



**HAL**  
open science

## Suites barypolygonales quelconques

David Pouvreau, Rémy Eupherte

► **To cite this version:**

David Pouvreau, Rémy Eupherte. Suites barypolygonales quelconques. *Quadrature*, 2016, *Quadrature*, 102. hal-03186101

**HAL Id: hal-03186101**

**<https://hal.science/hal-03186101>**

Submitted on 2 Apr 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

# Suites barypolygones quelconques

par David Pouvreau<sup>1</sup> et Rémy Eupherte<sup>2</sup>

## Résumé

Les suites barypolygones d'un polygone sont étudiées de manière générale. Un polygone  $\mathcal{P}$  à  $p \geq 3$  sommets  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$  étant donné, on lui associe une famille ordonnée  $t = (t_k)_{1 \leq k \leq p}$  de réels de  $]0; 1[$  dont les termes permettent de définir des barycentres des paires successives de sommets de  $\mathcal{P}$ . On obtient ainsi un  $t$ -barypolygone de  $\mathcal{P}$ . Une suite  $t$ -barypolygonale de  $\mathcal{P}$  est initialisée en  $\mathcal{P}$ , chacun de ses termes étant le  $t$ -barypolygone du précédent. Il est démontré de deux manières qu'une telle suite converge toujours vers un point  $G$  dont une caractérisation barycentrique dépendant de  $t$  est précisée. Une généralisation en dimension finie quelconque est ensuite justifiée. Est aussi résolu le problème de la détermination des suites barypolygones convergeant vers un barycentre donné de  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$ , avec une application. Un problème ouvert analogue concernant les pentagones convexes est enfin posé.

## Abstract

The barypolygonal sequences of a polygon are generally studied. An ordered set  $t = (t_k)_{1 \leq k \leq p}$  of real numbers chosen in  $]0; 1[$  is associated to a polygon  $\mathcal{P}$  having  $p \geq 3$  vertices  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$ . The terms of this set are used in order to define barycenters of the successive pairs of vertices of  $\mathcal{P}$ , resulting in a  $t$ -barypolygon of  $\mathcal{P}$ . A  $t$ -barypolygonal sequence of  $\mathcal{P}$  starts with  $\mathcal{P}$ , each of its terms being the  $t$ -barypolygon of the preceding one. It is proven with two methods that such a sequence always converges towards a point  $G$ , of which a barycentric characterization depending on  $t$  is given. A generalization in any finite dimension is argued. The problem concerning the determination of the barypolygonal sequences converging towards a definite barycenter of  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$  is also solved, an application being made. An analogous unsolved problem concerning the convex pentagons is finally presented.

## 1. Définitions et position du problème

Il est utile ici de rappeler la définition générale d'une suite barypolygonale<sup>3</sup>. Soit  $\mathcal{P}$  un polygone à  $p \geq 3$  côtés, de sommets  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$ . Soit  $t = (t_k)_{1 \leq k \leq p}$  une famille ordonnée de réels de  $]0; 1[$ . Le  $t$ -barypolygone de  $\mathcal{P}$  est le polygone  $\mathcal{B}$  dont les sommets  $(B_k)_{1 \leq k \leq p}$  sont définis par les conditions barycentriques :

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, B_k = \text{bar} \{(A_k; t_k); (A_{k+1}; 1-t_k)\} \\ B_p = \text{bar} \{(A_p; t_p); (A_1; 1-t_p)\} \end{cases}$$

La suite  $t$ -barypolygonale de  $\mathcal{P}$  est la suite  $(\mathcal{B}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de polygones définie par récurrence de la manière suivante :

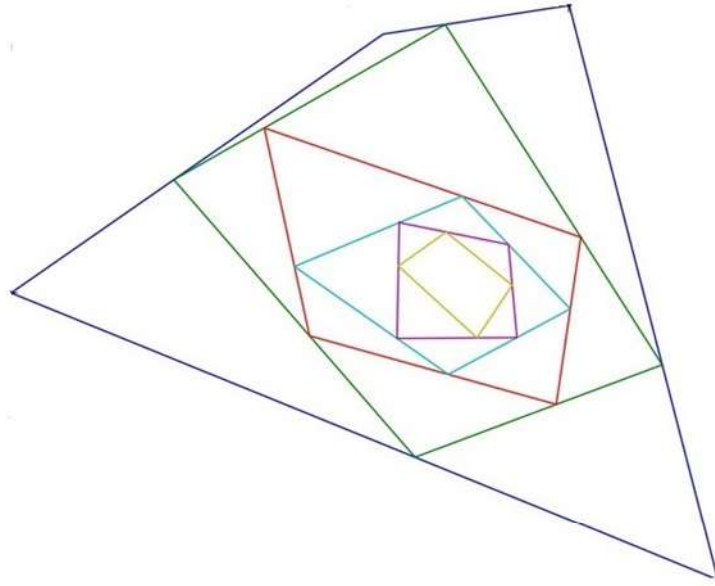
$$\begin{cases} \mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{P} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{B}^{(n+1)} = (B_k^{(n+1)})_{1 \leq k \leq p} \text{ est le } t\text{-barypolygone de } \mathcal{B}^{(n)} = (B_k^{(n)})_{1 \leq k \leq p} \end{cases}$$

<sup>1</sup> Professeur agrégé de mathématiques et docteur en histoire des sciences. Université de Mayotte (C.U.F.R. de Dembéni). Email : david\_pouvreau@orange.fr

<sup>2</sup> Professeur agrégé de mathématiques et docteur en mathématiques pures. Lycée Gustave Eiffel de Bordeaux. Email : remy.eupherte@free.fr

<sup>3</sup> Elle a été énoncée dans (Pouvreau, 2016), p. 16.

La figure représente les premiers termes d'une suite  $(\frac{5}{8}; \frac{1}{3}; \frac{7}{16}; \frac{3}{7})$ -barypolygonale d'un quadrilatère<sup>4</sup> :



Le problème considéré ici est celui de la limite des suites barypolygonales de  $\mathcal{P}$ . Comme dans le cas des suites barypolygonales *régulières*, où  $t_i = t_j$  pour tout  $(i; j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ , une approche algébrique de ce problème va être entreprise. La diversité des paramètres de la famille  $t$  dans le cas général complique la tâche par rapport au cas déjà résolu de leur égalité, où a été établie la convergence de la suite  $(\mathcal{B}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  vers le centre de gravité de  $\mathcal{P}$ . Un résultat généralisant ce premier théorème de convergence va néanmoins être démontré de deux manières<sup>5</sup> :

## 2. Énoncé du théorème général de convergence barypolygonale

### Théorème 1

Soit  $p \geq 3$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour tout polygone  $\mathcal{P}$  de sommets  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$  et toute famille ordonnée  $t = (t_k)_{1 \leq k \leq p}$  de réels de  $]0; 1[$ , la suite  $t$ -barypolygonale de  $\mathcal{P}$  converge vers

$$G = \text{bar} \left\{ \left( A_k; \frac{1}{1 - t_k} \right) \right\}_{1 \leq k \leq p}$$

## 3. Cadre algébrique et résultats préliminaires communs aux deux démonstrations du théorème

### 3.1. Formalisation matricielle : matrice $t$ -barypolygonale d'ordre $p$

On considère les points impliqués dans le plan complexe. On notera  $m$  l'affixe d'un point  $M$  dans ce plan. Les affixes des sommets des termes de la suite  $t$ -barypolygonale de  $\mathcal{P}$  sont alors les solutions du système récurrent :

<sup>4</sup> La plupart des figures de cet article ont été réalisées par notre collègue Florent Richard, que nous remercions.

<sup>5</sup> Ce précédent théorème a été démontré dans (Pouvreau, 2016), pp. 17-18. L'auteur avait alors déjà conclu cet article (p. 19) en annonçant la généralisation entreprise ici.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, & b_k^{(n+1)} = t_k b_k^{(n)} + (1-t_k) b_{k+1}^{(n)} \\ & b_p^{(n+1)} = (1-t_p) b_1^{(n)} + t_p b_p^{(n)} \end{cases}$$

avec  $b_k^{(0)} = a_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ .

Considérons la matrice colonne  $X_{p,n} = (b_k^{(n)})_{1 \leq k \leq p} \in \mathcal{M}_{(p;1)}(\mathbb{C})$  et la matrice carrée  $M_p(t) = [m_{ij}(t)]_{(i;j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2}$  définie par :

$$m_{ij}(t) = \begin{cases} t_i & \text{si } j = i \\ 1 - t_i & \text{si } i \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket \text{ et } j = i + 1 \\ 1 - t_p & \text{si } (i;j) = (p; 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appellera cette matrice stochastique  $M_p(t)$  la *matrice  $t$ -barypolygone* d'ordre  $p$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{p,n+1} = M_p(t)X_{p,n}$ , d'où :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{p,n} = (M_p(t))^n X_{p,0}$ . Si la suite de terme général  $(M_p(t))^n$  converge vers une limite  $L_p(t)$ , alors la suite  $(X_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_{p,n} = L_p(t)X_{p,0}$ . Le problème géométrique posé s'identifie dès lors à celui, algébrique, des propriétés de  $M_p(t)$ , en vue de déterminer l'éventuelle matrice  $L_p(t)$ .

### 3.2. Appartenance de 1 au spectre de $M_p(t)$ et sous-espace propre associé

Le premier résultat préliminaire commun aux deux démonstrations (qui constitue toutefois un cas particulier naturellement inclus dans les phases initiales de la première démonstration) est le suivant.

#### Proposition 2

Le nombre 1 est une valeur propre de multiplicité 1 de  $M_p(t)$  et son sous-espace propre associé  $E_1$  a pour base le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Le polynôme caractéristique  $\chi_{M_p(t)}(X) = \det(XI_p - M_p(t))$  de la matrice  $M_p(t)$  est calculable par développement selon la première colonne. Apparaissent alors deux déterminants triangulaires permettant ensuite d'obtenir immédiatement :

$$\chi_{M_p(t)}(X) = \prod_{k=1}^p (X - t_k) - \prod_{k=1}^p (1 - t_k)$$

Il est alors clair que  $\chi_{M_p(t)}(1) = 0$  : 1 est valeur propre de  $M_p(t)$ . De plus, la multiplicité de 1 est 1 dans la mesure où 1 est racine simple de  $\chi_{M_p(t)}$ . En effet :

$$(\chi_{M_p(t)})'(1) = \sum_{k=1}^p \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} (1 - t_i) > 0$$

Par ailleurs, pour tout  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(p;1)}(\mathbb{C})$  :

$$M_p(t)X = X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, & t_k x_k + (1-t_k)x_{k+1} = x_k \\ & (1-t_p)x_1 + t_p x_p = x_p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, (1-t_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ (1-t_p)(x_1 - x_p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall (i; j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, x_i = x_j$$

Donc le vecteur annoncé est une base de  $E_1$ , qui est de dimension 1.

### 3.3. Module des valeurs propres de $M_p(t)$

Une autre propriété générale des matrices barypolygonales va se révéler essentielle :

#### Proposition 3

Toute valeur propre de  $M_p(t)$  distincte de 1 est de module strictement inférieur à 1.

En effet, soit  $\lambda$  une telle valeur propre et soit  $E_\lambda$  son sous-espace propre associé. Par définition, il existe  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E_\lambda \setminus \{0\}$ . Et comme  $\lambda \neq 1$ , on n'a pas  $x_i = x_j$  pour tout  $(i; j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ . Par conséquent, il existe  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$  tel que  $|x_k| = \text{Max} \{|x_i|\}_{1 \leq i \leq p}$ , avec  $|x_k| \neq 0$  et  $|x_{k+1}| < |x_k|$  (en convenant de noter  $x_{p+1} = x_1$ ). Or,  $\lambda x_k$  est la  $k$ -ième coordonnée de  $M_p(t)X = \lambda X$ . Ceci implique :

$$\lambda x_k = t_k x_k + (1-t_k)x_{k+1}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, en tenant compte de  $t_k \in ]0; 1[$  et en utilisant  $|x_{k+1}| < |x_k|$ , on en déduit :

$$|\lambda||x_k| \leq t_k|x_k| + (1-t_k)|x_{k+1}| < t_k|x_k| + (1-t_k)|x_k| = |x_k|$$

De la division des deux membres de cette inégalité par  $|x_k| > 0$  résulte alors bien que  $|\lambda| < 1$ .

### 3.4. Existence d'une limite $L_p(t)$ de la suite $\left( \left( M_p(t) \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'un point limite $G$ de toute suite $t$ -barypolygonale

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  étant scindé dans  $\mathbb{C}$ , il en va ainsi du polynôme caractéristique  $\chi_{M_p(t)}$ . Par conséquent,  $M_p(t)$  est trigonalisable dans  $\mathbb{C}$ . Il existe donc dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une matrice réduite  $R_p(t)$  (diagonale ou triangulaire) et une matrice inversible  $Q_p(t)$  telles que :

$$M_p(t) = Q_p(t)R_p(t)(Q_p(t))^{-1}$$

Il est alors immédiat par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left( M_p(t) \right)^n = Q_p(t) \left( R_p(t) \right)^n \left( Q_p(t) \right)^{-1}$$

Notons  $m(\lambda)$  la multiplicité d'une valeur propre  $\lambda$  de  $M_p(t)$  (qui est sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_{M_p(t)}$ ). Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $M_p(t)$ , celles dont la multiplicité est supérieure à 1 étant répétées autant de fois que cette multiplicité. On conviendra dans ce qui suit de poser  $\lambda_1 = 1$ . Notons  $\text{Sp}(M_p(t)) = \{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq p}$  le spectre de  $M_p(t)$ , ensemble de ses valeurs propres. Notons que les éventuelles valeurs propres multiples n'apparaissent qu'une seule fois dans le spectre, donc que le cardinal de  $\text{Sp}(M_p(t))$  est strictement inférieur à  $p$  dès qu'il en existe au moins une.

Si  $R_p(t)$  est la diagonale  $\text{diag}((\lambda_k)_{1 \leq k \leq p})$ , alors  $(R_p(t))^n = \text{diag}((\lambda_k^n)_{1 \leq k \leq p})$  ; d'où, compte tenu des propositions 1 et 2 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (R_p(t))^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \Delta_p$$

Supposons maintenant que  $R_p(t)$  soit triangulaire mais non diagonale. On peut considérer sans inconvénient qu'il s'agit d'une réduite de Jordan de  $M_p(t)$ . C'est-à-dire d'une matrice diagonale par blocs triangulaires de type  $T_q(\lambda) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ , où  $\lambda \in \text{Sp}(M_p(t))$  et où  $q \in \llbracket 1; m(\lambda) \rrbracket$ , qui sont de la forme :

$$T_q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(en convenant que  $T_q(\lambda) = (\lambda)$  si  $q = 1$ , et que le bloc triangulaire supérieur gauche de  $R_p(t)$  est réduit au nombre  $\lambda_1 = 1$ ). Notons qu'*a priori*, plusieurs blocs de ce type peuvent exister pour une même valeur propre distincte de 1 ; l'unicité d'un tel bloc pour chaque valeur propre sera toutefois établie plus loin.

On a alors  $T_q(\lambda) = \lambda I_q + N_q$ , avec  $N_q$  qui est nilpotente d'ordre  $q$ , c'est-à-dire telle que pour tout  $j \geq q$ ,  $N_q^j = 0$ . La commutativité de  $\lambda I_q$  et  $N_q$  permet d'appliquer la formule du binôme :

$$(T_q(\lambda))^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\lambda I_q)^{n-j} N_q^j$$

On peut en déduire que pour tout  $n \geq q$  :

$$(T_q(\lambda))^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \binom{n}{2} \lambda^{n-2} & \dots & \dots & \binom{n}{q-1} \lambda^{n+1-q} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \binom{n}{2} \lambda^{n-2} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda^n & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \binom{n}{2} \lambda^{n-2} \\ \vdots & & & & \ddots & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & & \dots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$(R_p(t))^n$  est dès lors, pour tout  $n \geq \text{Max}\{m(\lambda)\}_{\lambda \in \text{Sp}(M_p(t))}$ , une matrice diagonale par blocs triangulaires du type  $(T_q(\lambda))^n$ . La suite de terme général  $(R_p(t))^n$  converge donc là aussi, compte tenu de la proposition 2, vers la matrice  $\Delta_p$  définie plus haut. Par croissances comparées, on a en effet :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(M_p(t)) \setminus \{1\}, \forall j \in \llbracket 0; m(\lambda) - 1 \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{j} \lambda^{n-j} = 0$$

On peut donc énoncer :

**Proposition 4**

La suite  $\left( (M_p(t))^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge toujours vers une matrice  $L_p(t)$  de rang 1 dont toutes les lignes sont égales. C'est la matrice  $L_p(t) = Q_p(t) \Delta_p (Q_p(t))^{-1}$ , où  $Q_p(t)$  est une matrice

de passage vers une réduite de  $M_p(t)$ , et où  $\Delta_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

Toute suite barypolygonale converge donc vers un unique point  $G$ .

Dans la mesure où  $E_1 = \text{Vect}(1; \dots; 1)$ ,  $Q_p(t)$  peut en effet être choisie de telle sorte que sa première colonne soit exclusivement composée de 1. De sorte que :

$$Q_p(t)\Delta_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci implique que  $L_p(t)$  a toutes ses lignes égales à la première ligne de  $(Q_p(t))^{-1}$  (donc aussi, au facteur inverse du déterminant de  $Q_p(t)$  près, à la transposée de la première colonne de la comatrice de  $Q_p(t)$ ). La dernière partie de la proposition résulte alors de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_{p,n} = L_p(t)X_{p,0}$  : toutes les lignes de la matrice colonne  $L_p(t)X_{p,0}$  sont égales à un unique nombre complexe  $g$ . Lequel est l'affixe d'un point limite  $G$  qui reste à préciser.

Deux voies distinctes de détermination de  $L_p(t)$ , donc du point  $G$ , vont dès lors être empruntées<sup>6</sup>.

## 4. Première méthode de détermination du point limite $G$

La première méthode fournie ici est une généralisation de celle qui serait usuellement suivie dans l'étude du problème sur un cas déterminé de suite barypolygonale, et de celle qui a été utilisée pour résoudre le problème dans le cas des suites régulières : tel est son premier intérêt. C'est-à-dire qu'elle repose sur la réduction effective de la matrice  $M_p(t)$ , donc sur la détermination d'une matrice de passage vers une de ses réduites. Son intérêt et le but de son exposition sont aussi d'explicitier systématiquement les propriétés des éléments propres de  $M_p(t)$ , en particulier celles de son polynôme caractéristique et de son spectre. Certains résultats non nécessaires ici seront dans cet esprit mentionnés dans le courant de la démonstration. Celle-ci va en définitive reposer sur des arguments relatifs à l'algèbre des polynômes. Son inconvénient est toutefois la lourdeur du formalisme nécessaire, et ses limites à cet égard vont être mises en évidence. Il s'agit de la sorte aussi de mettre en relief la force de la seconde méthode de démonstration qui sera ensuite exposée.

### 4.1. Quelques propriétés du spectre de la matrice $t$ -barypolygonale $M_p(t)$

L'existence de valeurs en général distinctes dans la famille ordonnée  $t$  rend ardue la détermination des racines de  $\chi_{M_p(t)}$ , c'est-à-dire de l'ensemble  $\text{Sp}(M_p(t))$ . On peut toutefois connaître ces nombres de manière indirecte, notamment au moyen de leurs fonctions symétriques élémentaires

---

<sup>6</sup> Une troisième méthode de détermination du point limite, qui exploite très habilement le fait que les matrices barypolygonales sont stochastiques, a été trouvée de manière indépendante par Vincent Bouis après la publication de (Pouvreau, 2016) et donc après que les deux démonstrations présentées ici aient été trouvées ; cette méthode sera exposée par ses soins dans un prochain numéro de la revue *Quadrature*.

$(\sigma_k)_{1 \leq k \leq p}$  : elles sont à l'exception de la dernière les mêmes que celles du polynôme normalisé de racines  $\{t_k\}_{1 \leq k \leq p}$ . On a ainsi en particulier :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^p \lambda_k = \sum_{k=1}^p t_k \quad ; \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \lambda_i \lambda_j = \sum_{1 \leq i < j \leq p} t_i t_j$$

$$\sigma_p = \prod_{k=1}^p \lambda_k = \prod_{k=1}^p t_k + (-1)^{p-1} \prod_{k=1}^p (1 - t_k)$$

Même si ce n'est pas utile aux démonstrations choisies, la richesse des propriétés combinatoires des valeurs propres doit plus généralement être soulignée. Ne serait-ce que parce qu'elles pourraient se révéler utiles à d'autres démonstrations algébriques du théorème 1 que celles présentées ici. Considérons à cet égard pour  $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$  fixé le polynôme  $C_{p,j,t}$  défini par :

$$C_{p,j,t}(X) = \chi_{M_p(t)}(\lambda_j - X) = \prod_{k=1}^p ((\lambda_j - t_k) - X) - \prod_{k=1}^p (1 - t_k)$$

Ce polynôme a clairement pour ensemble de racines :  $\{\lambda_j - \lambda_k\}_{1 \leq k \leq p}$ . Remarquons par exemple que la  $(p - 1)$ -ième fonction symétrique élémentaire de ces racines est :

$$\sum_{k=1}^p \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} (\lambda_j - \lambda_i) \right) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq j}} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Observons alors que cette même fonction symétrique est, en tant que coefficient de  $-X$  dans le développement de  $C_{p,j,t}(X)$ , aussi bien déterminée par :

$$\sum_{k=1}^p \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} (\lambda_j - t_i) \right)$$

On en déduit ainsi :

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \sum_{k=1}^p \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} (\lambda_j - t_i) \right) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq j}} (\lambda_j - \lambda_k)$$

Toute une famille de formules similaires pouvant naturellement être déterminées au moyen des autres fonctions symétriques élémentaires des racines de  $C_{p,j,t}$ .

## 4.2. Réductibilité de $M_p(t)$ et sous-espaces propres associés

Tandis que pour les suites régulières  $M_p(t)$  est nécessairement diagonalisable avec un spectre de cardinal  $p$ , ce n'est plus nécessairement le cas pour les suites irrégulières : il devient possible avec elles non seulement que toutes les valeurs propres ne soient pas de multiplicité 1, mais que  $M_p(t)$  ne soit pas diagonalisable. Le lecteur pourra vérifier que tel est par exemple le cas si  $p = 3$ ,  $t_1 = 4/5$ ,  $t_2 = 4/5$  et  $t_3 = 1/5$  : alors  $2/5$  est une valeur propre de multiplicité 2 et le sous-espace propre associé n'est que de dimension 1, donc la matrice associée n'est pas diagonalisable. Remarquons au passage que dans ce cas précis où  $p = 3$ , il est certain que si  $M_3(t)$  n'est pas diagonalisable, toutes ses valeurs propres



sont réelles. En effet, le spectre est alors de la forme  $\{1; \lambda\}$  avec  $\lambda$  qui est racine double de  $\chi_{M_3(t)}$ . Or,  $\chi_{M_3(t)}$  est à coefficients réels, donc le conjugué  $\bar{\lambda}$  en est aussi racine. De sorte que  $\bar{\lambda} = \lambda$ .

Déterminons en général les sous-espaces propres associés à  $\text{Sp}(M_p(t))$ . Soit  $\lambda \in \text{Sp}(M_p(t))$ . On note  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé à  $\lambda$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{(p;1)}(\mathbb{C})$ . On a, en utilisant pour la dernière équivalence le fait que  $\lambda$  est racine de  $\chi_{M_p(t)}$  (donc que la dernière équation est redondante) :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E_\lambda &\Leftrightarrow M_p(t)X = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, & t_k x_k + (1-t_k)x_{k+1} = \lambda x_k \\ & (1-t_p)x_1 + t_p x_p = \lambda x_p \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, & (\lambda - t_k)x_k = (1-t_k)x_{k+1} \\ & (\lambda - t_p)x_p = (1-t_p)x_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, & x_{k+1} = \frac{\lambda - t_k}{1-t_k} x_k \\ & (\lambda - t_p)x_p = (1-t_p)x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{\lambda - t_1}{1-t_1} x_1 \\ x_3 = \frac{(\lambda - t_1)(\lambda - t_2)}{(1-t_1)(1-t_2)} x_1 \\ \vdots \\ x_p = \left( \prod_{1 \leq k \leq p-1} (\lambda - t_k) / \prod_{1 \leq k \leq p-1} (1-t_k) \right) x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient finalement qu'une base de  $E_\lambda$  est le vecteur

$$v_\lambda = \left( 1; \frac{\lambda - t_1}{1-t_1}; \frac{(\lambda - t_1)(\lambda - t_2)}{(1-t_1)(1-t_2)}; \dots; \prod_{1 \leq k \leq p-1} (\lambda - t_k) / \prod_{1 \leq k \leq p-1} (1-t_k) \right)$$

On en déduit :

**Proposition 5**

Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M_p(t))$ ,  $\dim E_\lambda = 1$   
 et  $M_p(t)$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Card}(\text{Sp}(M_p(t))) = p$

**4.3. Quotient polynômial de  $\chi_{M_p(t)}$  par  $(X - 1)$**

Nous allons établir ici une propriété qui, dans la méthode de démonstration suivie, s'avère cruciale pour la détermination de  $L_p(t)$  :

**Proposition 6**

Le quotient de la division polynomiale de  $\chi_{M_p(t)}$  par  $(X - 1)$  est

$$K_{p,t}(X) = \prod_{k=2}^p (1-t_k) + \sum_{i=2}^{p-1} \left( \prod_{k=i+1}^p (1-t_k) \prod_{k=1}^{i-1} (X-t_k) \right) + \prod_{k=1}^{p-1} (X-t_k)$$

La démonstration se fait par récurrence sur  $p$ .

La proposition est vraie au rang  $p = 3$ . En tenant compte de  $\lambda_1 = 1$ , on obtient en effet :

$$(X - 1)K_{3,t}(X) = (X - 1)((1 - t_2)(1 - t_3) + (1 - t_3)(X - t_1) + (X - t_1)(X - t_2))$$

$$\begin{aligned}
 &= (X - 1) \left( X^2 + \left( 1 - \left( \sum_{k=1}^3 t_k \right) \right) X + \left( 1 - \left( \sum_{k=1}^3 t_k \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} t_i t_j \right) \right) \\
 &= (X - 1) \left( X^2 - (\lambda_2 + \lambda_3) X + \left( -(\lambda_2 + \lambda_3) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \lambda_i \lambda_j \right) \right) \\
 &= (X - 1)(X^2 - (\lambda_2 + \lambda_3) X + \lambda_2 \lambda_3) = (X - 1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) = \chi_{M_3(t)}
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant la proposition vraie pour un certain  $p \geq 3$ . En notant  $t'$  la famille ordonnée obtenue en complétant la famille ordonnée  $t$  par le terme final  $t_{p+1}$ , on obtient la succession d'égalités:

$$\begin{aligned}
 \chi_{M_{p+1}(t')} &= (X - t_{p+1}) \prod_{k=1}^p (X - t_k) - (1 - t_{p+1}) \prod_{k=1}^p (1 - t_k) \\
 &= -t_{p+1} \left( \prod_{k=1}^p (X - t_k) - \prod_{k=1}^p (1 - t_k) \right) + X \prod_{k=1}^p (X - t_k) - \prod_{k=1}^p (1 - t_k) \\
 &= -t_{p+1} \chi_{M_p(t)} + (X - 1) \prod_{k=1}^p (X - t_k) + \left( \prod_{k=1}^p (X - t_k) - \prod_{k=1}^p (1 - t_k) \right) \\
 &= (1 - t_{p+1}) \chi_{M_p(t)} + (X - 1) \prod_{k=1}^p (X - t_k) = (X - 1) \left( (1 - t_{p+1}) K_{p,t}(X) + \prod_{k=1}^p (X - t_k) \right)
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 K_{p+1,t'}(X) &= (1 - t_{p+1}) \prod_{k=2}^p (1 - t_k) + \sum_{i=2}^{p-1} \left( (1 - t_{p+1}) \prod_{k=i+1}^p (1 - t_k) \prod_{k=1}^{i-1} (X - t_k) \right) \\
 &\quad + (1 - t_{p+1}) \prod_{k=1}^{p-1} (X - t_k) + \prod_{k=1}^p (X - t_k) \\
 &= \prod_{k=2}^{p+1} (1 - t_k) + \sum_{i=2}^p \left( \prod_{k=i+1}^{p+1} (1 - t_k) \prod_{k=1}^{i-1} (X - t_k) \right) + \prod_{k=1}^p (X - t_k)
 \end{aligned}$$

Ce qui établit l'hérédité de la proposition. Laquelle est donc vraie pour tout  $p \geq 3$ , par récurrence.

Cette propriété va désormais permettre de déterminer  $L_p(t)$  dans les deux situations possibles de réductibilité (diagonalisabilité ou non). Nous allons à cette fin utiliser la matrice provisoirement notée  $H_p(t)$  et définie par :

$$H_p(t) = \left( \sum_{k=1}^p \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} u_i \right) \right)^{-1} \begin{pmatrix} \prod_{k \neq 1} u_k & \prod_{k \neq 2} u_k & \prod_{k \neq 3} u_k & \dots & \dots & \prod_{k \neq p} u_k \\ \prod_{k \neq 1} u_k & \prod_{k \neq 2} u_k & \prod_{k \neq 3} u_k & \dots & \dots & \prod_{k \neq p} u_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \prod_{k \neq 1} u_k & \prod_{k \neq 2} u_k & \prod_{k \neq 3} u_k & \dots & \dots & \prod_{k \neq p} u_k \end{pmatrix}$$

où  $u_k = 1 - t_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ .

#### 4.4. Détermination de $L_p(t)$ dans le cas où $M_p(t)$ est diagonalisable

Si  $M_p(t)$  est diagonalisable, la caractérisation déjà effectuée des sous-espaces propres associés permet de choisir  $Q_p(t)$ , matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{C}^p$  vers la base de vecteurs propres  $(v_{\lambda_k})_{1 \leq k \leq p}$ , égale à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \frac{\lambda_2 - t_1}{1 - t_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\lambda_p - t_1}{1 - t_1} \\ 1 & \frac{(\lambda_2 - t_1)(\lambda_2 - t_2)}{(1 - t_1)(1 - t_2)} & \dots & \dots & \dots & \frac{(\lambda_p - t_1)(\lambda_p - t_2)}{(1 - t_1)(1 - t_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \prod_{1 \leq k \leq p-1} (\lambda_2 - t_k) / \prod_{1 \leq k \leq p-1} (1 - t_k) & \dots & \dots & \dots & \prod_{1 \leq k \leq p-1} (\lambda_p - t_k) / \prod_{1 \leq k \leq p-1} (1 - t_k) \end{pmatrix}$$

Il est alors clair que la première colonne du produit  $H_p(t)Q_p(t)$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ . Mais on observe aussi que pour tout  $k \in \llbracket 2; p \rrbracket$ , la  $k$ -ième colonne de  $H_p(t)Q_p(t)$  est, à un facteur près, constituée  $p$  fois du nombre

$$\prod_{k=2}^p (1 - t_k) + \sum_{i=2}^{p-1} \left( \prod_{k=i+1}^p (1 - t_k) \prod_{k=1}^{i-1} (\lambda_k - t_k) \right) + \prod_{k=1}^{p-1} (\lambda_k - t_k)$$

D'après la proposition 6, ce nombre est  $K_{p,t}(\lambda_k)$  ; c'est donc 0 car  $\lambda_k$  est racine (simple) de  $K_{p,t}$ . On en

déduit que  $H_p(t)Q_p(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = Q_p(t)\Delta_p$ , donc que  $H_p(t) = Q_p(t)\Delta_p(Q_p(t))^{-1}$ . Il en résulte que  $H_p(t) = L_p(t)$ .

#### 4.5. Détermination de $L_p(t)$ dans le cas où $M_p(t)$ n'est pas diagonalisable

Supposons maintenant que  $M_p(t)$  n'est pas diagonalisable. Notons  $Q_p(t)$  une matrice de passage vers une réduite de Jordan  $R_p(t)$  de  $M_p(t)$ , telle que définie au 3.4. Il importe ici de remarquer que compte tenu de la proposition 4, on peut désormais spécifier la forme de cette réduite. En effet, cette

proposition implique qu'à chaque valeur propre  $\lambda_k$  de  $\text{Sp}(M_p(t)) \setminus \{1\}$  correspond dans  $R_p(t)$  un unique bloc triangulaire de la forme

$$T(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m(\lambda_k)}(\mathbb{C})$$

On peut choisir pour construire  $R_p(t)$  certains des mêmes vecteurs propres qu'au 4.4, en nombre égal au cardinal de  $\text{Sp}(M_p(t))$  qui est ici inférieur à  $p$ . Il est alors déjà acquis par la précédente démonstration que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M_p(t)) \setminus \{1\}$  dont les coordonnées dans la base canonique forment la  $c$ -ième colonne de  $Q_p(t)$ , la  $c$ -ième colonne du produit  $H_p(t)Q_p(t)$  est une colonne de 0. Le problème demeure de déterminer ce qu'il en est des autres colonnes de ce produit.

Ordonnons  $\text{Sp}(M_p(t))$  par ordre croissant de multiplicité de ses éléments. Soit  $r$  le nombre de ses valeurs propres simples. Considérons une valeur propre  $\lambda_s$  telle que  $s > r$ . On a alors  $m(\lambda_s) \geq 2$ . Notons  $(w_s; w_{s+1}; \dots; w_{s+m(\lambda_s)-1})$  une base du sous-espace caractéristique associé à  $\lambda_s$ , telle que la matrice de la restriction à ce sous espace de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  de matrice  $M_p(t)$  dans la base canonique soit la matrice  $T(\lambda_s)$  (on a en particulier :  $w_s = v_{\lambda_s}$ ).

Les coordonnées de  $w_{s+1}$  sont alors des solutions du système (qui en admet une infinité) :

$$\begin{cases} t_1 x_1 + (1 - t_1)x_2 = 1 + \lambda_s x_1 \\ \forall i \in \llbracket 2; p-1 \rrbracket, t_i x_i + (1 - t_i)x_{i+1} = \left( \prod_{k=1}^{i-1} (1 - t_k) \right)^{-1} \left( \prod_{k=1}^{i-1} (\lambda_s - t_k) \right) + \lambda_s x_i \\ (1 - t_p)x_1 + t_p x_p = \left( \prod_{k=1}^{p-1} (1 - t_k) \right)^{-1} \left( \prod_{k=1}^{p-1} (\lambda_s - t_k) \right) + \lambda_s x_p \end{cases}$$

Une unique solution de ce système peut être obtenue en choisissant  $x_1 = 0$ , ce choix déterminant comme suit les autres coordonnées de  $w_{s+1}$  :

$$\forall i \in \llbracket 2; p \rrbracket, x_i = \left( \prod_{k=1}^{i-1} (1 - t_k) \right)^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} \left( \prod_{\substack{1 \leq k \leq i-1 \\ k \neq j}} (\lambda_s - t_k) \right)$$

On en déduit que si les coordonnées de  $w_s$  forment la  $c$ -ième colonne de  $Q_p(t)$ , la  $(c + 1)$ -ième colonne du produit  $H_p(t)Q_p(t)$  est, à un facteur près, constituée  $p$  fois du nombre :

$$\prod_{k=3}^p (1 - t_k) + \sum_{j=4}^p \left( \prod_{k=j}^p (1 - t_k) \sum_{i=1}^{j-2} \prod_{\substack{1 \leq k \leq j-2 \\ k \neq i}} (\lambda_s - t_k) \right) + \sum_{j=1}^{p-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq p-1 \\ k \neq j}} (\lambda_s - t_k)$$

(la somme centrale de la formule devant être remplacée par 0 dans le cas où  $p = 3$ ). Il reste alors à remarquer que le polynôme dérivé du quotient  $K_{p,t}$  précisé au 4.3 est justement :

$$K_{p,t}'(X) = \prod_{k=3}^p (1 - t_k) + \sum_{j=4}^p \left( \prod_{k=j}^p (1 - t_k) \sum_{i=1}^{j-2} \prod_{\substack{1 \leq k \leq j-2 \\ k \neq i}} (X - t_k) \right) + \sum_{j=1}^{p-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq p-1 \\ k \neq j}} (X - t_k)$$

(la somme centrale de la formule devant être remplacée par le polynôme nul dans le cas où  $p = 3$ ). Le nombre unique de la  $(c + 1)$ -ième colonne du produit  $H_p(t)Q_p(t)$  n'est donc autre que  $K_{p,t}'(\lambda_s)$ . C'est-à-dire 0, puisque  $m(\lambda_s) \geq 2$  implique que  $\lambda_s$  est racine au moins double de  $K_{p,t}$ .

La démonstration précédente, qui règle ainsi le cas de toute valeur propre de multiplicité 2, peut alors être reconduite de manière similaire pour les autres vecteurs de la famille  $(w_{s+k})_{2 \leq k \leq m(\lambda_s)-1}$  dans le cas où  $m(\lambda_s) \geq 3$ , avec la même conclusion : on obtient systématiquement que la  $(c + k)$ -ième colonne du produit  $H_p(t)Q_p(t)$  est constituée  $p$  fois du nombre  $K_{p,t}^{(k)}(\lambda_s)$ , c'est-à-dire de 0 puisque  $\lambda_s$  étant racine de  $K_{p,t}$  de multiplicité  $m(\lambda_s)$ , on a  $K_{p,t}^{(k)}(\lambda_s) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 2; m(\lambda_s) - 1 \rrbracket$ . Il est clair toutefois qu'une telle démonstration pour une valeur propre de multiplicité strictement supérieure à 2 est lourde à formaliser : telle est la limite de cette première méthode de démonstration. Cette formalisation ne sera pas entreprise ici, compte tenu de l'existence de la seconde méthode de démonstration annoncée qui, tout en n'en dépendant pas, retrouve bien sûr le même résultat. L'essentiel, du point de vue adopté ici, était de rendre ainsi manifeste *du point de vue de l'algèbre polynomiale* la raison pour laquelle le résultat final est inscrit dans la structure même du polynôme caractéristique.

On obtient finalement par cette procédure que le produit  $H_p(t)Q_p(t)$  est, dans le cas de la non diagonalisabilité, le même que celui obtenu en cas de diagonalisabilité, c'est-à-dire la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = Q_p(t)\Delta_p. \text{ La conclusion du 4.4. est donc conservée : } L_p(t) = H_p(t).$$

**Proposition 7**

Quel que soit le type de réductibilité de  $M_p(t)$ , la suite  $\left( (M_p(t))^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers

$$L_p(t) = \left( \sum_{k=1}^p \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} u_i \right) \right)^{-1} \begin{pmatrix} \prod_{k \neq 1} u_k & \prod_{k \neq 2} u_k & \prod_{k \neq 3} u_k & \dots & \dots & \prod_{k \neq p} u_k \\ \prod_{k \neq 1} u_k & \prod_{k \neq 2} u_k & \prod_{k \neq 3} u_k & \dots & \dots & \prod_{k \neq p} u_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \prod_{k \neq 1} u_k & \prod_{k \neq 2} u_k & \prod_{k \neq 3} u_k & \dots & \dots & \prod_{k \neq p} u_k \end{pmatrix}$$

**4.6. Conclusion de la première démonstration**

Il résulte alors de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_{p,n} = L_p(t)X_{p,0}$  que :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_k^{(n)} = \sum_{k=1}^p \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} u_i \right) a_k / \sum_{k=1}^p \left( \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} u_i \right)$$

On reconnaît ainsi que la limite commune aux suites  $(B_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est le point :

$$G = \text{bar} \left\{ \left( A_k; \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} u_i \right) \right\}_{1 \leq k \leq p}$$

Ce résultat justifie le théorème 1 tel qu'il est énoncé, dans la mesure où le barycentre est conservé par division par un réel non nul et où :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} u_i / \prod_{1 \leq i \leq p} u_i = \frac{1}{1 - t_k}$$

## 5. Seconde méthode de détermination du point limite $G$

Contrairement à la première démonstration proposée, la seconde va se dispenser de toute considération concernant la réduction effective de la matrice  $M_p(t)$ . *A fortiori*, elle n'est aucunement conduite à examiner les propriétés de son polynôme caractéristique et de ses valeurs propres, hormis celles établies au 3. Elle ne quitte donc pas pour sa part le terrain de l'algèbre linéaire pour s'aventurer sur celui de l'algèbre polynomiale : elle s'y enracine fermement au contraire, afin d'exploiter au mieux la structure spécifique du problème et, plus profondément encore, d'en éclairer l'aspect géométrique sous un jour nouveau. Cette démonstration n'a certes pas l'avantage comme la précédente de détailler la structure des éléments propres de  $M_p(t)$ , ne fournissant à ce sujet aucune information nouvelle. Le résultat en est toutefois une absence presque totale de calculs, avec une démonstration qui, en définitive, est d'une concision à toute épreuve et d'une élégance très supérieure.

### 5.1. Existence d'une invariance barycentrique par passage au $t$ -barypolygone

Toute la démonstration repose sur l'observation suivante :

#### Proposition 8

Il existe une famille de réels strictement positifs  $(\gamma_k)_{1 \leq k \leq p}$  telle que le barycentre de tout système de points pondérés  $\{(Y_k; \gamma_k)\}_{1 \leq k \leq p}$  est aussi celui du système  $\{(Z_k; \gamma_k)\}_{1 \leq k \leq p}$ , où  $(Z_k)_{1 \leq k \leq p}$  est le  $t$ -barypolygone de  $(Y_k)_{1 \leq k \leq p}$ .

Notons en effet  $\Gamma = (\gamma_1 \ \dots \ \gamma_p)$  une matrice ligne quelconque de  $\mathcal{M}_{(1,p)}(\mathbb{C})$ . Alors la contrainte de l'énoncé est équivalente, en convenant de noter  $\gamma_{p+1} = \gamma_1$  à :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{C}), \quad \sum_{k=1}^p \gamma_k x_k = \sum_{k=1}^p \gamma_k (t_k x_k + (1 - t_k) x_{k+1})$$

Elle l'est donc aussi à l'identité matricielle :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{C}), \quad \Gamma X = \Gamma M_p(t) X$$

En prenant pour  $X$  les vecteurs de la base canonique, on obtient (égalité des colonnes) :

$$\Gamma = \Gamma M_p(t)$$

Par transposition, cette identité équivaut à :

$${}^t(M_p(t)) {}^t\Gamma = {}^t\Gamma$$

Il existe donc déjà une matrice non nulle  $\Gamma = (\gamma_1 \ \dots \ \gamma_p)$  satisfaisant la condition imposée, *sans* toutefois la condition de stricte positivité des  $(\gamma_k)_{1 \leq k \leq p}$  : cette existence est assurée par le fait que 1 étant valeur propre de  $M_p(t)$  de multiplicité 1, c'est aussi une valeur propre de  ${}^t(M_p(t))$ .

La forme d'une telle matrice est de surcroît obtenue par :

$${}^t(M_p(t)) {}^t\Gamma = {}^t\Gamma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1-t_p \\ 1-t_1 & t_2 & 0 & & & 0 \\ & 1-t_3 & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1-t_{p-1} & t_{p-1} \\ & & & & & 1-t_p & t_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall (i; j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, (1-t_i)\gamma_i = (1-t_j)\gamma_j$$

La condition imposée est donc satisfaite *avec* sa condition de stricte positivité si l'on choisit :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \gamma_k = \frac{1}{1-t_k}$$

La démonstration finale du théorème de convergence barypolygone en découle :

## 5.2. Conclusion de la seconde démonstration

Considérons désormais la matrice de  $\mathcal{M}_{(1,p)}(\mathbb{C})$  :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ \frac{1}{1-t_1} & \dots & & \frac{1}{1-t_p} \end{pmatrix}$$

D'après la proposition 8 :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{C}), \Gamma X = \Gamma M_p(t) X$$

On en déduit en particulier :

$$\Gamma X_{p,0} = \Gamma M_p(t) X_{p,0} = \Gamma X_{p,1} = \Gamma M_p(t) X_{p,1} = \Gamma X_{p,2}$$

puis, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma X_{p,0} = \Gamma X_{p,n}$$

Or, d'après la proposition 4, il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_{p,n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}$ . Par conséquent, on obtient par passage à la limite dans l'identité précédente :

$$\Gamma X_{p,0} = \Gamma \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire aussi :

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{1-t_k} b_k^{(0)} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{1-t_k} \alpha$$

Il en résulte :

$$\alpha = \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{1-t_k} b_k^{(0)} \right) / \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{1-t_k} \right)$$

Ce qui établit précisément le théorème 1.

## 6. Extension aux espaces affines réels de dimension finie quelconque

Dans un espace affine réel de dimension finie différente de 2, le terme « polygone », utilisé pour décrire  $\mathcal{P} = (A_k)_{1 \leq k \leq p}$  et les termes  $\mathcal{B}^{(n)} = (B_k^{(n)})_{1 \leq k \leq p}$  d'une suite barypolygone de  $\mathcal{P}$ , perd son sens. On peut alors plutôt parler de familles ordonnées de points. Mais on conservera faute de mieux et par un abus de langage sans inconvénient l'expression « suite barypolygone » pour décrire  $(\mathcal{B}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ .

La remarque déjà développée au sujet des suites barypolygones régulières s'applique alors au théorème 1 : il est clair que sa démonstration, effectuée dans le plan complexe pour des affixes, est en fait applicable séparément à chaque type de coordonnée des points de la famille ordonnée  $\mathcal{B}^{(n)}$ . La même conclusion peut ainsi être tirée : le théorème général s'applique en dimension finie quelconque.

Par ailleurs, il faut remarquer que le théorème 1 demeure valable si  $p = 2$ . Dans ce cas, le spectre de  $M_p(t)$  contient 1 et le réel  $\lambda = (t_1 + t_2) - 1 \in ]-1; 1[$  : la matrice est diagonalisable et la limite de la suite des puissances de sa diagonalisée est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , avec la conclusion annoncée par le théorème 1. Enfin, il est trivial que le théorème s'applique aussi pour  $p = 1$  : dans ce cas, toute « suite barypolygone » est stationnaire. Dans le cas  $p \in \{1; 2\}$ , il est certes tout aussi clair que le terme « polygone » perd son sens, mais on conservera là encore l'usage de l'expression choisie pour  $p \geq 3$ .

On peut dans ces conditions étendre comme suit la validité du théorème 1 :

### Théorème 2

Soit  $E$  un espace affine réel de dimension finie quelconque. Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour toute famille ordonnée  $\mathcal{F}$  de points distincts  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$  de  $E$  et toute famille ordonnée  $t = (t_k)_{1 \leq k \leq p}$  de réels de  $]0; 1[$ , la suite «  $t$ -barypolygone » de  $\mathcal{F}$  converge vers

$$G = \text{bar} \left\{ \left( A_k; \frac{1}{1-t_k} \right) \right\}_{1 \leq k \leq p}$$

## 7. Suites barypolygones convergeant vers un barycentre donné – Exemple de l'intersection des diagonales d'un quadrilatère

Nous terminerons cet exposé général sur les suites barypolygones par l'étude du problème réciproque : étant donnée une famille ordonnée  $\mathcal{F}$  de points distincts  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$  d'un espace affine de dimension finie quelconque (avec  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ), comment peut-on définir, si c'est bien possible, une suite « barypolygone » convergeant vers un barycentre  $G$  prédéfini du système de points pondérés  $\{(A_k; \alpha_k)\}_{1 \leq k \leq p}$ , où  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$  est une famille ordonnée de réels quelconque et de somme non nulle ?

### 7.1. Étude du cas général

Pour tout réel  $\mu \neq 0$ , on a aussi :



$$G = \text{bar} \left\{ \left( A_k; \frac{\alpha_k}{\mu} \right) \right\}_{1 \leq k \leq p}$$

Il existe une solution si et seulement si le système d'inconnue  $t = (t_k)_{1 \leq k \leq p}$  de  $]0; 1[$  suivant en a une :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \frac{1}{1 - t_k} = \frac{\alpha_k}{\mu}$$

Ce système n'a clairement pas de solution si les réels de  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$  ne sont pas tous de même signe ou si l'un d'entre eux est nul, du fait des conditions imposées sur  $t$ . Supposons désormais que tous ces réels sont de même signe. Le système est alors équivalent à :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad t_k = 1 - \frac{\mu}{\alpha_k}$$

Mais ce système n'a lui-même de solution que si, et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad 0 < \frac{\mu}{\alpha_k} < 1$$

Ce qui impose :

$$(\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, 0 < \mu < \alpha_k) \text{ ou } (\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \alpha_k < \mu < 0)$$

### Théorème 3

Soit  $E$  un espace affine réel de dimension finie. Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Soient  $\mathcal{F} = (A_k)_{1 \leq k \leq p}$  une famille ordonnée de points distincts de  $E$  et  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$  une famille ordonnée de réels non nuls et de somme distincte de 0. On note  $G = \text{bar}\{(A_k; \alpha_k)\}_{1 \leq k \leq p}$ . Alors :

- (i) Il n'existe une suite « barypolygone » de  $\mathcal{F}$  convergeant vers  $G$  que si tous les réels de  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$  sont non nuls et de même signe.
- (ii) Si tous les réels de  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$  sont non nuls et de même signe, il existe une infinité de suites «  $t$ -barypolygones » de  $\mathcal{F}$  convergeant vers  $G$ . Ce sont les suites déterminées par :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad t_k = 1 - \frac{\mu}{\alpha_k}$$

où  $\mu$  désigne tout réel tel que  $0 < |\mu| < \text{Inf}\{|\alpha_k|\}_{1 \leq k \leq p}$  et de même signe que les réels de  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$ .

## 7.2. Application à l'intersection des diagonales d'un quadrilatère convexe

Soit  $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4$  un quadrilatère strictement convexe. Quelles sont les suites  $t$ -barypolygones de  $\mathcal{P}$  convergeant vers le point  $D$  d'intersection des diagonales de  $\mathcal{P}$  ?

Pour résoudre ce problème, cherchons une caractérisation barycentrique de  $D$ . On a :

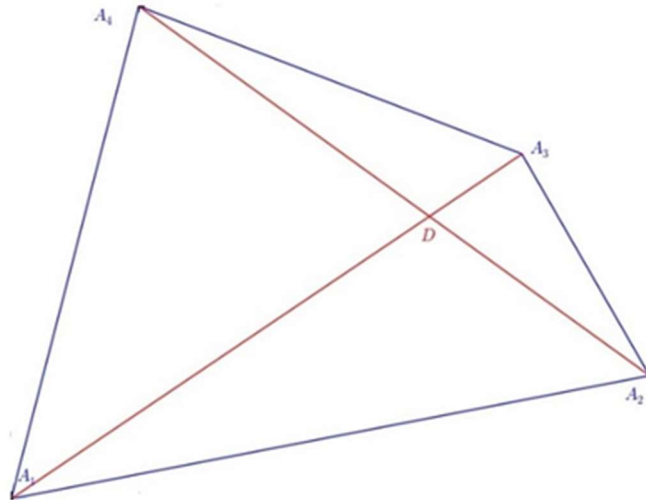
$$\text{aire}(DA_3A_2) = \frac{1}{2}DA_3 \times DA_2 \times \sin(\widehat{A_3DA_2}) \text{ et } \text{aire}(DA_3A_4) = \frac{1}{2}DA_3 \times DA_4 \times \sin(\widehat{A_4DA_3}).$$

En utilisant le fait que  $\widehat{A_3DA_2} + \widehat{A_4DA_3} = \pi$ , on peut en déduire :

$$\frac{DA_2}{DA_4} = \frac{\text{aire}(DA_3A_2)}{\text{aire}(DA_3A_4)}$$

De même :

$$\text{aire}(DA_1A_4) = \frac{1}{2}DA_1 \times DA_4 \times \sin(\widehat{A_1DA_4}) \text{ et } \text{aire}(DA_1A_2) = \frac{1}{2}DA_1 \times DA_2 \times \sin(\widehat{A_1DA_2}).$$



De sorte que :

$$\frac{DA_2}{DA_4} = \frac{\text{aire}(DA_1A_2)}{\text{aire}(DA_1A_4)}$$

Ces deux résultats impliquent :

$$\frac{DA_2}{DA_4} = \frac{\text{aire}(DA_3A_2)}{\text{aire}(DA_3A_4)} = \frac{\text{aire}(DA_1A_2)}{\text{aire}(DA_1A_4)}$$

D'où résulte aussi, en tenant compte de la convexité de  $\mathcal{P}$  pour la seconde égalité :

$$\frac{DA_2}{DA_4} = \frac{\text{aire}(DA_3A_2) + \text{aire}(DA_1A_2)}{\text{aire}(DA_3A_4) + \text{aire}(DA_1A_4)} = \frac{\text{aire}(A_1A_2A_3)}{\text{aire}(A_1A_3A_4)}$$

On obtient finalement ainsi, compte tenu là encore de la convexité de  $\mathcal{P}$  :

$$\text{aire}(A_1A_3A_4) \overrightarrow{DA_2} + \text{aire}(A_1A_2A_3) \overrightarrow{DA_4} = \vec{0}$$

C'est-à-dire :  $D = \text{bar}\{(A_2, \text{aire}(A_1A_3A_4)); (A_4, \text{aire}(A_1A_2A_3))\}$ .

On montre de manière analogue que  $D = \text{bar}\{(A_1, \text{aire}(A_2A_3A_4)); (A_3, \text{aire}(A_1A_2A_4))\}$ .

On peut alors conclure par associativité :

$$\begin{aligned} D &= \text{bar}\{(D, \text{aire}(A_1A_2A_3A_4)); (D, \text{aire}(A_1A_2A_3A_4))\} \\ &= \text{bar}\{(D, \text{aire}(A_2A_3A_4) + \text{aire}(A_1A_2A_4)); (D, \text{aire}(A_1A_3A_4) + \text{aire}(A_1A_2A_3))\} \\ &= \text{bar}\{(A_1, \text{aire}(A_2A_3A_4)); (A_2, \text{aire}(A_1A_3A_4)); (A_3, \text{aire}(A_1A_2A_4)); (A_4, \text{aire}(A_1A_2A_3))\} \end{aligned}$$

Appliquons maintenant le théorème 3, en tenant compte du fait que les aires sont toutes strictement positives. On obtient :

### Proposition 9

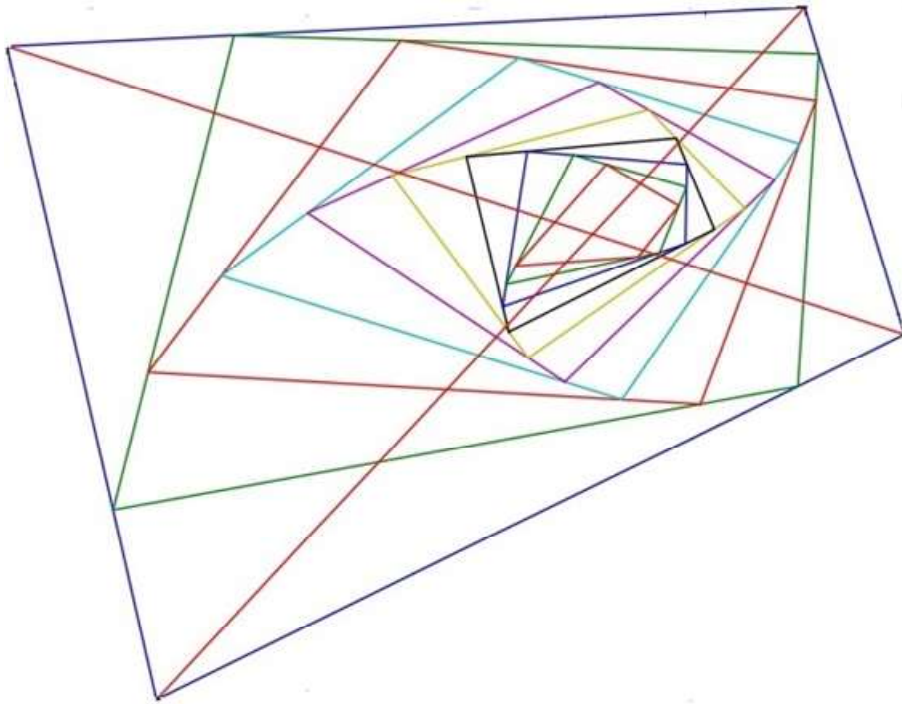
Soit  $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4$  un quadrilatère strictement convexe. Soit  $D$  le point d'intersection de ses diagonales. Il existe une infinité de suites  $t$ -barypolygonaux de  $\mathcal{P}$  convergeant vers  $D$ .

Ce sont les suites déterminées par :

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 - \frac{\mu}{\text{aire}(A_2A_3A_4)} & ; & & t_2 &= 1 - \frac{\mu}{\text{aire}(A_1A_3A_4)} \\ t_3 &= 1 - \frac{\mu}{\text{aire}(A_1A_2A_4)} & ; & & t_4 &= 1 - \frac{\mu}{\text{aire}(A_1A_2A_3)} \end{aligned}$$

où  $\mu$  désigne tout réel tel que :

$$0 < \mu < \text{Inf} \{ \text{aire}(A_2A_3A_4); \text{aire}(A_1A_3A_4); \text{aire}(A_1A_2A_4); \text{aire}(A_1A_2A_3) \}$$



## 8. Conclusion

Le succès obtenu dans l'étude des suites barypolygonales, outre son intérêt et son esthétique mathématiques intrinsèques, fournira certainement une ressource utile pour l'enseignement supérieur des mathématiques, compte tenu de sa richesse potentielle des points de vue de l'algèbre et de la géométrie – dont il montre d'ailleurs l'intime unité.

Ce succès n'est pas sans ironie. L'idée de cette étude est en effet née chez le premier auteur de cet article de la tentative de généraliser aux pentagones convexes la caractérisation barycentrique du point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère convexe énoncée plus haut. Cette tentative s'est pour l'instant soldée par un échec, mais le lecteur est invité à étudier lui-même le problème en question.

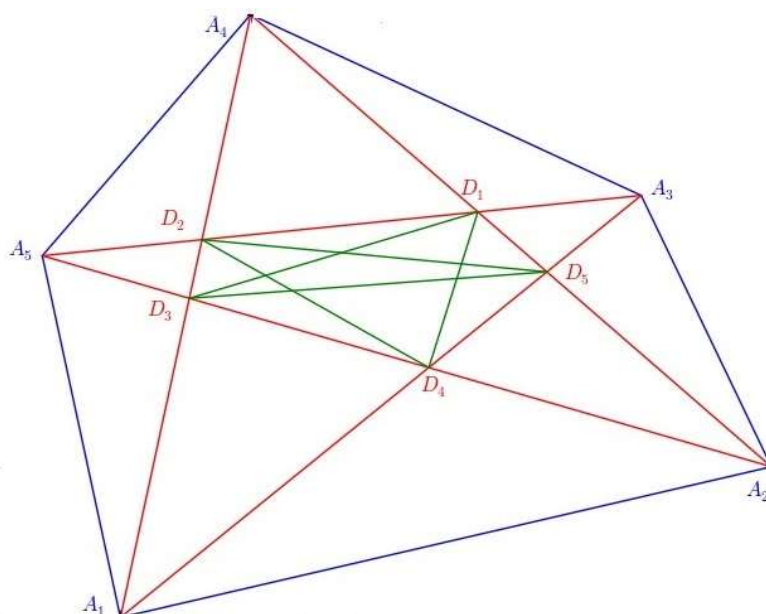
Si  $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5$  est un pentagone convexe, ses diagonales se coupent en cinq points formant eux-mêmes un pentagone convexe  $\mathcal{D}$  de sommets  $(D_k)_{1 \leq k \leq 5}$  que l'on peut définir comme suit:

$$\begin{aligned} D_1 &= (A_2A_4) \cap (A_3A_5) & ; & & D_2 &= (A_1A_4) \cap (A_3A_5) & ; & & D_3 &= (A_2A_5) \cap (A_1A_4) & ; \\ D_4 &= (A_2A_5) \cap (A_1A_3) & ; & & D_5 &= (A_2A_4) \cap (A_1A_3) \end{aligned}$$

On appelle  $\mathcal{D}$  le *diagopentagone* de  $\mathcal{P}$ . On définit la suite « diagopentagonale » de  $\mathcal{P}$  comme celle des pentagones convexes  $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  obtenue comme suit par récurrence :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0 = \mathcal{P} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{D}_{n+1} \text{ est le diagopentagone de } \mathcal{D}_n \end{cases}$$

La figure qui suit illustre les premiers termes d'une suite diagopentagonale.



Une suite diagopentagonale converge nécessairement vers une partie compacte  $L$  de  $\mathbb{R}^2$  (théorème des compacts emboîtés). Mais deux problèmes demeurent non résolus :

- (1) Quelle est la nature de  $L$  ?
- (2) Comment  $L$  peut-elle être formulée en fonction des caractéristiques géométriques de  $\mathcal{P}$  ?  
En particulier, si  $L$  est un point, comment le caractériser formellement comme barycentre des sommets de  $\mathcal{P}$  ?

## Références

D. Pouvreau, « Suites barypolygonales régulières », *Quadrature*, n°100, 2016, pp. 16-19.