



HAL
open science

Méthode de recalage de modèles de structures en dynamique: approche par réaction dynamique, approche par la notion d'erreur en relation de comportement

Pierre Ladevèze, M. Reynier, H. Berger, Roger Ohayon, F. Quétin, L. Barthe

► To cite this version:

Pierre Ladevèze, M. Reynier, H. Berger, Roger Ohayon, F. Quétin, et al.. Méthode de recalage de modèles de structures en dynamique: approche par réaction dynamique, approche par la notion d'erreur en relation de comportement. *La Recherche Aérospatiale*, 1991, 1991-5, pp.9-19. hal-03178679

HAL Id: hal-03178679

<https://hal.science/hal-03178679>

Submitted on 20 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉTHODES DE RECALAGE DE MODÈLES DE STRUCTURES EN DYNAMIQUE : APPROCHE PAR RÉACTION DYNAMIQUE, APPROCHE PAR LA NOTION D'ERREUR EN RELATION DE COMPORTEMENT

par

P. LADEVEZE(*) M. REYNIER(*) H. BERGER(**) R. OHAYON(**)
F. QUETIN(**) et L. BARTHE(**)

RÉSUMÉ

L'objectif de l'ajustement de modèles par éléments finis est de contrôler et d'améliorer le modèle représentatif de la structure réelle à partir d'une première modélisation, par éléments finis généralement, et de résultats expérimentaux.

Dans la dernière décennie, ce problème a suscité un réel intérêt aussi bien dans le domaine universitaire qu'industriel et un groupe de travail européen, piloté par l'ONERA, s'est constitué dans le cadre du GARTEUR [1] pour confronter les différentes stratégies à travers des benchmarks spécifiques.

Dans cet article, nous présentons quelques méthodes exploitant les caractéristiques modales expérimentales pour le recalage de modèle, plus précisément deux stratégies sont explicitées :

- la méthode de recalage développée à l'ONERA, qui s'appuie sur une expression variationnelle des équations d'équilibre dynamique; les forces de réaction dynamique dues aux imperfections de la matrice des raideurs et simultanément des masses du modèle éléments finis, sont utilisées pour localiser les erreurs dominantes, en se servant des fréquences propres expérimentales et des vecteurs déplacements correspondant;
- l'approche développée au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan postulant que les erreurs de modélisations sont localisées là où l'erreur en relation de comportement est la plus importante.

Mots clés (lexique CEDOCAR) : Méthode élément fini – Analyse dynamique structure – Corrélation calcul-Expérience – Recalage – Réaction dynamique – Erreur en relation de comportement – Essai vibration.

UPDATING METHODS OF DYNAMIC STRUCTURED FINITE ELEMENT MODEL: DYNAMIC REACTION FORCES APPROACH AND ERROR IN CONSTITUTIVE EQUATION APPROACH

ABSTRACT

The purpose of the Finite Element Model adjustment is to control and improve the representative model of a real structure using a preliminary finite element modelling and dynamic data, obtained experimentally.

Over the last ten years, this problem has aroused a great interest in universities and industries and a European group, has been formed by ONERA, to evaluate the different methods through specific benchmarks.

In this paper, we present some studies improving the F.E. model by means of experimental modal results, and more precisely we describe two approaches:

- the updating method developed at ONERA, that is based on the variational expression of the dynamic equilibrium equations; the dynamic reaction forces due to the stiffness matrix and mass matrix imperfections of the finite element model are used to localize the error, using experimental frequencies and corresponding displacements;
- the approach developed by the LMT laboratory in Cachan assumes that the modelling errors are localized where the errors on the constitutive relation are the largest.

Keywords (NASA thesaurus): Finite element method – Dynamic structural analysis – Correlation analysis-tests – Adjusting – Dynamic reaction force – Error on the constitutive relation – Vibration tests.

(*) Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS de Cachan/CNRS, Université Paris-VI, 61, avenue du Président-Wilson, 94325 Cachan Cedex.

(**) Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques (ONERA), B.P. 72, 92322 Chatillon Cedex.

INTRODUCTION

Les problèmes de recalage de modèles de structures à partir d'informations mesurées s'inscrivent dans le cadre du nouveau dialogue Calcul/Expérience qui est en train de s'instaurer. Il s'agit de problèmes inverses où les difficultés sont multiples : d'ordre théorique, mathématique et mécanique, aussi expérimentale et numérique. S'il existe des approches générales pour la description et la résolution de ces problèmes, elles ne dispensent en aucune façon de considérations liées à la physique [2] : il faut choisir judicieusement les fonctions objectifs à optimiser, les mesures expérimentales à utiliser. Les méthodes de corrections de modèles illustrent parfaitement ce dernier aspect.

La qualification en comportement dynamique des structures, notamment des structures spatiales, fait intervenir de plus en plus les simulations numériques au détriment des essais trop coûteux. Il est alors nécessaire de disposer d'un modèle représentatif de la réalité, le modèle mathématique le plus utilisé étant celui des vibrations libres d'une structure complexe discrétisée en éléments finis. Des essais fournissent les caractéristiques modales (généralement les premières fréquences propres, et des modes propres associés incomplètement connus), le problème est alors de **minimiser l'écart (calcul, expérience)** et ainsi d'**améliorer le modèle E.F.**

De nombreuses stratégies de recalage ont été proposées :

- les méthodes telles que celles de **Baruch** [3], **Berman** [4], **Chen** [5], **Caesar** [6], **Ewins** [7, 8], **Link** [9], qui construisent directement les matrices corrigées de masse et de rigidité à partir des caractéristiques modales mesurées et des relations d'orthogonalité;

- les méthodes utilisant les techniques de sensibilité, **Wei** [10], **Collins** [11], **Lallement** [12], **Dascotte** [13], expriment les valeurs propres en fonction des paramètres de conception par développement en série de Taylor. Ces méthodes font apparaître les coefficients correcteurs directement devant les matrices élémentaires, la stratégie la plus répandue utilise les moindres carrés (estimation bayésienne);

- **Cottin** [14], **Niedbal**, **Luber**, **Klusowski** [27] ainsi que **Nash** [28] cherchent à améliorer les matrices des raideurs, masses et amortissements en minimisant les erreurs sur les entrées (forces excitatrices expérimentales-forces excitatrices calculées à partir du modèle et des déplacements expérimentaux), ou, les erreurs sur les sorties (déplacements expérimentaux-déplacements calculés à partir du modèle et des forces excitatrices expérimentales);

- **Boutin**, **Petiau** [15] minimisent un écart « structure réelle-modèle par éléments finis » faisant intervenir les fréquences et les déformées modales restreintes aux seuls degrés de liberté mesurés avec

le respect des équations d'équilibre dynamique. Le problème d'optimisation est ramené à un problème sans contrainte à l'aide d'une méthode de pénalisation;

- les méthodes développées par **O'Callahan** [16], **Leuridan** [17] utilisent les formes propres expérimentales pour transformer les matrices des raideurs et des masses du modèle éléments finis dans la base des modes (forme **Craig-Bampton**). Chaque terme de valeur expérimentale connue peut s'exprimer à partir d'une somme de termes énergétiques élémentaires pré-multipliés par les coefficients correcteurs. La résolution s'effectue par la méthode des moindres carrés sur les produits énergétiques pour les modes mesurés.

L'approche de l'ONERA ([18, 19, 20] est fondée sur le **calcul des résidus dans l'expression variationnelle des équations d'équilibre**, et utilise les « modes » expérimentaux dans la résolution de problèmes statiques linéaires. L'écart entre modèle et mesures se traduit par des forces de réaction non nulles sur les degrés de liberté de la structure. Le calcul des paramètres correcteurs est, à chaque itération, un problème d'optimisation quadratique sans contrainte. Cette stratégie a été adoptée en [21].

L'approche proposée par le LMT [22, 23, 24], et initiée avec l'Aérospatiale [26], s'appuie sur la notion d'**erreur en relation de comportement** telle que présentée dans [26]. Les valeurs propres mesurées sont considérées comme exactes, par contre, les modes propres sont traités avec une certaine pondération. On les considère simultanément sans imposer d'ordre entre eux. Le problème de la localisation est linéaire de dimension raisonnable, la correction constitue un problème non linéaire de dimension égale au nombre de paramètres à corriger.

Toutes ces méthodes ont la particularité d'être **évolutives**; elles s'adaptent constamment à la progression de l'expérimentation et de l'aspect numérique.

LOCALISATION DES ERREURS DE MODÉLISATIONS

APPROCHE PAR RÉACTION DYNAMIQUE

L'une des difficultés majeure à résoudre dans le problème du recalage, est que l'on dispose d'informations incomplètes, les déplacements expérimentaux sont connus en quelques points de mesure, en nombre très inférieur au nombre de degrés de liberté du modèle. Différentes réponses ont été apportées pour la reconstruction d'un vecteur complet « expérimental », l'ONERA a mis au point une méthodologie qui procède par la résolution de trois problèmes statiques

successifs :

Posé en terme d'équations d'équilibre locales, on résout le premier problème statique suivant :

Soit Ω une structure de frontière $\delta\Omega = \delta\Omega_1 \cup \delta\Omega_2$ où $\delta\Omega_1$ est la partie de frontière à déplacements connus (conditions aux limites données et déplacements expérimentaux) et $\delta\Omega_2$ la partie complémentaire, on cherche à résoudre

$$\text{div } \sigma + \lambda_{\text{exp}} \rho u = 0$$

dans Ω où σ est le champ de contrainte

u le champ de déplacement,

ρ la masse volumique

avec les conditions aux limites

$$u = 0 \quad \text{sur } \delta\Omega'_1$$

$$u = U_{\text{exp}} \quad \text{sur } \delta\Omega''_1 \quad \text{avec } \delta\Omega_1 = \delta\Omega'_1 \cup \delta\Omega''_1$$

ce qui conduit à la solution

$$u = U_1 \quad \text{dans } \Omega \cup \delta\Omega_2$$

et

$$\sigma \mathbf{n} = R \neq 0 \quad \text{sur } \delta\Omega''_1 \quad (R \text{ forces de réaction}).$$

Pour un milieu discrétisé, l'expression variationnelle de ces équations conduit, après discrétisation par éléments finis, au problème statique (1) suivant, en définissant l'opérateur matriciel T_k :

$$T_k = K_0 - \lambda_{\text{exp}k} M_0 + \sum_1^n \beta_j K_j - \lambda_{\text{exp}k} \sum_1^p \gamma_i M_i.$$

$K_0(M_0)$ est la matrice de raideur (de masse) du modèle initial;

$K_j(M_j)$ la matrice élémentaire (de dimension étendue à celle de K_0) de raideur (de masse) de l'élément $j(i)$;

$\beta_j(\gamma_i)$ l'erreur relative des caractéristiques de raideur (de masse) de l'élément $j(i)$;

$\lambda_{\text{exp}k}$ la valeur propre expérimentale du mode k ;

$U_{\text{exp}k}$ la partie connue du déplacement expérimental;

U_k le déplacement inconnu;

β_j, γ_i peuvent affecter un groupe d'éléments.

Dans tout ce qui suit, on envisage des corrections portant sur la matrice des rigidités et sur la matrice des masses.

Pour une valeur déterminée β_j, γ_i ($\beta_j = \gamma_i = 0$ initialement) et pour chaque mode noté k :

$$\begin{bmatrix} T_{k11} & T_{k12} \\ T_{k21} & T_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k \\ U_{\text{exp}k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

où l'on impose des forces de réactions nulles sur tous les d.d.l. inconnus. La résolution de (1) fournit U_k et R_k .

Afin d'obtenir des forces de réaction non nulles sur l'ensemble des degrés de liberté de la structure, on résout successivement les deux problèmes statiques :

$$\begin{bmatrix} T_{k11} & T_{k12} \\ T_{k21} & T_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k \\ U'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

qui fournit U'_k et R'_k , enfin

$$\begin{bmatrix} T_{k11} & T_{k12} \\ T_{k21} & T_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U''_k \\ U_{\text{exp}k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R''_k \\ R'_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

qui permet alors de compléter le déplacement $U_{\text{exp}k}$ et d'obtenir des forces de réaction sur tous les d.d.l. de la structure.

Remarque : Le calcul du déplacement complet est possible si les sous-matrices T_{k11} et T_{k22} sont inversibles, ce qui est le cas pour des problèmes basses fréquences avec des d.d.l. mesurés régulièrement répartis.

La fonction erreur est définie par

$$g_i = \frac{\max_k \|R_{ik}\|}{\max_i (\max_k \|R_{ik}\|)} \quad (4)$$

avec $\|R_{ik}\|$ norme de la force de réaction au nœud i pour le mode k .

LA RÉPARTITION DE CETTE FONCTION SUR LA STRUCTURE DÉFINIT LES SOUS-STRUCTURES A CORRIGER

En utilisant la fonction erreur g_i , on peut extraire, à la première itération, les nœuds E_m à erreur minimale tels que $g_i < \varepsilon$ donné, le déplacement complété D_{E_m} à ces nœuds peut être considéré comme exact. Pour les itérations suivantes, le calcul du déplacement complet peut s'effectuer uniquement sur les nœuds E_M localisés à erreur maximale en imposant à la frontière Γ commune entre E_M et E_m les valeurs D_Γ extraites de D_{E_m} (Fig. 1 et 2). Les forces de réaction de E_m sur E_M ne doivent pas être incluses dans le calcul de la fonction coût. Cette technique, qui consiste à examiner « à la loupe » une zone locale à partir de déplacements connus sur la frontière de la sous-structure, permet d'obtenir des problèmes de petite taille indépendants.

APPROCHE PAR LA NOTION D'ERREUR EN RELATION DE COMPORTEMENT

Considérons un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$, soient deux parties complémentaires de la frontière $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ telles que les déplacements sont imposés sur $\partial\Omega_1$ et les efforts sur la partie complémentaire $\partial\Omega_2$.

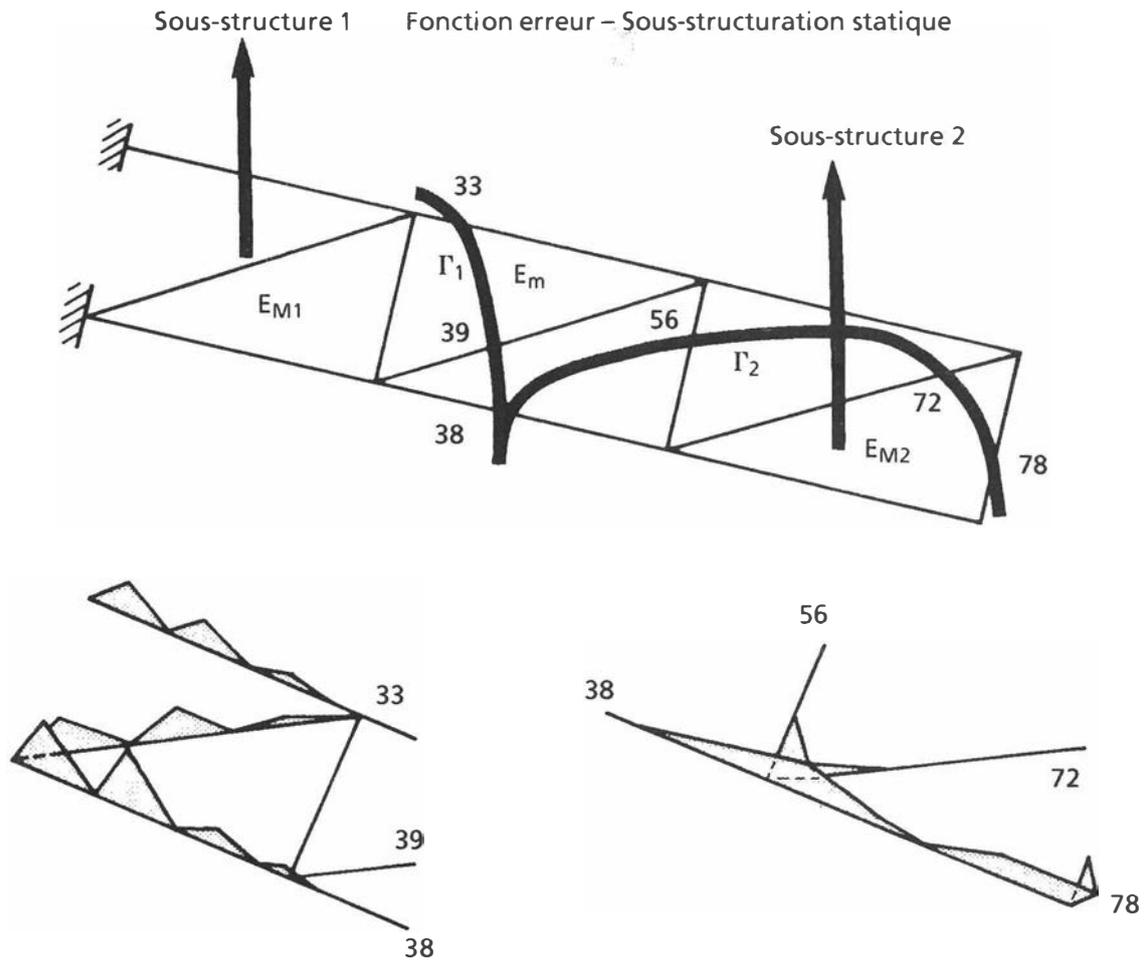


Fig. 1. – Fonction erreur. Sous structuration statique.

		$\varepsilon \% = \frac{\text{Dépl. exp.} - \text{Dépl. complété}}{\text{Dépl. exp.}}$						
		Frontière Γ		Vecteur numéro				
	nœud		1	2	3	4	5	
	33	u mes. v mes. θ_z	0 0 0,07	0 0 1,8	0 0 0,2	0 0 0,13	0 0 0,2	
Γ_1	39	u v θ_z	0,7 0,003 0,02	0,0002 0,02 0,006	0,006 0,003 0,08	0,3 0,02 0,004	0,002 0,009 0,005	
	38	u v θ_z	0 0,003 0,02	0,0002 0,02 0,14	0,004 0,002 0,06	0 0,003 0,02	0 0,02 0,002	
	56	u v θ_z	0,0006 0 0,0008	0,0003 0,009 4,4	0,01 0 0,0003	0,002 0,0001 0,002	0,001 0,0001 0,05	
Γ_2	72	u mes. v mes. θ_z	0 0 0,0001	0 0 0,04	0 0 0,002	0 0 0,006	0 0 0,02	
	78	u mes. v mes. θ_z	0 0 0,002	0 0 1,9	0 0 0,05	0 0 0,2	0 0 0,4	

Fig. 2. – Sous structuration statique.

Abscisse : indice d'éléments s

Ordonnée : erreur $\sum_{k=1}^q \Gamma_s^2$

$q = 5$ modes expérimentaux donnés

erreur $\sum_{k=1}^q \Gamma_s^2$

dessin sur la structure

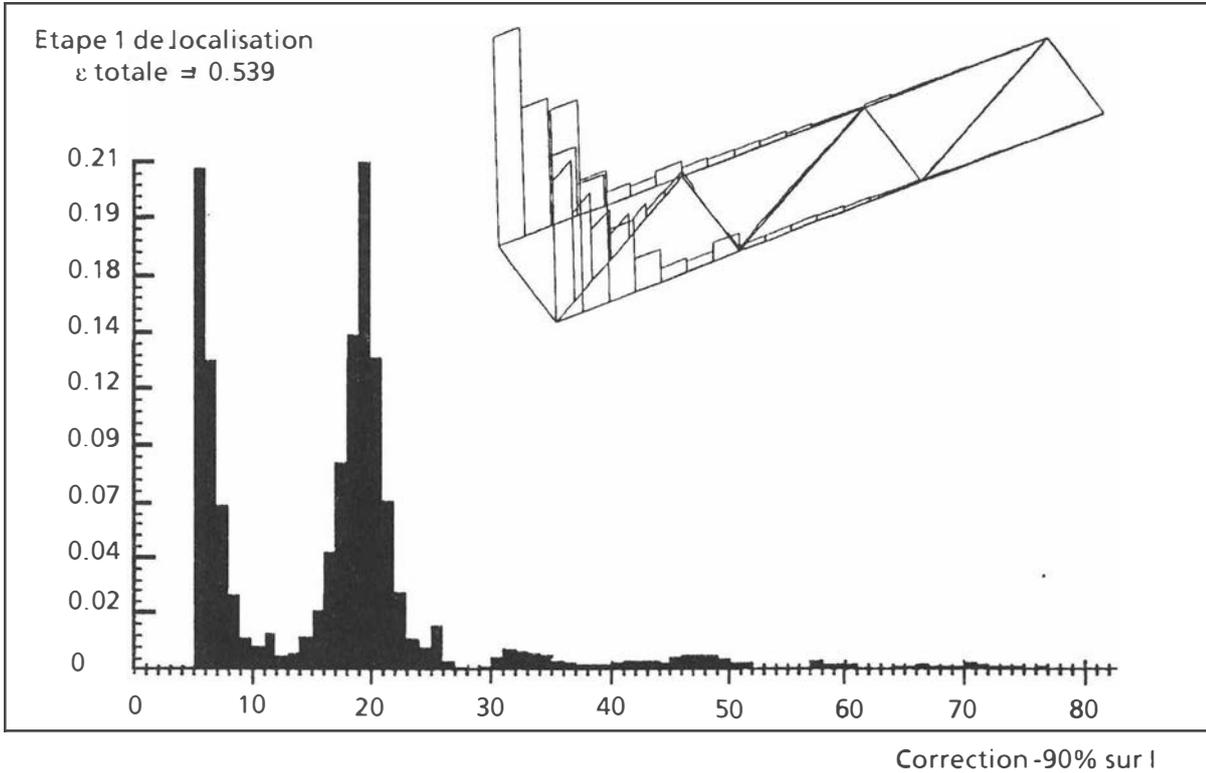


Fig. 3. – Recalage du modèle (Laboratoire de Mécanique et Technologie).

Supposons connue la valeur propre exacte γ . Les modes associés sont solution du problème :

Trouver un champ de déplacement v et un champ de contrainte σ tels que :

le couple v, σ soit **admissible**, vérifiant (5) et (6)

$$v|_{\partial\Omega_1} = 0 \quad \text{et} \quad v \text{ régulier} \quad (5)$$

$$\forall v^* \in V$$

$$\int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \varepsilon(v^*)) d\Omega = \lambda \int_{\Omega} \rho v v^* d\Omega \quad (6)$$

$V = \{v, v|_{\partial\Omega_1} = 0, v \text{ régulier}\}$ ρ est la masse volumique

et tels que :

(v, σ) vérifie la **loi de comportement**

$$\sigma = K \varepsilon(v)$$

ou K est le tenseur de Hooke, ε le champ de déformation.

Les quantités K et ρ sont celles de la modélisation par éléments finis.

Considérons la valeur propre expérimentale λ_k du mode k , on peut lui associer un couple $(\underline{\sigma}, \underline{v})$ de champs admissibles [vérifiant (5) et (6)] qui minimise l'erreur en relation de comportement :

$$(v, \sigma) \rightarrow \|\sigma - K \varepsilon(v)\|^2$$

$$= \int_{\Omega} \text{Tr}((\sigma - K \varepsilon(v)) K^{-1} (\sigma - K \varepsilon(v))) d\Omega$$

Si λ_k est valeur propre exacte pour la modélisation (K, ρ) l'erreur en relation de comportement $\|\underline{\sigma} - K \varepsilon(\underline{v})\|$ est nulle.

Ce dernier problème peut être réécrit en associant à la contrainte σ S.A. un champ de déplacement u C.A. solution du problème élastique :

$$\int_{\Omega} \text{Tr}((K \varepsilon(u) - \sigma) \varepsilon(v^*)) d\Omega = 0,$$

$$\forall v^* \in V$$

Etape 2 de localisation
 ε totale = 0.319

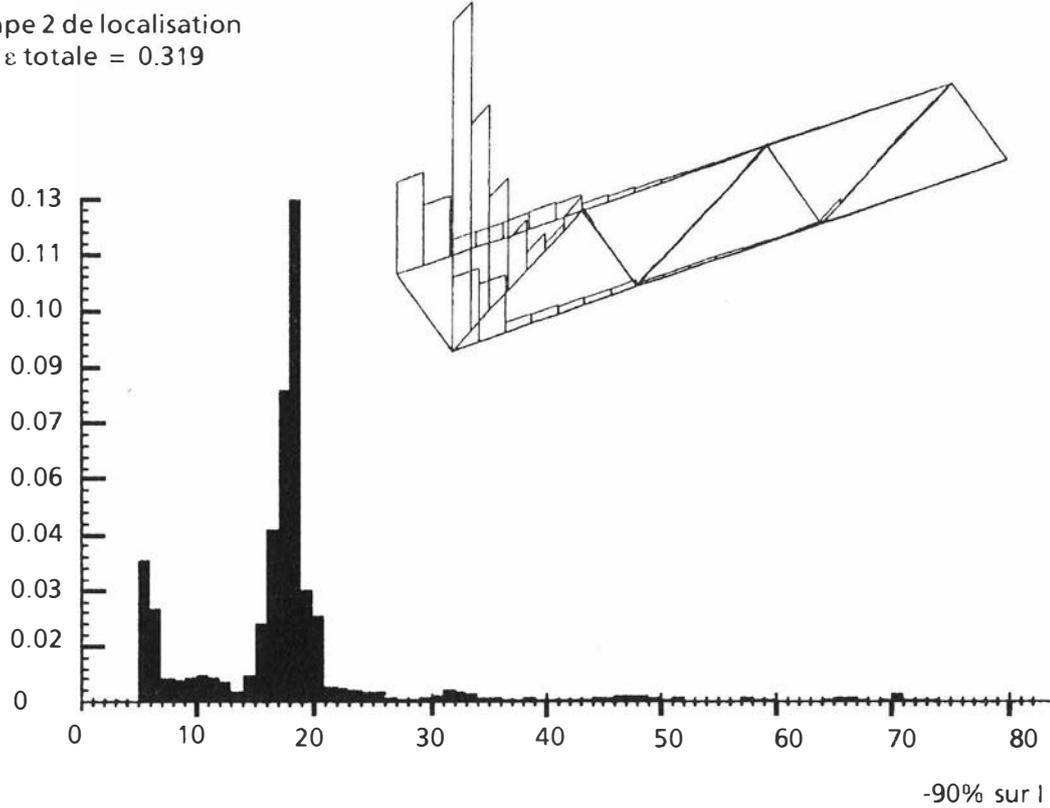


Fig. 4. – Recalage du modèle (Laboratoire de Mécanique et Technologie).

On associe alors à (v, u) l'erreur en relation de comportement $\|u - v\|^2$ avec (v, u) vérifiant (5) et l'équation d'équilibre suivante :

$$u \in V, \quad v \in V, \quad \forall v^* \in V$$

$$\int_{\Omega} \text{Tr}(K \varepsilon(u) \varepsilon(v^*)) d\Omega = \lambda_k \int_{\Omega} \rho v v^* d\Omega.$$

Après discrétisation, ce dernier problème est résolu et les valeurs nodales de u et v sont également désignées par (u, v) pour simplifier les notations.

Soit $\Pi \underline{v}_k$ la colonne des déplacements mesurés associée à la valeur propre mesurée λ_k ; on lui associe le couple $(\underline{u}, \underline{v})$ tel que $(\underline{u}, \underline{v})$ minimise l'erreur en relation de comportement :

$$E_k^2(u, v) = \|u - v\|^2 + \frac{r}{1-r} \|\Pi v - \Pi \underline{v}_k\|^2. \quad (7)$$

Π est l'opérateur de projection donné sur les degrés de liberté mesurés et $\|\cdot\|$ est une norme que nous précisons ultérieurement.

Le problème s'écrit pour chaque mode expérimental donné k :

Trouver $(\underline{u}, \underline{v})$ C.A. à « 0 » minimisant :

$$E_k^2(u, v) = (u - v)' \mathbb{K} (u - v) + \frac{r}{1-r} (\Pi v - \Pi \underline{v}_k)' \mathbb{K}_r (\Pi v - \Pi \underline{v}_k) \quad (8)$$

sous la contrainte $\mathbb{K} u = \lambda_k \mathbb{M} v$.

\mathbb{K}, \mathbb{M} sont respectivement les matrices symétriques de raideur et de masse du modèle de dimension n : le nombre de degrés de liberté du modèle;

\mathbb{K}_r est, par exemple, la réduction de Guyan de \mathbb{K} sur les degrés de liberté mesurés;

$\|\cdot\|$ représente alors le double de l'énergie de déformation donnée par le modèle initial dans le problème statique où le champ de déplacement est contraint à prendre les valeurs Πv aux points de mesure.

r est un scalaire exprimant la confiance accordée à la qualité des modes mesurés, $r \ll 1$ pour des valeurs expérimentales peu fiables, r est proche de 1 dans le cas contraire. $r = 0.5$ est une valeur courante.

(8) caractérise la distance entre les prévisions du premier modèle et le mode expérimental k ($\lambda_k, \Pi \underline{v}_k$). Si $E_k(\underline{u}, \underline{v})$ est nul, le mode expérimental k ($\lambda_k, \Pi \underline{v}_k$) est parfaitement représenté par le modèle théorique.

Pour l'ensemble des q modes mesurés, la qualité de prédiction du modèle théorique est définie par

$$E_t = \left(\sum_{k=1}^q E_k^2(\underline{u}, \underline{v}) \right)^{1/2}.$$

Pour un mode expérimental donné k , ($\lambda_k, \Pi \underline{v}_k$), la mesure de l'erreur en relation de comportement est alors :

$$\underline{\varepsilon} = \|\underline{u} - \underline{v}\|$$

Abscisse : indice d'éléments s

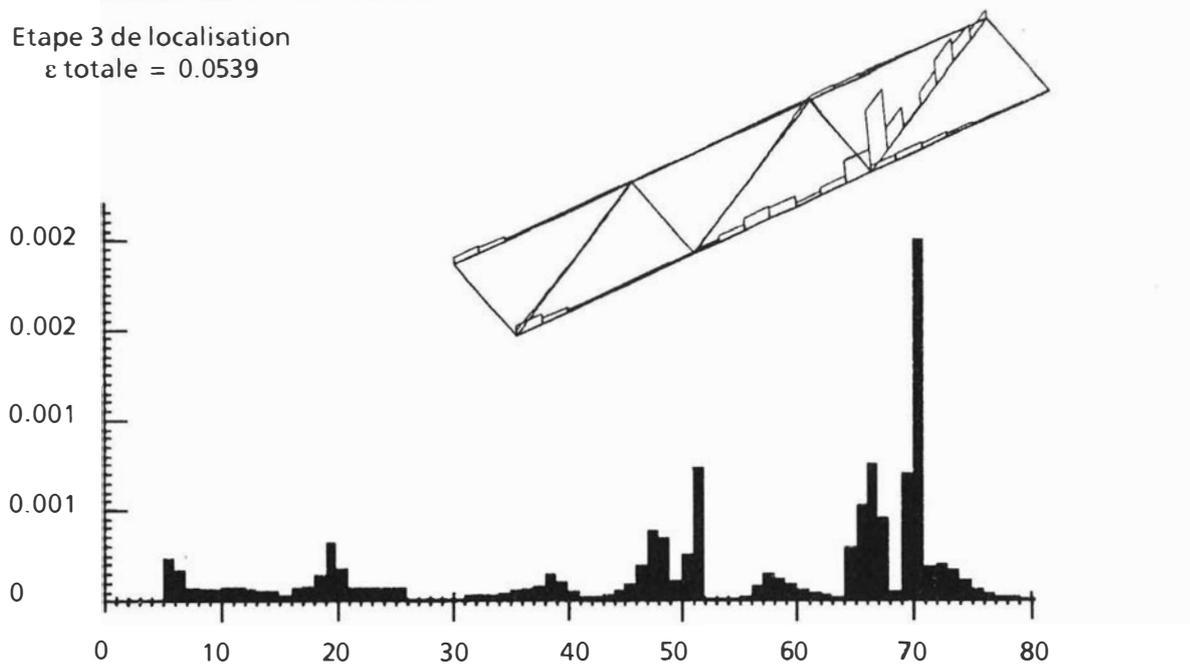
Ordonnée : erreur $\sum_{k=1}^q \Gamma_s^2$

$q = 5$ modes expérimentaux donnés

erreur $\sum_{k=1}^q \Gamma_s^2$

dessin sur la structure

Etape 3 de localisation
 ε totale = 0.0539



Correction + 90% sur s

Fig. 5. – Recalage du modèle (Laboratoire de Mécanique et Technologie).

et sous sa forme relative

$$\underline{\varepsilon}_k^2 = \frac{\|\underline{u} - \underline{v}\|^2}{1/2(\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2)}$$

Quand la structure considérée est divisée en sous-structures (s), $\underline{\varepsilon}_k^2$ est la somme des contributions de chaque sous-structure :

$$\underline{\varepsilon}_k^2 = \sum_s \underline{\varepsilon}_{k^s}^2 \quad \text{avec} \quad \underline{\varepsilon}_{k^s}^2 = \frac{\|\underline{u} - \underline{v}\|_{(s)}^2}{1/2(\|\underline{u}\|_{(s)}^2 + \|\underline{v}\|_{(s)}^2)}$$

Sur l'ensemble des q modes mesurés disponibles, on définit deux indicateurs Γ_s^2 et η_s^2 pour chaque sous-structure (s)

$$\Gamma_s^2 = \sum_{k=1}^q \underline{\varepsilon}_{k^s}^2,$$

$$\eta_s^2 = \sum_{k=1}^q \frac{\|\underline{u} - \underline{v}\|_{(s)}^2}{1/2(\|\underline{u}\|_{(s)}^2 + \|\underline{v}\|_{(s)}^2)}$$

Ces indicateurs correspondent aux erreurs relatives faites sur les sous-structures. Les indicateurs η_s^2 per-

mettent ainsi **de localiser** les régions mal modélisées et les Γ_s^2 caractérisent l'intensité des corrections à apporter (Fig. 3 à 6).

CORRECTION PARAMÉTRIQUE

APPROCHE PAR RÉACTION DYNAMIQUE

Soit $D_k^t = [U_k^{t'} U_{\text{exp}k}^t]$ le déplacement complété, $\alpha^t = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p]$ le vecteur des m paramètres de correction ($m = n + p$) correspondant aux sous-structures localisées.

Si α est solution :

$$F_0(\alpha) + F(\alpha)\alpha = 0 \quad (9)$$

avec

$$F_0(\alpha)^t = [((K_0 - \lambda_{\text{exp}1} M_0) D_1)^t, ((K_0 - \lambda_{\text{exp}2} M_0) D_2)^t, \dots, ((K_0 - \lambda_{\text{exp}q} M_0) D_q)^t]$$

qui est le vecteur colonne des forces nodales correspondant aux q modes mesurés, $F(\alpha)$ est la matrice des forces nodales élémentaires pour l'ensemble des q

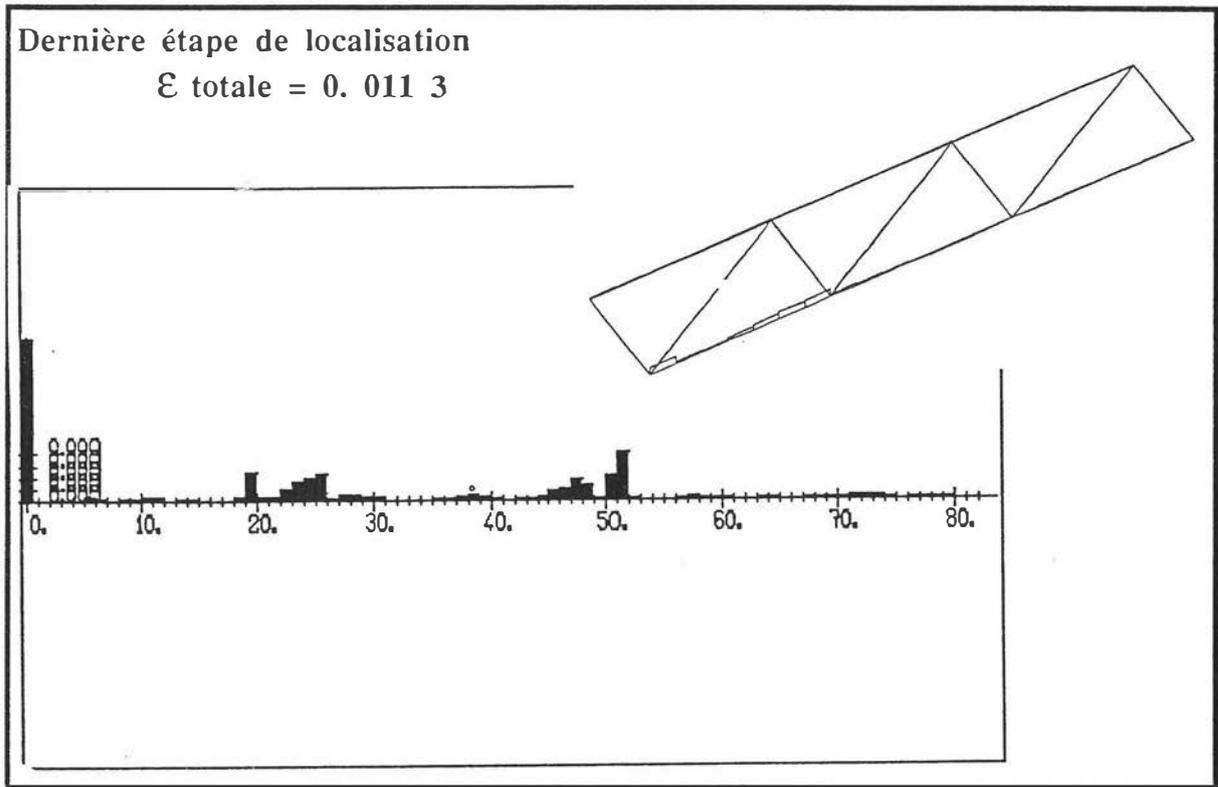


Fig. 6. – Recalage du modèle (Laboratoire de Mécanique et Technologie).

modes mesurés; elle est constituée de sous-colonnes du type :

$$K_j D_k, -\lambda_{\text{exp}k} M_i D_k \quad (j = 1, n; i = 1, p; k = 1, q).$$

Le système (9) est linéaire à coefficients variables.

Par application du théorème du point fixe, on cherche à l'itération $p + 1$, α_{p+1} tel que :

$$F_0(\alpha_p) + F(\alpha_p)\alpha_{p+1} = 0. \quad (10)$$

A l'itération p , $F_0(\alpha_p) + F(\alpha_p)\alpha_p = R(\alpha_p)$ d'où

$$F(\alpha_p)\Delta\alpha_p + R(\alpha_p) = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta\alpha_p = \alpha_{p+1} - \alpha_p. \quad (11)$$

(11) est généralement surdéterminé et résolu au sens des moindres carrés.

En posant $\varepsilon_p = F(\alpha_p)\Delta\alpha_p + R(\alpha_p)$, résoudre (10) au sens des moindres carrés revient à minimiser à chaque itération la fonction $f_p = \varepsilon_p^t \varepsilon_p$ ce qui conduit à la résolution de $(F^t F)_p \Delta\alpha_p = -(F^t R)_p$ où $(F^t F)$ représente une approximation du Hessian de f_p . On aboutit ainsi avec R non nul sur tous les d. d. l. de la structure à un **problème d'optimisation sans contrainte** (résolution par Gauss-Newton).

APPROCHE PAR LA NOTION D'ERREUR EN RELATION DE COMPORTEMENT

On considère que la structure est définie par un certain nombre de paramètres structuraux $p \in \mathbb{P}$; les

matrices \mathbb{K} et \mathbb{M} sont donc fonction de p . Le problème de la correction s'écrit :

Trouver $p \in \mathbb{P}$, tel que $\mathbb{K}(p)$ et $\mathbb{M}(p)$ minimisent :

$$\mathbb{E}^2(p) = \sum_{k=1}^q \left\{ \|\underline{u}_k - \underline{v}_k\|^2 + \frac{r}{1-r} \|\|\Pi \underline{v}_k - \Pi \underline{v}_k\|\|^2 \right\}$$

pour q modes mesurés.

Ce **problème non linéaire** est résolu à l'aide d'un algorithme de **gradient conjugué**.

Plus précisément, on pose $\underline{\mathbb{K}} = \mathbb{K} + \Delta\mathbb{K}$, $\underline{\mathbb{M}} = \mathbb{M} + \Delta\mathbb{M}$ et dans le cas des exemples tests traités :

$$\Delta\mathbb{K} = \sum_{c=1}^L C_c \Delta p_c \quad \text{et} \quad \Delta\mathbb{M} = \sum_{c=1}^L D_c \Delta p_c$$

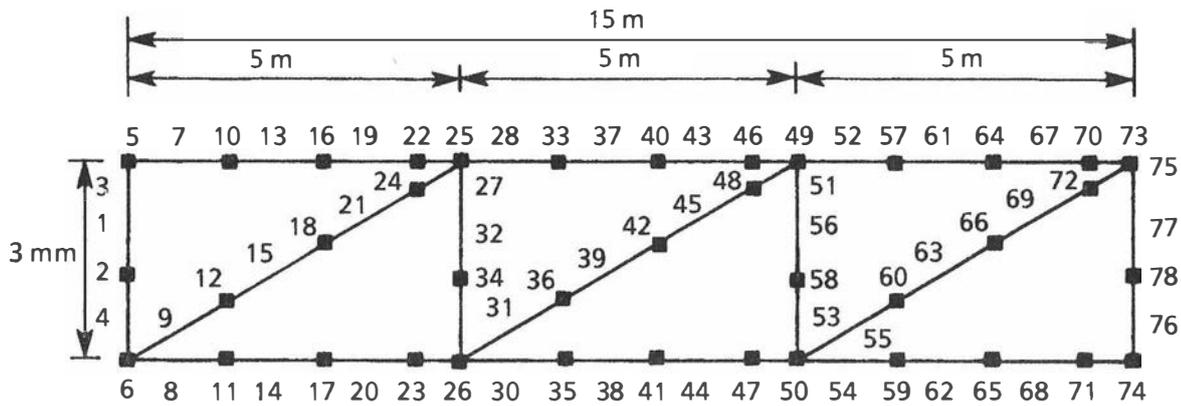
avec L nombre de paramètres structuraux à modifier; on résout alors le problème suivant :

Trouver $(\underline{u}_k, \underline{v}_k, \Delta p_c)$, $c \in (1, L)$, $k \in (1, q)$ tels qu'ils minimisent

$$F(\underline{u}_k, \underline{v}_k, \Delta p_c) = \sum_{k=1}^q \|\underline{u}_k - \underline{v}_k\|^2 + \frac{r}{1-r} \|\|\Pi \underline{v}_k - \Pi \underline{v}_k\|\|^2 \quad (12)$$

avec

$$\underline{\mathbb{K}} \underline{u}_k = \underline{\lambda}_k \underline{\mathbb{M}} \underline{v}_k \quad (13)$$



Bord gauche encastré

■ Points de mesure (2 degrés de liberté x, y mesurés)

Module d'Young : $E = 0.75 \cdot 10^{11}$ Pa Éléments verticaux : $S = 0.6 \cdot 10^{-2}$ m²
Masse volumique : $\rho = 2800$ kg m⁻³ Éléments horizontaux : $S = 0.4 \cdot 10^{-2}$ m²
Inertie : $I = 0.756 \cdot 10^{-1}$ m⁴ Éléments diagonaux : $S = 0.3 \cdot 10^{-2}$ m²

Fig. 7.

Eléments	Perturbations relatives réelles		Perturbations relatives calculées	
	Raideur	Masse	Raideur	Masse
	$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$	$\frac{\Delta\beta}{\beta}$	$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$	$\frac{\Delta\beta}{\beta}$
5-7	-0,9	0	-0,9	0
7-10	-0,9	0	-0,9	0
6-9	-0,9	0	-0,9	0
9-12	-0,9	0	-0,9	0
12-15	-0,9	0	-0,9	0
6-8	-0,9	0	-0,9	0
8-11	-0,9	0	-0,9	0
11-14	+0,1	0	+0,105	0
14-17	+1	0	+1	0
17-20	+1	0	+1	0
47-50	0	+1	0	+1
50-55	0	+1	0	+1
55-60	0	+1	0	+1
65-68	+1	0	+1	0
68-71	+1	0	+0,81	0
71-74	0	0	+0,09	0

Fig. 8. – Treillis encastré à une extrémité libre à l'autre.

La résolution en v_k conduit à

$$F(\underline{v}_k, \Delta p_c) = \sum_{k=1}^q \left(\left(\frac{r}{1-r} \right) (\Pi \underline{v}_k)^t \mathbb{K}_r \Pi (\underline{v}_k - v_k) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^q \left(\left(\frac{r}{1-r} \right)^2 (\mathbb{K}_r \Pi \underline{v}_k)^t \left(A_k^t \mathbb{K} A_k + \frac{r}{1-r} \mathbb{K} \right)^{-1} \right)$$

$$\times (\mathbb{K}_r \Pi \underline{v}_k) + \left(\frac{r}{1-r} \right) \Pi \underline{v}_k^t \mathbb{K}_r \Pi \underline{v}_k$$

avec $u - v = A_k v$ où A_k est fonction de Δp_c .

Ce dernier problème peut ainsi se ramener au problème non linéaire suivant :

Trouver $\Delta p_c, c \in (1, L)$ tels qu'ils minimisent :

$$H(\Delta p_c) = F(\underline{v}_k, \Delta p_c)$$

qui est un problème à L variables scalaires.

EXEMPLE GARTEUR [1]

Considérons la structure treillis discrétisée en éléments finis : barre et poutre en flexion dans le plan. La structure est encastree à un bord, libre à l'autre (Fig. 7). Les caractéristiques mécaniques ont été choisies de façon à obtenir des déformées modales d'ensemble. Le comportement de la structure réelle a été simulé numériquement en perturbant les sections et les inerties entraînant ainsi des erreurs en **rigidité et masse** sur le modèle. Les cinq premières fréquences de la structure perturbée et une partie des degrés de liberté ont été donnés. On se fixe des bornes inférieures et supérieures des erreurs relatives suivantes : $[-0,9, +1]$ pour les inerties de sections, $[-0,5; +1]$ pour les sections des barres. Les figures 8, 9, 3, 4, 5, 6 illustrent les résultats du recalage pour les deux méthodes développées ci-dessus.

CONCLUSION

Les stratégies adoptées pour la résolution du problème inverse que constitue le problème de recalage de modélisations à partir d'essais vibratoires, se différencient par le degré d'intégration du contexte phy-

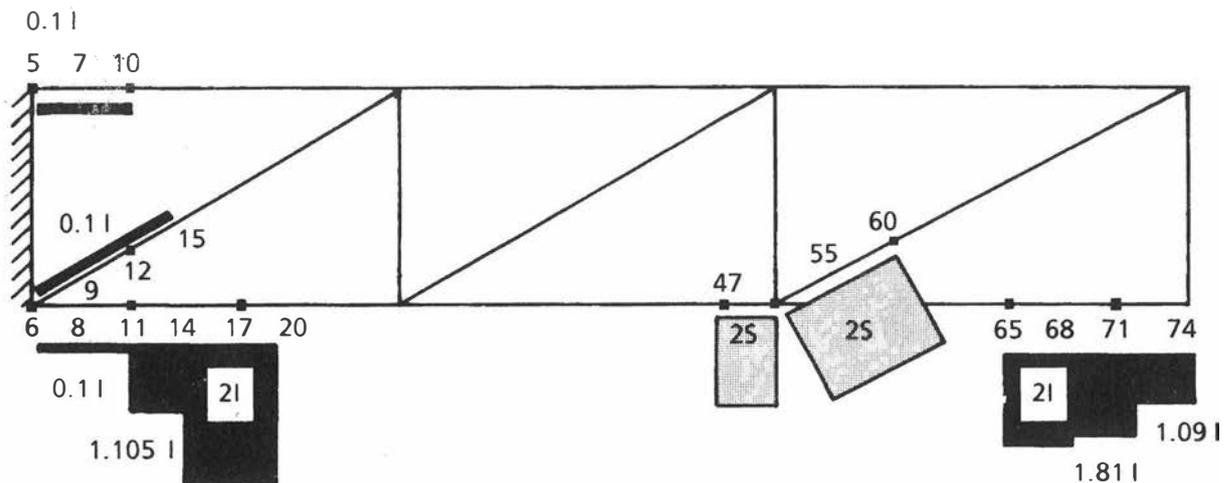


Fig. 9. — GARTEUR : deuxième cas-test.
Vibrations dans le plan d'un treillis perturbé non amorti, encastré libre.

sique. D'une manière générale, plus l'approche est mécanique, plus la reconstruction de l'information est efficace : les approches complètement automatiques qui ont été proposées, se ramènent à la minimisation d'une fonction coût qui admet plusieurs solutions dont certaines ne sont pas compatibles avec la physique du problème. Trier les solutions en tenant compte de la qualité des résultats expérimentaux n'est pas simple, d'autant moins que la qualité est elle-même difficile à apprécier. L'introduction de toutes les variables paramètres du problème dans une fonctionnelle à minimiser n'est pas raisonnable; même si, avec les moyens de calculs actuels, la résolution d'un problème d'optimisation de grande taille n'est pas toujours un obstacle, il n'en reste pas moins que le problème est mal posé vis-à-vis de l'appréciation de la qualité des mesures. La démarche que nous préconisons consiste à localiser les régions mal modélisées et à corriger ensuite *en tenant compte du contexte physique*.

Manuscrit remis le 9 juillet 1990, accepté le 5 juin 1991.

RÉFÉRENCES

- [1] GARTEUR-AG 11. — Group for aeronautical research and technology in europ, action group on parametric updating of finite element models using experimental simulations.
- [2] TIKHONOV A. et ARSENEV V. — *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Édition Mir, Moscou, (1974).
- [3] BARUCH M. — *Optimal correction for mass matrix and stiffness matrix using measuring modes*, A.I.A.A. 82-4265, (1982).
- [4] BERMAN A. et FLANNELLY O. — *Theory of incomplete models of dynamics structures*, AIAA journal, vol. 9/8, (1971), p. 1481-1487.
- [5] CHEN J. C. et GARBA J. A. — *Analytical model improvement using modal test results*, AIAA Paper 79-0831, vol. 18, n° 6, Avril 1989.
- [6] CAESAR B. — *Correlation and update of dynamic mathematical models*, 4th F.E. world congress, Interlaken, septembre 1984.
- [7] HE J. et EWINS D. J. — *Analytical stiffness matrix correction using measured vibration modes*, Int. journ. analytical & experimental modal analysis, vol. 1, n° 3, juillet 1986.
- [8] EWINS D. J. et HE J. — *A review of the error matrix method for structural dynamic modes comparison*, Proc. Int. Conf. on Spacecraft Structures Testing, ESA-SP-289, (1988).
- [9] LINK M., WEILEND M. et BARRAGAN J. M. — *Direct physical matrix identification as compared to phase resonance testing. An assesment based on practical application*, Proc., IMAC, London, (1987).
- [10] WEI J. J. C. et ALLEMANG R. J. — *Correction of finite element model via selected physical parameters*, Proceedings, IMAC, p. 1231-1238, Las Vegas, (1989).
- [11] COLLINS J. D., HART G. C., HASSELMAN J. K. et KENNEDY B. — *Statical identification of structures*, AIAA journal, vol. 12/2, (1974), p. 185-190.
- [12] ZHANG W., LALLEMENT G., FILLOD R. et PIRANDA J. — *Parametric identification of conservative self-adjoint structures*, Proc. Int. Conf. on Spacecraft Structures Testing, ESA-SP-289, (1988).
- [13] DASCOTTE E. et VANHONEYCKER P. — *Development of an automatic mathematical model updating program*, Proc., IMAC, p. 1183-1190, London, (1987).
- [14] COTTIN N., FELGENHAUER H. P. et NATKE H. G. — *On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals*, Ingenieur Archiv. 54, p. 378-387, Spring Verlag, (1984).
- [15] BOUTIN P. et PETIAU M. — *Identification automatique de structures dynamiques sur modèles d'éléments finis*, AMD/BA, Saint-Cloud, Doc. DGT n° 23351, août 1983.
- [16] O'CALLAHAN J. C. et CHOU C. M. — *Localization of test/analysis structural model error*, AIAA Paper 89-1244-CP, p. 748-752, (1989).
- [17] LEURIDAN J. M., BROWN D. L. et ALLEMANG R. J. — *Direct system identification of mechanical structures with application to modal analysis*, AIAA Paper 82-0767, p. 548-556.

- [18] BERGER H., BARTHE L. et OHAYON R., *Parametric updating of a finite element model from experimental modal characteristics*, Proc. European Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, 1989, Aachen April 1989.
- [19] BERGER H., CHAQUIN J. P. et OHAYON R. — *Finite element model adjustment using experimental data*, Proc. IMAC-2, Orlando, Florida, (1984).
- [20] BERGER H., BARTHE L. et OHAYON R. — *Recalage d'un modèle par éléments finis à partir de données expérimentales du type vibratoire. Concept de localisation*, R.T. DRET n° 7/3313 RY070 R., mai 1987.
- [21] FISSETTE E., STAVRINIDIS C. et IBRAHIM S. — *Error location and updating of analytical dynamic models using a force balance method*, Proceedings, IMAC, (1988), p. 1063-1070.
- [22] LADEVEZE P. et REYNIER M. — *Recalage de modélisation par éléments finis en dynamique*, Rapport Interne du Laboratoire de Mécanique et Technologie, n° 97, avril 1989, LMT, 61, avenue du Président-Wilson, 94235 Cachan.
- [23] LADEVEZE P. et REYNIER M. — *A localization method of stiffness errors for the adjustment of F.E. models*. Proceedings, 12th ASME Mechanical Vibration and Noise Conference, Montreal, septembre 1989.
- [24] REYNIER M. — *Sur le contrôle des modélisations par éléments finis : Recalage à partir d'essais dynamiques*, Thèse de Doctorat d'Université Paris-VI, 17 décembre 1990, Laboratoire de Mécanique et Technologie, 61, avenue du Président-Wilson, 94235 Cachan.
- [25] LADEVEZE P., *Recalage de modélisations des structures complexes*, Note technique n° 33.11.01.4. Aérospatiale, Les Mureaux, (1983).
- [26] LADEVEZE P., COFFIGNAL G. et PELLE J. P. — *Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis in Accuracy estimates and adaptative refinements in finite element computation*, Chap. 11, p. 181-203, Babuska, Zienkiewicz, Gago, Oliveira, Editor J. Wiley, (1986).
- [27] NIEDBAL N., KLUSOWSKI E. et LUBER W. — *Updating of F.E. models by means of normal modes*, Proc. ESA-Congress, ESA-SP-289, (1988).
- [28] NASH M. — *An approach to the correction of finite Element and model test studies*, CAD/CAM and Vibration Measurements, (1988).