série de structures adéquates.* Nous avons déjà montré que certaines séries de structures triviales (structure adéquate constante) aboutissent à un jeu fini. Nous pouvons maintenant demander des conditions plus générales sur la série de structures de sorte qu'elle soit *adéquate*.

*Théorème.* *Le nombre maximum de matrices structure différentes représentant les systèmes de communication possibles entre  $n$  joueurs est donné par l'expression  $2^{(n-1)n}$ .*

Preuve : Les 1 apparaissant dans la ligne  $i$  d'une matrice structure nous indiquent (par définition) à qui le joueur  $i$  envoie ses messages. Il se peut qu'il n'envoie de message à personne, auquel cas le seul 1 apparaissant dans la rangée  $i$  serait l'élément  $s_{ii}$ . Mais cela ne peut se produire que d'une seule manière. Il se peut que le joueur  $i$  envoie des messages à un seul et unique autre joueur, auquel cas un 1 apparaîtrait ailleurs dans la ligne. Cela peut se produire de  $n - 1$  façons différentes. En général, le joueur  $i$  peut envoyer des messages à  $k$  autres joueurs. Cela peut se produire de  $\binom{n-1}{k}$  façons différentes, où  $\binom{n-1}{k}$  est le nombre de façons dont nous pouvons choisir  $k$  objets parmi  $n - 1$  objets, tous différents. Le nombre de façons  $N$  dont on peut « disposer » d'une ligne donnée est donné par l'expression

$$N = 1 + (n - 1) + \binom{n - 1}{2} + \binom{n - 1}{3} + \dots + \binom{n - 1}{n - 1} = 2^{n-1} \quad (7)$$

Il s'ensuit que le nombre de façons dont toutes les lignes peuvent être disposées ensemble est de  $N^n = 2^{(n-1)n}$ , ce qui prouve le théorème.

*Définition :* Toute série de structures qui répète indéfiniment une sous-série de matrices structure sera appelée *série de structures cyclique*.

*Théorème.* *Toute série de structures cyclique qui contient une ou plusieurs matrices adéquates est une série de structures adéquate.*

Preuve : Si un entier positif apparaît dans un élément de la matrice d'état à un moment  $t$ , alors, en vertu du fait que chaque joueur « se souvient » des informations déjà acquises (chaque élément diagonal de toute matrice structure est 1), cet élément particulier de la matrice d'état ne peut plus jamais être zéro, à tout moment postérieur à  $t$ . Il s'ensuit que si une matrice adéquate donnée est appliquée à la matrice d'état changeant toutes les  $k$  unités de temps, alors chaque élément de la matrice d'état sera un entier positif dans au plus  $kT$  unités de temps, où  $T$  est la puissance minimale de la matrice structure adéquate ne contenant pas de zéros. Une telle série de structures cyclique doit donc être adéquate.

Comme le jeu se termine toujours au moment où les zéros n'apparaissent plus dans la matrice d'état, il s'ensuit que le jeu dure  $T$  unités de temps,

où  $T$  est l'indice *minimum* de la matrice structure pour laquelle le produit  $S_1 S_2 S_3 \dots S_T$  ne contient pas de zéros. Le fait que ce produit ne contienne pas de zéros pour *n'importe quel*  $T$  est, en fait, la définition d'une série de structures adéquate.

Il est possible que chaque matrice d'une série de structures soit inadéquate et forme quand même une série de structures adéquate. Par exemple, considérons la série de structures  $S_1 S_2 S_1 S_2 \dots$ , où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que l'élément  $e_{21}$  de la matrice structure  $S_1$  et l'élément  $e_{12}$  de la matrice structure  $S_2$  resteront des zéros pour toutes les puissances de ces matrices. Cela signifie que les deux éléments  $S_1$  et  $S_2$  sont des matrices *inadéquates*. Le produit  $S_1 S_2$ , cependant, ne contient pas de zéros ; par conséquent, la *série de structures est adéquate*.

*Efficacité.* Pour un groupe d'une taille donnée, certaines matrices structure ou séries de structures terminent le jeu plus rapidement que d'autres. Le *temps de solution*  $T$  est donc une sorte de mesure de l'efficacité du système de communication. Les différentes matrices structure et séries adéquates peuvent donc être ordonnées selon une hiérarchie préférentielle.

Si chaque joueur d'un groupe pouvait communiquer directement avec tous les autres joueurs du groupe, *un seul* échange d'informations mettrait fin au jeu. Cependant, un tel système de communication nécessiterait  $n(n - 1)$  canaux<sup>13</sup>. En revanche, une structure cyclique minimale a un temps de solution  $T$  égal à  $n - 1$ , mais elle n'a que  $n$  canaux. Selon les cas, nous pouvons privilégier l'efficacité d'un système de communication ou l'utilisation économique des canaux. Le nombre  $C$  de canaux dans une structure donnée est simplement la somme des éléments de la structure matrice moins le nombre d'éléments dans la diagonale principale ; ainsi nous avons

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} - n. \quad (8)$$

Revenons maintenant à la matrice structure (2) de l'exemple du groupe de trois membres. Les matrices d'état associées à cette structure sont les suivantes :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Le temps de solution de cette structure est 2, puisque  $I_2$  est la première matrice d'état ne contenant pas de zéros. Notez cependant que trois des

13. Si l'on remplace le terme canal par liens, on obtient la définition d'un graphe complet.

éléments de  $I_2$  sont des 2. Cela signifie que chaque membre du groupe a reçu un élément d'information primaire à deux occasions différentes.

Dans certains cas, une telle répétition des informations peut être considérée comme un avantage dans la mesure où les informations reçues plusieurs fois sont peut-être plus susceptibles d'être exactes.

Cependant, nous pourrions être plus intéressés par une économie de messages. Cela peut être particulièrement vrai lorsque le système est tel que chaque message a de fortes chances d'être exact. Dans ce cas, l'idéal serait que la matrice solution ne contienne que des 1.

D'après les considérations ci-dessus, il semblerait que le rapport  $\mathcal{M}$  entre le nombre d'éléments dans la matrice solution ( $n^2$ ) et la somme des éléments de cette matrice pourrait servir de mesure utile de l'efficacité du système en ce qui concerne l'économie des messages ; ainsi

$$\mathcal{M} = \frac{n^2}{\sum_{i,j=1}^n e_{ij}}. \quad (10)$$

Il convient toutefois de noter que la somme des éléments de la matrice solution ne donne pas le nombre total de messages envoyés. Cette somme est généralement plus importante que le nombre de messages réels. Pour interpréter correctement la signification des opérations entre les matrices structure et les matrices d'état, il faut dire qu'un membre donné qui a reçu un élément d'information primaire  $k$  fois au moment  $t$  va *répéter* cet élément d'information  $k$  fois dans tous les messages qu'il envoie au moment  $t + 1$ . En fait, cela implique simplement que la somme des éléments de la matrice de solution reflète une « pondération » des maux de la redondance. C'est comme si cette somme disait : « Il est mauvais d'envoyer la même information trois fois, mais il est plus de deux fois plus mauvais de l'envoyer six fois. »

Jusqu'à présent, nous avons trois mesures possibles de l'efficacité : l'inverse du temps de solution  $T^{-1}$ , le nombre de canaux par membre  $C/n$ , et le ratio de redondance  $\mathcal{M}$ .

*Structure cyclique minimale.* Dans une structure cyclique minimale, le membre le plus éloigné de tout autre membre est à  $n - 1$  pas. Cela signifie que le temps de solution  $T$  d'une structure cyclique minimale est de  $n - 1$  unités. L'efficacité d'un tel système (en ce qui concerne la vitesse) diminue linéairement avec l'augmentation de la taille du groupe.

Cette structure a exactement 1 canal par membre, de sorte qu'en ce sens, elle est parfaitement efficace.

Par des considérations élémentaires, nous constatons que le rapport de redondance  $\mathcal{M}$  d'une structure cyclique minimale est donné par l'expression

$$\mathcal{M} = n/2^{n-1}. \quad (11)$$

Cela signifie que la redondance augmente fortement avec l'augmentation de la taille du groupe.

*Théorème.* *Le rapport de redondance  $\mathcal{M}$  de toute structure en série  $S_1 S_2 S_3 \dots$  qui est entièrement constituée de matrices cycliques minimales est toujours inférieur à 1.*

Preuve : Pour que le rapport de redondance  $\mathcal{M}$  soit de 1, il est nécessaire que tous les éléments de la matrice solution soient également de 1. Le déterminant d'une telle matrice est cependant zéro. Cela signifie que la matrice solution idéale est *singulière*.

Il est facile de montrer qu'une matrice cyclique minimale n'est jamais singulière. Mais la matrice solution est donnée par un produit de la forme  $S_1 S_2 \dots S_T$  dans lequel tous les facteurs sont des matrices non singulières. Le théorème découle du fait que le produit d'une matrice non singulière avec une matrice non singulière est également non singulier.

*Solution partielle.* Une variante intéressante de ce jeu consisterait à l'arrêter après un temps de jeu déterminé. Nous constaterions sans aucun doute que certaines structures ont progressé davantage vers la solution que d'autres (comme le montrerait le nombre de zéros dans la matrice d'état final).

Il se peut que dans certaines circonstances, un tel système de communication soit en danger constant d'être complètement bloqué. Il se peut également que certaines structures très efficaces selon les normes susmentionnées transmettent en fait la plupart des informations juste avant le moment de la solution.

Une telle structure ne serait pas très utile dans des circonstances aussi « dangereuses », car sa perturbation avant le moment de la solution laisserait la plupart des membres dans l'ignorance de la plupart des informations.

D'autres structures moins efficaces selon les normes précédentes peuvent présenter une diffusion rapide de l'information dans le système. S'il était perturbé avant le moment de la solution, au moins une grande partie des informations aurait déjà été transmise.

À cet égard également, si nous permettons que les nombres négatifs dans les matrices d'état représentent de fausses informations et que les matrices structure représentent des menteurs « chroniques », nous aurons des situations analogues à la propagation et à la vérification de fausses « rumeurs ». Peut-être de simples opérations matricielles peuvent-elles être conçues pour représenter ces phénomènes.

*Informations de niveau supérieur.* Jusqu'à présent, les joueurs n'étaient tous intéressés que par une seule question, à savoir : « Quelle est la structure du système ? » Dans un jeu de *plus haut niveau*, les participants pourraient être intéressés non seulement par ce qu'ils savent sur la structure du système, mais aussi par *ce que tout le monde sait* sur le système.

La répartition des informations dans un tel système peut être représentée par une matrice dont les éléments sont également des matrices. Une discus-

sion de ces jeux de niveau supérieur apparaîtra dans un article ultérieur.

Cette enquête fait partie du travail effectué dans le cadre du contrat n° AF 19(122)-161 entre les laboratoires de recherche de Cambridge de l'U.S. Air Force et l'Université de Chicago.

#### Références

- Landahl, H. D. and Richard Runge. 1946. "Outline of a Matrix Algebra for Neural Nets." *Bull. Math. Biophysics*, 8, 75-81.
- Landahl, H. D. 1947. "Outline of a Matrix Calculus for Neural Nets." *Bull. Math. Biophysics*, 9, 99-108.
- Landau, H. G. 1951. "On Dominance Relations and the Structure of Animal Societies. I, The Effect of Inherent Characteristics." *Bull. Math. Biophysics*, 13, 1-19.
- Luce, R. D, and A. D. Perry. 1949. "A Method of Matrix Analysis of Group Structure." *Psychometrika*, 14, 95-116.
- Luce, R. D. 1950. "Connectivity and Generalized Cliques in Sociometric Group Structure," *Psychometrika*, 15, 169-90.
- Polya, G. 1936. "Sur le nombre des isomères de certains composés chimiques." *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 202, 1554-6.
- Rapoport, A. 1949. "Outline of a Probabilistic Approach to Animal Sociology : I." *Bull. Math. Biophysics*, 11, 183-96.
- Rapoport, A. 1949. "Outline of a Probabilistic Approach to Animal Sociology ; II." *Ibid.*, 11, 273-81.

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Parus

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1951, Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».