Pouvreau D., « Suites barypolygonales régulières », *Quadrature*, n° 100, pp. 16-19, 2016.

Suites barypolygonales régulières

David Pouvreau[1]

Résumé

Le problème considéré est celui de la convergence et de la limite des suites « barypolygonales » régulières d'un polygone quelconque $\mathcal{P}$. Un barypolygone de $\mathcal{P}$ est ici un polygone dont chaque sommet est obtenu comme barycentre de deux sommets consécutifs de $\mathcal{P}$, avec une caractérisation barycentrique invariante. Une suite barypolygonale régulière de $\mathcal{P}$ est initialisée en $\mathcal{P}$, chacun de ses termes étant le barypolygone du précédent. Il est démontré algébriquement que toute suite barypolygonale régulière de $\mathcal{P}$ converge vers son centre de gravité, et l'intérêt d'une telle approche est brièvement discuté. Il est remarqué que ce résultat peut être généralisé sans difficulté aux mêmes suites définies pour toute famille ordonnée de points d'un espace affine réel de dimension finie quelconque. Une généralisation de ce théorème est enfin énoncée.

Abstract

The problem considered is the convergence and the limit of the regular "barypolygonal" sequences of any polygon $\mathcal{P}$. A barypolygon of $\mathcal{P}$ is here a polygon of which each vertex is a barycenter of two consecutive vertices of $\mathcal{P}$, by means of an invariant barycentric characterization. A regular barypolygonal sequence of $\mathcal{P}$ starts with $\mathcal{P}$, each of its terms being the barypolygon of the preceding term. It is algebraically proven that every regular barypolygonal sequence of $\mathcal{P}$ converges toward its center of gravity, and the interest of such an approach is briefly discussed. It is noticed that this result can easily be generalized to the same sequences defined for any ordered set of points of a real affine space, whatever its finite dimension. A generalization of this theorem is finally stated.

1. Définition d'une suite barypolygonale et position du problème

Soit $\mathcal{P}$ un polygone (convexe ou non) à $p \geq 3$ côtés. On note $(A_k)_{1\leq k\leq p}$ ses sommets. On associe à $\mathcal{P}$ une famille ordonnée $t = (t_k)_{1\leq k\leq p}$ de réels de $]0;1[$. On appelle alors *t–barypolygone* de $\mathcal{P}$ le polygone $\mathcal{B}$ dont les sommets $(B_k)_{1\leq k\leq p}$ sont définis par les conditions barycentriques

$$\begin{cases} \forall\, k \in [\![1; p-1]\!],\ B_k = \text{bar}\,\{(A_k\,;t_k)\,;(A_{k+1}\,;1-t_k)\} \\ \qquad\qquad\qquad\quad B_p = \text{bar}\,\{(A_p\,;t_p)\,;(A_1\,;1-t_p)\} \end{cases}$$

On peut ensuite définir la *suite t–barypolygonale* de $\mathcal{P}$ comme la suite $(\mathcal{B}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de polygones définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{P} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathcal{B}^{(n+1)} = \left(B_k{}^{(n+1)}\right)_{1\leq k\leq p} \ \text{ est le } t\text{– barypolygone de } \mathcal{B}^{(n)} = \left(B_k{}^{(n)}\right)_{1\leq k\leq p} \end{cases}$$

On appellera $\mathcal{B}^{(n)}$ le t–barypolygone d'ordre n de $\mathcal{P}$. S'il existe $t \in]0;1[$ tel que $t_i = t$ pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, on dit que cette suite $(\mathcal{B}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est *régulière*. Dans le cas contraire, on dira qu'elle est *irrégulière*.

Le problème général est celui de la convergence et de la limite éventuelle des suites barypolygonales de $\mathcal{P}$. Il a été résolu : sa solution sera énoncée en conclusion. Mais il a été jugé par l'auteur que le cas des suites régulières mérite d'être exposé à part du fait de son intérêt propre, lié à sa spécificité mathématique par rapport au cas général. Après avoir envisagé une solution purement

[1] Professeur agrégé de mathématiques au Lycée Gustave Eiffel de Bordeaux. Email : david_pouvreau@orange.fr

géométrique de ce problème et montré sa difficulté, on en fournira ici une solution algébrique, qui exploite sa structure linéaire.

2. Convergence et limite des suites barypolygonales régulières

2.1. Difficulté d'une approche géométrique du problème

L'intuition convainc d'emblée qu'une suite barypolygonale régulière quelconque d'un polygone $\mathcal{P}$ converge vers un point. Il est de plus relativement évident d'un point de vue purement géométrique que si une telle suite converge bien vers un point, alors ce dernier est nécessairement le centre de gravité G de $\mathcal{P}$. En effet, le théorème d'associativité des barycentres montre immédiatement que G est aussi le centre de gravité de $\mathcal{B}^{(1)}$ puis, par récurrence, celui de tous les termes de la suite barypolygonale considérée : il s'identifie donc à la limite de cette suite si cette limite est un point. Cette prémisse peut laisser penser qu'une approche purement géométrique est prometteuse, et fournit en tous cas une conjecture quant à la solution du problème.

La difficulté, dans une telle approche, devient alors de démontrer d'une part qu'il y a bien convergence d'une suite barypolygonale régulière, et d'autre part que la limite est bien un point. Si le polygone est convexe, on a affaire à une suite décroissante de compacts non vides (parties fermées et bornées de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$) et le théorème des « compacts emboîtés » assure immédiatement sa convergence. Mais même dans ce cas, le problème demeure de savoir si la limite de cette suite de polygones est un point ou un autre type d'objet géométrique : on sait seulement *a priori* que c'est un compact. Pour pouvoir démontrer que c'est un point, il faudrait établir la convergence vers 0 des diamètres des termes de cette suite. Là est la principale difficulté, qu'une approche algébrique va permettre de contourner[2].

2.2. La solution du problème

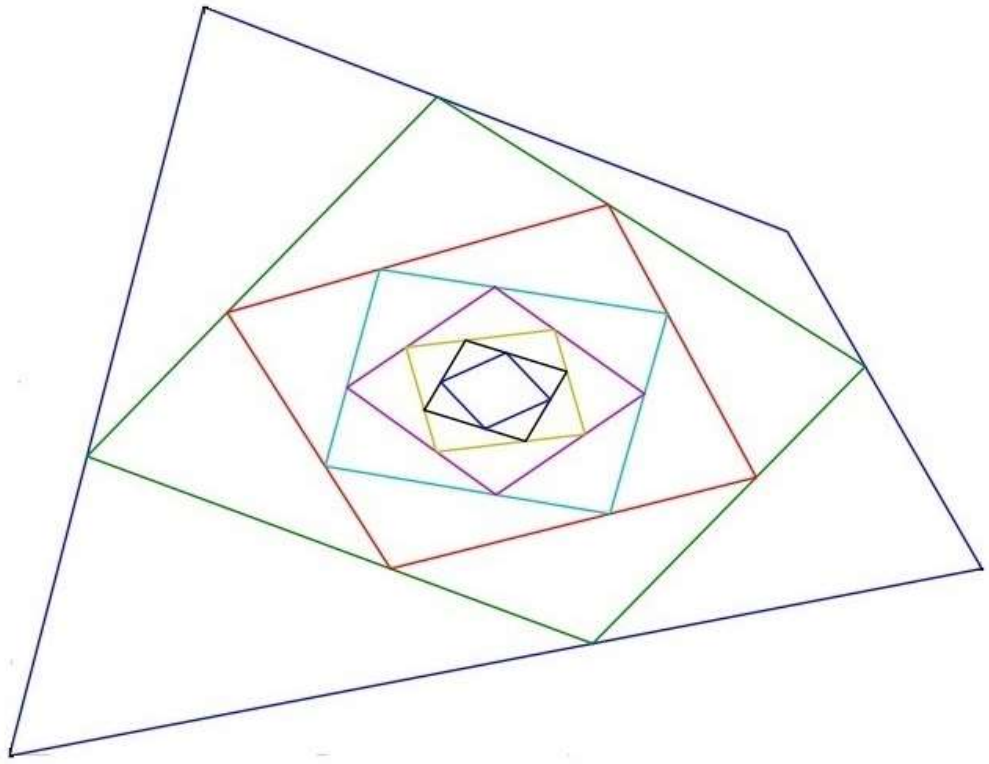
Nous allons dans ce qui suit établir le résultat suivant :

Théorème

Toute suite barypolygonale régulière de tout polygone converge vers le centre de gravité de ce polygone.

La figure illustre le cas des premiers termes d'une suite $\frac{2}{5}$ – barypolygonale d'un quadrilatère :

[2] Je remercie mes collègues Florent Richard, Emmanuel Tollis et Rémy Eupherte pour leurs commentaires.



2.3. Démonstration algébrique du théorème

On considère les points impliqués dans le plan complexe. On notera m l'affixe d'un point M dans ce plan. Soit $t \in]0;1[$ fixé. Par définition, les affixes des sommets des termes de la suite t–barypolygonale sont les solutions du système récurrent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} \forall\, k \in [\![1;p-1]\!],\ {b_k}^{(n+1)} = t{b_k}^{(n)} + (1-t){b_{k+1}}^{(n)} \\ {b_p}^{(n+1)} = t{b_p}^{(n)} + (1-t){b_1}^{(n)} \end{cases}$$

avec pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, ${b_k}^{(0)} = a_k$.

Considérons la matrice colonne $X_{p,n} = \left({b_k}^{(n)}\right)_{1\leq k\leq p} \in \mathcal{M}_{(p\,;1)}(\mathbb{C})$ et la matrice carrée $M_p(t) = \left[m_{ij}(t)\right]_{(i;j)\in[\![1;p]\!]^2}$ définie par :

$$m_{ij}(t) = \begin{cases} t \text{ si } j = i \\ 1-t \text{ si } i \in [\![1;p-1]\!] \text{ et } j = i+1 \\ 1-t \text{ si } (i;j) = (p;1) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Cette dernière matrice peut être appelée *matrice t–barypolygonale* régulière d'ordre p.

Il est immédiat que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{p,n+1} = M_p(t)X_{p,n}$, d'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\qquad X_{p,n} = \left(M_p(t)\right)^n X_{p,0}$$

Si la suite $((M_p(t))^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L_p, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} X_{p,n} = L_p X_{p,0}$. Le problème géométrique posé s'identifie dès lors à celui, algébrique, des propriétés de $M_p(t)$, en vue de déterminer l'éventuelle limite de ses puissances. La résolution de ce problème va impliquer le nombre $\omega_p = e^{i\frac{2\pi}{p}}$.

Le polynôme caractéristique $\chi_{M_p(t)}(X) = \det\left(XI_p - M_p(t)\right)$ de la matrice t–barypolygonale $M_p(t)$ est calculable par développement selon la première colonne. Apparaissent alors deux déterminants triangulaires permettant ensuite d'obtenir :

$$\chi_{M_p(t)}(X) = (X-t)(X-t)^{p-1} + (-1)^{p+1}(t-1)(t-1)^{p-1} = (X-t)^p - (1-t)^p$$

On en déduit les valeurs propres de $M_p(t)$:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}\big(M_p(t)\big) \Leftrightarrow (\lambda-t)^p = (1-t)^p \Leftrightarrow \frac{\lambda-t}{1-t} \in \mathbb{U}_p \Leftrightarrow \exists\, k \in [\![0;p-1]\!]\,,\ \frac{\lambda-t}{1-t} = e^{ik\frac{2\pi}{p}}$$
$$\Leftrightarrow \exists\, k \in [\![0;p-1]\!]\,, \lambda = t + (1-t){\omega_p}^k$$

Le spectre de $M_p(t)$ est ainsi : $\mathrm{Sp}\big(M_p(t)\big) = \left\{t + (1-t){\omega_p}^k\,;\, k \in [\![0;p-1]\!]\right\}$.

Comme il est clairement de cardinal p, $M_p(t)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Remarquons (avec $k=0$) que $1 \in \mathrm{Sp}\big(M_p(t)\big)$. Remarquons de plus que pour tout $k \in [\![0;p-1]\!]$:

$$\left|t + (1-t){\omega_p}^k\right|^2 - 1 = \left(t + (1-t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\right)^2 + \left((1-t)\sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\right)^2 - 1$$
$$= t^2 + (1-t)^2 - 1 + 2t(1-t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$$
$$= 2t(1-t)\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 1\right) \leq 0$$

Avec égalité si et seulement si $k=0$. Ceci montre que toutes les valeurs propres de $M_p(t)$ distinctes de 1 sont de module strictement inférieur à 1.

Cherchons maintenant les vecteurs propres associés. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in [\![0;p-1]\!]$, on a, en utilisant pour la seconde équivalence le fait qu'en vertu de la dimension 1 de chaque sous-espace propre et du « théorème du rang », le système est de rang $(p-1)$:

$$M_p(t)X = \left(t + (1-t){\omega_p}^k\right)X \Leftrightarrow \begin{cases} tx_1 + (1-t)x_2 = \left(t + (1-t){\omega_p}^k\right)x_1 \\ tx_2 + (1-t)x_3 = \left(t + (1-t){\omega_p}^k\right)x_2 \\ \vdots \\ tx_{p-1} + (1-t)x_p = \left(t + (1-t){\omega_p}^k\right)x_{p-1} \\ (1-t)x_1 + tx_p = \left(t + (1-t){\omega_p}^k\right)x_p \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{C} \\ \forall\, l \in [\![1;p-1]\!]\,,\ x_{l+1} = {\omega_p}^k x_l \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{C} \\ \forall\, l \in [\![1;p-1]\!]\,,\ x_l = {\omega_p}^{(l-1)k} x_1 \end{cases}$$

La réduction de $M_p(t)$ s'écrit donc $M_p(t) = Q_p D_p(t) {Q_p}^{-1}$, où :

$$D_p(t) = \mathrm{diag}\left(t + (1-t){\omega_p}^k\right)_{0 \leq k \leq p-1}$$

et où la matrice de passage $Q_p = [q_{lk}]_{(l;k)\in[\![1;p]\!]^2}$ est telle que pour tout $(l;k) \in [\![1;p]\!]^2$:

$$q_{lk} = {\omega_p}^{(l-1)(k-1)}$$

Compte tenu de la remarque faite sur les modules des valeurs propres de $M_p(t)$, il est clair que

$\lim_{n\to+\infty}\left(D_p(t)\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta_p$. Posons alors $L_p = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $Q_p\Delta_p = L_pQ_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, en utilisant pour le second produit le fait que :

$$\forall\, k \in [\![2;p]\!]\ ,\ \sum_{l=1}^{p}\left({\omega_p}^{k-1}\right)^{l-1} = \frac{1-\left({\omega_p}^{k-1}\right)^p}{1-{\omega_p}^{k-1}} = \frac{1-\left(e^{i2\pi}\right)^{k-1}}{1-{\omega_p}^{k-1}} = 0$$

On déduit alors de ce qui précède que $\lim_{n\to+\infty}\left(M_p(t)\right)^n = Q_p\Delta_p\ {Q_p}^{-1} = L_p$.

Il en résulte enfin, compte tenu de $\lim_{n\to+\infty} X_{p,n} = L_p\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$, que :

$$\forall\, k \in [\![1;p]\!],\ \lim_{n\to+\infty} {b_k}^{(n)} = \frac{a_1+\dots+a_p}{p}$$

Il s'agit de l'affixe du centre de gravité G de $\mathcal{P}$: le théorème énoncé est ainsi établi.

3. Commentaires sur l'intérêt de la démonstration utilisée

Cette démonstration algébrique a efficacement contourné la difficulté opposée à une approche qui se voudrait purement géométrique. Elle a mis en évidence et exploité la structure linéaire du problème considéré : c'est précisément cette mise en évidence qui a facilité la résolution.

L'intérêt didactique de cette démonstration n'est toutefois pas que méthodologique, il est aussi pour ainsi dire ontologique. Les invariants d'une matrice barypolygonale régulière, ainsi que la matrice de passage vers sa réduction, sont en effet directement et exclusivement liés à des invariants géométriques : le choix de la caractérisation barycentrique initialement choisie, ainsi que le nombre de côtés du polygone $\mathcal{P}$ et la mesure de l'angle au centre $2\pi/p$ qu'il détermine dans le cas du polygone *régulier*. La démonstration permet donc d'observer comment les invariants algébriques s'« incarnent » géométriquement et, réciproquement, comment les invariants géométriques s'« incarnent » algébriquement. Elle fournit ainsi une excellente illustration de l'impossibilité de tracer une frontière rigide entre algèbre et géométrie, et de la possibilité contraire d'interpréter un résultat d'un domaine dans le langage de l'autre.

Cette démonstration algébrique fournit aussi les moyens calculatoires pour analyser un autre problème concernant les suites barypolygonales régulières, dont l'étude est laissée au lecteur. L'expérimentation suggère la possibilité de l'existence de cycles de similitude de formes dans une telle suite : à quelle condition sur t un tel cycle peut-il exister et s'il existe, quelle est sa longueur ?

4. Extension aux espaces affines réels de dimension finie quelconque

Remarquons enfin que la démonstration du théorème n'a utilisé le plan complexe que par commodité : elle aurait aussi bien pu s'appliquer séparément aux suites de coordonnées (abscisses et ordonnées) des sommets des barypolygones, avec le résultat qu'elles ont pour limites respectives l'abscisse et l'ordonnée du centre de gravité de $\mathcal{P}$. Il en résulte que la considération du problème défini de manière identique pour une famille ordonnée $\mathcal{P} = (A_k)_{1\leq k\leq p}$ de $p \geq 3$ points d'un espace affine réel

de dimension finie quelconque conduit exactement à la même conclusion : il suffit de reproduire séparément la démonstration du théorème pour les suites de coordonnées des points des familles ordonnées définies de manière barycentrique au 1. et notées $\mathcal{B}^{(n)} = \left({B_k}^{(n)}\right)_{1\leq k\leq p}$. La seule différence entre ces suites de coordonnées est la matrice colonne constituant leur terme initial, déterminée pour chacune d'entre elles par le rang spécifique de coordonnées qui la caractérise. Mais la matrice du système récurrent obtenu pour chacun de ces rangs est la même, de sorte que pour toute valeur du paramètre t, la suite $\left(\mathcal{B}^{(n)}\right)$ converge là encore vers le centre de gravité de $\mathcal{P}$.

5. Conclusion : quid des suites barypolygonales irrégulières ?

Le succès obtenu dans cette étude des suites barypolygonales régulière incite naturellement à en chercher une généralisation s'appliquant aux suites quelconques. L'étude en est plus compliquée, mais elle a été menée à bien par le présent auteur et par l'un de ses collègues. La conclusion, établie de deux manières distinctes, en est le théorème général de convergence suivant, qui peut lui aussi être étendu en dimension finie quelconque :

> Soit $p \geq 3$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout polygone $\mathcal{P}$ de sommets $(A_k)_{1\leq k\leq p}$ et pour toute famille ordonnée $t = (t_k)_{1\leq k\leq p}$ de réels de $]0; 1[$, la suite t–barypolygonale de $\mathcal{P}$ converge vers $G = \mathrm{bar}\{(A_k; (1-t_k)^{-1})\}_{1\leq k\leq p}$.

Les démonstrations en seront publiées dans un prochain numéro de la revue *Quadrature*.