

## Contexte & Objectif

### Contexte

- Ferrofluides : suspensions de fines particules magnétiques ( $d \simeq 10 \text{ nm}$ ) dans un fluide porteur.
- Écoulement étudié : rupture capillaire de cylindres de ferrofluide en présence d'un champ magnétique.
- Application en impression : prédiction des gouttes satellites  $\rightarrow$  nécessité de prendre en compte les non-linéarités des équations.
- État de l'art : essentiellement des analyses linéaires de stabilité [1, 2].

### Objectif

- Réaliser une analyse faiblement non-linéaire de stabilité d'un cylindre de ferrofluide dans un champ magnétique axial.

## Formulation

### Hypothèses de travail

- Ferrofluide incompressible non-visqueux
- Champ magnétique stationnaire
- Réponse linéaire, homogène et isotrope du ferrofluide
- Conditions isothermes
- Gravité négligée
- Action du fluide environnant négligée
- Configuration axisymétrique

### Équations de volume

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ (2) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} &= -\vec{\nabla} \Pi \\ (3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ (4) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \vec{0} \end{aligned}$$

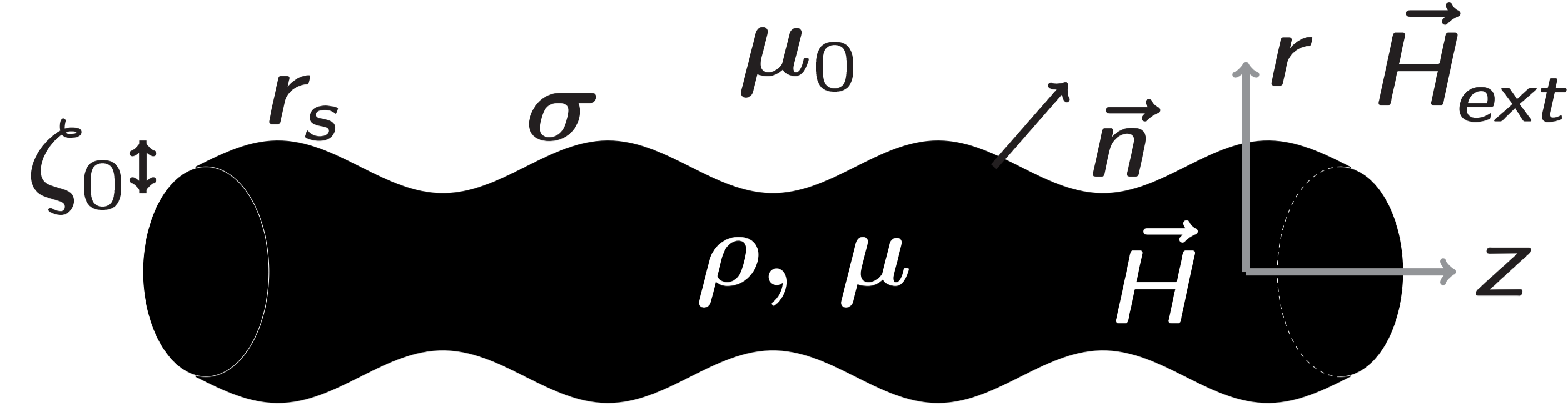
$$\text{avec } \Pi = P + \frac{N_{Bo,m}}{\mu_r - 1} \int_0^H v \frac{\partial M}{\partial v} dH \quad \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H}$$

$$N_{Bo,m} = \frac{\mu_0(\mu_r - 1)H_0^2 R_0}{\sigma} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \vec{B} = \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{T} = - \left( \Pi + \frac{N_{Bo,m}}{\mu_r - 1} \int_0^H M dH + \frac{1}{2} \frac{N_{Bo,m}}{\mu_r - 1} H^2 \right) \vec{i} + \frac{N_{Bo,m}}{\mu_r - 1} \vec{B} \vec{H}$$

### Équations à l'interface

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} &= -\frac{1}{\|\vec{\nabla}(r-r_s)\|} \frac{\partial(r-r_s)}{\partial t} \\ (2) \quad \left[ (\vec{n} \cdot \vec{T}) \cdot \vec{n} \right] &= \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \\ (3) \quad \left[ \vec{B} \cdot \vec{n} \right] &= 0 \\ (4) \quad \left[ \vec{H} \wedge \vec{n} \right] &= \vec{0} \end{aligned}$$



Cylindre de ferrofluide déformé

### Résolution pour $\vec{H} = \vec{e}_z$

Les grandeurs sont développées en série de puissance de l'amplitude de la déformation initiale :  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \zeta_0 \mathbf{A}_1 + \zeta_0^2 \mathbf{A}_2$  jusqu'à l'ordre 2 [3].

Problème aux valeurs propres [2]

$$\alpha_1^2 = \frac{l_1(k)}{l_0(k)} k (1 - k^2 + P_{mag}(N_{Bo,m}, \mu_r, k)) \quad \alpha_2^2 = \alpha_1^2(2k)$$

$$\text{avec } P_{mag} = -N_{Bo,m} (\mu_r - 1) k \frac{l_0(k)K_0(k)}{\mu_r l_1(k)K_0(k) + l_0(k)K_1(k)}$$

Problème aux valeurs initiales [4]

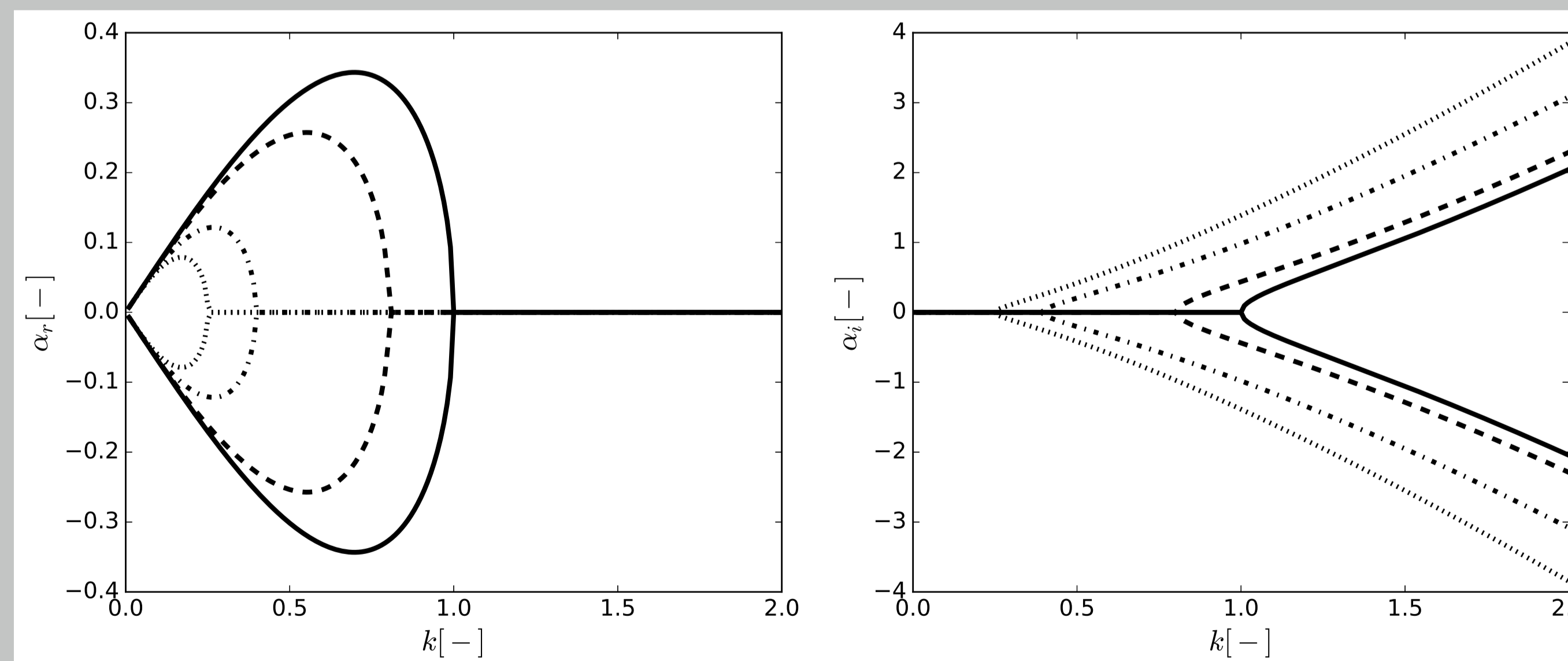
Conditions initiales de type déformation pure

$$\zeta_1(z, t = 0) = \cos(kz) \quad \zeta_2(z, t = 0) = -1/4$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}(z, t = 0) = 0 \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}(z, t = 0) = 0$$

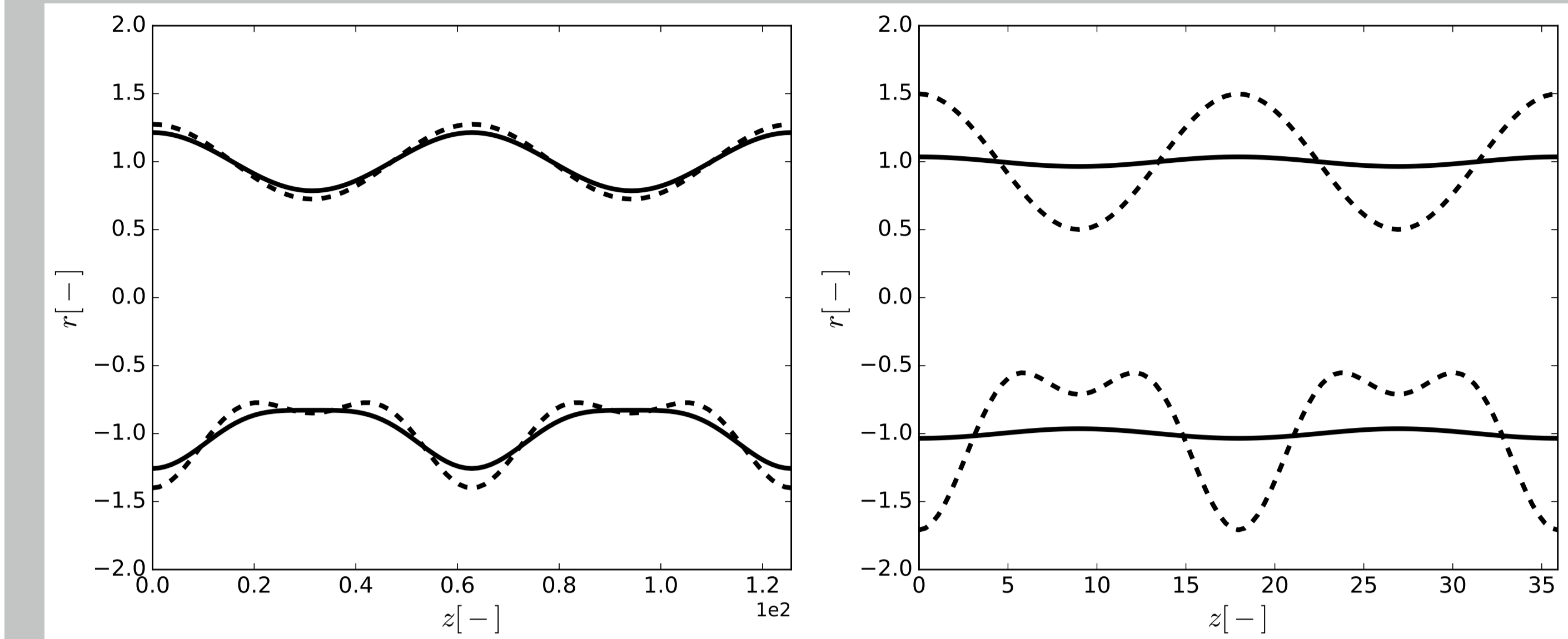
### Résultats

Solutions de la relation de dispersion pour  $\mu_r = 2$ ,  $N_{Bo,m} \in \{0; 1; 5; 10\}$



Taux de croissance  $\alpha_r = \text{Re}(\alpha_1)$  et fréquence  $\alpha_i = \text{Im}(\alpha_1)$  en fonction du nombre d'onde  $k$ .

## Résultats



Position de l'interface à l'ordre 1 (partie supérieure) et à l'ordre 2 (partie inférieure) pour  $N_{Bo,m} = 0$  (pointillé),  $N_{Bo,m} = 5$  (trait plein), ( $k = 0.1$ ,  $t = 57$ ) (gauche) et ( $k = 0.35$ ,  $t = 20$ ) (droite).

- Stabilisation et retard dans l'apparition de gouttes satellites quand  $N_{Bo,m}$  augmente.
- Stabilisation et suppression des gouttes satellites quand  $k$  se rapproche de la coupure.

## Conclusions & Perspectives

### Conclusions

- Effet stabilisateur du champ magnétique axial.
- Retard dans l'apparition de gouttes satellites quand l'intensité du champ augmente.
- Possibilité de supprimer les gouttes satellites à un nombre d'onde faible devant 1 en augmentant l'intensité du champ magnétique.

### Perspectives

- Prise en compte de la viscosité des fluides dans l'analyse faiblement non-linéaire.
- Investigation d'autres formes de champ magnétique.
- Application en médecine : injection de ferrofluide visqueux dans un fluide biologique.

## Remerciements

Cette étude est financée par le projet INFEMA du LabEx EMC<sup>3</sup> commun entre le LOMC (Normandie Univ, UNIHAVRE, CNRS) et le CORIA.

## Références

- [1] Ronald E. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1985.
- [2] Romain Canu and Marie-Charlotte Renoult. Linear stability analysis of a Newtonian ferrofluid cylinder under a magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 2021 (accepted).
- [3] Man-Chuen Yuen. Non-linear capillary instability of a liquid jet. *J. Fluid Mech.*, 33(1) :151–163, July 1968.
- [4] Louise Cottier, Günter Brenn, and Marie-Charlotte Renoult. Initial conditions to study the temporal behavior of a viscoelastic liquid jet under perturbation. *Atomization and Sprays*, 31(3) :1–15, 2021 (accepted).