



HAL
open science

Une approche énergétique de l'interaction entre particules de DIRAC

Patrick Vaudon

► **To cite this version:**

Patrick Vaudon. Une approche énergétique de l'interaction entre particules de DIRAC. 2022. hal-03175984v8

HAL Id: hal-03175984

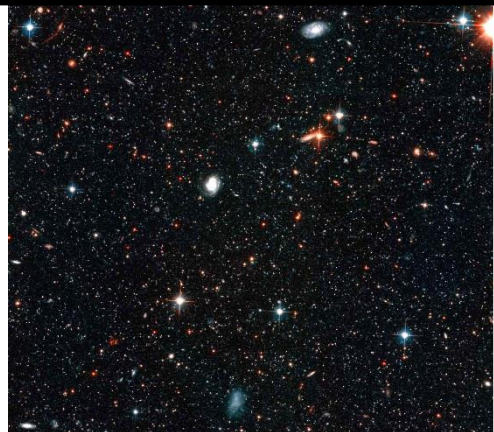
<https://hal.science/hal-03175984v8>

Preprint submitted on 1 Sep 2022 (v8), last revised 13 Dec 2022 (v10)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une approche énergétique de l'interaction entre particules de DIRAC



Patrick VAUDON

Xlim - Université de Limoges – France

Table des matières

Première partie Collision entre particules de DIRAC

| | |
|--|----|
| I - Introduction..... | 4 |
| II – Collision entre particules ponctuelles | 5 |
| III – Le quadrivecteur impulsion-énergie quantique pour des solutions purement sinusoidales..... | 9 |
| IV – Le quadrivecteur impulsion-énergie quantique pour des solutions exponentielles..... | 16 |
| V – Relations de conservation entre particules de DIRAC dans une collision | 21 |
| VI – Collision entre particules de DIRAC | 25 |
| VII – La diffusion électrons-muons | 33 |
| VIII – Somme des spins | 39 |
| IX – La diffusion élastique..... | 51 |
| X - Le Photon de DIRAC..... | 56 |
| XI - Conclusion..... | 69 |

Deuxième partie Désintégration de particules de DIRAC

| | |
|---|-----|
| XII – La matrice γ^5 | 72 |
| XIII – Les courants axiaux | 76 |
| XIV – Approche énergétique de la désintégration | 83 |
| XV – Conservation locale de l'énergie | 86 |
| XVI – Le tenseur impulsion-énergie | 92 |
| XVII – Quelques propriétés des vecteurs axiaux. | 100 |
| XVIII – Conclusion..... | 109 |

Troisième partie Compléments

| | |
|--|-----|
| XIX – Conservation locale de l'énergie(2). | 112 |
| XX – La conservation locale de l'énergie pour des particules de nature différente..... | 119 |
| XXI – La conservation globale de l'énergie..... | 124 |
| XXII – La fonction de GREEN..... | 127 |
| XXIII – L'interaction électromagnétique..... | 134 |
| XXIV – L'interaction entre particules de DIRAC..... | 141 |
| Bibliographie..... | 147 |

Première partie

Collisions entre particules de DIRAC

I - Introduction

La notion de collision de particule a une place centrale dans l'évolution de nos connaissances de l'infiniment petit. Le seul procédé expérimental qui permet d'explorer la composition des particules consiste à les projeter les unes contre les autres et à examiner les morceaux qui jaillissent de cette rencontre. Plus le choc se produit avec une énergie importante, plus on peut espérer observer de nouveaux détails dans la gerbe de particules issues de la collision.

Deux collisions effectuées dans des préparations les plus identiques possibles conduisent à des gerbes de particules différentes. Il s'ensuit que le traitement effectué est un traitement statistique car on ne connaît pas à l'avance le résultat d'une collision. Dans ce domaine, les calculs relatifs aux sections efficaces et matrices de diffusion ont atteint une maturité telle qu'ils constituent des piliers robustes, efficaces, et précis dans la modélisation des collisions.

La collision en elle-même est une boîte noire qui n'est jamais décrite en physique. On connaît en général les particules qui entrent, celles qui sortent, et les règles de conservation de l'énergie et de l'impulsion qu'elles doivent respecter. Ces règles sont issues de la relativité restreinte et consistent globalement à écrire l'égalité du quadrivecteur impulsion énergie en entrée et en sortie.

Nous proposons dans ce document de décrire la collision en termes de solutions exactes à l'équation de DIRAC, que nous appellerons particule de DIRAC. Cette description contient plus d'informations que le traitement relativiste macroscopique de particules ponctuelles. Elle contient en plus l'état des bispineurs de DIRAC qui représentent les particules avant et après le choc.

On admettra que toute l'information sur chaque particule est contenue dans sa représentation de DIRAC.

On espère alors pouvoir déduire d'une écriture globale de l'interaction, à la fois une description macroscopique du phénomène, et une description microscopique qui conduit à l'évaluation de l'amplitude de diffusion.

A ce jour, les graphes de FEYNMAN sont les outils majeurs qui permettent le calcul de l'amplitude de diffusion d'une réaction. On tente dans ce document de montrer que ce calcul peut être abordé de manière différente et complémentaire.

La vision globale de l'interaction qui est présentée est purement énergétique, et le postulat de conservation de l'énergie y joue le rôle fondamental. C'est lui qui va créer les conditions qui permettent la transformation et la diffusion des particules créées, en combinant des échanges d'énergies très complexes à des fréquences très élevées.

II – Collision entre particules ponctuelles

Le traitement relativiste de la collision de particules ponctuelles est fondé sur la représentation de la particule ponctuelle par son quadrivecteur impulsion-énergie.

On désigne par i le numéro de la particule qui intervient dans la collision. On adopte dans ce document la notation et représentation suivante pour le quadrivecteur associé à chaque particule i :

$$\tilde{P}_i = \left(\frac{E_i}{c}, p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} \right) \quad (\text{II-1})$$

E_i représente l'énergie totale de la particule i , tandis que p_{ix} , p_{iy} , p_{iz} représentent ses composantes d'impulsion suivant chaque axe x , y , z . On désigne par m_{i0} la masse au repos de la particule i .

Sans changer de notation, ce quadrivecteur pourra être multiplié par la vitesse de la lumière c lorsque cela sera utile pour lui donner une dimension énergétique.

Dans l'espace-temps des quadri-vecteurs, aussi appelé espace de MINKOWSKI, on peut définir un pseudo-produit scalaire analogue au produit scalaire des espaces vectoriels classiques. Dans une métrique $(+, -, -, -)$, le pseudo-produit scalaire de deux quadrivecteurs indicés i et j est un scalaire obtenu par le calcul suivant :

$$\tilde{P}_i \cdot \tilde{P}_j = \left(\frac{E_i}{c}, p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{E_j}{c} \\ p_{jx} \\ p_{jy} \\ p_{jz} \end{pmatrix} = \frac{E_i E_j}{c} - p_{ix} p_{jx} - p_{iy} p_{jy} - p_{iz} p_{jz} \quad (\text{II-2})$$

La quasi-totalité des outils de calculs utilisés pour l'étude des collisions relativistes repose sur la propriété suivante : à l'image du produit scalaire de deux vecteurs dans un espace vectoriel ordinaire, le pseudo-produit scalaire de deux quadrivecteurs est une constante. Cette constante ne dépend pas du référentiel dans lequel elle est calculée.

On peut par exemple choisir de calculer cette constante dans le référentiel (R_i) où la particule i est au repos. Dans ces conditions, ses composantes d'impulsion sont nulles et on obtient :

$$\tilde{\mathbf{P}}_i \cdot \tilde{\mathbf{P}}_j = \frac{E_i E_j}{c} \quad (\text{II-3})$$

L'énergie totale de la particule i est alors égale à son énergie de masse :

$$E_i = m_{i0} c^2 \quad (\text{II-4})$$

Si on suppose que la vitesse relative de la particule j par rapport à la particule i est égale à v, alors l'énergie totale de la particule j, dans le référentiel (R_i), est égale à :

$$E_j = \frac{m_{j0} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{II-5})$$

On en déduit le pseudo produit scalaire à la valeur suivante, quel que soit le référentiel dans lequel il est calculé :

$$\tilde{\mathbf{P}}_i \cdot \tilde{\mathbf{P}}_j = \left(\frac{E_i}{c}, p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} \right) \cdot \left(\frac{E_j}{c}, p_{jx}, p_{jy}, p_{jz} \right) = \frac{E_i E_j}{c^2} - p_{ix} p_{jx} - p_{iy} p_{jy} - p_{iz} p_{jz} = m_{i0} c \frac{m_{j0} c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{II-6})$$

Le cas i=j est un cas particulier très important : dans cette situation, le pseudo produit scalaire devient égal à la pseudo-norme au carré du quadrivecteur.

Après multiplication par c², la pseudo-norme au carré du quadri-vecteur impulsion-énergie devient une constante qui est égale à l'énergie de masse au repos élevée au carré. Entre les composantes du quadrivecteur, on a donc la relation énergétique suivante :

$$E_i^2 - (c p_{ix})^2 - (c p_{iy})^2 - (c p_{iz})^2 = (m_{i0} c^2)^2 \quad (\text{II-7})$$

Dans la suite de ce document, nous désignons l'expression (II-7) par (pseudo-norme)².

Nous proposons, tout au long de ce document, de traiter une collision typique faisant intervenir deux particules entrantes indicées (a) et (b), et deux particules sortantes indicées (c) et (d).

Avant le choc, le quadrivecteur impulsion-énergie $\tilde{\mathbf{P}}_e$ qui représente les deux particules entrantes a pour expression :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_e &= \tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b = \left(\frac{E_a}{c}, p_{ax}, p_{ay}, p_{az} \right) + \left(\frac{E_b}{c}, p_{bx}, p_{by}, p_{bz} \right) \\ \tilde{\mathbf{P}}_e &= \left(\frac{E_e}{c}, p_{ex}, p_{ey}, p_{ez} \right) = \left(\frac{E_a + E_b}{c}, p_{ax} + p_{bx}, p_{ay} + p_{by}, p_{az} + p_{bz} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-8})$$

Ce nouveau quadrivecteur, indicé par la lettre e, vérifie l'équation de conservation de l'énergie (II-7) :

$$\begin{aligned}
E_e^2 - (cp_{ex})^2 - (cp_{ey})^2 - (cp_{ez})^2 &= (m_{e0}c^2)^2 \\
(E_a + E_b)^2 - c^2(p_{ax} + p_{bx})^2 - c^2(p_{ay} + p_{by})^2 - c^2(p_{az} + p_{bz})^2 &= ((m_{a0} + m_{b0})c^2)^2
\end{aligned} \tag{II-9}$$

Après le choc, le quadrivecteur impulsion-énergie \tilde{P}_s qui représente les deux particules sortantes a pour expression :

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_s &= \tilde{P}_c + \tilde{P}_d = \left(\frac{E_c}{c}, p_{cx}, p_{cy}, p_{cz} \right) + \left(\frac{E_d}{c}, p_{dx}, p_{dy}, p_{dz} \right) \\
\tilde{P}_s &= \left(\frac{E_s}{c}, p_{sx}, p_{sy}, p_{sz} \right) = \left(\frac{E_c + E_d}{c}, p_{cx} + p_{dx}, p_{cy} + p_{dy}, p_{cz} + p_{dz} \right)
\end{aligned} \tag{II-10}$$

Ce nouveau quadri-vecteur, indicé par la lettre s, vérifie l'équation de conservation de l'énergie (II-7) :

$$\begin{aligned}
E_s^2 - (cp_{sx})^2 - (cp_{sy})^2 - (cp_{sz})^2 &= (m_{s0}c^2)^2 \\
(E_c + E_d)^2 - c^2(p_{cx} + p_{dx})^2 - c^2(p_{cy} + p_{dy})^2 - c^2(p_{cz} + p_{dz})^2 &= ((m_{c0} + m_{d0})c^2)^2
\end{aligned} \tag{II-11}$$

Les changements opérés durant la collision sont régis par l'égalité des quadrivecteurs impulsion-énergie avant et après le choc.

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_e &= \tilde{P}_s \\
\tilde{P}_a + \tilde{P}_b &= \tilde{P}_c + \tilde{P}_d
\end{aligned} \tag{II-12}$$

Cette égalité, appliquée aux composantes de ces quadrivecteurs, implique la conservation de l'énergie totale, et de l'énergie impulsionnelle suivant chaque direction de l'espace

$$\begin{aligned}
E_a + E_b &= E_c + E_d \\
p_{ax} + p_{bx} &= p_{cx} + p_{dx} \\
p_{ay} + p_{by} &= p_{cy} + p_{dy} \\
p_{az} + p_{bz} &= p_{cz} + p_{dz}
\end{aligned} \tag{II-13}$$

Les quadrivecteurs impulsion-énergie étant égaux avant et après le choc, cela implique l'égalité de leur (pseudo-norme)², que l'on pose en général égal à s :

$$\begin{aligned}
s &= E_e^2 - (cp_{ex})^2 - (cp_{ey})^2 - (cp_{ez})^2 = E_s^2 - (cp_{sx})^2 - (cp_{sy})^2 - (cp_{sz})^2 \\
s &= (E_a + E_b)^2 - c^2(p_{ax} + p_{bx})^2 - c^2(p_{ay} + p_{by})^2 - c^2(p_{az} + p_{bz})^2 \\
s &= (E_c + E_d)^2 - c^2(p_{cx} + p_{dx})^2 - c^2(p_{cy} + p_{dy})^2 - c^2(p_{cz} + p_{dz})^2
\end{aligned} \tag{II-14}$$

A partir de l'égalité fondamentale (II-12), on peut former une autre égalité de quadri-vecteurs formée par différence :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_c = \tilde{\mathbf{P}}_d - \tilde{\mathbf{P}}_b \quad (\text{II-15})$$

Il s'ensuit que l'on peut écrire l'égalité de leur (pseudo-norme)² que l'on pose généralement égale à t :

$$\begin{aligned} t &= (E_a - E_c)^2 - c^2(p_{ax} - p_{cx})^2 - c^2(p_{ay} - p_{cy})^2 - c^2(p_{az} - p_{cz})^2 \\ t &= (E_d - E_b)^2 - c^2(p_{dx} - p_{bx})^2 - c^2(p_{dy} - p_{by})^2 - c^2(p_{dz} - p_{bz})^2 \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

A partir de (II-12) on peut former un autre quadri-vecteur par différence :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_d = \tilde{\mathbf{P}}_c - \tilde{\mathbf{P}}_b \quad (\text{II-17})$$

On en déduit une nouvelle (pseudo-norme)² désignée par u :

$$\begin{aligned} u &= (E_a - E_d)^2 - c^2(p_{ax} - p_{dx})^2 - c^2(p_{ay} - p_{dy})^2 - c^2(p_{az} - p_{dz})^2 \\ u &= (E_c - E_b)^2 - c^2(p_{cx} - p_{bx})^2 - c^2(p_{cy} - p_{by})^2 - c^2(p_{cz} - p_{bz})^2 \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

Les grandeurs s, t, u, portent l'appellation de variables de MANDELSTAM. Leur intérêt provient du fait que, en tant que (pseudo-norme)², elles sont indépendantes du référentiel dans lequel elles sont calculées, par exemple référentiel du centre de masse, d'une particule quelconque, ou du laboratoire.

La méthode se généralise sans difficultés. On peut par exemple utiliser l'égalité des quadri-vecteurs :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b - \tilde{\mathbf{P}}_c = \tilde{\mathbf{P}}_d \quad (\text{II-19})$$

On en éduit l'égalité de leur (pseudo-norme)², désignée par v :

$$\begin{aligned} v &= (E_a + E_b - E_c)^2 - c^2(p_{ax} + p_{bx} - p_{cx})^2 - c^2(p_{ay} + p_{by} - p_{cy})^2 - c^2(p_{az} + p_{bz} - p_{cz})^2 \\ v &= E_d^2 - (cp_{dx})^2 - (cp_{dy})^2 - (cp_{dz})^2 \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

Ces outils vont être utilisés dans les chapitres suivants, en relation avec le quadri-vecteur des courants de DIRAC.

III – Le quadrivecteur impulsion- énergie quantique pour des solutions purement sinusoidales

Les idées développées dans ce document reposent essentiellement sur les propriétés d'un quadrivecteur impulsion-énergie quantique qui est développé dans ce chapitre.

Ce quadrivecteur est celui qui est « naturellement » issu des solutions à l'équation de DIRAC à travers les courants de DIRAC. C'est le seul quadrivecteur que l'on peut construire directement à partir des composantes des bispineurs.

Pour un bispineur de DIRAC ψ , ces courants sont donnés par la relation :

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{III-1})$$

Les γ^μ représentent les matrices de DIRAC et $\bar{\psi}$ représente le bispineur adjoint de ψ :

$$\bar{\psi} = (\psi^*)^T \gamma^0 = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*) \quad (\text{III-2})$$

Quelques lignes de calcul permettent de présenter une expression développée de ces courants :

$$\begin{aligned} J^0 &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 = J_t \\ J^1 &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_0^* \psi_3 = J_x \\ J^2 &= j \psi_3^* \psi_0 - j \psi_2^* \psi_1 + j \psi_1^* \psi_2 - j \psi_0^* \psi_3 = J_y \\ J^3 &= \psi_2^* \psi_0 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_0^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_3 = J_z \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

Nous adoptons dans la suite les indices t, x, y, z qui rappellent que, dans une approche énergétique, ces courants représentent respectivement la densité volumique d'énergie totale, et la part de cette densité qui évolue dans les directions x, y, z.

Considérons une solution exacte à l'équation de DIRAC qui ne contient pas d'exponentielle complexe : une telle solution sera désignée sous l'appellation « purement sinusoïdale ».

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right) - j\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right) \\
\Psi_1 &= 0 \\
\Psi_2 &= -j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right) \\
\Psi_3 &= \frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right) - j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right)
\end{aligned}
\tag{III-4}$$

L'énergie de masse au repos est représentée par la quantité :

$$\hbar\omega_0 = m_0c^2 \tag{III-5}$$

Les composantes de vitesse de la particule sont v_x , v_y , v_z , et γ représente le facteur de LORENTZ. Pour la solution examinée, l'équation de conservation de l'énergie est équivalente à l'expression du facteur de LORENTZ en fonction des composantes de la vitesse :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{III-6}$$

Le calcul des courants de DIRAC est détaillé dans les lignes suivantes. Les paramètres des fonctions sinusoïdales ont été omis car ils sont tous identiques.

Première composante du quadrivecteur courant :

$$\begin{aligned}
J_t &= \Psi_0^*\Psi_0 + \Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2 + \Psi_3^*\Psi_3 \\
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \cos^2 + \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_z^2}{c^2} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_y^2}{c^2} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_x^2}{c^2} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \\
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left(1 + \frac{v_x^2}{c^2} + \frac{v_y^2}{c^2} + \frac{v_z^2}{c^2} \right) \right\} = \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{III-7}$$

Deuxième composante du quadrivecteur courant :

$$\begin{aligned}
J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\
J_x &= \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin + j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left(\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \\ &+ \left(\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos + j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left(\frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin - j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \end{aligned} \right\} \\
J_x &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{v_y}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + j \frac{v_x}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos - j \frac{v_y}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_x}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \\ &+ \frac{v_y}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos - j \frac{v_x}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + j \frac{v_y}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_x}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \end{aligned} \right\} \\
J_x &= 2\hbar\omega_0 \left(\frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_x}{c} \sin^2 \right)
\end{aligned} \tag{III-8}$$

Troisième composante du quadrivecteur courant :

$$\begin{aligned}
J_y &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\
J_y &= j \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin + j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left(\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \\ &- \left(\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos + j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left(\frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin - j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \end{aligned} \right\} \\
J_y &= j \left\{ \begin{aligned} &\frac{v_y}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + j \frac{v_x}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos - j \frac{v_y}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_x}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \\ &- \frac{v_y}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + j \frac{v_x}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos - j \frac{v_y}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 - \frac{v_x}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \end{aligned} \right\} \\
J_y &= 2\hbar\omega_0 \left(-\frac{v_x}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_y}{c} \sin^2 \right)
\end{aligned} \tag{III-9}$$

Quatrième composante du quadrivecteur courant :

$$\begin{aligned}
J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \\
J_z &= \left(j \frac{v_z}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left(\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) + \left(-j \frac{v_z}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left(\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos + j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \\
J_z &= j \frac{v_z}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + \frac{v_z}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 - j \frac{v_z}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + \frac{v_z}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \\
J_z &= 2 \frac{v_z}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2
\end{aligned} \tag{III-10}$$

En résumé, le quadrivecteur courant de DIRAC a pour expression :

$$\begin{aligned}
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \\
J_x &= 2\hbar\omega_0 \left(\frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_x}{c} \sin^2 \right) \\
J_y &= 2\hbar\omega_0 \left(-\frac{v_x}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_y}{c} \sin^2 \right) \\
J_z &= 2 \frac{v_z}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2
\end{aligned} \tag{III-11}$$

On en déduit sa valeur moyenne dans le temps en remplaçant les fonctions sinusoidales au carré par leur moyenne temporelle, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. On rappelle que le produit de deux fonctions sinusoidales différentes a une moyenne temporelle nulle. On obtient :

$$\begin{aligned}
\langle J_t \rangle &= \hbar\gamma\omega_0 = \gamma m_0 c^2 = mc^2 \\
\langle J_x \rangle &= \gamma \hbar\omega_0 \frac{v_x}{c} = \gamma m_0 c^2 \frac{v_x}{c} = \gamma m_0 c v_x = mc v_x \\
\langle J_y \rangle &= \gamma \hbar\omega_0 \frac{v_y}{c} = \gamma m_0 c^2 \frac{v_y}{c} = \gamma m_0 c v_y = mc v_y \\
\langle J_z \rangle &= \gamma \hbar\omega_0 \frac{v_z}{c} = \gamma m_0 c^2 \frac{v_z}{c} = \gamma m_0 c v_z = mc v_z
\end{aligned} \tag{III-12}$$

La valeur moyenne du quadrivecteur impulsion-énergie de DIRAC est identique au quadrivecteur impulsion-énergie que la relativité attribue à une particule ponctuelle.

Pour définir le quadrivecteur impulsion-énergie de DIRAC, nous avons utilisé l'expression habituelle de la définition des courants de DIRAC, ce qui nous a imposé les coefficients de la solution exacte examinée. Nous conserverons ce choix dans la suite de ce document, mais il n'a rien d'absolu puisqu'il est défini à une constante multiplicative près.

La remarque concernant la valeur moyenne du quadrivecteur impulsion-énergie de DIRAC n'est pas spécifique à la solution examinée (III-4). Afin de vérifier cette propriété, nous écrivons cette solution de manière abrégée :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j \sqrt{\hbar\omega_0 \gamma} \sin \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= -j \frac{v_z}{c} \sqrt{\hbar\omega_0 \gamma} \sin \\
\psi_3 &= \frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\omega_0 \gamma} \sin - j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\omega_0 \gamma} \sin
\end{aligned} \tag{III-13}$$

On obtient une autre solution exacte en ajoutant une phase de $\pi/2$ à chacune des fonctions sinusoidales (cos \rightarrow -sin et sin \rightarrow cos) :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= -\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \sin - j\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \cos \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= -j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \cos \\
\psi_3 &= \frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \cos - j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \cos
\end{aligned} \tag{III-14}$$

Les courants de DIRAC se déduisent de (III-11), et il est apparent que leur valeur moyenne est inchangée pour cette solution.

On peut examiner une solution dans laquelle les échanges entre énergie de masse et énergie ondulatoire sont portés par la composante ψ_1 . On sait qu'une telle solution conduit à une inversion du spin par rapport à la précédente. On obtient :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_2 &= -\frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin - j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_3 &= j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin
\end{aligned} \quad \begin{aligned}
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \\
J_x &= 2\hbar\omega_0 \left(-\frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_x}{c} \sin^2 \right) \\
J_y &= 2\hbar\omega_0 \left(\frac{v_x}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_y}{c} \sin^2 \right) \\
J_z &= 2\frac{v_z}{c} \hbar\omega_0 \sin^2
\end{aligned} \tag{III-15}$$

La valeur moyenne du quadrivecteur courant est inchangée.

En dernier exemple, on peut considérer le cas de l'antiparticule, lorsque les échanges entre énergie de masse et énergie ondulatoire sont portés par la composante ψ_2 ou ψ_3 .

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_1 &= -\frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin + j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_2 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos + j\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_3 &= 0
\end{aligned} \quad \begin{aligned}
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \\
J_x &= 2\hbar\omega_0 \left(-\frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_x}{c} \sin^2 \right) \\
J_y &= 2\hbar\omega_0 \left(\frac{v_x}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_y}{c} \sin^2 \right) \\
J_z &= 2\frac{v_z}{c} \hbar\omega_0 \sin^2
\end{aligned} \tag{III-16}$$

La valeur moyenne du quadrivecteur courant est inchangée.

Il apparaît que la valeur moyenne de ce quadrivecteur reste identique, pour toute solution purement sinusoidale associée à une même phase de de BROGLIE.

Puisque les échanges d'énergie au cours d'une collision suivent les règles de conservation de l'énergie totale et de l'énergie impulsionnelle relativistes détaillées au

chapitre II, il s'ensuit que pour les particules de DIRAC, ces règles s'appliquent à la valeur moyenne du tenseur impulsion-énergie construit sur les courants de DIRAC.

Cette propriété a des conséquences.

Lorsque nous examinons une collision entre particules de DIRAC, il n'est pas nécessaire de construire une égalité entre les fonctions d'onde somme des particules incidentes et les fonctions d'onde somme des particules diffusées (une telle égalité semble d'ailleurs impossible à obtenir). Il suffit que les valeurs moyennes des courants de DIRAC pour les particules mises en jeu obéissent aux règles de conservation relativistes.

En d'autres termes, si on est capable de construire un quadrivecteur courants de DIRAC pour les particules incidentes, il suffira que les particules diffusées possèdent, en moyenne temporelle, un quadrivecteur courants de DIRAC identique aux particules incidentes. Toutes les particules diffusées qui possèdent cette propriété peuvent être potentiellement produites au cours de la collision.

La collision conduit à un brassage de modes extrêmement complexe entre les particules incidentes et diffusées, sur lequel nous essaierons de progresser dans la suite de ce document. L'analyse de l'évolution temporelle de ce brassage de modes au cours de la collision semble, pour l'instant, hors de portée d'une description analytique.

Les particules diffusées peuvent être des particules massives, des particules sans masse ou les antiparticules correspondantes. Elles doivent respecter deux conditions : en régime libre (après la collision), elles sont représentées par une solution exacte à l'équation de DIRAC, et le courant de DIRAC diffusé global doit être identique, en valeur moyenne, au courant de DIRAC incident global.

Les solutions purement sinusoïdales mettent en évidence des mouvements d'énergie très rapides au voisinage des particules libres de DIRAC. Ce phénomène présente une grande analogie avec la notion d'énergie réactive qui apparaît en champ proche en électromagnétisme.

Cette mise en évidence constitue une particularité qui est propre aux solutions purement sinusoïdales, et qui est masquée dans les solutions exponentielles. Sur ce point, l'analogie est importante avec l'électromagnétisme, et plus précisément avec le vecteur de POYNTING.

Afin d'illustrer cette remarque, considérons un champ électromagnétique décrit par ses deux vecteurs champ électrique et magnétique, supposés orthogonaux pour simplifier la présentation :

Représentation instantanée

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Représentation complexe associée

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}} &= \vec{E}_0 \exp j(\omega t + \varphi) \\ \underline{\vec{H}} &= \vec{H}_0 \exp j(\omega t)\end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

Le vecteur de POYNTING admet une représentation instantanée qui correspond à la description réelle du phénomène, où une représentation dans le formalisme complexe associé :

$$\bar{P} = \bar{E} \wedge \bar{H} = (\bar{E}_0 \wedge \bar{H}_0) \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) \quad \bar{P} = \frac{1}{2} \bar{E} \wedge \bar{H}^* = \frac{1}{2} (\bar{E}_0 \wedge \bar{H}_0) \exp(j\varphi) \quad (\text{III-18})$$

On constate que le vecteur de POYNTING instantané fait apparaître des fluctuations temporelles de la densité surfacique d'énergie, alors que ces fluctuations sont masquées dans le vecteur de POYNTING complexe.

Le vecteur de POYNTING instantané peut être développé :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} (\bar{E}_0 \wedge \bar{H}_0) (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)) \quad (\text{III-19})$$

Et il apparaît que c'est la valeur moyenne de cette expression qui correspond à la partie réelle du vecteur de POYNTING complexe :

$$\langle \bar{P} \rangle = \frac{1}{2} (\bar{E}_0 \wedge \bar{H}_0) \cos(\varphi) = \text{Re}(\bar{P}) \quad (\text{III-20})$$

IV – Le quadrivecteur impulsion- énergie quantique pour des solutions exponentielles

L'équation de DIRAC possède des solutions construites autour de fonctions exponentielles complexes.

Nous recherchons dans ce chapitre la forme de ces solutions qui conduit à un quadrivecteur impulsion-énergie correspondant à celui d'une particule ponctuelle en relativité restreinte.

L'intérêt de ces solutions apparaît dans l'expression des courants de DIRAC :

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{IV-1})$$

Si le bispineur ψ comporte une exponentielle complexe identique dans chacun de ses membres, alors le bispineur adjoint $\bar{\psi}$ contient le conjugué de la même exponentielle complexe.

Il s'ensuit que les courants de DIRAC n'ont plus de dépendance temporelle ou spatiale, et ils peuvent être qualifiés de courants uniformes dans le temps et dans l'espace. Cela conduit à une simplification significative de l'ensemble des calculs.

L'obtention des solutions exponentielles est détaillée dans de nombreux ouvrages, et n'est pas reprise dans ce document.

Les solutions de l'équation de DIRAC sont définies à un coefficient multiplicatif près. Sous réserve d'un choix pertinent de ce coefficient multiplicatif, on peut supposer que les solutions exponentielles peuvent représenter une particule de DIRAC ayant les mêmes propriétés d'énergie-impulsion qu'une particule ponctuelle.

Nous adoptons une représentation du bispineur de DIRAC présentée dans les chapitres précédents, qui fait appel aux composantes de vitesse de la particule, ainsi qu'au facteur de LORENTZ.

Pour alléger la présentation, nous omettons l'énergie de masse au repos qui vient en facteur de tous les termes :

$$\hbar\omega_0 = m_0c^2 \quad (\text{IV-2})$$

Avec cette simplification d'écriture, nous adoptons la représentation suivante du quadrivecteur impulsion énergie de la relativité restreinte :

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_x}{c} \\ \frac{v_y}{c} \\ \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{IV-3})$$

Considérons alors une particule décrite à l'aide de la phase de l'onde de de BROGLIE suivante :

$$\phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \quad (\text{IV-4})$$

Il existe quatre solutions à l'équation de DIRAC qui sont associées à la phase (IV-4). Ces solutions sont présentées ci-dessous avec un coefficient multiplicateur qui permet de retrouver la première composante du quadrivecteur impulsion-énergie (IV-3) (les détails du calcul sont présentés par la suite). Les raisons du choix de la notation pour ces solutions apparaîtront à la fin du chapitre.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad (\text{IV-5})$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad (\text{IV-6})$$

On admet que chaque solution est associée aux propriétés suivantes :

- $v^{(1)}$ représente une particule avec un spin up.
- $v^{(2)}$ représente une particule avec un spin down.
- $v^{(1)}$ représente une antiparticule avec un spin up.
- $v^{(2)}$ représente une antiparticule avec un spin down.

La notation exponentielle autorise une autre manière de représenter les mêmes particules avec la même onde de de BROGLIE en choisissant une phase opposée à la précédente :

$$-\phi = -\gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \quad (\text{IV-7})$$

On obtient alors l'ensemble de solutions suivant, en changeant le signe de γ dans les solutions (IV-6) :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad (\text{IV-8})$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad (\text{IV-9})$$

Comme précédemment, on admet que chaque solution est associée aux propriétés suivantes :

- $\mathbf{u}^{(1)}$ représente une particule avec un spin up.
- $\mathbf{u}^{(2)}$ représente une particule avec un spin down.
- $\mathbf{u}^{(1)}$ représente une antiparticule avec un spin up.
- $\mathbf{u}^{(2)}$ représente une antiparticule avec un spin down.

Pour chacune de ces 8 solutions on peut calculer les courants de DIRAC correspondants et les comparer au quadrivecteur impulsion énergie d'une particule ponctuelle que nous avons explicité en (IV-3).

Nous détaillons la vérification de cette propriété sur les exemples particuliers des particules représentées par $\mathbf{v}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(1)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\
\mathbf{J}_t^{v(1)} &= \frac{1}{2(\gamma-1)} \left\{ (\gamma-1)^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right\} = \frac{1}{2(\gamma-1)} \left\{ 1 - 2\gamma + \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} = \frac{1}{2(\gamma-1)} \{ 2\gamma^2 - 2\gamma \} = \gamma \\
\mathbf{J}_t^{u(1)} &= \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\{ (\gamma+1)^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right\} = \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\{ 1 + 2\gamma + \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} = \frac{1}{2(\gamma+1)} \{ 2\gamma^2 + 2\gamma \} = \gamma
\end{aligned} \tag{IV-10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\
\mathbf{J}_x^{v(1)} &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) = \gamma \frac{v_x}{c} \\
\mathbf{J}_x^{u(1)} &= \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) = \gamma \frac{v_x}{c}
\end{aligned} \tag{IV-11}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_y &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\
\mathbf{J}_y^{v(1)} &= j \left\{ \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) \left(j \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \right\} = \gamma \frac{v_y}{c} \\
\mathbf{J}_y^{u(1)} &= j \left\{ \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \right\} = \gamma \frac{v_y}{c}
\end{aligned} \tag{IV-12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \\
\mathbf{J}_z^{v(1)} &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \right) = \gamma \frac{v_z}{c} \\
\mathbf{J}_z^{u(1)} &= \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) = \gamma \frac{v_z}{c}
\end{aligned} \tag{IV-13}$$

Toutes les solutions de forme exponentielle ont leurs courants de DIRAC qui coïncident avec le quadrivecteur impulsion énergie de la particule représentée.

Pour une description cohérente de l'interaction entre particules, ces solutions ne peuvent pas être choisies au hasard. Il existe deux ensembles de solutions distincts : le premier utilise le facteur $(\gamma - 1)$, et le second utilise le facteur $(\gamma + 1)$. Ces deux ensembles sont équivalents, et le choix est arbitraire.

Nous adoptons dans la suite de ce document la représentation des bispineurs en fonction de $(\gamma + 1)$. Les 4 bispineurs associés à cette représentation sont rappelés ci-dessous :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad (\text{IV-14})$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad (\text{IV-15})$$

Avec :

$$\phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \quad (\text{IV-16})$$

Conformément à cette représentation, les particules sont affectées d'une phase $e^{-j\phi}$, tandis que les antiparticules sont affectées d'une phase $e^{j\phi}$ dans la suite de ce document.

V – Relations de conservation entre particules de DIRAC dans une collision

Lors d'une collision entre particules ponctuelles, les relations de conservation de l'énergie totale et de l'énergie impulsionnelle ont été établies au chapitre II.

Nous proposons dans ce chapitre d'établir les relations analogues, lorsque les particules sont représentées par des bispineurs de DIRAC, et d'en vérifier la cohérence avec la relation relativiste de conservation de l'énergie et de l'impulsion pour les particules ponctuelles.

Considérons deux particules incidentes (a) et (b) qui sont supposées indépendantes.

Comme nous allons nous intéresser aux valeurs moyennes des courants de DIRAC, nous savons que nous pouvons choisir n'importe quelle représentation purement sinusoïdale.

Pour avancer dans le détail du raisonnement, nous choisissons une représentation déjà utilisée dans un chapitre précédent.

Nous prenons comme point de départ le bispineur obtenu en sommant les bispineurs relatifs aux particules (a) et (b) (voir relation III-13).

Dans une notation abrégée, nous posons :

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 &= \Psi_{a0} + \Psi_{b0} = \left(\sqrt{\frac{\hbar\omega_{a0}}{\gamma_a}} \cos\alpha_a + \sqrt{\frac{\hbar\omega_{b0}}{\gamma_b}} \cos\alpha_b \right) - j \left(\sqrt{\hbar\gamma_a\omega_{a0}} \sin\alpha_a + \sqrt{\hbar\gamma_b\omega_{b0}} \sin\alpha_b \right) \\
 \Psi_1 &= \Psi_{a1} + \Psi_{b1} = 0 \\
 \Psi_2 &= \Psi_{a2} + \Psi_{b2} = -j \left(\frac{v_{az}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_a\omega_{a0}} \sin\alpha_a + \frac{v_{bz}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_b\omega_{b0}} \sin\alpha_b \right) \\
 \Psi_3 &= \Psi_{a3} + \Psi_{b3} = \left(\frac{v_{ay}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_a\omega_{a0}} \sin\alpha_a + \frac{v_{by}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_b\omega_{b0}} \sin\alpha_b \right) - j \left(\frac{v_{ax}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_a\omega_{a0}} \sin\alpha_a + \frac{v_{bx}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_b\omega_{b0}} \sin\alpha_b \right)
 \end{aligned}
 \tag{V-1}$$

La question à laquelle nous tentons de répondre est la suivante : Peut-on représenter ce « bispineur somme » par un bispineur équivalent ψ qui serait associé à une particule de DIRAC unique ?

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \\
\Psi_1 &= 0 \\
\Psi_2 &= -j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \\
\Psi_3 &= \frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin - j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin
\end{aligned} \tag{V-2}$$

La cohérence avec le formalisme ponctuel de la relativité restreinte implique que les courants de DIRAC doivent être égaux, en valeur moyenne temporelle :

$$\begin{aligned}
\langle J_t \rangle &= \langle J_{(a+b)t} \rangle \\
\langle J_x \rangle &= \langle J_{(a+b)x} \rangle \\
\langle J_y \rangle &= \langle J_{(a+b)y} \rangle \\
\langle J_z \rangle &= \langle J_{(a+b)z} \rangle
\end{aligned} \tag{V-3}$$

Pour la particule unique, ces valeurs moyennes ont déjà été calculées dans les chapitres précédents :

$$\begin{aligned}
\langle J_t \rangle &= \gamma\hbar\omega_0 \\
\langle J_x \rangle &= \gamma\hbar\omega_0 \frac{v_x}{c} \\
\langle J_y \rangle &= \gamma\hbar\omega_0 \frac{v_y}{c} \\
\langle J_z \rangle &= \gamma\hbar\omega_0 \frac{v_z}{c}
\end{aligned} \tag{V-4}$$

Pour le « bispineur somme », on obtient en considérant que les particules sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
\langle J_{(a+b)t} \rangle &= \hbar\gamma_a\omega_{a0} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \\
\langle J_{(a+b)x} \rangle &= \hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \\
\langle J_{(a+b)y} \rangle &= \hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \\
\langle J_{(a+b)z} \rangle &= \hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c}
\end{aligned} \tag{V-5}$$

L'égalité entre les relations (V-4) et (V-5) ci-dessus impose :

$$\begin{aligned}
\gamma\omega_0 &= \gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0} \\
\gamma\omega_0 v_x &= \gamma_a\omega_{a0} v_{ax} + \gamma_b\omega_{b0} v_{bx} \\
\gamma\omega_0 v_y &= \gamma_a\omega_{a0} v_{ay} + \gamma_b\omega_{b0} v_{by} \\
\gamma\omega_0 v_z &= \gamma_a\omega_{a0} v_{az} + \gamma_b\omega_{b0} v_{bz}
\end{aligned} \tag{V-6}$$

On en déduit les caractéristiques de la particule unique équivalente au « bispineur somme » :

$$\begin{aligned}
\gamma\omega_0 &= \gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0} \\
v_x &= \frac{\gamma_a\omega_{a0}v_{ax} + \gamma_b\omega_{b0}v_{bx}}{\gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0}} \\
v_y &= \frac{\gamma_a\omega_{a0}v_{ay} + \gamma_b\omega_{b0}v_{by}}{\gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0}} \\
v_z &= \frac{\gamma_a\omega_{a0}v_{az} + \gamma_b\omega_{b0}v_{bz}}{\gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0}}
\end{aligned} \tag{V-7}$$

Une relation analogue peut être établie pour les particules (c) et (d) qui sont diffusées après collision :

$$\begin{aligned}
\gamma\omega_0 &= \gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0} \\
v_x &= \frac{\gamma_c\omega_{c0}v_{cx} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dx}}{\gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0}} \\
v_y &= \frac{\gamma_c\omega_{c0}v_{cy} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dy}}{\gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0}} \\
v_z &= \frac{\gamma_c\omega_{c0}v_{cz} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dz}}{\gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0}}
\end{aligned} \tag{V-8}$$

On en déduit la relation générale qui doit être vérifiée entre les particules de DIRAC entrantes et sortantes de la collision :

$$\begin{aligned}
\gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0} &= \gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0} \\
\gamma_a\omega_{a0}v_{ax} + \gamma_b\omega_{b0}v_{bx} &= \gamma_c\omega_{c0}v_{cx} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dx} \\
\gamma_a\omega_{a0}v_{ay} + \gamma_b\omega_{b0}v_{by} &= \gamma_c\omega_{c0}v_{cy} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dy} \\
\gamma_a\omega_{a0}v_{az} + \gamma_b\omega_{b0}v_{bz} &= \gamma_c\omega_{c0}v_{cz} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dz}
\end{aligned} \tag{V-9}$$

Après avoir redimensionné tous les termes en énergie, il apparaît que ces relations de conservation sont l'image exacte des relations obtenues pour une particule ponctuelle relativiste en (II-13) :

$$\begin{aligned}
\hbar\gamma_a\omega_{a0} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} &= \hbar\gamma_c\omega_{c0} + \hbar\gamma_d\omega_{d0} \\
\hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} &= \hbar\gamma_c\omega_{c0} \frac{v_{cx}}{c} + \hbar\gamma_d\omega_{d0} \frac{v_{dx}}{c} \\
\hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} &= \hbar\gamma_c\omega_{c0} \frac{v_{cy}}{c} + \hbar\gamma_d\omega_{d0} \frac{v_{dy}}{c} \\
\hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} &= \hbar\gamma_c\omega_{c0} \frac{v_{cz}}{c} + \hbar\gamma_d\omega_{d0} \frac{v_{dz}}{c}
\end{aligned} \tag{V-10}$$

$$\begin{aligned}
E_a + E_b &= E_c + E_d \\
cp_{ax} + cp_{bx} &= cp_{cx} + cp_{dx} \\
cp_{ay} + cp_{by} &= cp_{cy} + cp_{dy} \\
cp_{az} + cp_{bz} &= cp_{cz} + cp_{dz}
\end{aligned}$$

On en déduit les variables de MANDELSTAM associées aux particules de DIRAC :

$$\begin{aligned}
s &= \hbar^2 \left\{ \left(\gamma_a \omega_{a0} + \gamma_b \omega_{b0} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \right)^2 \right\} \\
s &= \hbar^2 \left\{ \left(\gamma_c \omega_{c0} + \gamma_d \omega_{d0} \right)^2 - \left(\gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cx}}{c} + \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dx}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cy}}{c} + \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dy}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cz}}{c} + \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dz}}{c} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{V-11}$$

$$\begin{aligned}
t &= \hbar^2 \left\{ \left(\gamma_a \omega_{a0} - \gamma_c \omega_{c0} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} - \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cx}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} - \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cy}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} - \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cz}}{c} \right)^2 \right\} \\
t &= \hbar^2 \left\{ \left(\gamma_d \omega_{d0} - \gamma_b \omega_{b0} \right)^2 - \left(\gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dx}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dy}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dz}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{V-12}$$

$$\begin{aligned}
u &= \hbar^2 \left\{ \left(\gamma_a \omega_{a0} - \gamma_d \omega_{d0} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} - \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dx}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} - \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dy}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} - \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dz}}{c} \right)^2 \right\} \\
u &= \hbar^2 \left\{ \left(\gamma_c \omega_{c0} - \gamma_b \omega_{b0} \right)^2 - \left(\gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cx}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cy}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \right)^2 - \left(\gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cz}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{V-13}$$

VI – Collision entre particules de DIRAC

Nous allons proposer dans ce chapitre une description de la collision de particules de DIRAC qui regroupe à la fois les aspects relativistes entre particules ponctuelles, et les aspects relativistes entre particules quantiques.

Pour illustrer cette description, nous traiterons le cas d'une collision avec 2 particules entrantes notées (a) et (b), et deux particules sortantes notées (c) et (d).

Pour valider l'approche qui est proposée, nous aurons besoin de comparer nos résultats avec l'amplitude de diffusion obtenue par les graphes de FEYNMAN. Cette amplitude est calculée à partir de solutions exponentielles à l'équation de DIRAC, et donc, ce sont les solutions exponentielles qui vont être utilisées dans la suite de ce document.

Il existe plusieurs manières de normaliser ces solutions. Dans l'objectif d'une description physique des phénomènes, nous allons utiliser une normalisation qui permet, pour une particule indépendante, de faire en sorte que ses courants de DIRAC soient identiques au quadrivecteur impulsion énergie de la relativité restreinte. Ce quadrivecteur est représenté sous une forme utilisée dans les chapitres précédents, avec des composantes qui ont la dimension d'une énergie (à une constante de PLANCK près) :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \gamma\omega_0 \\ \gamma\omega_0 \frac{v_x}{c} \\ \gamma\omega_0 \frac{v_y}{c} \\ \gamma\omega_0 \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = \gamma\omega_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_x}{c} \\ \frac{v_y}{c} \\ \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{VI-1})$$

La quantité $\hbar\omega_0 = m_0c^2$ représente l'énergie de masse au repos.

I – Les courants d'interaction

Soit deux particules de DIRAC indépendantes notées (a) et (b). Chaque particule est décrite par son bispineur :

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} \quad \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} \quad (\text{VI-2})$$

Ce chapitre utilise les propriétés d'une particule équivalente obtenue en sommant ces deux bispineurs :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \Psi_a + \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} + \Psi_{b0} \\ \Psi_{a1} + \Psi_{b1} \\ \Psi_{a2} + \Psi_{b2} \\ \Psi_{a3} + \Psi_{b3} \end{pmatrix} \quad (\text{VI-3})$$

Les courants de DIRAC de la particule équivalente sont donnés par les relations habituelles :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_y &= j \Psi_3^* \Psi_0 - j \Psi_2^* \Psi_1 + j \Psi_1^* \Psi_2 - j \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \end{aligned} \quad (\text{VI-4})$$

Pour exprimer ces courants en fonction des courants des particules (a) et (b), on effectue un développement, détaillé ci-dessous sur la composante J_t :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_t &= \left\{ \begin{aligned} &(\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) + (\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \\ &+ (\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) + (\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) \end{aligned} \right\} \\ J_t &= \left\{ \begin{aligned} &\Psi_{a0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b1} \\ &\Psi_{a2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{b3}^* \Psi_{b3} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI-5})$$

On y retrouve les courants relatifs à chacune des particules (a) et (b) :

$$\begin{aligned} J_{at} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} \\ J_{bt} &= \Psi_{b0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b3}^* \Psi_{b3} \end{aligned} \quad (\text{VI-6})$$

Ainsi que les courants d'interaction entre les particules (a) et (b) :

$$\begin{aligned} J_{abt} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} \\ J_{bat} &= \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} \end{aligned} \quad (\text{VI-7})$$

En procédant de manière analogue pour chaque composante, les courants de la particule équivalente apparaissent sous la forme :

$$\begin{aligned}
J_{it} &= J_{at} + J_{bt} + J_{abt} + J_{bat} \\
J_{ix} &= J_{ax} + J_{bx} + J_{abx} + J_{bax} \\
J_{iy} &= J_{ay} + J_{by} + J_{aby} + J_{bay} \\
J_{iz} &= J_{az} + J_{bz} + J_{abz} + J_{baz}
\end{aligned} \tag{VI-8}$$

L'indice i a été ajouté pour rappeler que les particules (a) et (b) représentent l'état initial du système, avant la collision.

Les quadrivecteurs courants qui apparaissent à droite de l'égalité ci-dessus sont représentatifs des courants associés à la particule (a), à la particule (b), et à l'interaction entre les particules (a) et (b).

$$\tilde{J}_a = \begin{pmatrix} J_{at} \\ J_{ax} \\ J_{ay} \\ J_{az} \end{pmatrix} \quad \tilde{J}_b = \begin{pmatrix} J_{bt} \\ J_{bx} \\ J_{by} \\ J_{bz} \end{pmatrix} \quad \tilde{J}_{ab} + \tilde{J}_{ba} = \begin{pmatrix} J_{abt} + J_{bat} \\ J_{abx} + J_{bax} \\ J_{aby} + J_{bay} \\ J_{abz} + J_{baz} \end{pmatrix} \tag{VI-9}$$

Nous savons, au vu lors des chapitres précédents, que pour des solutions exponentielles convenablement choisies, les courants associés à la particule (a) et à la particule (b) représentent le quadrivecteur impulsion énergie d'une particule ponctuelle :

$$\tilde{J}_a = \begin{pmatrix} \gamma_a \omega_{a0} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} \end{pmatrix} = \tilde{P}_a \quad \tilde{J}_b = \begin{pmatrix} \gamma_b \omega_{b0} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \end{pmatrix} = \tilde{P}_b \quad \begin{aligned} \gamma_a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \\ \gamma_b &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{bx}^2 + v_{by}^2 + v_{bz}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{VI-10}$$

Le quadrivecteur courant de la particule équivalente aux particules (a) et (b) se présente donc sous la forme :

$$\tilde{J}_i = \tilde{P}_a + \tilde{P}_b + \tilde{J}_{ab} + \tilde{J}_{ba} \tag{VI-11}$$

On y retrouve le quadrivecteur impulsion-énergie utilisé pour le traitement des particules ponctuelles relativistes, qui est égal à la somme des quadrivecteurs associés aux particules (a) et (b).

On y retrouve en plus un quadrivecteur d'interaction entre les particules (a) et (b), dont la moyenne temporelle est nulle sauf dans un cas particulier que nous allons préciser. Dans une approche énergétique, ce quadrivecteur est associé à une énergie réactive qui entoure la particule équivalente.

Le même traitement peut être développé pour les particules sortantes (c) et (d).

En ajoutant l'indice f pour rappeler que les particules (c) et (d) sont associées à l'état final, on peut écrire :

$$\tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d + \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc} \quad (\text{VI-12})$$

En termes de particules équivalentes associées aux états initial et final, la réaction produite lors de la collision peut être schématisée de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{J}}_i = \tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b + \tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba} \rightarrow \tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d + \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc} \quad (\text{VI-13})$$

On sait que d'un point de vue relativiste, la somme des quadrivecteurs des particules entrantes est égale à la somme des quadrivecteurs des particules sortantes :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d \quad (\text{VI-14})$$

On s'interroge alors sur le rôle des courants d'interactions.

Ces courants représentent des mouvements d'énergie oscillatoires extrêmement complexes et rapides dans le voisinage des particules d'entrée et des particules de sortie.

Il n'y a aucune raison pour que ces courants soient identiques dans la relation (VI-13) ci-dessus, et c'est dans le mélange propre à la collision qu'il doit y avoir une évolution des courants d'interactions d'entrée vers les courants d'interactions de sortie.

Nous conjecturons alors que cette évolution est en lien direct avec le produit scalaire (au sens de MINKOWSKY) de ces courants.

En d'autres termes, l'amplitude de diffusion doit apparaître de manière proportionnelle dans le produit scalaire M du courant d'interaction initial par le courant d'interaction final.

$$M = (\tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba})(\tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc}) \quad (\text{VI-15})$$

Ce produit scalaire représente en quelque sorte le degré de ressemblance entre les courants d'interaction initiaux et finaux, ou dit autrement, la part des courants initiaux que l'on peut retrouver dans les courants finaux. Il a un sens physique tout à fait analogue à celui du produit scalaire d'une force par un déplacement qui quantifie la part de la force qui contribue au travail réalisé.

On retrouve un sens physique équivalent dans d'autres domaines complètement disjoints, par exemple pour estimer la direction d'arrivée d'un signal dans les méthodes dites « haute résolution » (voir [lien document](#) pour plus de détails)

II – Collisions entre particule et antiparticule

Chaque particule ou antiparticule est représentée par une solution exacte de l'équation de DIRAC, sous une forme exponentielle. Le terme de phase inclus dans l'exponentielle va jouer un rôle déterminant dans le processus qui va être décrit. Pour cette raison, il est mis en évidence dans les solutions de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Psi_a &= \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{a0} \\ \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{a2} \\ \mathbf{u}_{a3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} = \mathbf{u}_a e^{-j\phi_a} & \Psi_b &= \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{b0} \\ \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{b2} \\ \mathbf{u}_{b3} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} = \mathbf{u}_b e^{j\phi_b} \\
\Psi_c &= \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{c0} \\ \mathbf{u}_{c1} \\ \mathbf{u}_{c2} \\ \mathbf{u}_{c3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} = \mathbf{u}_c e^{-j\phi_c} & \Psi_d &= \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{d1} \\ \Psi_{d2} \\ \Psi_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{d0} \\ \mathbf{u}_{d1} \\ \mathbf{u}_{d2} \\ \mathbf{u}_{d3} \end{pmatrix} e^{j\phi_d} = \mathbf{u}_d e^{j\phi_d}
\end{aligned} \tag{VI-16}$$

Dans le respect des solutions exponentielles à l'équation de DIRAC qui ont été définies au chapitre IV, (a) et (c) représentent des particules, tandis que (b) et (d) représentent des antiparticules.

On rappelle que les indices (a) et (b) représentent les particules entrantes dans la réaction, et (c) et (d) les particules sortantes.

La phase représente une onde de BROGLIE qui est exprimée en fonction des caractéristiques de vitesse (v_x, v_y, v_z) et de l'énergie au repos (ω_0) de chaque particule.

$$\begin{aligned}
\phi_a &= \gamma_a \omega_{a0} \left(t - \frac{v_{ax}}{c^2} x - \frac{v_{ay}}{c^2} y - \frac{v_{az}}{c^2} z \right) \\
\phi_b &= \gamma_b \omega_{b0} \left(t - \frac{v_{bx}}{c^2} x - \frac{v_{by}}{c^2} y - \frac{v_{bz}}{c^2} z \right) \\
\phi_c &= \gamma_c \omega_{c0} \left(t - \frac{v_{cx}}{c^2} x - \frac{v_{cy}}{c^2} y - \frac{v_{cz}}{c^2} z \right) \\
\phi_d &= \gamma_d \omega_{d0} \left(t - \frac{v_{dx}}{c^2} x - \frac{v_{dy}}{c^2} y - \frac{v_{dz}}{c^2} z \right)
\end{aligned} \tag{VI-17}$$

L'équation de conservation de l'énergie pour des particules de DIRAC a été établie dans un chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
\gamma_a \omega_{a0} + \gamma_b \omega_{b0} &= \gamma_c \omega_{c0} + \gamma_d \omega_{d0} \\
\gamma_a \omega_{a0} v_{ax} + \gamma_b \omega_{b0} v_{bx} &= \gamma_c \omega_{c0} v_{cx} + \gamma_d \omega_{d0} v_{dx} \\
\gamma_a \omega_{a0} v_{ay} + \gamma_b \omega_{b0} v_{by} &= \gamma_c \omega_{c0} v_{cy} + \gamma_d \omega_{d0} v_{dy} \\
\gamma_a \omega_{a0} v_{az} + \gamma_b \omega_{b0} v_{bz} &= \gamma_c \omega_{c0} v_{cz} + \gamma_d \omega_{d0} v_{dz}
\end{aligned} \tag{VI-18}$$

Ces relations expriment le fait qu'à chaque instant t , et en chaque point de l'espace (x, y, z), les phases de de BROGLIE doivent respecter les conditions :

$$\phi_a + \phi_b = \phi_c + \phi_d \tag{VI-19}$$

En notation abrégé, nous écrirons désormais cette relation :

$$\begin{aligned}
\phi_a + \phi_b &= \phi_{ab} & \phi_{ab} &= \phi_{cd} \\
\phi_c + \phi_d &= \phi_{cd} & \phi_{ab} - \phi_{cd} &= 0
\end{aligned}
\tag{VI-20}$$

La relation (VI-20) ci-dessus joue un rôle fondamental dans le processus d'interaction entre les particules entrantes (a) et (b), et les particules sortantes (c) et (d). Elle signifie que la phase de l'onde de de BROGLIE ϕ_{ab} qui est associée à la somme des particules entrantes doit être égale à la phase de l'onde de de BROGLIE ϕ_{cd} associée à la somme des particules sortantes.

Lorsqu'on examine les courants d'interaction de DIRAC (qui vont être détaillés par la suite), on constate que la phase du courant d'interaction a pour expression :

Pour les particules (a) et (b) : $(\phi_a + \phi_b)$ ou $-(\phi_a + \phi_b)$
 Pour les particules (c) et (d) : $(\phi_c + \phi_d)$ ou $-(\phi_c + \phi_d)$

Au cours de la réaction de diffusion, les interactions qui résultent du pseudo-produit scalaire entre les particules entrantes (a)(b) et sortantes (c)(d) sont associées aux phases suivantes :

$$\begin{aligned}
-(\phi_a + \phi_b) - (\phi_c + \phi_d) &= -(\phi_{ab} + \phi_{cd}) \\
-(\phi_a + \phi_b) + (\phi_c + \phi_d) &= -(\phi_{ab} - \phi_{cd}) = 0 \\
(\phi_a + \phi_b) - (\phi_c + \phi_d) &= \phi_{ab} - \phi_{cd} = 0 \\
(\phi_a + \phi_b) + (\phi_c + \phi_d) &= (\phi_{ab} + \phi_{cd})
\end{aligned}
\tag{VI-21}$$

Lorsqu'on introduit ces phases dans une exponentielle complexe, on obtient deux phases qui sont conjuguées l'une de l'autre. Une de ces phase est associée à l'interaction de (a)(b) vers (c)(d), l'autre à l'interaction de (c)(d) vers (a)(b). Le traitement symétrique qui est effectué contient implicitement ces deux interactions.

D'une manière générale, ces phases génèrent des variations sinusoïdales extrêmement rapides dont la valeur moyenne est nulle, sauf dans le cas particulier où ces phases sont égales à 0.

Dans les deux cas où les phases globales sont nulles (2ème ligne et 3ème ligne de VI-21), les exponentielles de ces phases sont égales à 1, et le phénomène d'interaction n'a plus une valeur moyenne qui est nulle.

Nous proposons de détailler la forme des courants d'interaction, en nous plaçant dans les conditions que nous venons d'établir.

III – Eléments de calcul pour l'amplitude de diffusion

Nous rappelons la représentation de DIRAC qui a été adoptée pour les particules et les antiparticules qui vont interagir :

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{a0} \\ \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{a2} \\ \mathbf{u}_{a3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} = \mathbf{u}_a e^{-j\phi_a} \quad \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{b0} \\ \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{b2} \\ \mathbf{u}_{b3} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} = \mathbf{u}_b e^{j\phi_b} \quad (\text{VI-22})$$

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{c0} \\ \mathbf{u}_{c1} \\ \mathbf{u}_{c2} \\ \mathbf{u}_{c3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} = \mathbf{u}_c e^{-j\phi_c} \quad \Psi_d = \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{d1} \\ \Psi_{d2} \\ \Psi_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{d0} \\ \mathbf{u}_{d1} \\ \mathbf{u}_{d2} \\ \mathbf{u}_{d3} \end{pmatrix} e^{j\phi_d} = \mathbf{u}_d e^{j\phi_d}$$

Dans cet exemple, les bispineurs (a) et (c) représentent des particules, tandis que les bispineurs (b) et (d) représentent des antiparticules

Les courants d'interaction entre (a) et (b) peuvent être précisés. On obtient sur la première composante (qui est indiquée par la lettre t) :

$$\begin{aligned} J_{abt} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} \\ J_{abt} &= (\mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b1} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b3}) e^{j(\phi_a + \phi_b)} = \mathbf{K}_{abt} e^{j\phi_{ab}} \\ J_{bat} &= \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} \\ J_{bat} &= (\mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{a1} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{a3}) e^{-j(\phi_a + \phi_b)} = \mathbf{K}_{bat} e^{-j\phi_{ab}} = \mathbf{K}_{abt}^* e^{-j\phi_{ab}} \end{aligned} \quad (\text{VI-23})$$

On note que les courants J_{abt} et J_{bat} sont conjugués, mais il est opportun pour l'instant de les conserver dans leur forme ci-dessus.

Avec cette notation qui permet de laisser la phase de de BROGLIE apparente, les courants d'interaction (a)(b) et (c)(d) sont résumés ci-dessous :

$$\begin{aligned} J_{abt} + J_{bat} &= \mathbf{K}_{abt} e^{j\phi_{ab}} + \mathbf{K}_{bat} e^{-j\phi_{ab}} & J_{cdt} + J_{dct} &= \mathbf{K}_{cdt} e^{j\phi_{cd}} + \mathbf{K}_{dct} e^{-j\phi_{cd}} \\ J_{abx} + J_{bax} &= \mathbf{K}_{abx} e^{j\phi_{ab}} + \mathbf{K}_{bax} e^{-j\phi_{ab}} & J_{cdx} + J_{dcx} &= \mathbf{K}_{cdx} e^{j\phi_{cd}} + \mathbf{K}_{dcx} e^{-j\phi_{cd}} \\ J_{aby} + J_{bay} &= \mathbf{K}_{aby} e^{j\phi_{ab}} + \mathbf{K}_{bay} e^{-j\phi_{ab}} & J_{cdy} + J_{dcy} &= \mathbf{K}_{cdy} e^{j\phi_{cd}} + \mathbf{K}_{dcy} e^{-j\phi_{cd}} \\ J_{abz} + J_{baz} &= \mathbf{K}_{abz} e^{j\phi_{ab}} + \mathbf{K}_{baz} e^{-j\phi_{ab}} & J_{cdz} + J_{dcz} &= \mathbf{K}_{cdz} e^{j\phi_{cd}} + \mathbf{K}_{dcz} e^{-j\phi_{cd}} \end{aligned} \quad (\text{VI-24})$$

Où encore dans une notation plus concise :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}} = \tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab}^* e^{-j\phi_{ab}} \quad \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}} = \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{cd}^* e^{-j\phi_{cd}} \quad (\text{VI-25})$$

Il faut, pour terminer, effectuer le pseudo produit scalaire M des interactions (a)(b) et (c)(d). Ce pseudo produit scalaire est symbolisé par un point (.). Il est relatif à une métrique (+, -, -, -).

$$\begin{aligned} M &= (\tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}}) (\tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}}) \\ M &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}} \\ M &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{-j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} \end{aligned} \quad (\text{VI-26})$$

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que l'interaction moyenne est nulle sauf lorsque la condition de conservation de l'énergie est réalisée : $\phi_{ab} - \phi_{cd} = 0$.

Nous en concluons que la valeur moyenne du pseudo produit scalaire est égal à la quantité :

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \tilde{K}_{ab} \cdot \tilde{K}_{dc} + \tilde{K}_{ba} \cdot \tilde{K}_{cd} = \tilde{K}_{ab} \cdot \tilde{K}_{dc} + \tilde{K}_{ab}^* \cdot \tilde{K}_{dc}^* \\ \langle M \rangle &= \left(K_{abt} K_{dct} - K_{abx} K_{dcx} - K_{aby} K_{dcy} - K_{abz} K_{dcz} \right) + \left(K_{abt}^* K_{dct}^* - K_{abx}^* K_{dcx}^* - K_{aby}^* K_{dcy}^* - K_{abz}^* K_{dcz}^* \right) \end{aligned} \quad (VI-27)$$

Pour une utilisation concrète de cette relation, les expressions des grandeurs K sont rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned} K_{abt} &= u_{a0}^* u_{b0} + u_{a1}^* u_{b1} + u_{a2}^* u_{b2} + u_{a3}^* u_{b3} = K_{bat}^* \\ K_{abx} &= u_{a3}^* u_{b0} + u_{a2}^* u_{b1} + u_{a1}^* u_{b2} + u_{a0}^* u_{b3} = K_{bax}^* \\ K_{aby} &= ju_{a3}^* u_{b0} - ju_{a2}^* u_{b1} + ju_{a1}^* u_{b2} - ju_{a0}^* u_{b3} = K_{bay}^* \\ K_{abz} &= u_{a2}^* u_{b0} - u_{a3}^* u_{b1} + u_{a0}^* u_{b2} - u_{a1}^* u_{b3} = K_{baz}^* \end{aligned} \quad (VI-28)$$

Les deux termes entre parenthèses dans la valeur moyenne du produit scalaire (VI-27) sont conjugués. Le premier correspond à l'interaction de (a)(b) vers (c)(d), le second à l'interaction de (c)(d) vers (a)(b).

Nous allons montrer que dans le cas de l'interaction électron-muon, le premier de ces termes est directement proportionnel à l'amplitude de diffusion calculée à partir des graphes de FEYNMAN.

VII – La diffusion électrons-muons

Le traitement général qui a été exposé dans le chapitre précédent va être repris en détail sur l'exemple particulier de la diffusion électrons-muons.

Il s'agit d'une réaction de diffusion classique qui permet d'introduire les graphes de FEYNMAN. Dans ce type de réaction, la masse au repos n'est pas conservée entre les particules entrantes et les particules sortantes. Il s'agit donc d'un processus différent d'une diffusion élastique dans laquelle les particules, antiparticules ou photon conservent leur structure d'origine : cet autre cas particulier sera traité dans un chapitre ultérieur.

En entrée, on trouve un électron noté (a) et un antiélectron noté (b) qui sont représentés par les bispineurs suivants :

$$\psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} \quad \psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VII-1})$$

$$\phi_a = \gamma_a \omega_{a0} \left(t - \frac{v_{ax}}{c^2} x - \frac{v_{ay}}{c^2} y - \frac{v_{az}}{c^2} z \right) \quad \phi_b = \gamma_b \omega_{b0} \left(t - \frac{v_{bx}}{c^2} x - \frac{v_{by}}{c^2} y - \frac{v_{bz}}{c^2} z \right)$$

Le coefficient multiplicatif de cette représentation a été déterminé pour que le quadrivecteur impulsion énergie relativiste soit identique au quadrivecteur courant de DIRAC de chaque particule.

En sortie de réaction, on trouve un muon noté (c) et un antimuon noté (d) qui sont représentés par les bispineurs suivants :

$$\Psi_c = u_c e^{-j\phi_c} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{c0}(1+\gamma_c)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_c \sqrt{\omega_{c0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_c)}} \frac{v_{cz}}{c} \\ \frac{\gamma_c \sqrt{\omega_{c0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_c)}} \frac{v_{cx} + jv_{cy}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} \quad \Psi_d = u_d e^{j\phi_d} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_d \sqrt{\omega_{d0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_d)}} \frac{v_{dz}}{c} \\ \frac{\gamma_d \sqrt{\omega_{d0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_d)}} \frac{v_{dx} + jv_{dy}}{c} \\ \frac{\sqrt{\omega_{d0}(1+\gamma_d)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi_d} \quad (\text{VII-2})$$

$$\phi_c = \gamma_c \omega_{c0} \left(t - \frac{v_{cx}}{c^2} x - \frac{v_{cy}}{c^2} y - \frac{v_{cz}}{c^2} z \right) \quad \phi_d = \gamma_d \omega_{d0} \left(t - \frac{v_{dx}}{c^2} x - \frac{v_{dy}}{c^2} y - \frac{v_{dz}}{c^2} z \right)$$

Certaines simplifications d'écriture seraient possibles car les particules en entrée ont une masse au repos identique ($\omega_{a0} = \omega_{b0}$), de même que les particules en sortie ($\omega_{c0} = \omega_{d0}$).

Dans le référentiel attaché au centre de masse, les vitesses des particules qui entrent en collision sont opposées, de même que les vitesses des particules diffusées.

Nous conservons malgré tout une notation générale, car elle se révèlera utile par la suite.

I – Calcul de l'amplitude de diffusion par les courants de DIRAC

Ce calcul va être effectué pour la particule (a) et antiparticule (b). Il est en tout point analogue pour la particule (c) et l'antiparticule(d) en sortie.

L'indice i rappelle que ces courants sont associés à l'état initial avant collision.

Le bispineur équivalent associé aux particules d'entrée s'écrit :

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \Psi_{i0} \\ \Psi_{i1} \\ \Psi_{i2} \\ \Psi_{i3} \end{pmatrix} = \Psi_a + \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} + \Psi_{b0} \\ \Psi_{a1} + \Psi_{b1} \\ \Psi_{a2} + \Psi_{b2} \\ \Psi_{a3} + \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{a0} e^{-j\phi_a} + u_{b0} e^{j\phi_b} \\ u_{a1} e^{-j\phi_a} + u_{b1} e^{j\phi_b} \\ u_{a2} e^{-j\phi_a} + u_{b2} e^{j\phi_b} \\ u_{a3} e^{-j\phi_a} + u_{b3} e^{j\phi_b} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-3})$$

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \Psi_{i0} \\ \Psi_{i1} \\ \Psi_{i2} \\ \Psi_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_a} + \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} e^{j\phi_b} \\ \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j\phi_b} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} e^{-j\phi_a} + \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} e^{j\phi_b} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} e^{-j\phi_a} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-4})$$

Le calcul des courants de DIRAC est sans difficultés, mais un peu laborieux. Il est détaillé ci-dessous pour la première composante.

$$\begin{aligned}
J_{it} &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\
J_{it} &= \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_a} + \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} e^{j\phi_b} \right) \left(\frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} e^{j\phi_a} + \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} e^{-j\phi_b} \right) + \\ &\left(\frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j\phi_b} \right) \left(\frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} e^{-j\phi_b} \right) + \\ &\left(\frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} e^{-j\phi_a} + \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} e^{j\phi_b} \right) \left(\frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} e^{j\phi_a} + \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_b} \right) + \\ &\left(\frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} e^{-j\phi_a} \right) \left(\frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} e^{j\phi_a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{it} &= \left\{ \begin{aligned} &\omega_{a0} \frac{1+\gamma_a}{2} + \omega_{b0} \frac{\gamma_b^2}{2(1+\gamma_b)} \frac{v_{bz}^2}{c^2} + \frac{\gamma_b \sqrt{1+\gamma_a}}{2 \sqrt{1+\gamma_b}} \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}} \frac{v_{bz}}{c} \left(e^{-j(\phi_a+\phi_b)} + e^{j(\phi_a+\phi_b)} \right) + \\ &\omega_{b0} \frac{\gamma_b^2}{2(1+\gamma_b)} \frac{v_{bx}^2 + v_{by}^2}{c^2} + \\ &\omega_{b0} \frac{1+\gamma_b}{2} + \omega_{a0} \frac{\gamma_a^2}{2(1+\gamma_a)} \frac{v_{az}^2}{c^2} + \frac{\gamma_a \sqrt{1+\gamma_b}}{2 \sqrt{1+\gamma_a}} \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}} \frac{v_{az}}{c} \left(e^{-j(\phi_a+\phi_b)} + e^{j(\phi_a+\phi_b)} \right) + \\ &\omega_{a0} \frac{\gamma_a^2}{2(1+\gamma_a)} \frac{v_{ax}^2 + v_{ay}^2}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-6})
\end{aligned}$$

$$J_{it} = \left\{ \gamma_a \omega_{a0} + \gamma_b \omega_{b0} + \frac{\sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2} \left(\gamma_a \frac{\sqrt{1+\gamma_b}}{\sqrt{1+\gamma_a}} \frac{v_{az}}{c} + \gamma_b \frac{\sqrt{1+\gamma_a}}{\sqrt{1+\gamma_b}} \frac{v_{bz}}{c} \right) \cos(\phi_a + \phi_b) \right\}$$

Les calculs pour les composantes spatiales s'effectuent de manière analogue, et on obtient les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
J_{it} &= \left\{ \gamma_a \omega_{a0} + \gamma_b \omega_{b0} + \frac{\sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2} \left(\gamma_a \frac{\sqrt{1+\gamma_b}}{\sqrt{1+\gamma_a}} \frac{v_{az}}{c} + \gamma_b \frac{\sqrt{1+\gamma_a}}{\sqrt{1+\gamma_b}} \frac{v_{bz}}{c} \right) \left(e^{j(\phi_a+\phi_b)} + e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right\} \\
J_{ix} &= \left\{ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} + \frac{\gamma_a \gamma_b \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}} \left(\frac{v_{bz}}{c} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} + \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} + \frac{v_{bz}}{c} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right\} \\
J_{iy} &= \left\{ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} + j \frac{\gamma_a \gamma_b \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}} \left(\frac{v_{bz}}{c} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} - \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} - \frac{v_{bz}}{c} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right\} \\
J_{iz} &= \left\{ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} + \left(\sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}} \frac{\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}}{2} + \frac{\gamma_a \gamma_b \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}} \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bz}}{c} \right) \left(e^{j(\phi_a+\phi_b)} + e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_a \gamma_b \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}} \left(\frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} + \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

(VII-7)

Ces résultats correspondent à la somme des quadrivecteurs suivants qui représente l'état initial :

$$\tilde{\mathbf{J}}_i = \tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b + \tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba} \quad (\text{VII-8})$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a = \begin{pmatrix} \gamma_a \omega_{a0} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_b = \begin{pmatrix} \gamma_b \omega_{b0} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-9})$$

On y retrouve les quadrivecteurs impulsion-énergie associés aux particules ponctuelles (a) et (b), ainsi que les courants d'interaction qui vont permettre de déterminer la probabilité de la réaction qui est décrite.

En ce sens, la description du processus de collision peut être considérée comme complète car elle contient toute l'information nécessaire à l'interprétation physique de la collision.

Les courants relatifs aux particules sortantes (c) et (d) sont analogues. L'indice f rappelle que ces courants sont relatifs à l'état final.

$$\tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d + \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc} \quad (\text{VII-10})$$

Le pseudo produit scalaire entre les courants d'interaction de l'état initial et de l'état final est donné par la relation :

$$\begin{aligned} M &= (\tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba})(\tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc}) = (\tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}})(\tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}}) \\ M &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{-j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} \end{aligned} \quad (\text{VII-11})$$

La relation de conservation de l'énergie est rappelée pour mémoire :

$$\phi_{ab} - \phi_{cd} = 0 \quad (\text{VII-12})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} \\ \langle M \rangle &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} \end{aligned} \quad (\text{VII-13})$$

La valeur moyenne de M est la somme de deux termes qui sont directement proportionnels aux amplitudes de diffusion de (a)(b) vers (c)(d), et de (c)(d) vers (a)(b).

$$\langle M \rangle = M_{(ab) \rightarrow (cd)} + M_{(cd) \rightarrow (ab)} \quad (\text{VII-14})$$

La dimension de M est une énergie au carré. Pour construire un terme sans dimension qui conduit à la probabilité de réaction, il convient de diviser la quantité M par le carré de l'énergie qui participe à la réaction. Dans ce cas particulier, cette énergie est égale à l'énergie totale en entrée ou sortie de réaction : son carré est représenté par la variable MANDELSTAM s.

Le terme qui apparaît dans la probabilité de réaction est donc proportionnel à la quantité :

$$\frac{M_{(ab) \rightarrow (cd)}}{s} \quad (\text{VII-16})$$

II – Calcul par les graphes de FEYNMAN

Avec les notations de ce chapitre, l'amplitude de diffusion M_{fi} de l'état final vers l'état initial peut être calculée à l'aide des graphes de FEYNMAN. Elle a pour expression :

$$M_{fi} = (-je^2) \frac{-jg_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d] [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a] \quad q : \text{énergie totale en entrée ou sortie} \quad (\text{VII-17})$$

Cette amplitude M_{fi} est proportionnelle à la quantité M_F :

$$M_F = g_{\mu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d] [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a] = [\bar{u}_c \gamma^0 u_d] [\bar{u}_b \gamma^0 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d] [\bar{u}_b \gamma^1 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d] [\bar{u}_b \gamma^2 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d] [\bar{u}_b \gamma^3 u_a] \quad (\text{VII-18})$$

Le choix des représentations de DIRAC qui interviennent dans ce calcul a été fait en amont. Ce choix a été dicté par l'obligation d'une phase globale d'interaction qui est nulle, en application de la règle de conservation de l'énergie.

On pourrait penser que les termes entre crochets ne représentent pas les courants de DIRAC, car le terme de phase de l'exponentielle est absent, mais cette absence n'est qu'une illusion.

Pour le montrer, on introduit les courants de DIRAC dans l'expression de FEYNMAN en ajoutant la phase correspondante à chacun des termes :

$$M_F = \left\{ \begin{array}{l} [\bar{u}_c \gamma^0 u_d] e^{j\phi_{cd}} [\bar{u}_b \gamma^0 u_a] e^{-j\phi_{ab}} - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d] e^{j\phi_{cd}} [\bar{u}_b \gamma^1 u_a] e^{-j\phi_{ab}} \\ - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d] e^{j\phi_{cd}} [\bar{u}_b \gamma^2 u_a] e^{-j\phi_{ab}} - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d] e^{j\phi_{cd}} [\bar{u}_b \gamma^3 u_a] e^{-j\phi_{ab}} \end{array} \right\} \quad (\text{VII-19})$$

$$M_F = \left\{ [\bar{u}_c \gamma^0 u_d] [\bar{u}_b \gamma^0 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d] [\bar{u}_b \gamma^1 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d] [\bar{u}_b \gamma^2 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d] [\bar{u}_b \gamma^3 u_a] \right\} e^{j(\phi_{cd} - \phi_{ab})}$$

En appliquant la relation de conservation de l'énergie $\phi_{ab} - \phi_{cd} = 0$, on obtient la relation (VII-14) déduite des graphes de FEYNMAN.

La quantité M_F ci-dessus s'exprime en fonction des courants de DIRAC :

$$M_F = \tilde{J}_{ba} \cdot \tilde{J}_{cd} = \tilde{K}_{ba} e^{-j\phi_{ab}} \cdot \tilde{K}_{cd} e^{j\phi_{cd}} = \tilde{K}_{ba} \cdot \tilde{K}_{cd} e^{-j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} = \tilde{K}_{ba} \cdot \tilde{K}_{cd} \quad (\text{VII-20})$$

On fait le constat que M_F est contenue dans la valeur moyenne de M ($\langle M \rangle$) obtenue en (VII-13) et (VII-14), et plus précisément que $M_F = M_{cd \rightarrow ab}$.

Ce résultat permet de montrer, au moins dans ce cas particulier fondamental, que le raisonnement qui a été proposé pour donner un sens physique à la notion d'amplitude de diffusion est cohérent avec les résultats déduits du graphe de FEYNMAN.

Il est tentant d'essayer de prolonger ce formalisme pour décrire n'importe quelle collision entre 2 particules entrantes et 2 particules sortantes, pourvu que ces particules soient des particules de DIRAC.

On aimerait que le formalisme qui a été utilisé dans ce chapitre permette de traiter également les diffusions élastiques. Un essai de généralisation en ce sens est proposé dans un prochain chapitre.

Plusieurs réactions font intervenir une interaction avec des photons. Or un photon peut être considéré comme une particule de DIRAC, dans le sens où les courants de DIRAC qui sont issus de sa représentation sont égaux au quadrivecteur impulsion énergie associé à un photon. Cette propriété justifie la tentative de généralisation qui va être proposée dans la suite de ce document.

VIII – Somme des spins

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes attachés à décrire l'interaction entre deux particules ou antiparticules, chacune d'entre elle étant dans une configuration donnée.

Par exemple dans le chapitre VII, nous avons choisi de décrire l'interaction entre une particule de spin « up » et une antiparticule de spin « up ». Ce choix est désigné par choix N°1 :

Choix N°1 :

$$\begin{array}{cc}
 \text{Spin up} & \text{Spin up} \\
 \Psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} & \Psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VIII-1})
 \end{array}$$

Lorsqu'on ne connaît pas la nature du spin des particules incidentes, il existe 3 autres choix possibles et donc 3 autres possibilités d'interaction :

Choix N°2 :

$$\begin{array}{cc}
 \text{Spin down} & \text{Spin up} \\
 \Psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} \\ -\frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} & \Psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VIII-2})
 \end{array}$$

Choix N°3 :

Spin up

Spin down

$$\Psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} \quad \Psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \\ -\frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VIII-3})$$

Choix N°4 :

Spin down

Spin down

$$\Psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} \\ -\frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} \quad \Psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \\ -\frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VIII-4})$$

D'un point de vue expérimental, c'est un flot de particules et d'antiparticules qui entrent en collision. Si on suppose que ce flot contient une répartition équilibrée entre les 4 configurations ci-dessus, alors l'interaction qui va être observée en entrée correspond à la moyenne des interactions possibles.

Cette moyenne en entrée est obtenue en calculant chacune de ces interactions, en faisant la somme, et en divisant par 4.

D'un point de vue informatique, il s'agit d'un traitement élémentaire qui consiste à rentrer les variables u_a et u_b qui sont les composantes des bispineurs des particules incidentes dans une procédure de calcul convenablement programmée.

Il s'avère que ce calcul peut être mené jusqu'au bout de manière complètement analytique. Il s'agit d'un travail complexe et brillant, résultat des contributions de plusieurs chercheurs.

La complexité du calcul tient essentiellement à la quantité des indices que l'on doit manipuler lorsqu'on souhaite synthétiser au maximum le déroulement du raisonnement et le résultat obtenu.

Une approche pédagogique va être tentée, en incluant quelques développements de formules tensorielles, afin de favoriser la lecture des calculs.

Le point de départ correspond à la quantité M_F issue de la relation (VII-17,18). On rappelle que la notation tensorielle utilise la convention de sommation d'EINSTEIN :

$$M_F = g_{\mu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d] [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a] = [\bar{u}_c \gamma^0 u_d] [\bar{u}_b \gamma^0 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d] [\bar{u}_b \gamma^1 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d] [\bar{u}_b \gamma^2 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d] [\bar{u}_b \gamma^3 u_a]$$

$\mu, \nu = 0..4 \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{pour} \quad \mu \neq \nu$

(VIII-5)

Cette quantité représente le pseudo produit scalaire des courants d'interaction entre les particules entrantes (a) et (b), et les particules sortantes (c) et (d).

M_F est un nombre complexe, \bar{u}_b, \bar{u}_c sont des bispineurs adjoints (matrices lignes à 4 éléments), γ^μ, γ^ν des matrices de DIRAC (matrices 4X4), u_a et u_b des bispineurs (matrices colonnes à 4 éléments).

La première étape consiste à évaluer M_F^* qui représente le nombre complexe conjugué de M_F . Cette étape utilise un résultat intermédiaire concernant le courant conjugué d'un courant de DIRAC.

$$\begin{aligned} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d]^* &= [\bar{u}_d \gamma^\mu u_c] \\ [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a]^* &= [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b] \end{aligned}$$

(VIII-6)

Cette propriété est directement apparente sur les composantes développées des courants de DIRAC.

On en déduit l'expression de M_F^* :

$$M_F^* = g_{\mu\nu} [\bar{u}_d \gamma^\mu u_c] [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b] = [\bar{u}_d \gamma^0 u_c] [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] - [\bar{u}_d \gamma^1 u_c] [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] - [\bar{u}_d \gamma^2 u_c] [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] - [\bar{u}_d \gamma^3 u_c] [\bar{u}_a \gamma^3 u_b]$$

(VIII-7)

Dans cette expression, la règle de sommation d'EINSTEIN s'applique en rappelant une nouvelle fois que dans une métrique de MINKOWSKY, les seuls éléments non nuls de la métrique sont les $g_{\mu\nu}$ tels que $\mu = \nu$.

$$g_{00} = 1 \quad g_{11} = -1 \quad g_{22} = -1 \quad g_{33} = -1$$

(VIII-8)

Le produit $(M_F M_F^*)$ est directement proportionnel à la probabilité de la réaction (a)(b) -> (c)(d). C'est sur cette quantité que l'on doit effectuer la somme des interactions entre des spins différents.

$$M_F M_F^* = (g_{\mu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d] [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a]) (g_{\mu\nu} [\bar{u}_d \gamma^\mu u_c] [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b])$$

(VIII-9)

D'apparence simple, cette relation comporte déjà un nombre important de termes, lorsqu'elle est développée :

$$M_F M_F^* = \left\{ \begin{array}{l} [\bar{u}_c \gamma^0 u_d [\bar{u}_b \gamma^0 u_a [\bar{u}_d \gamma^0 u_c [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] - [\bar{u}_c \gamma^0 u_d [\bar{u}_b \gamma^0 u_a [\bar{u}_d \gamma^1 u_c [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] \\ - [\bar{u}_c \gamma^0 u_d [\bar{u}_b \gamma^0 u_a [\bar{u}_d \gamma^2 u_c [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] - [\bar{u}_c \gamma^0 u_d [\bar{u}_b \gamma^0 u_a [\bar{u}_d \gamma^3 u_c [\bar{u}_a \gamma^3 u_b] \\ - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d [\bar{u}_b \gamma^1 u_a [\bar{u}_d \gamma^0 u_c [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^1 u_d [\bar{u}_b \gamma^1 u_a [\bar{u}_d \gamma^1 u_c [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] \\ + [\bar{u}_c \gamma^1 u_d [\bar{u}_b \gamma^1 u_a [\bar{u}_d \gamma^2 u_c [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^1 u_d [\bar{u}_b \gamma^1 u_a [\bar{u}_d \gamma^3 u_c [\bar{u}_a \gamma^3 u_b] \\ - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d [\bar{u}_b \gamma^2 u_a [\bar{u}_d \gamma^0 u_c [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^2 u_d [\bar{u}_b \gamma^2 u_a [\bar{u}_d \gamma^1 u_c [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] \\ + [\bar{u}_c \gamma^2 u_d [\bar{u}_b \gamma^2 u_a [\bar{u}_d \gamma^2 u_c [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^2 u_d [\bar{u}_b \gamma^2 u_a [\bar{u}_d \gamma^3 u_c [\bar{u}_a \gamma^3 u_b] \\ - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d [\bar{u}_b \gamma^3 u_a [\bar{u}_d \gamma^0 u_c [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^3 u_d [\bar{u}_b \gamma^3 u_a [\bar{u}_d \gamma^1 u_c [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] \\ + [\bar{u}_c \gamma^3 u_d [\bar{u}_b \gamma^3 u_a [\bar{u}_d \gamma^2 u_c [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^3 u_d [\bar{u}_b \gamma^3 u_a [\bar{u}_d \gamma^3 u_c [\bar{u}_a \gamma^3 u_b] \end{array} \right\} \quad (VIII-10)$$

Chaque terme entre crochets est une composante d'un courant d'interaction de DIRAC, c'est-à-dire un nombre complexe qui dépend des 4+4=8 composantes des bispineurs qui interagissent : on touche ici du doigt la complexité du calcul analytique qui consiste à sommer la quantité $M_F M_F^*$ sur les différentes possibilités de spin.

On peut modifier l'écriture de la quantité $M_F M_F^*$ afin de permettre la poursuite du calcul.

Tous les $g_{\mu\nu}$ sont nuls, sauf lorsque $\mu = \nu$, ce qui permet l'écriture suivante :

$$M_F M_F^* = g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d [\bar{u}_b \gamma^\mu u_a [\bar{u}_d \gamma^\nu u_c [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b] \quad (VIII-11)$$

Les quantités entre crochets sont des nombres complexes, donc on peut commuter à volonté ces quantités pour obtenir :

$$M_F M_F^* = g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d [\bar{u}_d \gamma^\nu u_c [\bar{u}_b \gamma^\mu u_a [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b] \quad (VIII-12)$$

L'étape suivante consiste à sommer cette quantité sur toutes les possibilités d'interaction. Ces possibilités ont été précisées en début de chapitre pour les particules entrantes. Elles sont analogues pour les particules sortantes à une exception près : il suffit de faire la somme des possibilités d'interaction des particules sortantes sans faire de moyenne, c'est-à-dire sans diviser par 4.

Pour écrire de manière concise la somme de ces possibilités, nous devons introduire de nouveaux indices.

Pour chaque particule, il existe deux états de spin qui vont être repérés par les indices (1) et (2). On peut par exemple associer l'indice (1) à un spin up, et l'indice (2) à un spin down.

Les couples d'interaction possibles entre les particules entrantes sont les suivants :

$$\begin{array}{l} (u_a^{(1)}, u_b^{(1)}) \\ (u_a^{(1)}, u_b^{(2)}) \\ (u_a^{(2)}, u_b^{(1)}) \\ (u_a^{(2)}, u_b^{(2)}) \end{array} \quad (VIII-13)$$

Les couples d'interaction possibles entre les particules sortantes sont analogues :

$$\begin{aligned}
 & \left(u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left(u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{VIII-14}$$

Il existe donc globalement 16 manières d'interagir dans cette rencontre entre 2 particules entrantes et 2 particules sortantes. Ces possibilités sont listées ci-dessous de manière exhaustive.

$$\begin{aligned}
 & \left(u_a^{(1)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_a^{(1)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_a^{(2)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_a^{(2)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_a^{(1)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left(u_a^{(1)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left(u_a^{(2)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left(u_a^{(2)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left(u_a^{(1)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_a^{(1)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_a^{(2)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_a^{(2)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left(u_a^{(1)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left(u_a^{(1)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left(u_a^{(2)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left(u_a^{(2)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left(u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{VIII-15}$$

Pour décrire les possibilités d'interaction de manière plus concise, on choisit 4 indices qui seront notés (h), (i), (j), (k) dans ce document. Chaque indice peut prendre la valeur (1) ou la valeur (2) suivant l'état de spin de la particule ou antiparticule. Chaque indice est associé à une particule ou antiparticule correspondante :

$$\begin{aligned}
 & (h) \rightarrow u_a^{(h)} \\
 & (i) \rightarrow u_b^{(i)} \\
 & (j) \rightarrow u_c^{(j)} \\
 & (k) \rightarrow u_d^{(k)}
 \end{aligned}
 \tag{VIII-16}$$

Dans ces conditions, la somme des interactions décrites ci-dessus peut être représentée de la manière suivante :

$$\sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* = \sum_{h,i,j,k=1..2} g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} \left[\bar{u}_c^{(j)} \gamma^\mu u_d^{(k)} \right] \left[\bar{u}_d^{(k)} \gamma^\nu u_c^{(j)} \right] \left[\bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu u_a^{(h)} \right] \left[\bar{u}_a^{(h)} \gamma^\nu u_b^{(i)} \right] \quad (\text{VIII-17})$$

Les coefficients de la métrique $g_{\mu\mu}$ et $g_{\nu\nu}$ sont utilisés pour abaisser les indices des matrices de DIRAC dans les deux premiers crochets :

$$\sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* = \sum_{h,i,j,k=1..2} \left[\bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)} \right] \left[\bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)} \right] \left[\bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu u_a^{(h)} \right] \left[\bar{u}_a^{(h)} \gamma^\nu u_b^{(i)} \right] \quad (\text{VIII-18})$$

On notera que la somme sur les indices (h), (i), (j), (k) n'affecte pas les indices μ et ν .

Cette somme peut se décomposer en un produit de deux termes :

$$\sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* = \left(\sum_{j,k=1..2} \left[\bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)} \right] \left[\bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)} \right] \right) \left(\sum_{h,i=1..2} \left[\bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu u_a^{(h)} \right] \left[\bar{u}_a^{(h)} \gamma^\nu u_b^{(i)} \right] \right) \quad (\text{VIII-19})$$

L'étape suivante consiste en l'évaluation de chacun de ces termes. Nous choisissons celui qui est relatif aux particules (a) et (b) :

$$\sum_{h,i=1..2} \left[\bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu u_a^{(h)} \right] \left[\bar{u}_a^{(h)} \gamma^\nu u_b^{(i)} \right] \quad (\text{VIII-20})$$

Dans cette expression, les crochets ne sont là que pour rappeler que l'expression entre crochets est un courant d'interaction de DIRAC. Ils peuvent donc être enlevés.

Chaque terme de la somme a un caractère matriciel, et on sait que le produit de matrices est toujours associatif. On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{h,i=1..2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu \left(u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)} \right) \gamma^\nu u_b^{(i)} &= \sum_{i=1..2} \left(\bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu \left(\sum_{h=1..2} u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)} \right) \right) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \sum_{i=1..2} \left(\bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu \left(u_a^{(1)} \bar{u}_a^{(1)} + u_a^{(2)} \bar{u}_a^{(2)} \right) \right) \gamma^\nu u_b^{(i)} \\ \sum_{h,i=1..2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu \left(u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)} \right) \gamma^\nu u_b^{(i)} &= \left(\bar{u}_b^{(1)} \gamma^\mu \left(u_a^{(1)} \bar{u}_a^{(1)} + u_a^{(2)} \bar{u}_a^{(2)} \right) \right) \gamma^\nu u_b^{(1)} + \left(\bar{u}_b^{(2)} \gamma^\mu \left(u_a^{(1)} \bar{u}_a^{(1)} + u_a^{(2)} \bar{u}_a^{(2)} \right) \right) \gamma^\nu u_b^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{VIII-21})$$

La suite du calcul utilise une propriété appelée relation de complétude. Pour un bispineur u , solution exponentielle de l'équation de DIRAC qui a été adoptée dans ce document, cette relation s'écrit :

$$\sum_{h=1..2} u^{(h)} \bar{u}^{(h)} = u^{(1)} \bar{u}^{(1)} + u^{(2)} \bar{u}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\gamma^\alpha p_\alpha \pm \omega_0 \mathbf{I} \right) \quad (\text{VIII-22})$$

I représente la matrice identité. Le facteur $1/2$ qui apparaît par rapport à la formulation habituelle est lié à la forme particulière des solutions exponentielles qui ont été retenues. L'indice muet α obéit à la règle de sommation d'EINSTEIN.

On rappelle que ces solutions ont été choisies car leurs courants de DIRAC sont identiques au tenseur impulsion énergie de la particule.

Le signe + s'applique lorsque le bispineur représente une particule, le signe – lorsque le bispineur représente une antiparticule.

La démonstration générale est donnée dans tous les ouvrages spécialisée et n'est pas reproduite. Par contre, la notation de ce document étant spécifique, il peut être utile d'en donner une illustration sur un exemple, et nous allons utiliser le bispineur ψ_a proposé au début de ce chapitre.

Les détails sont donnés dans les lignes suivantes, encadrées par les lignes en pointillés. Ils peuvent être passés pour accéder directement à la suite du calcul de l'amplitude de diffusion.

----- Début des détails sur la relation de complétude-----

$$\mathbf{u}_a^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} V_{az} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (V_{ax} + jV_{ay}) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-23})$$

Dans un souci d'allègement d'écriture, les composantes de vitesse normalisées par rapport à la vitesse de la lumière sont représentées par des lettres majuscules. On en déduit le bispineur de spin opposé :

$$\mathbf{u}_a^{(2)} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1+\gamma_a} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (V_{ax} - jV_{ay}) \\ -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} V_{az} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-24})$$

Ainsi que les bispineurs adjoints :

$$\bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} & 0 & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} V_{az} & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (V_{ax} - jV_{ay}) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-25})$$

$$\bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+\gamma_a} & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (V_{ax} + jV_{ay}) & \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} V_{az} \end{pmatrix}$$

La relation de complétude se vérifie en calculant séparément les deux termes de l'égalité (VIII-22).

Premier terme :

$$\sum_{h=1..2} \mathbf{u}_a^{(h)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(h)} = \mathbf{u}_a^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} + \mathbf{u}_a^{(2)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} \quad (\text{VIII-26})$$

$$\mathbf{u}_a^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \mathbf{V}_{az} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} & 0 & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \mathbf{V}_{az} & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-27})$$

$$\mathbf{u}_a^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 1+\gamma_a & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az}^2 & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az} (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & 0 & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az} (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_a^{(2)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1+\gamma_a} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \mathbf{V}_{az} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+\gamma_a} & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \mathbf{V}_{az} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-28})$$

$$\mathbf{u}_a^{(2)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\gamma_a & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ 0 & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2) & \frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az} (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & \frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az} (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_a^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} + \mathbf{u}_a^{(2)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 1+\gamma_a & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & 1+\gamma_a & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2 + \mathbf{V}_{az}^2) & 0 \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2 + \mathbf{V}_{az}^2) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-30})$$

On utilise la relation suivante pour simplifier les 2 derniers termes de la diagonale principale :

$$\gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{V}_a^2}} \quad (\text{VIII-31})$$

$$-\frac{\gamma_a^2 (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2 + \mathbf{V}_{az}^2)}{1+\gamma_a} = -\frac{\gamma_a^2 \mathbf{V}_a^2}{1+\gamma_a} = -\frac{\gamma_a^2 - 1}{1+\gamma_a} = 1 - \gamma_a$$

On obtient au final la matrice suivante :

$$\mathbf{u}_a^{(1)}\bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} + \mathbf{u}_a^{(2)}\bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \frac{\omega_{0a}}{2} \begin{pmatrix} 1+\gamma_a & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & 1+\gamma_a & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & 1-\gamma_a & 0 \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & 1-\gamma_a \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-32})$$

Second terme :

$$\frac{1}{2}(\gamma^\alpha \mathbf{p}_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a = \frac{1}{2}(\gamma^0 \mathbf{p}_{a0} - \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} - \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} - \gamma^3 \mathbf{p}_{a3} + \omega_{0a} \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\gamma^0 \mathbf{p}_{a0} - \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} - \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} - \gamma^3 \mathbf{p}_{a3}) + \frac{\omega_{0a}}{2} \mathbf{I} \quad (\text{VIII-33})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \gamma^0 \mathbf{p}_{a0} &= \gamma_a \omega_{0a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} &= \gamma_a \omega_{0a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{V}_{ax} \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_{ax} & 0 \\ 0 & -\mathbf{V}_{ax} & 0 & 0 \\ -\mathbf{V}_{ax} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} &= \gamma_a \omega_{0a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j\mathbf{V}_{ay} \\ 0 & 0 & j\mathbf{V}_{ay} & 0 \\ 0 & j\mathbf{V}_{ay} & 0 & 0 \\ -j\mathbf{V}_{ay} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 \mathbf{p}_{a3} &= \gamma_a \omega_{0a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{V}_{az} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{V}_{az} \\ -\mathbf{V}_{az} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_{az} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VIII-34})$$

En sommant ces résultats partiels, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\gamma^0 \mathbf{p}_{a0} - \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} - \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} - \gamma^3 \mathbf{p}_{a3}) &= \frac{\omega_{0a}}{2} \begin{pmatrix} \gamma_a & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & \gamma_a & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a & 0 \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & -\gamma_a \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2}(\gamma^0 \mathbf{p}_{a0} - \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} - \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} - \gamma^3 \mathbf{p}_{a3}) + \frac{\omega_{0a}}{2} \mathbf{I} &= \frac{\omega_{0a}}{2} \begin{pmatrix} \gamma_a + 1 & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & \gamma_a + 1 & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a + 1 & 0 \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & -\gamma_a + 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VIII-35})$$

----- Fin des détails sur la relation de complétude -----

La relation de complétude est introduite dans la somme des spins :

$$\sum_{h,i=1,2} \bar{\mathbf{u}}_b^{(i)} \gamma^\mu (\mathbf{u}_a^{(h)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(h)}) \gamma^\nu \mathbf{u}_b^{(i)} = \sum_{i=1,2} \bar{\mathbf{u}}_b^{(i)} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} (\gamma^\alpha \mathbf{p}_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \right) \gamma^\nu \mathbf{u}_b^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \bar{\mathbf{u}}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha \mathbf{p}_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu \mathbf{u}_b^{(i)} \quad (\text{VIII-36})$$

On notera que cette dernière somme est uniquement relative à l'indice (i).

L'indice a qui a été ajouté dans la parenthèse signifie que l'impulsion P_a et l'énergie au repos ω_0 sont relatifs à la particule (a). Le signe + a été retenu, car (a) représente, dans cet exemple, une particule.

Pour les particules et antiparticule sortantes, on obtient de manière analogue :

$$\sum_{j,k=1..2} [\bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)}] [\bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)}] = \sum_{j,k=1..2} \bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)} \bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)} = \sum_{j,k=1..2} \bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu (u_d^{(k)} \bar{u}_d^{(k)}) \gamma_\nu u_c^{(j)} \quad (\text{VIII-37})$$

$$\sum_{j,k=1..2} [\bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)}] [\bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)}] = \frac{1}{2} \sum_{j=1..2} \bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu (\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 I)_d \gamma_\nu u_c^{(j)}$$

Le signe – a été retenu dans la parenthèse car (d) représente, dans cet exemple, une antiparticule.

Pour poursuivre le calcul vers une solution analytique, l'étape suivante utilise un procédé désigné par astuce de CASIMIR. Cette astuce permet d'établir un lien entre la dernière relation de sommation (VIII-37) et la trace d'une matrice désignée par Tr.

----- Début des détails sur la l'astuce de CASIMIR-----

Soit à évaluer le produit de trois matrices de nombres complexes A, B, et C. Ces matrices ne sont pas quelconques : La première est une matrice ligne de rang N, la seconde une matrice carré de rang NxN, et la dernière une matrice colonne de rang N. Chaque terme de ces matrices est représenté par la lettre minuscule correspondante : a_i , b_{ij} , c_j , les indices i et j varient entre 1 et N.

Le résultat de ce produit matriciel est un nombre complexe.

Ce produit de matrice peut être écrit en fonction des termes de chaque matrice :

$$ABC = \sum_{ij} a_i b_{ij} c_j \quad (\text{VIII-38})$$

Puisque a_i , b_{ij} et c_j sont des nombres complexes, ils peuvent être commutés :

$$ABC = \sum_{ij} b_{ij} c_j a_i \quad (\text{VIII-39})$$

Le produit matriciel CA, où C est une matrice colonne et A une matrice ligne donne une matrice NxN. Dans ce cas particulier, la matrice produit s'exprime de manière simple en fonction des indices i et j :

$$[CA]_{ij} = c_i a_j = (ca)_{ij} \quad (\text{VIII-40})$$

Considérons le produit matriciel B(CA). Le résultat est une matrice NxN, dont chaque terme, de ligne i et de colonne j, est donné par la relation :

$$[B(CA)]_{ij} = \sum_{k=1}^N b_{ik}(ca)_{kj} \quad (\text{VIII-41})$$

Les termes de la diagonale principale de cette matrice sont les termes pour lesquels $i=j$:

$$[B(CA)]_{ii} = \sum_{k=1}^N b_{ik}(ca)_{ki} = \sum_{j=1}^N b_{ij}(ca)_{ji} = \sum_{j=1}^N b_{ij}c_j a_i \quad (\text{VIII-42})$$

La trace de la matrice s'obtient en sommant les termes de la diagonale principale pour chaque ligne :

$$\text{Tr}[B(CA)] = \sum_{i=1}^N [B(CA)]_{ii} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N b_{ij}c_j a_i \right) = \sum_{i,j=1}^N b_{ij}c_j a_i \quad (\text{VIII-43})$$

On déduit de (VIII-39) et (VIII-43) :

$$ABC = \text{Tr}[B(CA)] = \sum_{i,j=1}^N b_{ij}c_j a_i = \text{Tr}[(CA)B] \quad (\text{VIII-44})$$

On peut ainsi transformer, dans les conditions bien particulières qui ont été énoncées, un produit de matrice en un calcul de trace de matrice : c'est ce résultat qui est appliqué dans la suite du calcul.

----- Fin des détails sur la l'astuce de CASIMIR -----

Dans la relation établie ci-dessus et rappelée pour mémoire :

$$\sum_{h,i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)}) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu u_b^{(i)} \quad (\text{VIII-45})$$

La matrice B est une matrice 4x4 qui correspond à la quantité :

$$B \rightarrow \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu \quad (\text{VIII-46})$$

La somme (VIII-45) ci-dessus devient ainsi :

$$\sum_{h,i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)}) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \text{Tr}(u_b^{(i)} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu) \quad (\text{VIII-47})$$

Le signe somme passe à travers la fonction trace :

$$\sum_{h,i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)}) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\sum_{i=1,2} u_b^{(i)} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu \right) \quad (\text{VIII-48})$$

On peut à nouveau invoquer la relation de complétude qui s'utilise avec un signe – car (b) est une antiparticule dans l'exemple traité. On obtient finalement :

$$\sum_{h,i=1..2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)}) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_b \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu) \quad (\text{VIII-49})$$

Le même traitement peut être effectué pour la somme des spins des particules ou antiparticules sortantes.

$$\sum_{j,k=1..2} [\bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)}] [\bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)}] = \frac{1}{2} \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_c \gamma_\mu (\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_d \gamma_\nu) \quad (\text{VIII-50})$$

On rappelle que le facteur 1/2 est du à la forme particulière des solutions exponentielles qui sont utilisées.

$$\begin{aligned} \sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* &= \left(\sum_{j,k=1..2} [\bar{u}_c^{(j)} \gamma^\mu u_d^{(k)}] [\bar{u}_d^{(k)} \gamma^\nu u_c^{(j)}] \sum_{h,i=1..2} [\bar{u}_b^{(i)} \gamma_\mu u_a^{(h)}] [\bar{u}_a^{(h)} \gamma_\nu u_b^{(i)}] \right) \\ \sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* &= \frac{1}{4} \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_b \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu) \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_c \gamma_\mu (\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_d \gamma_\nu) \end{aligned} \quad (\text{VIII-51})$$

Pour obtenir une moyenne sur les spins d'entrée, cette quantité doit encore être divisée par 4 :

$$\left\langle \sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* \right\rangle_{\text{spins_entrée}} = \frac{1}{16} \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_b \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu) \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_c \gamma_\mu (\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_d \gamma_\nu) \quad (\text{VIII-52})$$

La suite du calcul consiste à évaluer la trace des sommes et produits de matrices de DIRAC ci-dessus et enfin à utiliser ces derniers résultats pour déterminer la section efficace de diffusion.

Les détails sont souvent inclus dans les cours qui traitent de ces sujets. Ils ne présentent pas d'intérêts particuliers dans le cadre de ce document et n'ont pas été repris.

IX – La diffusion élastique

La diffusion électrons-muons qui a été traitée dans un chapitre précédent est une diffusion inélastique, car une partie de l'énergie cinétique des particules incidentes (électron et antiélectron) est transformée en énergie de masse des particules diffusées (muon et antimuon).

Au cours d'une rencontre entre particules lancées à grandes vitesse l'une contre l'autre, il est possible que les deux particules passent l'une à côté de l'autre. Elles vont subir une influence réciproque, mais leur masse au repos ne sera pas affectée par cette rencontre. Dans cette situation, l'énergie cinétique est conservée, en ce sens que l'énergie cinétique totale des deux particules incidentes est égale à l'énergie cinétique totale des deux particules diffusées. On parle alors de diffusion élastique.

La diffusion RUTHERFORD est un exemple de diffusion élastique.

Un autre exemple se rencontre dans la diffusion BHABHA. Cette diffusion met en œuvre un électron (a) et un positron (b) en entrée, et on recueille un électron (c) et un positron (d) en sortie.

Deux processus sont susceptibles de participer à cette réaction.

Le premier consiste en une annihilation de l'électron et du positron entrant, puis à la création d'un électron et positron sortant : ce processus est analogue à la diffusion électron-muon.

Le second consiste en une diffusion élastique telle qu'elle a été décrite. Le processus de diffusion complet comprend donc deux diagrammes de FEYNMAN correspondant à ces deux processus.

La question se pose de savoir s'il est possible de décrire une diffusion élastique, dans l'approche énergétique qui a été mise en œuvre pour traiter la diffusion inélastique.

Pour traiter cette réaction, nous prenons en compte le fait que la seule énergie qui est échangée est de l'énergie cinétique. C'est donc cette énergie, et seulement celle-là qui va participer au processus d'interaction.

Les phases de l'onde de de BROGLIE associées aux particules incidentes et diffusées sont conservées dans une écriture très générale, qui ne tient pas compte des simplifications possibles dans ce cas particulier :

$$\begin{aligned}
\phi_a &= \gamma_a \omega_{a0} \left(t - \frac{v_{ax}}{c^2} x - \frac{v_{ay}}{c^2} y - \frac{v_{az}}{c^2} z \right) & \text{Electron} & \text{ incident} \\
\phi_b &= \gamma_b \omega_{b0} \left(t - \frac{v_{bx}}{c^2} x - \frac{v_{by}}{c^2} y - \frac{v_{bz}}{c^2} z \right) & \text{Positron} & \text{ incident} \\
\phi_c &= \gamma_c \omega_{c0} \left(t - \frac{v_{cx}}{c^2} x - \frac{v_{cy}}{c^2} y - \frac{v_{cz}}{c^2} z \right) & \text{Electron} & \text{ diffusé} \\
\phi_d &= \gamma_d \omega_{d0} \left(t - \frac{v_{dx}}{c^2} x - \frac{v_{dy}}{c^2} y - \frac{v_{dz}}{c^2} z \right) & \text{Positron} & \text{ diffusé}
\end{aligned} \tag{IX-1}$$

La conservation de l'énergie s'obtient par la relation présentée dans les chapitres précédents :

$$\phi_a + \phi_b = \phi_c + \phi_d \tag{IX-2}$$

Dans le cas d'une diffusion élastique, la quantité d'énergie conservée qui va participer à la diffusion suggère d'écrire cette relation sous la forme :

$$\phi_a - \phi_c = \phi_d - \phi_b \tag{IX-3}$$

Puisque (a) et (c) (respectivement (b) et (d)) représentent la même particule (ou antiparticule) avec une énergie cinétique différente, les quantités de part et d'autre du signe égal sont représentatives de l'énergie cinétique échangée dans l'interaction.

Le traitement est analogue à celui de la collision inélastique, mais en considérant uniquement l'énergie d'interaction(IX-13) ci-dessus.

Ce constat conduit à considérer (a) et (c) comme des particules « entrantes », et (b) et (d) comme des particules « sortantes ». *Il est important de noter ce changement par rapport à la description de la collision qui a été faite en (IX-1) en termes de particules incidentes et diffusées.* Le lien avec les graphes de FEYNMAN s'effectue en considérant que les particules ou antiparticules qui interagissent sont celles qui arrivent à un vertex.

Les bispineurs de DIRAC qui participent à l'interaction sont désormais les suivants :

$$\begin{aligned}
\Psi_a &: \text{électron « entrant »} & \Psi_b &: \text{positron « sortant »} \\
\Psi_c &: \text{électron « entrant »} & \Psi_d &: \text{positron « sortant »}
\end{aligned}$$

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{a0} \\ \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{a2} \\ \mathbf{u}_{a3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} = \mathbf{u}_a e^{-j\phi_a} \quad \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{b0} \\ \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{b2} \\ \mathbf{u}_{b3} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} = \mathbf{u}_b e^{j\phi_b} \quad (\text{IX-4})$$

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{c0} \\ \mathbf{u}_{c1} \\ \mathbf{u}_{c2} \\ \mathbf{u}_{c3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} = \mathbf{u}_c e^{-j\phi_c} \quad \Psi_d = \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{d1} \\ \Psi_{d2} \\ \Psi_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{d0} \\ \mathbf{u}_{d1} \\ \mathbf{u}_{d2} \\ \mathbf{u}_{d3} \end{pmatrix} e^{j\phi_d} = \mathbf{u}_d e^{j\phi_d}$$

On forme ensuite la particule équivalente qui correspond à l'énergie d'interaction. On obtient pour les particules « entrantes » :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \Psi_a - \Psi_c = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} - \Psi_{c0} \\ \Psi_{a1} - \Psi_{c1} \\ \Psi_{a2} - \Psi_{c2} \\ \Psi_{a3} - \Psi_{c3} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-5})$$

On calcule les courants de DIRAC correspondants :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_y &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\ J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \end{aligned} \quad (\text{IX-6})$$

Pour exprimer ces courants en fonction des courants des particules (a) et (c), on effectue un développement, détaillé ci-dessous sur la composante J_t :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_t &= \left\{ (\Psi_{a0}^* - \Psi_{c0}^*) (\Psi_{a0} - \Psi_{c0}) + (\Psi_{a1}^* - \Psi_{c1}^*) (\Psi_{a1} - \Psi_{c1}) \right. \\ &\quad \left. + (\Psi_{a2}^* - \Psi_{c2}^*) (\Psi_{a2} - \Psi_{c2}) + (\Psi_{a3}^* - \Psi_{c3}^*) (\Psi_{a3} - \Psi_{c3}) \right\} \\ J_t &= \left\{ \begin{aligned} &\Psi_{a0}^* \Psi_{a0} - \Psi_{a0}^* \Psi_{c0} - \Psi_{c0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{c0}^* \Psi_{c0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} - \Psi_{a1}^* \Psi_{c1} - \Psi_{c1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{c1}^* \Psi_{c1} \\ &\Psi_{a2}^* \Psi_{a2} - \Psi_{a2}^* \Psi_{c2} - \Psi_{c2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{c2}^* \Psi_{c2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} - \Psi_{a3}^* \Psi_{c3} - \Psi_{c3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{c3}^* \Psi_{c3} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-7})$$

On y retrouve les courants relatifs à chacune des particules (a) et (c) :

$$\begin{aligned} J_{at} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} \\ J_{ct} &= \Psi_{c0}^* \Psi_{c0} + \Psi_{c1}^* \Psi_{c1} + \Psi_{c2}^* \Psi_{c2} + \Psi_{c3}^* \Psi_{c3} \end{aligned} \quad (\text{IX-8})$$

Ainsi que les courants d'interaction entre les particules (a) et (c) :

$$\begin{aligned} J_{\text{act}} &= -(\Psi_{a0}^* \Psi_{c0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{c1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{c2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{c3}) \\ J_{\text{cat}} &= -(\Psi_{c0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{c1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{c2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{c3}^* \Psi_{a3}) \end{aligned} \quad (\text{IX-10})$$

On peut mettre en évidence la phase de de BROGLIE dans ces courants d'interaction :

$$\begin{aligned} J_{\text{act}} &= -(\mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{c0} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{c1} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{c2} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{c3}) e^{j(\phi_a - \phi_c)} = -K_{\text{act}} e^{j(\phi_a - \phi_c)} \\ J_{\text{cat}} &= -(\mathbf{u}_{c0}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{c1}^* \mathbf{u}_{a1} + \mathbf{u}_{c2}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{c3}^* \mathbf{u}_{a3}) e^{-j(\phi_a - \phi_c)} = -K_{\text{cat}} e^{-j(\phi_a - \phi_c)} = -K_{\text{act}}^* e^{-j(\phi_a - \phi_c)} \end{aligned} \quad (\text{IX-11})$$

Un travail analogue sur les composantes spatiales permet de construire le quadrivecteur d'interaction :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\text{ac}} = \begin{pmatrix} J_{\text{act}} \\ J_{\text{acx}} \\ J_{\text{acy}} \\ J_{\text{acz}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{J}}_{\text{ca}} = \begin{pmatrix} J_{\text{cat}} \\ J_{\text{cax}} \\ J_{\text{cay}} \\ J_{\text{caz}} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-12})$$

Ce déroulement est repris à l'identique pour les particules « sortantes ». La composante temporelle des courants d'interaction a pour expression :

$$\begin{aligned} J_{\text{bdt}} &= -(\mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{d0} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{d1} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{d2} + \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{d3}) e^{-j(\phi_b - \phi_d)} = -K_{\text{bdt}} e^{-j(\phi_b - \phi_d)} \\ J_{\text{dbt}} &= -(\mathbf{u}_{d0}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{d1}^* \mathbf{u}_{b1} + \mathbf{u}_{d2}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{d3}^* \mathbf{u}_{b3}) e^{j(\phi_b - \phi_d)} = -K_{\text{dbt}} e^{j(\phi_b - \phi_d)} = -K_{\text{bdt}}^* e^{j(\phi_b - \phi_d)} \end{aligned} \quad (\text{IX-13})$$

On calcule ensuite le pseudo produit scalaire d'interaction M entre les particules « entrantes » et « sortantes » :

$$\begin{aligned} M &= (\tilde{\mathbf{J}}_{\text{ac}} + \tilde{\mathbf{J}}_{\text{ca}})(\tilde{\mathbf{J}}_{\text{bd}} + \tilde{\mathbf{J}}_{\text{db}}) = (\tilde{K}_{\text{ac}} e^{j(\phi_a - \phi_c)} + \tilde{K}_{\text{ca}} e^{-j(\phi_a - \phi_c)})(\tilde{K}_{\text{bd}} e^{-j(\phi_b - \phi_d)} + \tilde{K}_{\text{db}} e^{j(\phi_b - \phi_d)}) \\ M &= \tilde{K}_{\text{ac}} \cdot \tilde{K}_{\text{bd}} e^{j(\phi_a - \phi_c - \phi_b + \phi_d)} + \tilde{K}_{\text{ac}} \cdot \tilde{K}_{\text{db}} e^{j(\phi_a - \phi_c + \phi_b - \phi_d)} + \tilde{K}_{\text{ca}} \cdot \tilde{K}_{\text{bd}} e^{-j(\phi_a - \phi_c - \phi_b + \phi_d)} + \tilde{K}_{\text{ca}} \cdot \tilde{K}_{\text{db}} e^{-j(\phi_a - \phi_c + \phi_b - \phi_d)} \end{aligned} \quad (\text{IX-14})$$

La conservation de l'énergie impose :

$$\phi_a - \phi_c + \phi_b - \phi_d = 0 \quad (\text{IX-15})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M &= \tilde{K}_{\text{ac}} \cdot \tilde{K}_{\text{bd}} e^{j(\phi_a - \phi_c - \phi_b + \phi_d)} + \tilde{K}_{\text{ac}} \cdot \tilde{K}_{\text{db}} + \tilde{K}_{\text{ca}} \cdot \tilde{K}_{\text{bd}} + \tilde{K}_{\text{ca}} \cdot \tilde{K}_{\text{db}} e^{-j(\phi_a - \phi_c - \phi_b + \phi_d)} \\ \langle M \rangle &= \tilde{K}_{\text{ac}} \cdot \tilde{K}_{\text{db}} + \tilde{K}_{\text{ca}} \cdot \tilde{K}_{\text{bd}} \end{aligned} \quad (\text{IX-16})$$

Les deux termes qui composent la valeur moyenne de M sont conjugués, et sont associés à l'amplitude de diffusion de (a)(c) vers (b)(d), et (b)(d) vers (a)(c).

Si on ne retient que le terme de diffusion de (a)(c) vers (b)(d) :

$$M_{\text{ac} \rightarrow \text{db}} = \tilde{K}_{\text{ac}} \tilde{K}_{\text{db}} = K_{\text{act}} K_{\text{dbt}} - K_{\text{acx}} K_{\text{dbx}} - K_{\text{acy}} K_{\text{dby}} - K_{\text{acz}} K_{\text{dbz}} \quad (\text{IX-17})$$

Comme dans le cas de la diffusion inélastique, il convient de diviser la quantité M par le carré de l'énergie qui participe à la réaction pour construire un terme sans dimension qui conduira à la probabilité de réaction. Dans ce cas particulier, cette énergie est égale à la variation de l'énergie cinétique de chacune des particules ou antiparticules incidentes : son carré est représenté par la variable MANDELSTAM t (V-12).

Le terme qui apparaît dans la probabilité de réaction est donc proportionnel à la quantité :

$$\frac{M_{ac \rightarrow db}}{t} \quad (IX-18)$$

Ce terme est effectivement présent dans le calcul du graphe de FEYNMAN correspondant.

On notera que dans ce cas particulier la particule qui diffuse est de même nature que la particule incidente, ce qui indique que sa masse au repos est identique. Il s'ensuit que la variable de MANDELSTAM t (V-12) prend nécessairement une valeur négative.

X - Le Photon de DIRAC

Le formalisme d'interaction présenté dans les chapitres précédents permet de traiter l'interaction entre particules et antiparticules.

Ce formalisme aurait une portée plus générale, s'il permettait de traiter également l'interaction avec des photons, car il pourrait être utilisé sans distinction entre particule massive, antiparticule, et photon.

Nous conjecturons qu'une telle possibilité existe, si le photon peut être considéré comme une particule de DIRAC sans masse.

Il est connu que le photon possède une énergie et une impulsion, et donc qu'il peut être représenté par un quadrivecteur énergie-impulsion.

Nous admettons qu'un photon peut être considéré comme une particule de DIRAC s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- Il est représenté par une solution exacte à l'équation de DIRAC.
- La quadrivecteur des courants de DIRAC est identique au quadrivecteur impulsion énergie de la relativité restreinte.

$$\tilde{p} = \hbar \begin{pmatrix} \omega \\ k_x c \\ k_y c \\ k_z c \end{pmatrix} = \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_x}{c} \\ \frac{v_y}{c} \\ \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad (X-1)$$

Pour un photon de pulsation ω , les solutions sont recherchées sous la forme d'exponentielles complexes $e^{i\phi}$ ou $e^{-j\phi}$ avec une phase de de BROGLIE :

$$\phi = (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = \omega \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \quad (X-2)$$

Ces solutions sont associées à la relation de conservation de l'énergie, qui dans ce cas particulier représente uniquement de l'énergie impulsionnelle :

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2 \quad (X-3)$$

Les bispineurs qui représentent le photon sont solutions de l'équation de DIRAC obtenue en enlevant le terme relatif à la masse :

$$\begin{aligned}
0 &= j \frac{\partial \psi_0}{\partial(ct)} + j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\
0 &= j \frac{\partial \psi_1}{\partial(ct)} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\
0 &= -j \frac{\partial \psi_2}{\partial(ct)} - j \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \\
0 &= -j \frac{\partial \psi_3}{\partial(ct)} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_1}{\partial z}
\end{aligned} \tag{X-4}$$

On peut vérifier que les expressions ci-dessous sont des solutions exactes du système de DIRAC (X-4).

$$\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{\pm j\phi} \quad \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{\pm j\phi} \quad \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} \frac{v_z}{c} \\ v_x + jv_y \\ c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm j\phi} \quad \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ c \\ -\frac{v_z}{c} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm j\phi} \tag{X-5}$$

Les courants de DIRAC sont identiques pour chacune des solutions ci-dessus. Un calcul explicite est détaillé pour le premier élément de (X-5) :

$$\begin{aligned}
J_t &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 \\
J_t &= \frac{\hbar\omega}{2} \left(1 + \left(\frac{v_z}{c} \right)^2 + \left(\frac{v_x}{c} \right)^2 + \left(\frac{v_y}{c} \right)^2 \right) = \hbar\omega \\
J_x &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_0^* \psi_3 \\
J_x &= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar\omega \frac{v_x}{c} = \hbar c k_x \\
J_y &= j\psi_3^* \psi_0 - j\psi_2^* \psi_1 + j\psi_1^* \psi_2 - j\psi_0^* \psi_3 \\
J_y &= j \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ \frac{v_x - jv_y}{c} - \frac{v_x + jv_y}{c} \right\} = \hbar\omega \frac{v_y}{c} = \hbar c k_y \\
J_z &= \psi_2^* \psi_0 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_0^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_3 \\
J_z &= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{v_z}{c} + \frac{v_z}{c} \right) = \hbar\omega \frac{v_z}{c} = \hbar c k_z
\end{aligned} \tag{X-6}$$

Au vu de ces résultats, nous admettons que le photon peut être considéré comme une particule de DIRAC. Sa représentation pourra être l'une quelconque des solutions (X-5) ci-dessus. On notera que la phase de l'exponentielle peut être indifféremment (+ ϕ) ou (- ϕ).

D'autres éléments, basés sur une analyse énergétique modale et présentés dans le chapitre XXXII de [ce document](#), plaident également en faveur d'une représentation du photon comme particule de DIRAC.

Cette conception est en contradiction avec l'idée couramment admise que les solutions de l'équation de DIRAC ne représentent que des particules de spin $\frac{1}{2}$. Nous poursuivons malgré tout, en prévenant le lecteur que sur ce point particulier, nous sommes à contre-courant des idées majoritaires.

Cette démarche est hypothétique au sens de POINCARÉ. Qu'elle se révèle valide ou non, on peut espérer en tirer des enseignements sur les échanges d'énergie entre un photon et une autre particule.

« Toute généralisation est une hypothèse ; l'hypothèse a donc un rôle nécessaire que personne n'a jamais contesté. Seulement elle doit toujours être, le plus tôt possible et le plus souvent possible, soumise à la vérification. Il va sans dire que, si elle ne supporte pas cette épreuve, on doit l'abandonner sans arrière-pensée. C'est bien ce qu'on fait en général, mais quelquefois avec une certaine mauvaise humeur.

Eh bien cette mauvaise humeur n'est même pas justifiée ; le physicien qui vient de renoncer à une de ses hypothèses devrait être, au contraire, plein de joie, car il vient de trouver une occasion inespérée de découverte. Son hypothèse, j'imagine, n'avait pas été adoptée à la légère, elle tenait compte de tous les facteurs connus qui semblaient pouvoir intervenir dans le phénomène. Si la vérification ne se fait pas, c'est qu'il y a quelque chose d'inattendu, d'extraordinaire ; c'est qu'on va trouver de l'inconnu et du nouveau ». Henri POINCARÉ, la science et l'hypothèse, 1902

L'auteur a pensé dans un premier temps (voir les versions précédentes) que si le photon est une particule de DIRAC, alors il doit participer aux réactions de diffusion de manière analogue aux particules et anti particules massives. Cette conception est erronée, au moins dans le cas d'une interaction avec une particule chargée comme l'électron. Elle est abandonnée car elle ne permet pas un calcul correct de l'amplitude de diffusion.

L'interaction d'un photon avec une particule chargée doit prendre en compte une interaction électromagnétique qui n'est pas décrite par la représentation d'un photon sous la forme d'un bispineur de DIRAC.

Cette interaction n'est pas clairement apparente dans les formulations qui traduisent la diffusion de particules massives chargées (diffusion Möller, Rutherford Bhabha ...), alors qu'il y a nécessairement une interaction de nature électromagnétique. Lorsqu'on tente d'en comprendre la raison d'un point de vue énergétique, on observe que l'énergie électromagnétique mise en jeu dans ces phénomènes est intégralement transformée en énergie de masse et énergie impulsionnelle. Puisque ces deux énergies sont traitées de manière quantique et relativiste par l'équation de DIRAC, les variations d'énergie électromagnétique des particules mises en jeu sont effectivement prises en compte dans les bispineurs de DIRAC qui décrivent les particules.

Il en va différemment pour le photon dont l'énergie de masse est nulle. Puisqu'il ne transporte que de l'énergie impulsionnelle, il faut traiter de manière spécifique son interaction électromagnétique avec des particules chargées. C'est le programme réussi par FEYNMAN dans l'élaboration de la théorie quantique des champs.

Pour autant, la notion de photon de DIRAC n'est pas totalement dénuée de sens physique. En attribuant un bispineur à un photon, on sait que son courant de DIRAC est égal,

en valeur moyenne, au quadrivecteur impulsion énergie correct qui est utilisé dans l'écriture de la conservation de l'énergie entre les particules entrantes et sortantes.

Afin de confirmer cet aspect énergétique, nous examinons dans les paragraphes suivants l'équivalence énergétique entre le photon de DIRAC et le photon électromagnétique.

Pour montrer cette équivalence, nous allons être amenés à normaliser le bispineur représentant du photon par rapport à la racine carrée du volume qui contient son énergie. Cela va permettre de comparer les propriétés énergétiques du photon de deux manières : en le construisant à partir de l'électromagnétisme, puis en le construisant à l'aide d'un bispineur.

I – Le photon électromagnétique

Nous admettons que le photon peut être représenté par un potentiel électromagnétique sous la forme d'un quadrivecteur A^μ :

$$A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (X-7)$$

Le terme $A_0 = \varphi$ est souvent désigné par potentiel scalaire. Il est lié à la nature des charges qui interviennent dans le phénomène électromagnétique. Dans le cas présent, aucune charge n'intervient dans l'évolution du photon, et ce potentiel scalaire est nul. Cette condition est assimilable à une condition de jauge désignée par jauge de COULOMB.

Les termes $A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$, $A_3 = A_z$, sont les composantes spatiales d'un vecteur souvent appelé potentiel vecteur :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (X-8)$$

Nous admettons qu'un photon peut être représenté par un potentiel électromagnétique de la forme :

$$A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \varepsilon^\mu \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega V \varepsilon_0}} \cos\phi = \begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega V \varepsilon_0}} \cos\phi \quad (X-9)$$

Dans cette représentation, ε^μ est identifié comme un vecteur de polarisation, car ses composantes spatiales vont porter la direction du champ électrique du photon. La composante ε^0 est nulle car le potentiel scalaire est nul.

Dans cette expression, ω désigne la pulsation du photon, V le volume dans lequel s'étend son énergie, et ϵ_0 représente la permittivité du vide.

Cette notation n'est pas très heureuse, mais elle est à peu près normalisée. En tout état de cause, il convient de ne pas confondre ϵ_0 (indice 0 en bas = permittivité du vide) et ϵ^0 (indice 0 en haut = premier terme du vecteur de polarisation).

A partir du quadrivecteur ϵ^μ , on définit un vecteur spatial de polarisation :

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \\ \epsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (\text{X-10})$$

Ce vecteur est normé :

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1 \quad (\text{X-11})$$

L'amplitude de la fonction cosinus est représentée par le terme :

$$\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega V \epsilon_0}} \quad (\text{X-12})$$

L'expression de cette amplitude sera justifiée postérieurement par le calcul de l'énergie associée à ce photon. La présence de la permittivité du vide ϵ_0 est essentiellement liée au fait que nous décrivons tous les phénomènes dans les unités du système SI.

La fonction ϕ représente la phase de de BROGLIE :

$$\phi = \omega \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2 \quad (\text{X-13})$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

On obtient le champ électrique grâce à la relation suivante déduite des équations de MAXWELL :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\epsilon} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega V \epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial t} (\cos \phi) = -\vec{\epsilon} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega V \epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

$$\vec{E} = \vec{\epsilon} \sqrt{\frac{2\hbar \omega}{V \epsilon_0}} \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \quad (\text{X-14})$$

Le photon de champ lointain est associé à une onde plane, pour laquelle les champs électrique et magnétique sont liés à la direction de propagation par la relation :

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\vec{H} \wedge \vec{U}) \quad (X-15)$$

Il s'ensuit :

$$E^2 = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} H^2 \quad (X-16)$$

La densité volumique d'énergie $\Delta w(x,y,z,t)$ associée à cette onde a pour expression :

$$\Delta w(x,y,z,t) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \epsilon_0 E^2 = \frac{2\hbar\omega}{V} \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \quad (X-17)$$

On obtient l'énergie W associée au photon en intégrant cette densité volumique d'énergie sur le volume V :

$$W = \int_V \Delta w(x,y,z,t) dV = \iiint \frac{2\hbar\omega}{V} \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) dx dy dz \quad (X-18)$$

Sous cette forme, l'intégrale n'est pas séparable en x,y,z . On peut malgré tout progresser dans l'intégration en posant :

$$\sin^2 \phi = \left(\frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} \right)^2 = -\frac{e^{2j\phi} + e^{-2j\phi} - 2}{4} \quad (X-19)$$

$$\sin^2(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -\left(\frac{e^{2j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} + e^{-2j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}}{4} \right) + \frac{1}{2}$$

L'intégrale devient séparable, et on obtient :

$$\begin{aligned} \iiint e^{2j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} dx dy dz &= e^{2j\omega t} \int e^{-2jk_x x} dx \int e^{-2jk_y y} dy \int e^{-2jk_z z} dz = -e^{2j\omega t} \frac{e^{-2jk_x x} e^{-2jk_y y} e^{-2jk_z z}}{8jk_x k_y k_z} = -\frac{e^{2j\phi}}{8jk_x k_y k_z} \\ \iiint e^{-2j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} dx dy dz &= e^{-2j\omega t} \int e^{2jk_x x} dx \int e^{2jk_y y} dy \int e^{2jk_z z} dz = e^{-2j\omega t} \frac{e^{2jk_x x} e^{2jk_y y} e^{2jk_z z}}{8jk_x k_y k_z} = \frac{e^{-2j\phi}}{8jk_x k_y k_z} \end{aligned} \quad (X-20)$$

Soit donc en résumé :

$$W = \frac{2\hbar\omega}{V} \iiint \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) dx dy dz = \frac{2\hbar\omega}{V} \left(\frac{e^{2j\phi} - e^{-2j\phi}}{32jk_x k_y k_z} + \frac{V}{2} \right) \quad (X-21)$$

$$W = \hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{V} \frac{\sin(2\phi)}{8k_x k_y k_z}$$

L'énergie W associée au photon est la somme de deux termes. Le premier correspond à la valeur moyenne $\langle W \rangle$, le second à une énergie réactive dont la valeur moyenne est nulle

sur le volume V . C'est ce résultat que nous souhaitons atteindre en représentant un photon sous la forme d'un bispineur.

II – Le photon de DIRAC

Nous adoptons une solution de l'équation de DIRAC purement sinusoïdale, normalisée par rapport au volume V :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}} \sin \phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x}{c} + j \frac{v_y}{c} \end{pmatrix} = c \sqrt{\frac{\hbar}{\omega V}} \sin \phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k_z \\ \mathbf{k}_x + j\mathbf{k}_y \end{pmatrix} \quad (\text{X-22})$$

$$\phi = \omega \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Le volume V est apparu dans le facteur de normalisation, car chaque composante du bispineur doit avoir pour dimension la racine carrée d'une densité volumique d'énergie.

Dans ces conditions, les courants de DIRAC ont la dimension d'une densité volumique d'énergie, et on sait qu'ils vérifient l'équation locale de conservation de l'énergie.

On obtient :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_t &= \frac{\hbar\omega}{V} \sin^2 \phi \left(1 + \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c} \right) = 2 \frac{\hbar\omega}{V} \sin^2 \phi \\ J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_x &= \frac{\hbar\omega}{V} \sin^2 \phi \left(\frac{v_x}{c} - j \frac{v_y}{c} + \frac{v_x}{c} + j \frac{v_y}{c} \right) = 2 \frac{\hbar\omega}{V} \sin^2 \phi \frac{v_x}{c} \\ J_y &= j \Psi_3^* \Psi_0 - j \Psi_2^* \Psi_1 + j \Psi_1^* \Psi_2 - j \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_y &= j \frac{\hbar\omega}{V} \sin^2 \phi \left(\frac{v_x}{c} - j \frac{v_y}{c} - \frac{v_x}{c} - j \frac{v_y}{c} \right) = 2 \frac{\hbar\omega}{V} \sin^2 \phi \frac{v_y}{c} \\ J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \\ J_z &= \frac{\hbar\omega}{V} \sin^2 \phi \left(\frac{v_z}{c} + \frac{v_z}{c} \right) = 2 \frac{\hbar\omega}{V} \sin^2 \phi \frac{v_z}{c} \end{aligned} \quad (\text{X-23})$$

L'énergie associée au photon s'obtient comme dans le paragraphe précédent. La composante J_t permet d'obtenir l'énergie totale du photon, tandis que les composantes J_x , J_y , J_z permettent de calculer l'énergie impulsionnelle du photon dans chacune des directions x , y , z .

$$\begin{aligned}
J_t &= \Delta w(x, y, z, t) \\
J_x &= \Delta w_x(x, y, z, t) \\
J_y &= \Delta w_y(x, y, z, t) \\
J_z &= \Delta w_z(x, y, z, t)
\end{aligned}
\tag{X-24}$$

Les calculs sont analogues à ceux du paragraphe précédent. On obtient :

$$\begin{aligned}
W &= \int_V J_t dV = \iiint \frac{2\hbar\omega}{V} \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) dx dy dz = \hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{V} \frac{\sin(2\phi)}{8k_x k_y k_z} \\
W_x &= \int_V J_x dV = \iiint \frac{2\hbar\omega}{V} \frac{v_x}{c} \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) dx dy dz = \hbar\omega \frac{v_x}{c} - \frac{\hbar\omega}{V} \frac{\sin(2\phi)}{8k_x k_y k_z} \frac{v_x}{c} \\
W_y &= \int_V J_y dV = \iiint \frac{2\hbar\omega}{V} \frac{v_y}{c} \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) dx dy dz = \hbar\omega \frac{v_y}{c} - \frac{\hbar\omega}{V} \frac{\sin(2\phi)}{8k_x k_y k_z} \frac{v_y}{c} \\
W_z &= \int_V J_z dV = \iiint \frac{2\hbar\omega}{V} \frac{v_z}{c} \sin^2(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) dx dy dz = \hbar\omega \frac{v_z}{c} - \frac{\hbar\omega}{V} \frac{\sin(2\phi)}{8k_x k_y k_z} \frac{v_z}{c}
\end{aligned}
\tag{X-25}$$

Dans cette représentation, c'est la valeur moyenne de l'énergie calculée qui est égale au quadrivecteur impulsion-énergie. On retrouve ainsi une propriété déjà évoquée dans les chapitres précédents.

Comme de plus, l'énergie totale est égale à l'énergie obtenue en utilisant les lois de l'électromagnétisme, y compris dans la présence d'énergie réactive, le comportement énergétique du photon de DIRAC semble cohérent avec le comportement énergétique du photon déduit des équations de MAXWELL.

Pour terminer ce chapitre, nous revenons sur la notion de spin.

Nous avons avancé l'idée que le photon pouvait être considéré comme une particule de DIRAC, au moins dans son comportement énergétique. Cette hypothèse n'est pas reconnue par la communauté scientifique, car il est admis que les solutions de l'équation de DIRAC ne représentent que des particules de spin $\frac{1}{2}$.

Nous proposons de développer dans ce chapitre quelques éléments de réflexion supplémentaires sur ce sujet.

On peut prendre comme point de départ, la notion de moment cinétique de la mécanique classique (Voir chapitre IV de [ce document](#)).

Pour étendre la notion de moment cinétique à des spineurs, les physiciens se sont appuyés de manière empirique sur l'analogie avec le moment cinétique de la mécanique classique.

Pour une fonction d'onde ψ , cela conduit à une définition des opérateurs de moment cinétique suivante :

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_x, \hat{L}_y](\psi) &= (\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x)(\psi) = j\hbar \hat{L}_z(\psi) \\
[\hat{L}_z, \hat{L}_x](\psi) &= (\hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z)(\psi) = j\hbar \hat{L}_y(\psi) \\
[\hat{L}_y, \hat{L}_z](\psi) &= (\hat{L}_y \hat{L}_z - \hat{L}_z \hat{L}_y)(\psi) = j\hbar \hat{L}_x(\psi)
\end{aligned} \tag{X-26}$$

Toujours de manière empirique, cette définition a été prolongée à un spineur φ sous la forme :

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_x, \hat{S}_y](\varphi) &= (\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x)(\varphi) = j\hbar \hat{S}_z(\varphi) \\
[\hat{S}_z, \hat{S}_x](\varphi) &= (\hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z)(\varphi) = j\hbar \hat{S}_y(\varphi) \\
[\hat{S}_y, \hat{S}_z](\varphi) &= (\hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y)(\varphi) = j\hbar \hat{S}_x(\varphi)
\end{aligned} \tag{X-27}$$

Puisque le spineur φ contient deux fonctions d'onde, cela suppose que les opérateurs $S_{x,y,z}$ sont des opérateurs représentés par des matrices 2X2. Les matrices de PAULI possèdent exactement, à une constante multiplicative près, la propriété (X-27) ci-dessus :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{X-28}$$

On obtient en effet :

$$\begin{aligned}
[\hbar\sigma_1, \hbar\sigma_2] &= 2j\hbar(\hbar\sigma_3) \\
[\hbar\sigma_2, \hbar\sigma_3] &= 2j\hbar(\hbar\sigma_1) \\
[\hbar\sigma_3, \hbar\sigma_1] &= 2j\hbar(\hbar\sigma_2)
\end{aligned} \tag{X-29}$$

Il s'ensuit que les opérateurs de spin recherchés dans la représentation (X-27) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x &= \frac{\hbar}{2} \sigma_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2} \sigma_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{S}_z &= \frac{\hbar}{2} \sigma_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{X-30}$$

De là découle la notion de spin $\frac{1}{2}$, mis en évidence dans le facteur multiplicatif des matrices de PAULI pour assurer une définition cohérente du moment cinétique.

Il semble cependant que le raisonnement ci-dessus n'apporte pas la preuve que le spin $\frac{1}{2}$ est le seul spin qui puisse être décrit par les matrices de PAULI. Nous allons tenter de développer quelques éléments de réflexion à ce sujet.

III – Le moment cinétique d'ordre m

Nous adoptons la définition du moment cinétique (X-27) qui repose sur les commutateurs, et nous admettons qu'une définition plus générale du moment cinétique d'un spineur peut dépendre d'un paramètre m tel que :

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y](\varphi) &= (\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x)(\varphi) = j\hbar m \hat{S}_z(\varphi) \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x](\varphi) &= (\hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z)(\varphi) = j\hbar m \hat{S}_y(\varphi) \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z](\varphi) &= (\hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y)(\varphi) = j\hbar m \hat{S}_x(\varphi) \end{aligned} \quad (X-31)$$

Si on considère les opérateurs de moment cinétique suivants :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{x,m} &= m\hbar \frac{\sigma_1}{2} = m \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_{y,m} &= m\hbar \frac{\sigma_2}{2} = m \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_{z,m} &= m\hbar \frac{\sigma_3}{2} = m \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (X-32)$$

Alors nous pouvons vérifier que :

$$[\hat{S}_{x,m}, \hat{S}_{y,m}] = (\hat{S}_{x,m} \hat{S}_{y,m} - \hat{S}_{y,m} \hat{S}_{x,m}) = (m\hbar)^2 \left(\frac{\sigma_1}{2} \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \frac{\sigma_1}{2} \right) = (m\hbar)^2 j \frac{\sigma_3}{2} = jm\hbar \hat{S}_{z,m} \quad (X-33)$$

IV - Le spin dans les modes stationnaires sphériques

Le spin des particules reste une notion abstraite, car sa définition repose sur les propriétés d'un opérateur.

Il ne fait guère de doute pour autant que le spin doit représenter des propriétés physiques clairement identifiables.

Dans une approche énergétique, ces propriétés physiques sont liées à la répartition et à l'évolution de la densité volumique d'énergie.

Les solutions les plus pertinentes pour mettre en évidence théoriquement ces propriétés physiques sont les solutions stationnaires. En considérant une énergie quantique confinée dans une boîte de forme déterminée, on doit voir apparaître des propriétés qui confirment les propriétés issues des opérateurs de spin.

Sur certains modes sphériques, on peut montrer que ces modes stationnaires dépendent d'un paramètre n , et un exemple de solution est rappelé ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \eta f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\phi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\phi} \cos(k_t x_t) \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= j \cos \theta \sin^n \theta e^{-nj\phi} \sin(k_t x_t) \left\{ -k_r f_n'(k_r r) + n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\
\psi_3 &= j \sin(k_t x_t) \sin^{n-1} \theta e^{-(n-1)j\phi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n (\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}
\end{aligned} \tag{X-34}$$

Avec la notation : $f_n'(k_r r) = df_n(k_r r)/d(k_r r)$.

Une analyse de ce bispineur (Voir chapitre XX de [ce document](#)) montre que le mode $n=1$ présente certaines propriétés analogues à celles du photon, tandis que le mode $n=2$ présente des propriétés analogues à celles de l'électron. Pour le photon, on sait que le terme relatif à l'énergie de masse dans ψ_0 est nul. Il peut cependant être éventuellement conservé dans la discussion qui suit.

Traduit en termes de spin, cela semble indiquer que le mode $n=1$ peut être associé à une particule de spin 1, tandis que le mode $n=2$ peut être associé à une particule de spin 1/2.

Si on admet cette hypothèse, alors il apparaît que les solutions de l'équation de DIRAC sont susceptibles de représenter de l'énergie confinée sous la forme de spin 1 ou de spin 1/2.

Du point de vue physique, on connaît les affinités du photon avec l'électron : on sait qu'un photon peut être absorbé par un électron, ou qu'un électron peut émettre un photon.

Ces affinités sont apparentes dans les modes stationnaires relatifs aux modes $n=1$ et $n=2$. En particulier, la dépendance en r de la fonction d'onde ψ_2 du mode $n=1$ est identique à la dépendance en r de la fonction d'onde ψ_0 du mode $n=2$.

Les fonctions de BESSEL sphériques d'ordre 1 et 2 s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}
f_1(k_r r) &= \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^2} - \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)} \\
f_2(k_r r) &= -3 \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} + 3 \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^3} - \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)}
\end{aligned} \tag{X-35}$$

La dépendance en r de la fonction d'onde ψ_2 du mode $n=1$ est exprimée par le terme :

$$\begin{aligned}
-k_r f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{r} &= -k_r \left\{ \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} - 2 \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^3} - \left(-\frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)} - \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} \right) \right\} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^2} - \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)} \right\} \\
-k_r f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{r} &= \left\{ -2k_r \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} + 2k_r \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^3} - k_r \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)} + k_r \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^3} - k_r \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} \right\} \\
-k_r f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{r} &= k_r \left\{ -3 \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} + 3 \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^3} - \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)} \right\}
\end{aligned} \tag{X-36}$$

La dépendance en r de la fonction d'onde ψ_0 du mode $n=2$ est exprimée par le terme :

$$f_2(k_r r) = -3 \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} + 3 \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^3} - \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)} = -f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{(k_r r)} \quad (\text{X-37})$$

L'égalité exprimée ci-dessus relève d'une propriété plus générale qui relie les fonctions de BESSEL sphériques et leurs dérivées.

Si on admet que les modes stationnaires $n=1$, et $n=2$ sont associés respectivement au photon et à l'électron, on fait le constat que cela implique des relations importantes entre les fonctions d'ondes associées aux bispineurs qui décrivent chacune de ces particules.

V - Le spin dans les modes stationnaires parallélépipédiques

Dans ce paragraphe, nous examinons le comportement d'un mode stationnaire solution de l'équation de KLEIN- GORDON en coordonnées cartésiennes.

Pour un parallélépipède de dimensions X, Y, Z , une telle solution s'exprime comme un produit de fonctions sinusoïdales relatives au temps et à l'espace, par exemple :

$$\psi(t, x, y, z) = A \sin(\omega_n t) \sin\left(\frac{n_x \pi}{X} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{Y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{Z} z\right) \quad (\text{X-38})$$

Les nombres n_x, n_y, n_z , sont en général des entiers qui fixent la répartition modale suivant chacune des dimensions X, Y, Z .

L'équation de KLEIN-GORDON est rappelée pour mémoire :

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\psi) = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} (\psi) = \eta^2 (\psi) \quad (\text{X-39})$$

En introduisant la solution ψ représentée par le produit (X-38) dans cette équation, on obtient :

$$\frac{\omega_n^2}{c^2} - \left(n_x \frac{\pi}{X} \right)^2 - \left(n_y \frac{\pi}{Y} \right)^2 - \left(n_z \frac{\pi}{Z} \right)^2 = \eta^2 \quad (\text{X-40})$$

Nous empruntons la démarche de DIRAC en recherchant les matrices $\gamma_{0,n}, \gamma_{1,n_x}, \gamma_{2,n_y}, \gamma_{3,n_z}$ qui permettent, pour des dimensions fixées X, Y, Z , de vérifier la relation suivante :

$$\left[\gamma_{0,n} \left(\frac{\omega_n}{c} \right) + \gamma_{1,n_x} \left(\frac{\pi}{X} \right) + \gamma_{2,n_y} \left(\frac{\pi}{Y} \right) + \gamma_{3,n_z} \left(\frac{\pi}{Z} \right) \right]^2 = \gamma_{0,n}^2 \left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 + \gamma_{1,n_x}^2 \left(\frac{\pi}{X} \right)^2 + \gamma_{2,n_y}^2 \left(\frac{\pi}{Y} \right)^2 + \gamma_{3,n_z}^2 \left(\frac{\pi}{Z} \right)^2 = \eta^2 \quad (\text{X-41})$$

Il est apparent que pour le mode fondamental $n_x = n_y = n_z = 1$, on retrouve les matrices de DIRAC ordinaires :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{X-42})$$

Tandis que pour un mode n_x, n_y, n_z quelconque :

$$\begin{aligned} \gamma_{0,n} &= \gamma_0 \\ \gamma_{1,n_x} &= n_x \gamma_1 \\ \gamma_{2,n_y} &= n_y \gamma_2 \\ \gamma_{3,n_z} &= n_z \gamma_3 \end{aligned} \quad (\text{X-43})$$

On en déduit les matrices de PAULI qui servent à construire les matrices de DIRAC sur un mode stationnaire quelconque :

$$\begin{aligned} \sigma_{1,n_x} &= n_x \sigma_1 \\ \sigma_{2,n_y} &= n_y \sigma_2 \\ \sigma_{3,n_z} &= n_z \sigma_3 \end{aligned} \quad (\text{X-44})$$

En particulier, pour $n_x = n_y = n_z = m$, on retrouve des opérateurs $\hat{S}_{x,m}, \hat{S}_{y,m}, \hat{S}_{z,m}$ qui correspondent à la définition élargie du spin qui a été proposée au paragraphe III ci-dessus.

XI - Conclusion

La notion de diffusion de particules fait partie des sujets les plus complexes de la physique contemporaine. Sa compréhension résulte des travaux de recherche et d'expérimentation d'innombrables chercheurs, sur une période qui atteint désormais près d'un siècle.

Elle s'appuie sur la théorie quantique des champs et sur les graphes de FEYNMAN, qui constituent un des outils les plus puissants inventés par l'homme pour effectuer des calculs sur un phénomène physique.

Cet outil est quelquefois présenté comme un outil proche des techniques de l'ingénieur : on admet sa validité démontrée à l'aide de théories complexes, et on l'applique en utilisant des règles rigoureuses, avec peu d'interrogation sur la physique qui est sous-jacente à chacune de ses règles.

Dans une approche énergétique de la diffusion, on tente d'ouvrir une autre porte d'entrée sur cet univers bien particulier. L'ouverture proposée est modeste, et fragile sur bien des points, mais elle essaie de décrire les phénomènes au plus près des échanges qui interviennent dans une vision énergétique de la physique. Elle ne rivalise en rien avec les graphes de FEYNMAN qui ont une portée plus générale, mais elle semble apte à en simplifier quelques éléments de calcul et de compréhension.

La cohérence de l'approche énergétique qui est présentée tient au fait qu'elle décrit dans les mêmes relations, à la fois les propriétés relativistes des particules supposées ponctuelles, et les propriétés statistiques des particules quantiques.

En prenant les valeurs moyennes des courants de DIRAC, on obtient les quadrivecteurs impulsions qui représentent les propriétés macroscopiques des particules.

En prenant la valeur moyenne du pseudo produit scalaire de ces courants, on obtient les amplitudes de diffusion qui représentent les propriétés statistiques quantiques de ces particules.

L'approche proposée peut être résumée de la manière suivante :

- On définit une particule équivalente en entrée. Cette phase nécessite une analyse simple du système suivant le type de diffusion.

- On calcule les courants de DIRAC de cette particule équivalente. Ces courants font apparaître les quadrivecteurs impulsion-énergie de chacune des particules, plus des courants d'interaction.

- On procède de même pour les particules diffusées.

- On fait le pseudo-produit scalaire M des courants d'interaction d'entrée et des courants d'interaction de sortie. La valeur moyenne de M permet d'extraire le terme représentatif de la diffusion entrée-sortie ou sortie-entrée en utilisant la relation de conservation de l'énergie.

- On normalise ce terme par rapport à l'énergie totale qui a interagi dans la diffusion.

Le résultat obtenu est proportionnel à l'amplitude de diffusion du cas particulier qui est traité. Pour traiter une diffusion non polarisée, il faut ensuite faire la somme de tous les cas de diffusion possibles, suivant les états de spins des particules d'entrée et de sortie, et enfin faire la moyenne sur les spins d'entrée en divisant par le nombre de cas possibles en entrée.

La procédure proposée ne permet pas de traiter l'interaction avec un photon qui relève de l'interaction électromagnétique développée au chapitre XXIII.

La démarche adoptée dans ce document est complètement déterministe et interroge sur des principes pourtant souvent qualifiés de fondamentaux comme le principe de complémentarité, et le principe de superposition.

Ces principes ont été adoptés dans les débuts de la mécanique quantique afin de prendre en compte un ensemble de faits expérimentaux que les premiers éléments de théorie ne permettaient pas d'expliquer.

D'un point de vue expérimental, la notion de gouttelettes marcheuses montre que ces principes ne sont pas nécessaires pour expliquer les phénomènes d'interférence et de diffraction.

D'un point de vue théorique, la construction de plus en plus élaborée du monde quantique ne repose à aucun moment sur ces principes.

Du point de vue de l'auteur, ils doivent être abandonnés, car ils ne sont plus d'aucune utilité dans la compréhension des phénomènes quantiques.

Cet abandon qui semble inéluctable à plus ou moins court terme aura des conséquences. En particulier, le caractère déterministe qui émerge à la fois en théorie et expérimentation indique qu'il n'est pas envisageable de construire des ordinateurs quantiques sur la base du principe de superposition, qui est un principe non physique.

Pour autant, il est certain que les progrès de la physique quantique permettront des progrès significatifs dans l'informatique quantique, à la fois dans l'accroissement de la vitesse des horloges de base, mais également, si on ne censure pas son imagination, dans la conception de portes logiques photoniques, dans l'utilisation d'une base 4 (4 états de polarisation) au lieu de 2, ...etc.

Deuxième partie

Désintégration de particules de DIRAC

XII – La matrice γ^5

L'équation de DIRAC s'applique à un bispineur ψ , et nécessite la définition de 4 matrices désignées par $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$.

$$\left[\gamma^0 \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} \right) + \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \gamma^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (\psi) = \frac{m_0 c}{j \hbar} (\psi) \quad (\text{XII-1})$$

La forme standard de ces matrices est la suivante :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XII-2})$$

La matrice construite en effectuant le produit de ces 4 matrices, puis multiplication par j , est désignée par γ^5 .

$$\gamma^5 = j \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\text{XII-3})$$

Cette matrice joue un rôle important dans les théories basées sur l'équation de DIRAC. Il semble que son appellation soit due à la notation originale des matrices de DIRAC qui étaient numérotées de 1 à 4 (voir par exemple la [publication de PAULI](#)).

Les multiplications successives donnent le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\gamma_0\gamma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_0\gamma_1\gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{pmatrix} \\
\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 &= \begin{pmatrix} -j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ -j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_5 = j\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{XII-4}$$

Lorsque cette matrice est appliquée à un bispineur, elle provoque l'inversion de l'ordre des deux spineurs qui construisent le bispineur :

$$\gamma^5 \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \tag{XII-5}$$

Considérons les 4 solutions standards de l'équation de DIRAC sous la forme exponentielle :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} = U_1 e^{-j\phi} & \quad \mathbf{u}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} = U_2 e^{-j\phi}
\end{aligned} \tag{XII-6}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi} = V_1 e^{j\phi} & \quad \mathbf{v}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi} = V_2 e^{j\phi}
\end{aligned}$$

(XII-7)

Avec une phase de de BROGLIE :

$$\phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \quad (\text{XII-8})$$

Dans cette représentation, les particules sont affectées d'une phase $e^{-j\phi}$, tandis que les antiparticules sont affectées d'une phase $e^{j\phi}$.

On a la propriété suivante entre les solutions exponentielles :

$$\begin{array}{ll} \gamma^5 \mathbf{u}^{(1)} e^{j\phi} = \mathbf{v}^{(1)} e^{-j\phi} & \gamma^5 \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} e^{-2j\phi} \\ \gamma^5 \mathbf{u}^{(2)} e^{j\phi} = \mathbf{v}^{(2)} e^{-j\phi} & \gamma^5 \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{v}^{(2)} e^{-2j\phi} \\ \gamma^5 \mathbf{v}^{(1)} e^{-j\phi} = \mathbf{u}^{(1)} e^{j\phi} & \text{soit encore} \quad \gamma^5 \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} e^{2j\phi} \\ \gamma^5 \mathbf{v}^{(2)} e^{-j\phi} = \mathbf{u}^{(2)} e^{j\phi} & \gamma^5 \mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{u}^{(2)} e^{2j\phi} \end{array} \quad (\text{XII-9})$$

La matrice γ^5 est sa propre inverse, ce qui peut être vérifié de la manière suivante :

$$\gamma^5 \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{XII-10})$$

Les relations (XII-9) ci-dessus peuvent donc s'écrire également :

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}^{(1)} = \gamma^5 \mathbf{v}^{(1)} e^{-2j\phi} \\ \mathbf{u}^{(2)} = \gamma^5 \mathbf{v}^{(2)} e^{-2j\phi} \\ \mathbf{v}^{(1)} = \gamma^5 \mathbf{u}^{(1)} e^{2j\phi} \\ \mathbf{v}^{(2)} = \gamma^5 \mathbf{u}^{(2)} e^{2j\phi} \end{array} \quad (\text{XII-11})$$

On peut définir des courants de DIRAC qui font intervenir la matrice γ^5 de la manière suivante :

$$\mathbf{J}^{\mu 5}(\psi) = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (\text{XII-12})$$

Ces courants se comportent comme un quadrivecteur vis-à-vis de la transformation de LORENTZ. Ils seront désignés par courants axiaux dans la suite de ce document.

On en déduit les relations suivantes pour les courants relatifs aux solutions exponentielles :

$$\begin{aligned}
J^{\mu 5}(\mathbf{u}^{(1)}) &= \bar{\mathbf{u}}^{(1)} \gamma^\mu \gamma^5 \mathbf{u}^{(1)} = \bar{\mathbf{u}}^{(1)} \gamma^\mu \mathbf{v}^{(1)} e^{-2j\phi} = \mathbf{U}_1 \gamma^\mu \mathbf{V}_1 \\
J^{\mu 5}(\mathbf{u}^{(2)}) &= \bar{\mathbf{u}}^{(2)} \gamma^\mu \gamma^5 \mathbf{u}^{(2)} = \bar{\mathbf{u}}^{(2)} \gamma^\mu \mathbf{v}^{(2)} e^{-2j\phi} = \mathbf{U}_2 \gamma^\mu \mathbf{V}_2 \\
J^{\mu 5}(\mathbf{v}^{(1)}) &= \bar{\mathbf{v}}^{(1)} \gamma^\mu \gamma^5 \mathbf{v}^{(1)} = \bar{\mathbf{v}}^{(1)} \gamma^\mu \mathbf{u}^{(1)} e^{2j\phi} = \mathbf{V}_1 \gamma^\mu \mathbf{U}_1 \\
J^{\mu 5}(\mathbf{v}^{(2)}) &= \bar{\mathbf{v}}^{(2)} \gamma^\mu \gamma^5 \mathbf{v}^{(2)} = \bar{\mathbf{v}}^{(2)} \gamma^\mu \mathbf{u}^{(2)} e^{2j\phi} = \mathbf{V}_2 \gamma^\mu \mathbf{U}_2
\end{aligned} \tag{XII-13}$$

Les relations ci-dessus montrent que les courants en γ^5 peuvent être interprétés comme une forme d'interaction entre particule et antiparticule.

L'expression développée des courants de DIRAC en γ^5 peut être obtenue directement à partir des courants de DIRAC ordinaires en utilisant le rôle de la matrice γ^5 qui inverse les deux spineurs qui composent le bispineur ψ dans l'expression (XII-12). On en déduit sans calcul :

$$\begin{aligned}
J_t &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 & J_{t5} &= \psi_0^* \psi_2 + \psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_0 + \psi_3^* \psi_1 \\
J_x &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_0^* \psi_3 & J_{x5} &= \psi_3^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_1^* \psi_0 + \psi_0^* \psi_1 \\
J_y &= j\psi_3^* \psi_0 - j\psi_2^* \psi_1 + j\psi_1^* \psi_2 - j\psi_0^* \psi_3 & J_{y5} &= j\psi_3^* \psi_2 - j\psi_2^* \psi_3 + j\psi_1^* \psi_0 - j\psi_0^* \psi_1 \\
J_z &= \psi_2^* \psi_0 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_0^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_3 & J_{z5} &= \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_0^* \psi_0 - \psi_1^* \psi_1
\end{aligned} \tag{XII-14}$$

Plus généralement, la matrice γ^5 vient compléter harmonieusement l'ensemble des 4 matrices de DIRAC. Cet ensemble possède de nombreuses propriétés qui sont détaillées dans les cours et ouvrages relatifs à ce sujet. Ces propriétés ne sont pas utilisées dans la suite, et n'ont pas été reprises dans ce document.

XIII – Les courants axiaux

Les courants axiaux qui ont été définis au chapitre précédent à l'aide de la matrice γ^5 jouent un rôle important dans la modélisation de l'interaction électrofaible.

$$J^{\mu 5}(\psi) = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (\text{XIII-1})$$

Dans la suite de ce document, les composantes de ce courant seront notées de manière analogue aux courants ordinaires de DIRAC, en ajoutant l'indice 5 à chaque composante :

$$J^{\mu 5} = \begin{pmatrix} J_{t5} \\ J_{x5} \\ J_{y5} \\ J_{z5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi \\ \bar{\psi} \gamma^1 \gamma^5 \psi \\ \bar{\psi} \gamma^2 \gamma^5 \psi \\ \bar{\psi} \gamma^3 \gamma^5 \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0^* \psi_2 + \psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_0 + \psi_3^* \psi_1 \\ \psi_3^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_1^* \psi_0 + \psi_0^* \psi_1 \\ j\psi_3^* \psi_2 - j\psi_2^* \psi_3 + j\psi_1^* \psi_0 - j\psi_0^* \psi_1 \\ \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_0^* \psi_0 - \psi_1^* \psi_1 \end{pmatrix} \quad (\text{XIII-2})$$

I – Invariance des courants axiaux sous la transformation de LORENTZ

Les courants axiaux se transforment comme un quadri-vecteur vis-à-vis de la transformation de LORENTZ.

Soit deux référentiels que nous désignerons par (R) et (R'). Le référentiel (R') est supposé en mouvement de translation à vitesse constante v par rapport au référentiel (R).

Les coordonnées d'espace-temps du référentiel (R') sont reliées aux coordonnées d'espace-temps du référentiel (R) par une transformation de LORENTZ.

Le bi-spineur ψ qui représente l'état de la particule dans le référentiel (R) est représenté dans le référentiel (R') par un autre bi-spineur ψ' .

La difficulté d'une observation directe de cette invariance sur les composantes réside dans l'obtention de la relation qui relie les composantes du bispineur ψ' écrites dans le référentiel (R'), aux composantes du bispineur ψ écrites dans le référentiel (R).

Cette observation directe va être développée dans le cas d'une translation suivant chacun des axes du référentiel. Dans chaque cas, la relation entre ψ' et ψ sera donnée sans démonstration. Davantage de détails peuvent être consultés au chapitre (XXIX) de [ce document](#).

I – 1 Translation suivant Ox

Si les courants axiaux se transforment suivant la transformation de LORENTZ entre les référentiels (R') et (R), ils doivent vérifier, pour une translation suivant Ox :

$$\begin{aligned} J'_{t5} &= \gamma(J_{t5} - \beta J_{x5}) \\ J'_{x5} &= \gamma(J_{x5} - \beta J_{t5}) \\ J'_{y5} &= J_{y5} \\ J'_{z5} &= J_{z5} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (\text{XIII-3})$$

Nous admettons que, pour une translation suivant Ox, les composantes du bispineur se transforment suivant la relation :

$$(\psi') = \begin{pmatrix} \psi'_0 \\ \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma + 2}} \begin{pmatrix} (\gamma + 1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_3 \\ (\gamma + 1)\psi_1 - \beta\gamma\psi_2 \\ -\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2 \\ -\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{XIII-4})$$

On adopte comme point de départ les composantes du courant axial dans le référentiel (R') :

$$\begin{aligned} J'_{t5} &= \psi'^*_0 \psi'_2 + \psi'^*_1 \psi'_3 + \psi'^*_2 \psi'_0 + \psi'^*_3 \psi'_1 \\ J'_{x5} &= \psi'^*_3 \psi'_2 + \psi'^*_2 \psi'_3 + \psi'^*_1 \psi'_0 + \psi'^*_0 \psi'_1 \\ J'_{y5} &= j\psi'^*_3 \psi'_2 - j\psi'^*_2 \psi'_3 + j\psi'^*_1 \psi'_0 - j\psi'^*_0 \psi'_1 \\ J'_{z5} &= \psi'^*_2 \psi'_2 - \psi'^*_3 \psi'_3 + \psi'^*_0 \psi'_0 - \psi'^*_1 \psi'_1 \end{aligned} \quad (\text{XIII-5})$$

Puis on exprime les composantes du bispineur ψ' en fonction des composantes du bispineur ψ (XIII-4).

$$\begin{aligned} J'_{t5} &= \psi'^*_0 \psi'_2 + \psi'^*_1 \psi'_3 + \psi'^*_2 \psi'_0 + \psi'^*_3 \psi'_1 \\ J'_{t5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ \begin{aligned} &((\gamma + 1)\psi_0^* - \beta\gamma\psi_3^*)(-\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2) + ((\gamma + 1)\psi_1^* - \beta\gamma\psi_2^*)(-\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3) \\ &+ (-\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma + 1)\psi_2^*)(\gamma + 1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_3 + (-\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma + 1)\psi_3^*)(\gamma + 1)\psi_1 - \beta\gamma\psi_2 \end{aligned} \right\} \\ J'_{t5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ \begin{aligned} &((\gamma + 1)^2 + \beta^2\gamma^2)(\psi_0^*\psi_2 + \psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_0 + \psi_3^*\psi_1) \\ &- 2\beta\gamma(\gamma + 1)(\psi_3^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_3 + \psi_1^*\psi_0 + \psi_0^*\psi_1) \end{aligned} \right\} = \gamma J_{t5} - \beta\gamma J_{x5} \\ J'_{x5} &= \psi'^*_3 \psi'_2 + \psi'^*_2 \psi'_3 + \psi'^*_1 \psi'_0 + \psi'^*_0 \psi'_1 \\ J'_{x5} &= \left\{ \begin{aligned} &(-\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma + 1)\psi_3^*)(-\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2) + (-\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma + 1)\psi_2^*)(-\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3) + \\ &((\gamma + 1)\psi_1^* - \beta\gamma\psi_2^*)(\gamma + 1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_3 + ((\gamma + 1)\psi_0^* - \beta\gamma\psi_3^*)(\gamma + 1)\psi_1 - \beta\gamma\psi_2 \end{aligned} \right\} \\ J'_{x5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ \begin{aligned} &((\gamma + 1)^2 + \beta^2\gamma^2)(\psi_3^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_3 + \psi_1^*\psi_0 + \psi_0^*\psi_1) \\ &- 2\beta\gamma(\gamma + 1)(\psi_0^*\psi_2 + \psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_0 + \psi_3^*\psi_1) \end{aligned} \right\} = \gamma J_{x5} - \beta\gamma J_{t5} \end{aligned} \quad (\text{XIII-6})$$

$$\begin{aligned}
J'_{y5} &= j\psi_3^* \psi'_2 - j\psi_2^* \psi'_3 + j\psi_1^* \psi'_0 - j\psi_0^* \psi'_1 \\
J'_{y5} &= \frac{j}{2\gamma + 2} \left\{ \begin{aligned} &(-\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma + 1)\psi_3^*)(-\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2) - (-\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma + 1)\psi_2^*)(-\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3) \\ &+ ((\gamma + 1)\psi_1^* - \beta\gamma\psi_2^*)(\gamma + 1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_3 - ((\gamma + 1)\psi_0^* - \beta\gamma\psi_3^*)(\gamma + 1)\psi_1 - \beta\gamma\psi_2 \end{aligned} \right\} \\
J'_{y5} &= \frac{j}{2\gamma + 2} \left\{ ((\gamma + 1)^2 - \beta^2\gamma^2)(\psi_3^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_3 + \psi_1^*\psi_0 - \psi_0^*\psi_1) \right\} = J_{y5} \\
J'_{z5} &= \psi_2^* \psi'_2 - \psi_3^* \psi'_3 + \psi_0^* \psi'_0 - \psi_1^* \psi'_1 \\
J'_{z5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ \begin{aligned} &(-\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma + 1)\psi_2^*)(-\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2) - (-\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma + 1)\psi_3^*)(-\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3) \\ &+ ((\gamma + 1)\psi_0^* - \beta\gamma\psi_3^*)(\gamma + 1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_3 - ((\gamma + 1)\psi_1^* - \beta\gamma\psi_2^*)(\gamma + 1)\psi_1 - \beta\gamma\psi_2 \end{aligned} \right\} \\
J'_{z5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ ((\gamma + 1)^2 - \beta^2\gamma^2)(\psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 + \psi_0^*\psi_0 - \psi_1^*\psi_1) \right\} = J_{z5}
\end{aligned} \tag{XIII-7}$$

I – 2 Translation suivant Oy

Si les courants axiaux se transforment suivant la transformation de LORENTZ entre les référentiels (R') et (R), ils doivent vérifier, pour une translation suivant Oy :

$$\begin{aligned}
J'_{t5} &= \gamma(J_{t5} - \beta J_{y5}) \\
J'_{x5} &= J_{x5} \\
J'_{y5} &= \gamma(J_{y5} - \beta J_{t5}) \\
J'_{z5} &= J_{z5}
\end{aligned} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{XIII-7}$$

Nous admettons que, pour une translation suivant Oy, les composantes du bispineur se transforment suivant la relation :

$$(\psi') = \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma + 2}} \begin{pmatrix} (\gamma + 1)\psi_0 + j\beta\gamma\psi_3 \\ (\gamma + 1)\psi_1 - j\beta\gamma\psi_2 \\ j\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2 \\ -j\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3 \end{pmatrix} \tag{XIII-8}$$

On obtient alors, dans une démarche analogue à la précédente :

$$\begin{aligned}
J'_{t5} &= \psi_0^* \psi'_2 + \psi_1^* \psi'_3 + \psi_2^* \psi'_0 + \psi_3^* \psi'_1 \\
J'_{t5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ \begin{aligned} &((\gamma + 1)\psi_0^* - j\beta\gamma\psi_3^*)(j\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2) + ((\gamma + 1)\psi_1^* + j\beta\gamma\psi_2^*)(-j\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3) \\ &+ (-j\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma + 1)\psi_2^*)(\gamma + 1)\psi_0 + j\beta\gamma\psi_3 + (j\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma + 1)\psi_3^*)(\gamma + 1)\psi_1 - j\beta\gamma\psi_2 \end{aligned} \right\} \\
J'_{t5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ \begin{aligned} &((\gamma + 1)^2 + \beta^2\gamma^2)(\psi_0^*\psi_2 + \psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_0 + \psi_3^*\psi_1) \\ &- 2\beta\gamma(\gamma + 1)(j\psi_3^*\psi_2 - j\psi_2^*\psi_3 + j\psi_1^*\psi_0 - j\psi_0^*\psi_1) \end{aligned} \right\} = \gamma(J_{t5} - \beta J_{y5}) \\
J'_{x5} &= \psi_3^* \psi'_2 + \psi_2^* \psi'_3 + \psi_1^* \psi'_0 + \psi_0^* \psi'_1 \\
J'_{x5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ \begin{aligned} &(j\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma + 1)\psi_3^*)(j\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2) + (-j\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma + 1)\psi_2^*)(-j\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3) \\ &+ ((\gamma + 1)\psi_1^* + j\beta\gamma\psi_2^*)(\gamma + 1)\psi_0 + j\beta\gamma\psi_3 + ((\gamma + 1)\psi_0^* - j\beta\gamma\psi_3^*)(\gamma + 1)\psi_1 - j\beta\gamma\psi_2 \end{aligned} \right\} \\
J'_{x5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ ((\gamma + 1)^2 - \beta^2\gamma^2)(\psi_3^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_3 + \psi_1^*\psi_0 + \psi_0^*\psi_1) \right\} = J_{x5}
\end{aligned}$$

(XIII-9)

$$\begin{aligned}
J'_{y5} &= j\psi_3^* \psi'_2 - j\psi_2^* \psi'_3 + j\psi_1^* \psi'_0 - j\psi_0^* \psi'_1 \\
J'_{y5} &= \frac{j}{2\gamma + 2} \left\{ (j\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma + 1)\psi_3^*) (j\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2) - (-j\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma + 1)\psi_2^*) (-j\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3) \right\} \\
&\quad \left\{ + ((\gamma + 1)\psi_1^* + j\beta\gamma\psi_2^*) ((\gamma + 1)\psi_0 + j\beta\gamma\psi_3) - ((\gamma + 1)\psi_0^* - j\beta\gamma\psi_3^*) ((\gamma + 1)\psi_1 - j\beta\gamma\psi_2) \right\} \\
J'_{y5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ ((\gamma + 1)^2 + \beta^2\gamma^2) (j\psi_3^* \psi'_2 - j\psi_2^* \psi'_3 + j\psi_1^* \psi'_0 - j\psi_0^* \psi'_1) \right\} = \gamma(J_{y5} - \beta J_{t5}) \\
&\quad \left\{ - 2\beta\gamma(\gamma + 1) (\psi_0^* \psi_2 + \psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_0 + \psi_3^* \psi_1) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J'_{z5} &= \psi_2^* \psi'_2 - \psi_3^* \psi'_3 + \psi_0^* \psi'_0 - \psi_1^* \psi'_1 \\
J'_{z5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ (-j\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma + 1)\psi_2^*) (j\beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_2) - (j\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma + 1)\psi_3^*) (-j\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_3) \right\} \\
&\quad \left\{ + ((\gamma + 1)\psi_0^* - j\beta\gamma\psi_3^*) ((\gamma + 1)\psi_0 + j\beta\gamma\psi_3) - ((\gamma + 1)\psi_1^* + j\beta\gamma\psi_2^*) ((\gamma + 1)\psi_1 - j\beta\gamma\psi_2) \right\} \\
J'_{z5} &= \frac{1}{2\gamma + 2} \left\{ ((\gamma + 1)^2 - \beta^2\gamma^2) (\psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_0^* \psi_0 - \psi_1^* \psi_1) \right\} = J_{z5}
\end{aligned}$$

(XIII-10)

I – 3 Translation suivant Oz

Si les courants axiaux se transforment suivant la transformation de LORENTZ entre les référentiels (R') et (R), ils doivent vérifier, pour une translation suivant Oz :

$$\begin{aligned}
J'_{t5} &= \gamma(J_{t5} - \beta J_{z5}) \\
J'_{x5} &= J_{x5} \\
J'_{y5} &= J_{y5} \\
J'_{z5} &= \gamma(J_{z5} - \beta J_{t5})
\end{aligned}
\quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

(XIII-11)

Nous admettons que, pour une translation suivant Oz, les composantes du bispineur se transforment suivant la relation :

$$(\psi') = \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma + 1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_2 \\ (\gamma + 1)\psi_1 + \beta\gamma\psi_3 \\ -\beta\gamma\psi_0 + (\gamma + 1)\psi_2 \\ \beta\gamma\psi_1 + (\gamma + 1)\psi_3 \end{pmatrix}$$

(XIII-12)

On obtient alors dans une démarche analogue aux deux précédentes :

$$\begin{aligned}
J'_{t5} &= \psi_0^* \psi'_2 + \psi_1^* \psi'_3 + \psi_2^* \psi'_0 + \psi_3^* \psi'_1 \\
J'_{t5} &= \frac{1}{2\gamma+2} \left\{ \begin{aligned} &((\gamma+1)\psi_0^* - \beta\gamma\psi_2^*)(-\beta\gamma\psi_0 + (\gamma+1)\psi_2) + ((\gamma+1)\psi_1^* + \beta\gamma\psi_3^*)(\beta\gamma\psi_1 + (\gamma+1)\psi_3) \\ &+ (-\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma+1)\psi_2^*)(\gamma+1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_2) + (\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma+1)\psi_3^*)(\gamma+1)\psi_1 + \beta\gamma\psi_3) \end{aligned} \right\} \\
J'_{t5} &= \frac{1}{2\gamma+2} \left\{ \begin{aligned} &((\gamma+1)^2 + \beta^2\gamma^2)(\psi_0^*\psi_2 + \psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_0 + \psi_3^*\psi_1) \\ &- 2\beta\gamma(\gamma+1)(\psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 + \psi_0^*\psi_0 - \psi_1^*\psi_1) \end{aligned} \right\} = \gamma(J_{t5} - \beta J_{z5}) \\
J'_{x5} &= \psi_3^* \psi'_2 + \psi_2^* \psi'_3 + \psi_1^* \psi'_0 + \psi_0^* \psi'_1 \\
J'_{x5} &= \frac{1}{2\gamma+2} \left\{ \begin{aligned} &(\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma+1)\psi_3^*)(-\beta\gamma\psi_0 + (\gamma+1)\psi_2) + (-\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma+1)\psi_2^*)(\beta\gamma\psi_1 + (\gamma+1)\psi_3) \\ &+ ((\gamma+1)\psi_1^* + \beta\gamma\psi_3^*)(\gamma+1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_2) + ((\gamma+1)\psi_0^* - \beta\gamma\psi_2^*)(\gamma+1)\psi_1 + \beta\gamma\psi_3) \end{aligned} \right\} \\
J'_{x5} &= \frac{1}{2\gamma+2} \left\{ ((\gamma+1)^2 + \beta^2\gamma^2)(\psi_3^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_3 + \psi_1^*\psi_0 + \psi_0^*\psi_1) \right\} = J_{x5}
\end{aligned} \tag{XIII-13}$$

$$\begin{aligned}
J'_{y5} &= j\psi_3^* \psi'_2 - j\psi_2^* \psi'_3 + j\psi_1^* \psi'_0 - j\psi_0^* \psi'_1 \\
J'_{y5} &= \frac{j}{2\gamma+2} \left\{ \begin{aligned} &(\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma+1)\psi_3^*)(-\beta\gamma\psi_0 + (\gamma+1)\psi_2) - (-\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma+1)\psi_2^*)(\beta\gamma\psi_1 + (\gamma+1)\psi_3) \\ &+ ((\gamma+1)\psi_1^* + \beta\gamma\psi_3^*)(\gamma+1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_2) - ((\gamma+1)\psi_0^* - \beta\gamma\psi_2^*)(\gamma+1)\psi_1 + \beta\gamma\psi_3) \end{aligned} \right\} \\
J'_{y5} &= \frac{j}{2\gamma+2} \left\{ ((\gamma+1)^2 - \beta^2\gamma^2)(\psi_3^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_3 + \psi_1^*\psi_0 - \psi_0^*\psi_1) \right\} = J_{y5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J'_{z5} &= \psi_2^* \psi'_2 - \psi_3^* \psi'_3 + \psi_0^* \psi'_0 - \psi_1^* \psi'_1 \\
J'_{z5} &= \frac{1}{2\gamma+2} \left\{ \begin{aligned} &(-\beta\gamma\psi_0^* + (\gamma+1)\psi_2^*)(-\beta\gamma\psi_0 + (\gamma+1)\psi_2) - (\beta\gamma\psi_1^* + (\gamma+1)\psi_3^*)(\beta\gamma\psi_1 + (\gamma+1)\psi_3) \\ &+ ((\gamma+1)\psi_0^* - \beta\gamma\psi_2^*)(\gamma+1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_2) - ((\gamma+1)\psi_1^* + \beta\gamma\psi_3^*)(\gamma+1)\psi_1 + \beta\gamma\psi_3) \end{aligned} \right\} \\
J'_{z5} &= \frac{1}{2\gamma+2} \left\{ \begin{aligned} &((\gamma+1)^2 + \beta^2\gamma^2)(\psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 + \psi_0^*\psi_0 - \psi_1^*\psi_1) \\ &- 2\beta\gamma(\gamma+1)(\psi_0^*\psi_2 + \psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_0 + \psi_3^*\psi_1) \end{aligned} \right\} = \gamma(J_{t5} - \beta J_{z5})
\end{aligned} \tag{XIII-14}$$

II – Différence entre les courants ordinaires et les courants axiaux de DIRAC

Le paragraphe précédent montre que ces deux sortes de courant se transforment de la même manière sous une transformation de LORENTZ.

On pourrait penser qu'ils constituent des quadrivecteurs aux propriétés complètement identiques. Nous allons montrer que ce n'est pas tout à fait le cas.

Considérons une solution exacte à l'équation de DIRAC, sous une forme exponentielle qui utilise l'onde de de BROGLIE :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \text{avec} \quad \phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \quad (\text{XIII-15})$$

Les vitesses v_x , v_y , v_z , sont associées à la vitesse de déplacement de la particule.

Pour une particule qui se déplace à une vitesse opposée, v_x , v_y , v_z changent de signe. Les amplitudes complexes de ψ_2 et ψ_3 changent aussi de signe, alors que les amplitudes complexes de ψ_0 et ψ_1 restent inchangées.

Considérons les effets de ce changement sur les courants de DIRAC ordinaires :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_y &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\ J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \end{aligned} \quad (\text{XIII-16})$$

Dans une approche énergétique, la composante J_t de ce courant est associée à la densité volumique d'énergie totale, tandis que les composantes J_x , J_y , J_z sont associées au flux de la densité volumique d'énergie suivant les axes x , y et z .

Si on inverse la vitesse de propagation de la particule, on s'attend à ce que la densité volumique d'énergie reste identique, tandis que les flux suivant chacun des axes vont être opposés.

Puisque les amplitudes complexes de ψ_2 et ψ_3 changent de signe, c'est effectivement ce qui est observé directement sur les expressions des courants ordinaires (XIII-16) ci-dessus.

Considérons maintenant les effets de ce changement sur les courants axiaux de DIRAC :

$$\begin{aligned} J_{t5} &= \Psi_0^* \Psi_2 + \Psi_1^* \Psi_3 + \Psi_2^* \Psi_0 + \Psi_3^* \Psi_1 \\ J_{x5} &= \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_1^* \Psi_0 + \Psi_0^* \Psi_1 \\ J_{y5} &= j\Psi_3^* \Psi_2 - j\Psi_2^* \Psi_3 + j\Psi_1^* \Psi_0 - j\Psi_0^* \Psi_1 \\ J_{z5} &= \Psi_2^* \Psi_2 - \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_0^* \Psi_0 - \Psi_1^* \Psi_1 \end{aligned} \quad (\text{XIII-17})$$

Il apparait que la composante temporelle change de signe, tandis que les composantes spatiales restent identiques.

Les courants axiaux sont appelés ainsi par analogie avec les pseudo-vecteurs. Ces derniers sont liés à une représentation axiale qui peut être obtenue, entre autre, par un produit vectoriel : si on prend les opposés des deux vecteurs qui sont impliqués dans un produit vectoriel, on ne change pas le produit vectoriel.

Il s'ensuit que les courants axiaux définis à l'aide de la matrice γ^5 ne peuvent pas être considérés, stricto sensu, comme des quadrivecteurs.

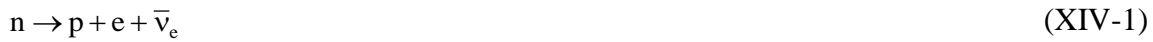
XIV – Approche énergétique de la désintégration

L'objet de ce chapitre est de tenter de proposer un cadre pour une interprétation énergétique de la désintégration.

En première partie, nous avons pu proposer un tel cadre dans le cas d'une interaction qui met en œuvre la rencontre entre deux particules. Le quadrivecteur des courants ordinaires de DIRAC a permis d'établir une certaine cohérence entre les propriétés fondamentales de conservation de l'énergie, et les propriétés de diffusion des particules qui se rencontrent.

Le cas de la désintégration pose un problème sensiblement différent.

Nous nous appuyerons tout au long de cette partie sur l'exemple fondamental de la désintégration du neutron en un proton, un électron et un antineutrino électronique.



Au cours de cette désintégration, le neutron et le proton peuvent être considérés comme immobiles dans le centre de masse de la réaction à cause de leur masse très importante par rapport à celle de l'électron et de l'antineutrino électronique.

Ce n'est donc pas l'énergie cinétique de translation du neutron qui va être impliquée dans la réaction. Ce ne peut être que l'énergie de rotation interne à cette particule.

Se pose alors la question de savoir de quelle manière on peut avoir accès à cette énergie interne en rotation.

Considérons une solution exacte à l'équation de DIRAC, sous une forme exponentielle qui utilise l'onde de de BROGLIE :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \text{avec} \quad \phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \quad (\text{XIV-2})$$

Les vitesses v_x , v_y , v_z , représentent la vitesse de déplacement de la particule. Nous savons que ces vitesses sont associées à la vitesse de groupe, et donc à une vitesse moyenne de déplacement de l'énergie suivant les axes x , y et z . Dans le référentiel de la particule, ces vitesses ont une valeur moyenne qui est nulle, mais une valeur instantanée qui est nécessairement non nulle si on suppose qu'il y a de l'énergie en rotation.

Considérons les courants de DIRAC ordinaires et axiaux relatifs à une telle particule.

$$\begin{aligned}
 J_t &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 & J_{t5} &= \psi_0^* \psi_2 + \psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_0 + \psi_3^* \psi_1 \\
 J_x &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_0^* \psi_3 & J_{x5} &= \psi_3^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_1^* \psi_0 + \psi_0^* \psi_1 \\
 J_y &= j\psi_3^* \psi_0 - j\psi_2^* \psi_1 + j\psi_1^* \psi_2 - j\psi_0^* \psi_3 & J_{y5} &= j\psi_3^* \psi_2 - j\psi_2^* \psi_3 + j\psi_1^* \psi_0 - j\psi_0^* \psi_1 \\
 J_z &= \psi_2^* \psi_0 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_0^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_3 & J_{z5} &= \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_0^* \psi_0 - \psi_1^* \psi_1
 \end{aligned} \tag{XIV-3}$$

Pour la particule (XIV-2) choisie en exemple, nous avons $\psi_1 = 0$, et les courants ci-dessus se réduisent aux expressions :

$$\begin{aligned}
 J_t &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 & J_{t5} &= \psi_0^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_0 \\
 J_x &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_0^* \psi_3 & J_{x5} &= \psi_3^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_3 \\
 J_y &= j\psi_3^* \psi_0 - j\psi_0^* \psi_3 & J_{y5} &= j\psi_3^* \psi_2 - j\psi_2^* \psi_3 \\
 J_z &= \psi_2^* \psi_0 + \psi_0^* \psi_2 & J_{z5} &= \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_0^* \psi_0
 \end{aligned} \tag{XIV-4}$$

Dans une approche énergétique, J_t représente la densité volumique d'énergie totale, tandis que J_z représente la part de cette densité volumique qui évolue vers l'axe des z . Le spin étant porté par l'axe des z , il s'ensuit que la part de la densité volumique d'énergie qui évolue dans le plan xy est donnée par $J_t - J_z$.

Pour savoir comment cette densité volumique relative au plan xy évolue dans l'espace, il nous faut construire un quadrivecteur dont la première composante a pour valeur ($J_t - J_z$).

Au vu des relations (XIV-4) ci-dessus, on fait le constat que dans ce cas particulier, $J_z = J_{z5}$.

Le quadrivecteur dont la première composante a pour valeur ($J_t - J_z$), peut donc être construit par différence des quadrivecteurs ordinaires et axiaux :

$$\tilde{J} - \tilde{J}_5 = \begin{pmatrix} J_t \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} J_{t5} \\ J_{x5} \\ J_{y5} \\ J_{z5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_t - J_{t5} \\ J_x - J_{x5} \\ J_y - J_{y5} \\ J_z - J_{z5} \end{pmatrix} \tag{XIV-5}$$

En utilisant la définition de chacun de ces courants, cette différence s'exprime de la manière suivante :

$$\tilde{J} - \tilde{J}_5 = J^\mu(\psi) - J^{\mu 5}(\psi) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi \tag{XIV-6}$$

On sait que ce courant constitué par différence n'est pas un véritable quadrivecteur à cause du quadrivecteur axial, mais il s'avère qu'il constitue une excellente approche de l'interaction entre deux particules qui n'échangent pas d'énergie cinétique de translation. Il s'agit d'un facteur clé des théories qui s'inscrivent dans le prolongement de la théorie de FERMI.

Nous allons montrer au chapitre suivant qu'il existe une difficulté dans l'utilisation des courants axiaux construits à l'aide de la matrice γ^5 , et qu'ils doivent être utilisés avec prudence dans une approche énergétique.

XV – Conservation locale de l'énergie

En plus de leur propriété d'invariance sous la transformation de LORENTZ, les courants ordinaires de DIRAC vérifient une propriété fondamentale du point de vue énergétique, à savoir l'équation locale de conservation de l'énergie.

Cette équation résulte du postulat fondamental de toute approche énergétique : l'énergie ne peut être ni créée, ni détruite. Il en résulte que dans un laps de temps donné, si la quantité d'énergie contenue dans un certain volume a varié, c'est que la variation a traversé les parois de ce volume.

Cette propriété est exprimée mathématiquement par une divergence nulle :

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial J_t}{\partial x_t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{XV-1})$$

Nous proposons d'illustrer cette propriété dans deux cas particuliers représentatifs d'une solution exacte à l'équation de DIRAC.

I – Conservation locale de l'énergie pour les courants ordinaires de DIRAC

I – 1 Solution exponentielle

Nous considérons dans ce paragraphe une solution exponentielle exprimée à l'aide de la phase de de BROGLIE.

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \phi &= \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (\text{XV-2})$$

Nous calculons ensuite les courants de DIRAC ordinaires pour cette solution :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_t &= \frac{1}{2} \left\{ (\gamma+1) + 0 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{v_x^2}{c^2} + \frac{v_y^2}{c^2} + \frac{v_z^2}{c^2} \right) \right\} = \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\{ (\gamma^2 + 2\gamma + 1) + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right\} = \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\
J_x &= \frac{\gamma}{2} \frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{\gamma}{2} \frac{v_x + jv_y}{c} = \gamma \frac{v_x}{c} \\
J_y &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\
J_y &= j \left(\frac{\gamma}{2} \frac{v_x - jv_y}{c} - \frac{\gamma}{2} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \gamma \frac{v_y}{c} \\
J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \\
J_z &= \gamma \frac{v_z}{c}
\end{aligned} \tag{XV-3}$$

Les fonctions de x , y , z et t disparaissent dans les courants de DIRAC ordinaires, et la divergence est donc nulle de manière triviale.

Comme il a été indiqué en première partie, les courants relatifs aux solutions exponentielles masquent les effets de l'énergie réactive qui entoure la particule. Cela se traduit par une divergence nulle automatiquement vérifiée. Il n'en est pas de même pour des solutions sinusoïdales dont les courants sont représentatifs de cette énergie réactive.

I – 2 Solution sinusoïdale

Nous adoptons la solution sinusoïdale non normalisée suivante :

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \cos \left(\gamma \omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \right) - j\gamma \sin \left(\gamma \omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \right) \\
\Psi_1 &= 0 \\
\Psi_2 &= -j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \left(\gamma \omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \right) \\
\Psi_3 &= \gamma \frac{v_y}{c} \sin \left(\gamma \omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \right) - j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \left(\gamma \omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \right)
\end{aligned} \tag{XV-4}$$

Avec cette solution, on obtient les courants de DIRAC ordinaires suivants, dans lesquels la phase de de BROGLIE a été omise :

$$\begin{aligned}
J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\
J_t &= \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 + \gamma^2 \sin^2 \frac{v^2}{c^2} \\
J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\
J_x &= \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin + j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right) (\cos - j\gamma \sin) + (\cos + j\gamma \sin) \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin - j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right) \\
J_x &= 2 \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma^2 \frac{v_x}{c} \sin^2 \right)
\end{aligned} \tag{XV-5}$$

$$\begin{aligned}
J_y &= j\Psi_3^*\Psi_0 - j\Psi_2^*\Psi_1 + j\Psi_1^*\Psi_2 - j\Psi_0^*\Psi_3 \\
J_y &= j\left\{\left(\gamma\frac{v_y}{c}\sin + j\gamma\frac{v_x}{c}\sin\right)(\cos - j\gamma\sin) - (\cos + j\gamma\sin)\left(\gamma\frac{v_y}{c}\sin - j\gamma\frac{v_x}{c}\sin\right)\right\} \\
J_y &= 2\left(-\gamma\frac{v_x}{c}\sin\cos + \gamma^2\frac{v_y}{c}\sin^2\right) \tag{XV-6} \\
J_z &= \Psi_2^*\Psi_0 - \Psi_3^*\Psi_1 + \Psi_0^*\Psi_2 - \Psi_1^*\Psi_3 \\
J_z &= \left(j\gamma\frac{v_z}{c}\sin\right)(\cos - j\gamma\sin) + (\cos + j\gamma\sin)\left(-j\gamma\frac{v_z}{c}\sin\right) \\
J_z &= 2\gamma^2\frac{v_z}{c}\sin^2
\end{aligned}$$

Il apparaît que ces courants dépendent explicitement des variables de temps et d'espace à travers le paramètre des fonctions sinusoïdales :

$$\phi = \gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right) \tag{XV-7}$$

L'équation de conservation locale de l'énergie utilise l'expression de chacune des dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_t}{\partial x_t} &= \frac{\partial\left(\cos^2\phi + \gamma^2\sin^2\phi + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\sin^2\phi\right)}{\partial(ct)} = 2\frac{\gamma\omega_0}{c}\sin\cos\left(-1 + \gamma^2 + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) = 2\frac{\gamma\omega_0}{c}\sin\cos\left(2\gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) \\
\frac{\partial J_x}{\partial x} &= \partial\frac{2\left(\gamma\frac{v_y}{c}\sin\cos + \gamma^2\frac{v_x}{c}\sin^2\right)}{\partial x} = -\gamma\omega_0\frac{v_x}{c^2}\left(2\gamma\frac{v_y}{c}\cos + 4\gamma^2\frac{v_x}{c}\sin\cos\right) \\
\frac{\partial J_y}{\partial y} &= \partial\frac{2\left(-\gamma\frac{v_x}{c}\sin\cos + \gamma^2\frac{v_y}{c}\sin^2\right)}{\partial y} = -\gamma\omega_0\frac{v_y}{c^2}\left(-2\gamma\frac{v_x}{c}\cos + 4\gamma^2\frac{v_y}{c}\sin\cos\right) \\
\frac{\partial J_z}{\partial z} &= \partial\frac{2\left(\gamma^2\frac{v_z}{c}\sin^2\right)}{\partial z} = -\gamma\omega_0\frac{v_z}{c^2}\left(4\gamma^2\frac{v_z}{c}\sin\cos\right)
\end{aligned} \tag{XV-8}$$

La vérification s'obtient en effectuant la somme des 4 termes calculés ci-dessus :

$$\frac{\partial J_t}{\partial x_t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \frac{\gamma \omega_0}{c} \sin \cos \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) - \gamma \omega_0 \frac{v_x}{c^2} \left(2\gamma \frac{v_y}{c} \cos + 4\gamma^2 \frac{v_x}{c} \sin \cos \right) \\ - \gamma \omega_0 \frac{v_y}{c^2} \left(-2\gamma \frac{v_x}{c} \cos + 4\gamma^2 \frac{v_y}{c} \sin \cos \right) - \gamma \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \left(4\gamma^2 \frac{v_z}{c} \sin \cos \right) \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial J_t}{\partial x_t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 4 \frac{\gamma \omega_0}{c} \sin \cos \left\{ \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) - \left(\gamma^2 \frac{v_x^2}{c^2} \right) - \left(\gamma^2 \frac{v_y^2}{c^2} \right) - \left(\gamma^2 \frac{v_z^2}{c^2} \right) \right\} = 0$$

(XV-9)

Les deux vérifications qui ont été effectuées n'apportent rien de nouveau par rapport à une propriété qui est démontrée de manière très générale.

Elles vont seulement servir de support pour une comparaison avec les mêmes vérifications relatives aux courants axiaux de DIRAC.

II – Conservation locale de l'énergie pour les courants axiaux de DIRAC

II – 1 Solution exponentielle

Nous utilisons la même solution (XV-2) que celle du paragraphe précédent.

$$J_{t5} = \psi_0^* \psi_2 + \psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_0 + \psi_3^* \psi_1$$

$$J_{t5} = \gamma \frac{v_z}{c}$$

$$J_{x5} = \psi_3^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_1^* \psi_0 + \psi_0^* \psi_1$$

$$J_{x5} = \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_x v_z}{c^2}$$

$$J_{y5} = j\psi_3^* \psi_2 - j\psi_2^* \psi_3 + j\psi_1^* \psi_0 - j\psi_0^* \psi_1$$

$$J_{y5} = j \left\{ \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \right\} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_y v_z}{c^2}$$

$$J_{z5} = \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_0^* \psi_0 - \psi_1^* \psi_1$$

$$J_{z5} = \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{2(\gamma+1)c^2} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{(\gamma+1)}{2} = 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_z v_z}{c^2}$$

(XV-10)

Comme les courants ordinaires, les courants axiaux ne dépendent pas des variables temporelles et spatiales. On aboutit à une conclusion identique, à savoir que l'équation de conservation locale de l'énergie est automatiquement vérifiée. Il serait cependant illusoire de penser qu'il s'agit d'une propriété générale des courants axiaux, comme cela va être montré dans le prochain paragraphe.

II – 2 Solution sinusoïdale

Nous adoptons la même solution sinusoïdale (XV-4) que la précédente.

On en déduit l'expression des courants axiaux suivants :

$$\begin{aligned}
J_{t5} &= \Psi_0^* \Psi_2 + \Psi_1^* \Psi_3 + \Psi_2^* \Psi_0 + \Psi_3^* \Psi_1 \\
J_{t5} &= (\cos + j\gamma \sin) \left(-j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \right) + \left(j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \right) (\cos - j\gamma \sin) = 2\gamma^2 \frac{v_z}{c} \sin^2 \\
J_{x5} &= \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_1^* \Psi_0 + \Psi_0^* \Psi_1 \\
J_{x5} &= \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin + j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right) \left(-j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \right) + \left(j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \right) \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin - j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right) = 2\gamma^2 \frac{v_x v_z}{c^2} \sin^2 \\
J_{y5} &= j\Psi_3^* \Psi_2 - j\Psi_2^* \Psi_3 + j\Psi_1^* \Psi_0 - j\Psi_0^* \Psi_1 \\
J_{y5} &= j \left[\left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin + j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right) \left(-j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \right) - \left(j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \right) \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin - j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right) \right] = 2\gamma^2 \frac{v_y v_z}{c^2} \sin^2 \\
J_{z5} &= \Psi_2^* \Psi_2 - \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_0^* \Psi_0 - \Psi_1^* \Psi_1 \\
J_{z5} &= \left(\gamma \frac{v_z}{c} \sin \right)^2 - \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin - j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right) \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin + j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right) + (\cos - j\gamma \sin)(\cos + j\gamma \sin) \\
J_{z5} &= \left(\gamma \frac{v_z}{c} \sin \right)^2 - \left(\gamma \frac{v_x}{c} \sin \right)^2 - \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin \right)^2 + \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 = \cos^2 + \gamma^2 \left(1 + \frac{v_z^2 - v_x^2 - v_y^2}{c^2} \right) \sin^2
\end{aligned} \tag{XV-11}$$

La dépendance spatiale et temporelle de ces expressions se trouve dans l'onde de de BROGLIE associée à chaque fonction sinusoidale :

$$\phi = \gamma \omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \tag{XV-12}$$

On en déduit les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{t5}}{\partial x_t} &= \frac{\partial \left(2\gamma^2 \frac{v_z}{c} \sin^2 \right)}{\partial (ct)} = 4 \frac{\gamma \omega_0}{c} \gamma^2 \frac{v_z}{c} \sin \cos = 4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \sin \cos \\
\frac{\partial J_{x5}}{\partial x} &= \frac{\partial \left(2\gamma^2 \frac{v_x v_z}{c^2} \sin^2 \right)}{\partial x} = -4\gamma \omega_0 \frac{v_x}{c^2} \left(\gamma^2 \frac{v_x v_z}{c^2} \right) \sin \cos = -4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \frac{v_x}{c^2} \sin \cos \\
\frac{\partial J_{y5}}{\partial y} &= \frac{\partial \left(2\gamma^2 \frac{v_y v_z}{c^2} \sin^2 \right)}{\partial y} = -4\gamma \omega_0 \frac{v_y}{c^2} \left(\gamma^2 \frac{v_y v_z}{c^2} \right) \sin \cos = -4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \frac{v_y}{c^2} \sin \cos \\
\frac{\partial J_{z5}}{\partial z} &= \frac{\partial \left(\cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left(1 + \frac{v_z^2 - v_x^2 - v_y^2}{c^2} \right) \right)}{\partial z} = -2\gamma \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \left(-1 + \gamma^2 + \gamma^2 \frac{v_z^2 - v_x^2 - v_y^2}{c^2} \right) \sin \cos \\
\frac{\partial J_{z5}}{\partial z} &= -2\gamma \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \left(\gamma^2 \frac{v_z^2}{c^2} + \gamma^2 \frac{v_z^2 - v_x^2 - v_y^2}{c^2} \right) \sin \cos = -4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \frac{v_z}{c^2} \sin \cos
\end{aligned} \tag{XV-13}$$

La vérification s'effectue en reprenant les termes ci-dessus :

$$\frac{\partial J_{t5}}{\partial x_t} + \frac{\partial J_{x5}}{\partial x} + \frac{\partial J_{y5}}{\partial y} + \frac{\partial J_{z5}}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} \left(4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \sin \cos \right) + \left(-4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \frac{v_x^2}{c^2} \sin \cos \right) \\ + \left(-4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \frac{v_y^2}{c^2} \sin \cos \right) - 4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \frac{v_z^2}{c^2} \sin \cos \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial J_{t5}}{\partial x_t} + \frac{\partial J_{x5}}{\partial x} + \frac{\partial J_{y5}}{\partial y} + \frac{\partial J_{z5}}{\partial z} = 4\gamma^3 \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \sin \cos \left\{ 1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2} \right\} = 4\gamma \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \sin \cos$$

(XV-14)

Il apparaît que l'équation locale de conservation de l'énergie n'est pas vérifiée par les courants axiaux construits à l'aide de la matrice γ^5 .

On peut montrer que la divergence des courants axiaux peut s'exprimer en fonction d'un pseudo-scalaire invariant sous la transformation de LORENTZ (la constante dépend de la normalisation du bispineur ψ):

$$\frac{\partial J^{\mu 5}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial J_{t5}}{\partial x_t} + \frac{\partial J_{x5}}{\partial x} + \frac{\partial J_{y5}}{\partial y} + \frac{\partial J_{z5}}{\partial z} = 2j \frac{\hbar \omega_0}{c^2} (\overline{\psi} \gamma^5 \psi)$$

(XV-15)

Sa démonstration n'est pas reproduite car cette propriété n'est pas utilisée par la suite.

On peut supposer que cette non conservation locale de l'énergie va engendrer des difficultés dans toute théorie construite sur la base des courants axiaux de DIRAC. On sait par exemple que les théories qui reposent sur l'approche de FERMI divergent dans certaines conditions et qu'elles ne sont pas renormalisables. D'un point de vue énergétique, il s'agit d'une propriété incontournable pour construire une théorie cohérente.

On peut alors se demander comment il serait possible de contourner cette difficulté. Quelques pistes de réflexion vont être développées dans la suite de ce document.

XVI – Le tenseur impulsion-énergie

Les améliorations successives de la théorie de FERMI de la désintégration reposent sur la remarquable [publication de PAULI](#) concernant les invariants construits à partir des bispineurs et des matrices de DIRAC.

Ces invariants ne font intervenir que les bispineurs et leurs adjoints.

La piste de réflexion qui est suggérée dans ce document consiste à considérer les invariants qui dépendent des dérivées de ces bispineurs et de leurs adjoints. Parmi ces invariants, le tenseur impulsion-énergie semble jouer un rôle fondamental, car il vérifie par définition l'équation locale de conservation de l'énergie.

Nous allons utiliser la version de ce tenseur détaillée au chapitre XVII de [ce document](#).

$$T^{\mu\nu} = j\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} = j\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi \quad (\text{XVI-1})$$

Il s'agit d'une version non symétrique, et nous savons que chaque vecteur colonne de ce tenseur vérifie l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\text{XVI-2})$$

Cette relation n'est pas valable pour les vecteurs lignes, c'est-à-dire si on inverse les indices μ et ν au numérateur de (XVI-2), à cause de la définition (XVI-1) qui n'est pas symétrique en μ et ν .

I – Expression du tenseur impulsion-énergie pour une solution exponentielle

Nous adoptons une solution exponentielle normalisée et décrite à l'aide d'une phase de de BROGLIE :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \text{avec} \quad \phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \quad (\text{XVI-3})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Les calculs de chacun des termes du tenseur impulsion-énergie viennent comme suit :

Première ligne du tenseur $T^{0\nu}$:

$$\begin{aligned} T^{00} &= j\hbar c \left(\Psi_0^* \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_t} + \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_t} + \Psi_2^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_t} + \Psi_3^* \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_t} \right) \\ T^{00} &= \hbar\gamma\omega_0 \left(\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\gamma^2}{2(\gamma+1)} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2} \right) \right) = \frac{\hbar\gamma\omega_0}{2(\gamma+1)} \left((\gamma+1)^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = \hbar\omega_0\gamma^2 \\ T^{01} &= -j\hbar c \left(\Psi_0^* \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \Psi_2^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \Psi_3^* \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \right) \\ T^{01} &= \hbar c\gamma\omega_0 \frac{v_x}{c^2} \left(\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\gamma^2}{2(\gamma+1)} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2} \right) \right) = \hbar\omega_0\gamma^2 \frac{v_x}{c} \\ T^{02} &= -j\hbar c \left(\Psi_0^* \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} + \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \Psi_2^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \Psi_3^* \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \right) \\ T^{02} &= \hbar c\gamma\omega_0 \frac{v_y}{c^2} \left(\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\gamma^2}{2(\gamma+1)} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2} \right) \right) = \hbar\omega_0\gamma^2 \frac{v_y}{c} \\ T^{03} &= -j\hbar c \left(\Psi_0^* \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} + \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + \Psi_2^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \Psi_3^* \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right) \\ T^{03} &= \hbar c\gamma\omega_0 \frac{v_z}{c^2} \left(\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\gamma^2}{2(\gamma+1)} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2} \right) \right) = \hbar\omega_0\gamma^2 \frac{v_z}{c} \end{aligned} \quad (\text{XVI-4})$$

Deuxième ligne du tenseur $T^{1\nu}$:

$$\begin{aligned}
T^{10} &= j\hbar c \left(\psi_3^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} \right) \\
T^{10} &= \hbar \gamma \omega_0 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_x}{c} \\
T^{11} &= -j\hbar c \left(\psi_3^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right) \\
T^{11} &= \hbar c \gamma \omega_0 \frac{v_x}{c^2} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_x v_x}{c^2} \\
T^{12} &= -j\hbar c \left(\psi_3^* \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) \\
T^{12} &= \hbar c \gamma \omega_0 \frac{v_y}{c^2} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_x v_y}{c^2} \\
T^{13} &= -j\hbar c \left(\psi_3^* \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) \\
T^{13} &= \hbar c \gamma \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_x v_z}{c^2}
\end{aligned} \tag{XVI-5}$$

Troisième ligne du tenseur T^{2v} :

$$\begin{aligned}
T^{20} &= \hbar c \left(-\psi_3^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} \right) \\
T^{20} &= -j\hbar \gamma \omega_0 \frac{\gamma}{2} \left(-\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_y}{c} \\
T^{21} &= -\hbar c \left(-\psi_3^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right) \\
T^{21} &= j\hbar c \gamma \omega_0 \frac{\gamma}{2} \frac{v_x}{c^2} \left(-\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_x v_y}{c^2} \\
T^{22} &= -\hbar c \left(-\psi_3^* \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) \\
T^{22} &= j\hbar c \gamma \omega_0 \frac{\gamma}{2} \frac{v_y}{c^2} \left(-\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_y v_y}{c^2} \\
T^{23} &= -\hbar c \left(-\psi_3^* \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) \\
T^{23} &= j\hbar c \gamma \omega_0 \frac{\gamma}{2} \frac{v_z}{c^2} \left(-\frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_z v_y}{c^2}
\end{aligned} \tag{XVI-6}$$

Quatrième ligne du tenseur T^{3v} :

$$\begin{aligned}
T^{30} &= j\hbar c \left(\psi_2^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} - \psi_3^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} \right) \\
T^{30} &= \hbar \omega_0 \gamma \left(\gamma \frac{v_z}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma^2 \frac{v_z}{c} \\
T^{31} &= -j\hbar c \left(\psi_2^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \psi_3^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right) \\
T^{31} &= \hbar c \omega_0 \frac{v_x}{c^2} \left(\gamma \frac{v_z}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma \frac{v_z v_x}{c^2} \\
T^{32} &= -j\hbar c \left(\psi_2^* \frac{\partial \psi_0}{\partial y} - \psi_3^* \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) \\
T^{32} &= \hbar c \omega_0 \frac{v_y}{c^2} \left(\gamma \frac{v_z}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma \frac{v_z v_y}{c^2} \\
T^{33} &= -j\hbar c \left(\psi_2^* \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \psi_3^* \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \psi_0^* \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) \\
T^{33} &= \hbar c \omega_0 \frac{v_z}{c^2} \left(\gamma \frac{v_z}{c} \right) = \hbar \omega_0 \gamma \frac{v_z v_z}{c^2}
\end{aligned} \tag{XVI-7}$$

En résumé, le tenseur impulsion-énergie de DIRAC, pour la solution exponentielle (XVI-3) ci-dessus, se présente sous la forme :

$$T^{\mu\nu} = \frac{\gamma^2 \hbar \omega_0}{c^2} \begin{pmatrix} c^2 & cv_x & cv_y & cv_z \\ cv_x & v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ cv_y & v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ cv_z & v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix} \tag{XVI-8}$$

Ce tenseur est symétrique pour une solution exponentielle. Il est l'analogie parfaite du tenseur impulsion-énergie d'une particule ponctuelle en relativité restreinte.

II – Relation entre le tenseur impulsion-énergie et le quadrivecteur courants ordinaires de DIRAC

Pour la solution exponentielle (XVI-3), le quadrivecteur des courants ordinaires de DIRAC a été calculé au chapitre XIV.

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} J_t \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \tag{XVI-9}$$

A une constante multiplicative près, il correspond à la première colonne du tenseur impulsion-énergie :

$$\mathbf{T}^{\mu 0} = \gamma \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = \gamma E_0 \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} E_0 &= \hbar \omega_0 = m_0 c^2 \\ E &= \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2 \end{aligned} \quad (\text{XVI-10})$$

La constante multiplicative est égale à l'énergie totale de la particule libre. On a donc la relation :

$$\mathbf{J}^\mu = \frac{\mathbf{T}^{\mu 0}}{E} \quad (\text{XVI-11})$$

III – Comparaison entre le tenseur impulsion-énergie et le quadrivecteur courants axiaux de DIRAC

Pour la solution exponentielle (XVI-3), le quadrivecteur des courants axiaux de DIRAC a été calculé au chapitre XIV.

$$\tilde{\mathbf{J}}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{5t} \\ \mathbf{J}_{5x} \\ \mathbf{J}_{5y} \\ \mathbf{J}_{5z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_y v_z}{c^2} \\ 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{XVI-12})$$

Dans le tenseur impulsion-énergie, c'est la troisième ligne ou troisième colonne qui porte les échanges d'énergie relatifs à l'axe des z.

$$\mathbf{T}^{\mu 3} = \gamma \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \gamma \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \gamma \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{XVI-13})$$

Les termes \mathbf{T}^{03} et \mathbf{J}_{5t} sont identiques à une constante multiplicative près, ce qui suggère que la densité volumique d'énergie totale portée par ces vecteurs est analogue. Mais elle n'est pas répartie de la même manière dans le tenseur impulsion-énergie et dans le vecteur des courants axiaux.

La répartition du tenseur impulsion-énergie est la seule qui respecte l'équation de conservation locale de l'énergie :

$$\frac{\partial T^{\mu 3}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (\text{XVI-14})$$

Au chapitre XIII, nous avons interprété l'énergie de rotation dans le plan xy comme portée par la différence entre le quadrivecteur des courants ordinaires et le quadrivecteur des courants axiaux :

$$\tilde{J}_{\text{rot}} = \tilde{J} - \tilde{J}_5 = \begin{pmatrix} J_t \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} J_{5t} \\ J_{5x} \\ J_{5y} \\ J_{5z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_t - J_{5t} \\ J_x - J_{5x} \\ J_y - J_{5y} \\ J_z - J_{5z} \end{pmatrix} \quad (\text{XVI-15})$$

Ce quadrivecteur formé par différence ne respecte pas l'équation de conservation locale de l'énergie à cause des courants axiaux construits à l'aide de la matrice γ^5 .

Les éléments présentés ci-dessus suggèrent de remplacer cette différence par une différence entre les colonnes 0 et 3 du tenseur impulsion-énergie :

$$J_{\text{rot}}^{\mu} = \frac{1}{E} (T^{\mu 0} - T^{\mu 3}) \quad (\text{XVI-16})$$

L'équation locale de conservation de l'énergie pour ce vecteur s'écrit :

$$\frac{\partial J_{\text{rot}}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial T^{\mu 3}}{\partial x^{\mu}} \right) = 0 \quad (\text{XVI-17})$$

Elle est vérifiée car chaque divergence à l'intérieur de la parenthèse est nulle, par construction du tenseur impulsion-énergie.

IV – Éléments de vérification de l'équation locale de conservation de l'énergie

L'énergie réactive apparaît dans le tenseur impulsion-énergie pour les solutions purement sinusoïdales.

Nous souhaitons vérifier dans ce paragraphe que cette énergie réactive obéit à la relation locale de conservation de l'énergie. Il s'agit d'une propriété fondamentale de toute approche énergétique des phénomènes quantiques.

Nous considérons pour cela une solution purement sinusoïdale, qui n'est pas normalisée car cela n'influe pas sur la propriété étudiée.

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \cos\phi - j\gamma \sin\phi \\
\Psi_1 &= 0 \\
\Psi_2 &= -j\gamma \frac{v_z}{c} \sin\phi \\
\Psi_3 &= \gamma \frac{v_y}{c} \sin\phi - j\gamma \frac{v_x}{c} \sin\phi
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
\phi &= \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
\tag{XVI-18}$$

Le calcul du tenseur impulsion-énergie est détaillé au chapitre XVII de [ce document](#).

Si on ne retient que sa partie réactive, qui est aussi dans ce cas particulier sa partie imaginaire, ce tenseur a l'expression suivante :

$$\mathbf{T}_{\text{react}}^{\mu\nu} = j\hbar\omega_0\gamma \begin{pmatrix} \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{S} & \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{v_x}{c}\mathbf{S} & \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{v_y}{c}\mathbf{S} & \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{v_z}{c}\mathbf{S} \\ \left(\gamma \frac{v_y}{c}\mathbf{C} + \gamma^2 \frac{v_x}{c}\mathbf{S}\right) & \left(\gamma \frac{v_y}{c}\mathbf{C} + \gamma^2 \frac{v_x}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_x}{c} & \left(\gamma \frac{v_y}{c}\mathbf{C} + \gamma^2 \frac{v_x}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_y}{c} & \left(\gamma \frac{v_y}{c}\mathbf{C} + \gamma^2 \frac{v_x}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_z}{c} \\ \left(-\gamma \frac{v_x}{c}\mathbf{C} + \gamma^2 \frac{v_y}{c}\mathbf{S}\right) & \left(-\gamma \frac{v_x}{c}\mathbf{C} + \gamma^2 \frac{v_y}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_x}{c} & \left(-\gamma \frac{v_x}{c}\mathbf{C} + \gamma^2 \frac{v_y}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_y}{c} & \left(-\gamma \frac{v_x}{c}\mathbf{C} + \gamma^2 \frac{v_y}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_z}{c} \\ \left(\gamma^2 \frac{v_z}{c}\mathbf{S}\right) & \left(\gamma^2 \frac{v_z}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_x}{c} & \left(\gamma^2 \frac{v_z}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_y}{c} & \left(\gamma^2 \frac{v_z}{c}\mathbf{S}\right)\frac{v_z}{c} \end{pmatrix}
\tag{XVI-19}$$

Nous utilisons la notation simplifiée suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \sin(2\phi) \\
\mathbf{C} &= \cos(2\phi)
\end{aligned}
\tag{XVI-20}$$

Pour une particule libre, la dépendance temporelle est spatiale de l'énergie réactive se situe dans la phase de de BROGLIE :

$$\phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right)
\tag{XVI-21}$$

On en déduit les dérivées partielles relatives à la première colonne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{00}}{\partial x_t} &= 2\gamma\omega_0 \frac{1}{c} \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{C} \\
\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{10}}{\partial x} &= -2\gamma\omega_0 \frac{v_x}{c^2} \left(-\gamma \frac{v_y}{c} \mathbf{S} + \gamma^2 \frac{v_x}{c} \mathbf{C} \right) \\
\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{20}}{\partial y} &= -2\gamma\omega_0 \frac{v_y}{c^2} \left(\gamma \frac{v_x}{c} \mathbf{S} + \gamma^2 \frac{v_y}{c} \mathbf{C} \right) \\
\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{30}}{\partial z} &= -2\gamma\omega_0 \frac{v_z}{c^2} \left(\gamma^2 \frac{v_z}{c} \mathbf{C} \right)
\end{aligned}
\tag{XVI-22}$$

L'équation de conservation de l'énergie se vérifie en effectuant la somme :

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{00}}{\partial x_t} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{10}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{20}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{30}}{\partial z} = 2\gamma\omega_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{C} - \frac{v_x}{c^2} \left(-\gamma \frac{v_y}{c} \mathbf{S} + \gamma^2 \frac{v_x}{c} \mathbf{C} \right) \\ - \frac{v_y}{c^2} \left(\gamma \frac{v_x}{c} \mathbf{S} + \gamma^2 \frac{v_y}{c} \mathbf{C} \right) - \frac{v_z}{c^2} \left(\gamma^2 \frac{v_z}{c} \mathbf{C} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{XVI-23})$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{00}}{\partial x_t} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{10}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{20}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{react}}^{30}}{\partial z} = 2 \frac{\gamma\omega_0}{c} \mathbf{C} \left\{ \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) - \left(\gamma^2 \frac{v_x^2}{c^2} \right) - \left(\gamma^2 \frac{v_y^2}{c^2} \right) - \left(\gamma^2 \frac{v_z^2}{c^2} \right) \right\} = 0$$

Le calcul est analogue pour chaque colonne du tenseur d'énergie réactive.

On fait le constat que l'énergie réactive obéit correctement à l'équation locale de conservation de l'énergie.

XVII – Quelques propriétés des vecteurs axiaux.

Notre point de départ est une solution exacte des équations de DIRAC qui utilise la phase de de BROGLIE. On utilisera cet exemple comme support de réflexion tout au long de ce chapitre.

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \text{avec} \quad \phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \quad (\text{XVII-1})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Des chapitres précédents, nous avons extraits deux types de vecteurs axiaux :

- Le vecteur axial construit à l'aide de la matrice γ^5 :

$$\mathbf{J}_{\mu 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{t5} \\ \mathbf{J}_{x5} \\ \mathbf{J}_{y5} \\ \mathbf{J}_{z5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_y v_z}{c^2} \\ 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-2})$$

- Le vecteur axial issu du tenseur énergie-impulsion :

$$\mathbf{T}^{\mu 3} = \gamma \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \gamma \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \gamma \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} = E \frac{v_z}{c} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = \frac{v_z}{c} \mathbf{T}^{\mu 0} = E \frac{v_z}{c} \mathbf{J}^\mu \quad (\text{XVII-3})$$

Nous proposons d'examiner quelques-unes des propriétés de ces deux vecteurs axiaux afin d'évaluer leur intérêt dans une approche énergétique.

I - Le vecteur axial construit à l'aide de la matrice γ^5

I.1 image par une transformation de LORENTZ

Il a été montré dans le chapitre XIII que ce vecteur se transforme comme un quadrivecteur.

I.2 parité

Par définition, appliquer un opérateur de parité à un objet mathématique revient à examiner cet objet lorsqu'on a remplacé les coordonnées d'espace par des coordonnées opposées, ce qu'on peut formaliser de la manière suivante :

Soit la transformation :

$$\hat{P}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-4})$$

Alors, l'opérateur de parité appliqué à un vecteur ayant une composante temporelle, et donc un vecteur à 4 dimensions, donne le résultat suivant :

$$\hat{P}: \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-5})$$

Plus généralement, cet opérateur peut être appliqué à un objet $f(x,y,z,t)$ des coordonnées d'espace et de temps, ce qu'on peut noter :

$$\hat{P}(f(t, x, y, z)) = f(t, -x, -y, -z) \quad (\text{XVII-6})$$

Cet opérateur possède des propriétés largement présentées dans les cours et documents qui lui sont relatifs : en particulier, il est unitaire et hermitien. Ces propriétés ne sont pas développées dans ce document.

Par dérivation temporelle (donc sans changement de signe), on en déduit qu'il transforme les vitesses de la manière suivante :

$$\hat{P}: \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-7})$$

Cette propriété peut être utilisée pour déterminer comment se transforme un bispineur de DIRAC dans une opération de parité. Considérons par exemple un bispineur qui représente une particule décrite à l'aide de l'onde de BROGLIE

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \text{avec} \quad \phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \quad (\text{XVII-8})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Après avoir remarqué que la phase de de BROGLIE est invariante sous l'opérateur de parité (car à la fois la position et la vitesse changent de signe), l'application de cette transformation fournit le résultat suivant :

$$\begin{pmatrix} \Psi'_0 \\ \Psi'_1 \\ \Psi'_2 \\ \Psi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ -\Psi_2 \\ -\Psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-9})$$

On en déduit la forme de l'opérateur de parité, lorsqu'il est appliqué à un bispineur de DIRAC :

$$\begin{pmatrix} \Psi'_0 \\ \Psi'_1 \\ \Psi'_2 \\ \Psi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ -\Psi_2 \\ -\Psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-10})$$

Suite à ces généralités, on peut examiner plus en détail le comportement des vecteurs J_μ et $J_{\mu 5}$ lorsqu'on leur applique l'opérateur de parité:

$$\hat{P}(J_\mu) = \hat{P} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \frac{v_x}{c} \\ -\gamma \frac{v_y}{c} \\ -\gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-11})$$

Les coordonnées spatiales ont changé de signe, et le vecteur J_μ respecte donc l'opération de parité.

$$\hat{P}(J_{\mu 5}) = \begin{pmatrix} -\gamma \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_y v_z}{c^2} \\ 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-12})$$

On fait le constat que c 'est la coordonnée temporelle qui a changé de signe. Ce vecteur ne respecte donc pas la parité au sens où nous l'avons définie.

Considérons 2 particules de DIRAC (a) et (b) ayant respectivement pour vecteurs axiaux :

$$(J_{\mu 5})_a = \begin{pmatrix} \gamma_a \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a^2}{\gamma_a+1} \frac{v_{ax} v_{az}}{c^2} \\ \frac{\gamma_a^2}{\gamma_a+1} \frac{v_{ay} v_{az}}{c^2} \\ 1 + \frac{\gamma_a^2}{\gamma_a+1} \frac{v_{az} v_{az}}{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (J_{t5})_a \\ (J_{x5})_a \\ (J_{y5})_a \\ (J_{z5})_a \end{pmatrix} \quad (J_{\mu 5})_b = \begin{pmatrix} \gamma_b \frac{v_{bz}}{c} \\ \frac{\gamma_b^2}{\gamma_b+1} \frac{v_{bx} v_{bz}}{c^2} \\ \frac{\gamma_b^2}{\gamma_b+1} \frac{v_{by} v_{bz}}{c^2} \\ 1 + \frac{\gamma_b^2}{\gamma_b+1} \frac{v_{bz} v_{bz}}{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (J_{t5})_b \\ (J_{x5})_b \\ (J_{y5})_b \\ (J_{z5})_b \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-13})$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs, au sens de MINKOWSKY dans une métrique (+,-,-,-), s'écrit :

$$(J_{t5})_a (J_{t5})_b - (J_{x5})_a (J_{x5})_b - (J_{y5})_a (J_{y5})_b - (J_{z5})_a (J_{z5})_b \quad (\text{XVII-14})$$

L'opérateur de parité, appliqué à chacune des particules (a) et (b), change le signe de la composante temporelle J_{t5} . Il s'ensuit que le produit scalaire ci-dessus est invariant sous cette transformation.

I.3 pseudo-norme

La pseudo-norme au carré du vecteur J_{μ} , au sens de MINKOWSKY dans une métrique (+,-,-,-), s'écrit :

$$J_{\mu} \cdot J^{\mu} = \gamma^2 - \gamma^2 \frac{v_x^2}{c^2} - \gamma^2 \frac{v_y^2}{c^2} - \gamma^2 \frac{v_z^2}{c^2} = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 \quad (\text{XVII-15})$$

Cette pseudo-norme est constante, et ne dépend pas du référentiel considéré.

La pseudo-norme au carré du vecteur axial $J_{\mu 5}$, au sens de MINKOWSKY dans une métrique (+,-,-,-), s'écrit :

$$J_{\mu 5} \cdot J^{\mu 5} = \left(\gamma \frac{v_z}{c} \right)^2 - \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_x v_z}{c^2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_y v_z}{c^2} \right)^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_z v_z}{c^2} \right)^2 = -1 \quad (\text{XVII-16})$$

Cette pseudo-norme est constante, et ne dépend pas du référentiel considéré. Elle est, dans ce cas particulier, purement imaginaire.

Le produit scalaire, au sens de MINKOWSKY, des vecteurs $J_{\mu 5}$ et J_μ s'écrit :

$$J_\mu \cdot J^{\mu 5} = \gamma \left(\gamma \frac{v_z}{c} \right) - \gamma \frac{v_x}{c} \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_x v_z}{c^2} \right) - \gamma \frac{v_y}{c} \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_y v_z}{c^2} \right) - \gamma \frac{v_z}{c} \left(1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_z v_z}{c^2} \right) \quad (\text{XVII-17})$$

$$J_\mu J^{\mu 5} = \gamma \frac{v_z}{c} \left(\gamma - 1 - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{v_z}{c} \left(\gamma^2 - 1 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = 0$$

Il s'agit d'une propriété générale de ces deux vecteurs qui peut être montrée directement à partir de leur représentation en fonction des composantes du bispineur considéré.

On en déduit que ces deux vecteurs sont orthogonaux au sens de MINKOWSKY. D'un point de vue énergétique, ces deux vecteurs n'échangent pas d'énergie.

On peut maintenant évaluer la pseudo-norme au carré attachée au produit scalaire qui intervient dans les théories de FERMI :

$$(J_\mu - J_{\mu 5})(J^\mu - J^{\mu 5}) = J_\mu J^\mu + J_{\mu 5} J^{\mu 5} - J_\mu J^{\mu 5} - J_{\mu 5} J^\mu = 1 - 1 - 0 - 0 = 0 \quad (\text{XVII-18})$$

Cette pseudo-norme au carré est nulle, et ne dépend pas du référentiel considéré.

I.4 Rupture de parité

On s'intéresse dans ce paragraphe à la parité du produit scalaire qui intervient dans les théories de FERMI. Pour deux particules indicées (a) et (b), ce produit scalaire s'écrit :

$$(J_\mu - J_{\mu 5})_a \cdot (J^\mu - J^{\mu 5})_b = (J_\mu)_a (J^\mu)_b + (J_{\mu 5})_a (J^{\mu 5})_b - (J_\mu)_a (J^{\mu 5})_b - (J_{\mu 5})_a (J^\mu)_b \quad (\text{XVII-19})$$

L'opérateur de parité étant linéaire, on en déduit :

$$\hat{P} \left\{ (J_\mu - J_{\mu 5})_a \cdot (J^\mu - J^{\mu 5})_b \right\} = \hat{P} \left\{ (J_\mu)_a (J^\mu)_b \right\} + \hat{P} \left\{ (J_{\mu 5})_a (J^{\mu 5})_b \right\} - \hat{P} \left\{ (J_\mu)_a (J^{\mu 5})_b \right\} - \hat{P} \left\{ (J_{\mu 5})_a (J^\mu)_b \right\} \quad (\text{XVII-20})$$

$$\hat{P} \left\{ (J_\mu - J_{\mu 5})_a \cdot (J^\mu - J^{\mu 5})_b \right\} = \hat{P} \left\{ (J_\mu)_a \right\} \hat{P} \left\{ (J^\mu)_b \right\} + \hat{P} \left\{ (J_{\mu 5})_a \right\} \hat{P} \left\{ (J^{\mu 5})_b \right\} - 2 \hat{P} \left\{ (J_\mu)_a \right\} \hat{P} \left\{ (J^{\mu 5})_b \right\}$$

Les deux premiers termes à droite de l'égalité restent inchangés par l'opération de parité, car les signes moins introduits dans les termes spatiaux pour J_μ et J^μ s'annulent par multiplication, de même que le signe moins introduit dans le terme temporel pour $J_{\mu 5}$ et $J^{\mu 5}$:

$$\hat{P} \left\{ (J_\mu)_a (J^\mu)_b \right\} = \hat{P} \left\{ (J_\mu)_a \right\} \hat{P} \left\{ (J^\mu)_b \right\} = (J_\mu)_a (J^\mu)_b \quad (\text{XVII-21})$$

$$\hat{P} \left\{ (J_{\mu 5})_a (J^{\mu 5})_b \right\} = \hat{P} \left\{ (J_{\mu 5})_a \right\} \hat{P} \left\{ (J^{\mu 5})_b \right\} = (J_{\mu 5})_a (J^{\mu 5})_b$$

On dit alors que l'interaction réalisée à travers les courants J_μ ou $J_{\mu 5}$ respecte la parité.

L'opérateur de parité agit sur le dernier terme à droite de l'égalité en introduisant un signe moins dans les termes spatiaux du courant J_μ et un signe moins dans le terme temporel du courant $J_{\mu 5}$:

$$\hat{P}\left\{\left(J_\mu\right)_a\left(J^{\mu 5}\right)_b\right\}=\hat{P}\left(J_\mu\right)_a\hat{P}\left(J^{\mu 5}\right)_b=-\left\{\left(J_\mu\right)_a\left(J^{\mu 5}\right)_b\right\} \quad (\text{XVII-22})$$

On dit que l'interaction réalisée en mixant les courants J_μ et $J_{\mu 5}$ ne respecte pas la parité.

Il s'ensuit que, d'une manière générale, le produit scalaire $\left(J_\mu - J_{\mu 5}\right)_a \cdot \left(J^\mu - J^{\mu 5}\right)_b$ ne respecte pas la parité, car il n'est pas invariant sous une opération de parité.

Il est apparu expérimentalement que l'interaction faible ne respecte pas l'opération de parité, ce qui a conduit à une modélisation qui fait intervenir les courants $J_{\mu 5}$.

I.5 Conservation locale de l'énergie

Le vecteur $J_{\mu 5}$ ne respecte pas, dans le cas général l'équation locale de l'énergie :

$$\frac{\partial J_{\mu 5}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial J_{t5}}{\partial x_t} + \frac{\partial J_{x5}}{\partial x} + \frac{\partial J_{y5}}{\partial y} + \frac{\partial J_{z5}}{\partial z} \neq 0 \quad (\text{XVII-23})$$

Un seul contre-exemple suffit à en faire la preuve. On peut choisir pour cela une solution exacte simple à l'équation de DIRAC :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \omega_0 \cos\left(\omega t - \omega_z \frac{z}{c}\right) - j\omega \sin\left(\omega t - \omega_z \frac{z}{c}\right) \\ \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 &= -j\omega_z \sin\left(\omega t - \omega_z \frac{z}{c}\right) \\ \psi_3 &= 0 \end{aligned} \quad \omega^2 = \omega_z^2 + \omega_0^2 \quad (\text{XVII-24})$$

Les courants axiaux $J_{\mu 5}$ sont donnés par la relation :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mu 5} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{t5} \\ \mathbf{J}_{x5} \\ \mathbf{J}_{y5} \\ \mathbf{J}_{z5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0^* \Psi_2 + \Psi_1^* \Psi_3 + \Psi_2^* \Psi_0 + \Psi_3^* \Psi_1 \\ \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_1^* \Psi_0 + \Psi_0^* \Psi_1 \\ j\Psi_3^* \Psi_2 - j\Psi_2^* \Psi_3 + j\Psi_1^* \Psi_0 - j\Psi_0^* \Psi_1 \\ \Psi_2^* \Psi_2 - \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_0^* \Psi_0 - \Psi_1^* \Psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mu 5} &= \begin{pmatrix} 2\omega\omega_z \sin^2\left(\omega t - \omega_z \frac{z}{c}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \omega_0^2 \cos^2\left(\omega t - \omega_z \frac{z}{c}\right) + (\omega^2 + \omega_z^2) \sin^2\left(\omega t - \omega_z \frac{z}{c}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-25})
\end{aligned}$$

L'équation locale de conservation de l'énergie appliquée à ces courants $\mathbf{J}_{\mu 5}$ s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{\mu 5}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathbf{J}_{t5}}{\partial x_t} + \frac{\partial \mathbf{J}_{x5}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{J}_{y5}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{J}_{z5}}{\partial z} \quad (\text{XVII-26})$$

Le calcul des termes non nuls donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{J}_{t5}}{\partial x_t} &= 4 \frac{\omega^2 \omega_z}{c} \sin \cos \\
\frac{\partial \mathbf{J}_{z5}}{\partial z} &= 2 \frac{\omega_0^2 \omega_z}{c} \sin \cos - 2 \frac{(\omega^2 + \omega_z^2) \omega_z}{c} \sin \cos
\end{aligned} \quad (\text{XVII-27})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{J}_{\mu 5}}{\partial x^\mu} &= 4 \frac{\omega^2 \omega_z}{c} \sin \cos + 2 \frac{\omega_0^2 \omega_z}{c} \sin \cos - 2 \frac{(\omega^2 + \omega_z^2) \omega_z}{c} \sin \cos \\
\frac{\partial \mathbf{J}_{\mu 5}}{\partial x^\mu} &= 2 \frac{\omega^2 \omega_z}{c} \sin \cos + 2 \frac{\omega_0^2 \omega_z}{c} \sin \cos - 2 \frac{\omega_z^2 \omega_z}{c} \sin \cos \\
\frac{\partial \mathbf{J}_{\mu 5}}{\partial x^\mu} &= 2 \frac{\omega_z}{c} \sin \cos (\omega^2 + \omega_0^2 - \omega_z^2) = 4 \frac{\omega_z \omega_0^2}{c} \sin \cos
\end{aligned} \quad (\text{XVII-28})$$

Ce résultat étant différent de 0, il implique la non conservation locale de l'énergie pour le vecteur $\mathbf{J}_{\mu 5}$.

Nous proposons d'examiner dans le paragraphe suivant, les propriétés analogues du vecteur \mathbf{T}^{03} issu du tenseur impulsion énergie.

II - Le vecteur axial $\mathbf{T}^{\mu 3}$ issu du tenseur énergie-impulsion

On rappelle son expression exprimée en fonction de la phase de de BROGLIE, et déjà donnée au début de ce chapitre :

$$T^{\mu 3} = \gamma \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \gamma \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \gamma \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} = E \frac{v_z}{c} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = \frac{v_z}{c} T^{\mu 0} = E \frac{v_z}{c} J^\mu \quad (\text{XVII-29})$$

II.1 image par une transformation de LORENTZ

On sait que le vecteur J^μ est un vrai quadrivecteur. De la relation :

$$T^{\mu 3} = E \frac{v_z}{c} J^\mu \quad (\text{XVII-30})$$

On déduit que $T^{\mu 3}$ ne se comporte pas en quadrivecteur, c'est-à-dire que ses composantes ne se transforment pas suivant une transformation de LORENTZ lors d'un changement de référentiel.

II.2 parité

De la relation :

$$T^{\mu 3} = E \begin{pmatrix} \gamma \frac{v_z}{c} \\ \gamma \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \gamma \frac{v_z v_z}{c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{XVII-31})$$

On déduit que lorsque v_x , v_y , v_z changent de signe, seule la première composante change de signe.

Du point de vue de la parité, il a le même comportement que le vecteur $J_{\mu 5}$, et on en tire les mêmes conclusions.

II.3 pseudo-norme

De la relation déjà rappelée ci-dessus en (XVII-30) :

$$T^{\mu 3} = E \frac{v_z}{c} J^\mu \quad (\text{XVII-31})$$

On déduit que la pseudo-norme du vecteur $T^{\mu 3}$ n'est pas constante lors d'un changement de référentiel.

II.4 Rupture de parité

Le comportement analogue sur la parité induit un comportement analogue à celui de $J_{\mu 5}$ sur la rupture de parité.

II.5 Conservation locale de l'énergie

Le vecteur $T^{\mu 3}$ vérifie par définition l'équation locale de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T^{\mu 3}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial T^{03}}{\partial x^t} + \frac{\partial T^{13}}{\partial x} + \frac{\partial T^{23}}{\partial y} + \frac{\partial T^{33}}{\partial z} = 0$$

XVIII – Conclusion

L'équation de DIRAC est à ce jour l'équation qui fournit la meilleure description des particules quantiques. Toutes les modélisations expérimentales reposent sur les solutions de cette équation et sur les propriétés de ces solutions.

La première théorie qui a permis de modéliser convenablement la désintégration du neutron est due à FERMI.

Cette théorie est fondée sur une interaction entre particules de DIRAC décrite par un pseudo produit scalaire des courants d'interaction, associé à une constante de proportionnalité.

$$M = \alpha (J_{ab})^\mu (J_{cd})_\mu \quad (\text{XVIII-1})$$

La constante de FERMI est ici incluse dans la constante de proportionnalité α . Les courants J_{ab} et J_{cd} sont des courants d'interaction ordinaires de DIRAC.

Les améliorations successives de cette théorie ont consisté à donner aux courants J_{ab} et J_{cd} les expressions les plus générales possibles.

GAMOV et TELLER ont proposé une extension de cette théorie en incluant dans J_{ab} et J_{cd} toutes les formes d'interaction suggérées par les invariants de DIRAC construits en utilisant les bispineurs et leurs adjoints.

Il est apparu que dans ces invariants, le courant défini par le « quadrivecteur » axial joue un rôle significatif.

$$J^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (\text{XVIII-2})$$

La prise en compte de ces propriétés a conduit à élaborer des théories de FERMI successives qui reposent à la fois sur les courants de DIRAC ordinaires et sur les courants axiaux.

Le courant axial (XVIII-2) présente un point faible qui interroge lorsqu'on considère une approche énergétique car il ne respecte pas l'équation locale de conservation de l'énergie.

On peut supposer que ce point faible est à l'origine des difficultés rencontrées par les théories de FERMI qui divergent dans certaines conditions.

Les idées développées dans cette partie conduisent à s'interroger sur l'existence d'un vecteur qui respecterait l'équation locale de conservation de l'énergie.

Nous avons exploré la piste des vecteurs issus du tenseur énergie-impulsion qui semblaient en mesure de jouer ce rôle, ce qui suggérait la substitution :

$$J_{\text{rot}}^{\mu} = (J^{\mu} - J^{\mu 5}) \rightarrow J_{\text{rot}}^{\mu} = \frac{1}{E} (T^{\mu 0} - T^{\mu 3})$$

$$J_{\text{rot}}^{\mu} = g_{\mu\alpha} J_{\text{rot}}^{\alpha} = \frac{g_{\mu\alpha}}{E} (T^{\alpha 0} - T^{\alpha 3}) = \frac{1}{E} (T_{\mu}^0 - T_{\mu}^3) \quad (\text{XVIII-3})$$

Malheureusement, les vecteurs issus du tenseur impulsion énergie ne sont pas invariants par changement de référentiel : c'est le tenseur lui-même qui est invariant. Il s'ensuit que cette piste ne semble pas intéressante à poursuivre.

Aucune des deux approches évoquées dans ce document ne correspond à une théorie complètement satisfaisante d'un point de vue énergétique.

Une théorie construite sur les courants $J_{\mu 5}$ ne respecte pas l'équation locale de conservation de l'énergie, et une théorie basée sur les vecteurs du tenseur énergie-impulsion n'est pas invariante par changement de référentiel.

Une approche énergétique complètement satisfaisante des théories de FERMI doit satisfaire à la fois l'équation locale de conservation de l'énergie, et l'invariance sous une transformation de LORENTZ.

On s'intéresse alors dans les chapitres suivants aux conditions dans lesquelles l'équation de conservation locale de l'énergie peut être conservée pour les courants $J_{\mu 5}$. Une de ces conditions semble en accord avec les résultats expérimentaux : on peut effectivement trouver des couples particules-antiparticules tels que pour le couple (et non plus pour la particule isolée), cette équation locale soit vérifiée.

Troisième partie

Compléments

Dans la décomposition du neutron prise comme support de réflexion, le produit de désintégration donne lieu à un proton, un électron, et un antineutrino électronique.

Lorsque cette désintégration est décrite dans le référentiel du neutron, ce dernier ne possède aucune énergie de translation. C'est donc de son énergie de masse au repos que sont issus les particules émises.

Nous formulons l'hypothèse que cette énergie de masse n'est pas inerte, mais évolue dans le temps et dans l'espace de manière à ce que sa valeur moyenne nous fournisse les caractéristiques de la particule au repos.

Pour une particule de spin $\frac{1}{2}$ comme le neutron, cette hypothèse nous conduit à penser que cette énergie est en rotation.

C'est de cette énergie en rotation que vont naître des particules issues de la désintégration. Elles posséderont elles aussi de l'énergie en rotation, mais également de l'énergie en translation.

Dès lors, il peut sembler utile de tenter de mieux cerner comment ces deux types d'énergie se combinent lors des interactions entre particules de DIRAC.

XIX – Conservation locale de l'énergie(2).

La partie précédente s'est terminée sur le constat que, pour une particule de DIRAC libre, le quadrivecteur des courants axiaux $J_{\mu 5}$ ne respectait pas l'équation locale de conservation de l'énergie.

Pour évoluer vers une approche cohérente des phénomènes qui sont liés à l'énergie en rotation dans la particule, il nous faut rechercher des éléments qui permettent cette conservation locale.

La première tentative faisant intervenir le tenseur énergie-impulsion ne permet pas une approche satisfaisante.

Nous explorons dans cette partie une autre voie qui semble conduire à des résultats plus pertinents.

Puisqu'une particule seule ne vérifie pas l'équation locale de conservation de l'énergie, on est amené à se demander s'il existe des systèmes ou combinaisons de particules de DIRAC qui vérifient globalement cette conservation.

La réponse à cette question est positive. Pour le montrer, nous allons exhiber explicitement une combinaison de particules de DIRAC pour lesquelles le courant axial $J_{\mu 5}$ vérifie globalement la conservation de l'énergie.

I – Combinaison particule – antiparticule : version sinusoidale

Considérons une particule (a) et son antiparticule (b), décrites en fonctions purement sinusoidales et en utilisant la phase de de BROGLIE :

$$\begin{aligned}
 \Psi_{a0} &= \cos\phi - j\gamma \sin\phi & \Psi_{b0} &= j\gamma \frac{v_x}{c} \sin\phi + \gamma \frac{v_y}{c} \sin\phi \\
 \Psi_{a1} &= 0 & \Psi_{b1} &= -j\gamma \frac{v_z}{c} \sin\phi & \phi &= \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \\
 \Psi_{a2} &= -j\gamma \frac{v_z}{c} \sin\phi & \Psi_{b2} &= 0 \\
 \Psi_{a3} &= \gamma \frac{v_y}{c} \sin\phi - j\gamma \frac{v_x}{c} \sin\phi & \Psi_{b3} &= \cos\phi + j\gamma \sin\phi
 \end{aligned}
 \tag{XIX-1}$$

Les calculs des courants axiaux relatifs à la particule (a) ont été détaillés dans le chapitre XV. Ils montrent que ces courants ne vérifient pas l'équation locale de conservation

de l'énergie. Il en va de même pour l'antiparticule (b). Ainsi, aucun des courants axiaux de (a) ou (b) ne vérifie séparément la conservation de l'énergie.

Le système formé par la somme de ces 2 éléments s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} \quad (\text{XIX-2})$$

Il est solution exacte de l'équation de DIRAC. Les courants axiaux sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mu 5} &= \begin{pmatrix} J_{t5} \\ J_{x5} \\ J_{y5} \\ J_{z5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0^* \Psi_2 + \Psi_1^* \Psi_3 + \Psi_2^* \Psi_0 + \Psi_3^* \Psi_1 \\ \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_1^* \Psi_0 + \Psi_0^* \Psi_1 \\ j\Psi_3^* \Psi_2 - j\Psi_2^* \Psi_3 + j\Psi_1^* \Psi_0 - j\Psi_0^* \Psi_1 \\ \Psi_2^* \Psi_2 - \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_0^* \Psi_0 - \Psi_1^* \Psi_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_{\mu 5} &= \begin{pmatrix} (\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) + (\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) + (\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) + (\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \\ (\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) + (\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) + (\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) + (\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \\ j(\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) - j(\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) + j(\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) - j(\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \\ (\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) - (\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) + (\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) - (\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{XIX-3})$$

Après développement, ces courants apparaissent sous la forme suivante :

$$\mathbf{J}_{\mu 5} = \begin{pmatrix} J_{t5} \\ J_{x5} \\ J_{y5} \\ J_{z5} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{a\mu 5} + \mathbf{J}_{b\mu 5} + \mathbf{J}_{ab\mu 5} + \mathbf{J}_{ba\mu 5} = \begin{pmatrix} J_{at5} \\ J_{ax5} \\ J_{ay5} \\ J_{az5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{bt5} \\ J_{bx5} \\ J_{by5} \\ J_{bz5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{abt5} \\ J_{abx5} \\ J_{aby5} \\ J_{abz5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{bat5} \\ J_{bax5} \\ J_{bay5} \\ J_{baz5} \end{pmatrix} \quad (\text{XIX-4})$$

On y retrouve les courants axiaux relatifs à chacune des particules (a) et (b) :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{a\mu 5} &= \begin{pmatrix} J_{at5} \\ J_{ax5} \\ J_{ay5} \\ J_{az5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a3} + \Psi_{a2}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a1} \\ \Psi_{a3}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a2}^* \Psi_{a3} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a0}^* \Psi_{a1} \\ j\Psi_{a3}^* \Psi_{a2} - j\Psi_{a2}^* \Psi_{a3} + j\Psi_{a1}^* \Psi_{a0} - j\Psi_{a0}^* \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2}^* \Psi_{a2} - \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{a0} - \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_{b\mu 5} &= \begin{pmatrix} J_{bt5} \\ J_{bx5} \\ J_{by5} \\ J_{bz5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{b0}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b3}^* \Psi_{b1} \\ \Psi_{b3}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b1} \\ j\Psi_{b3}^* \Psi_{b2} - j\Psi_{b2}^* \Psi_{b3} + j\Psi_{b1}^* \Psi_{b0} - j\Psi_{b0}^* \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2}^* \Psi_{b2} - \Psi_{b3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b0} - \Psi_{b1}^* \Psi_{b1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{XIX-5})$$

Ainsi que les courants axiaux d'interaction entre les particules (a) et (b) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{ab\mu 5} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{abt5} \\ \mathbf{J}_{abx5} \\ \mathbf{J}_{aby5} \\ \mathbf{J}_{abz5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b1} \\ \Psi_{a3}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b1} \\ j\Psi_{a3}^* \Psi_{b2} - j\Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + j\Psi_{a1}^* \Psi_{b0} - j\Psi_{a0}^* \Psi_{b1} \\ \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} - \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} - \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{ba\mu 5} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{bat5} \\ \mathbf{J}_{bax5} \\ \mathbf{J}_{bay5} \\ \mathbf{J}_{baz5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{b0}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a3} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a1} \\ \Psi_{b3}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a3} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{a1} \\ j\Psi_{b3}^* \Psi_{a2} - j\Psi_{b2}^* \Psi_{a3} + j\Psi_{b1}^* \Psi_{a0} - j\Psi_{b0}^* \Psi_{a1} \\ \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} - \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} - \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{XIX-6}$$

Pour la particule (a), les calculs détaillés au chapitre XV donnent les courants axiaux suivants :

$$\mathbf{J}_{a\mu 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{at5} \\ \mathbf{J}_{ax5} \\ \mathbf{J}_{ay5} \\ \mathbf{J}_{az5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 \frac{v_z}{c} \sin^2 \phi \\ 2\gamma^2 \frac{v_x v_z}{c^2} \sin^2 \phi \\ 2\gamma^2 \frac{v_y v_z}{c^2} \sin^2 \phi \\ 1 + 2\gamma^2 \frac{v_z v_z}{c^2} \sin^2 \phi \end{pmatrix} \tag{XIX-7}$$

Un calcul analogue pour l'antiparticule (b) donne des courants axiaux opposés à la particule (a) :

$$\mathbf{J}_{b\mu 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{bt5} \\ \mathbf{J}_{bx5} \\ \mathbf{J}_{by5} \\ \mathbf{J}_{bz5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma^2 \frac{v_z}{c} \sin^2 \phi \\ -2\gamma^2 \frac{v_x v_z}{c^2} \sin^2 \phi \\ -2\gamma^2 \frac{v_y v_z}{c^2} \sin^2 \phi \\ -1 - 2\gamma^2 \frac{v_z v_z}{c^2} \sin^2 \phi \end{pmatrix} \tag{XIX-8}$$

Le calcul des courants axiaux d'interaction entre la particule (a) et l'antiparticule (b) viennent comme suit :

$$\begin{aligned}
J_{abt5} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b1} = \Psi_{a2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b1} \\
J_{abt5} &= \left(j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \phi \right) \left(j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \phi + \gamma \frac{v_y}{c} \sin \phi \right) + \left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin \phi + j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \phi \right) \left(-j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \phi \right) = 0 \\
J_{abx5} &= \Psi_{a3}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b1} = \Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b1} \\
J_{abx5} &= \left(j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \phi \right) (\cos \phi + j\gamma \sin \phi) + (\cos \phi + j\gamma \sin \phi) \left(-j\gamma \frac{v_z}{c} \sin \phi \right) = 0 \\
J_{aby5} &= j\Psi_{a3}^* \Psi_{b2} - j\Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + j\Psi_{a1}^* \Psi_{b0} - j\Psi_{a0}^* \Psi_{b1} = -j\Psi_{a2}^* \Psi_{b3} - j\Psi_{a0}^* \Psi_{b1} = -j(\Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b1}) = 0 \\
J_{abz5} &= \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} - \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} - \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} = -\Psi_{a3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} \\
J_{abz5} &= -\left(\gamma \frac{v_y}{c} \sin \phi + j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \phi \right) (\cos \phi + j\gamma \sin \phi) + (\cos \phi + j\gamma \sin \phi) \left(j\gamma \frac{v_x}{c} \sin \phi + \gamma \frac{v_y}{c} \sin \phi \right) = 0
\end{aligned} \tag{XIX-9}$$

Les courants axiaux d'interaction entre la particule (a) et l'antiparticule (b) sont nuls.

Il s'ensuit que les courants axiaux relatifs à la solution somme (a) + (b) sont nuls :

$$\mathbf{J}_{\mu 5} = \begin{pmatrix} J_{t5} \\ J_{x5} \\ J_{y5} \\ J_{z5} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{a\mu 5} + \mathbf{J}_{b\mu 5} + \mathbf{J}_{ab\mu 5} + \mathbf{J}_{ba\mu 5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{XIX-10}$$

Ces résultats conduisent à une équation locale de conservation de l'énergie automatiquement vérifiée.

Ce raisonnement s'applique aux solutions exactes exponentielles de l'équation de DIRAC, ce qui permet d'identifier au moins 2 combinaisons de solutions qui vérifient la conservation de l'énergie.

II – Combinaison particule – antiparticule : version exponentielle

II-1 : Combinaison particule spin up – antiparticule spin down

On considère dans ce paragraphe les deux solutions exponentielles suivantes, qui sont attribuées respectivement à la particule (a) et l'antiparticule (b) :

$$\begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi} \tag{XIX-11}$$

$$\phi = \gamma \omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \quad (\text{XIX-12})$$

Le calcul des courants axiaux pour la particule (a) a été effectué au chapitre XV :

$$\mathbf{J}_{a\mu 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{at5} \\ \mathbf{J}_{ax5} \\ \mathbf{J}_{ay5} \\ \mathbf{J}_{az5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma v_z}{c} \\ \frac{\gamma^2 v_x v_z}{\gamma + 1 c^2} \\ \frac{\gamma^2 v_y v_z}{\gamma + 1 c^2} \\ 1 + \frac{\gamma^2 v_z v_z}{\gamma + 1 c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{XIX-13})$$

Le calcul des courants axiaux pour l'antiparticule (b) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{bt5} &= \Psi_{b0}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b3}^* \Psi_{b1} = \Psi_{b1}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b3}^* \Psi_{b1} \\ \mathbf{J}_{bt5} &= 2 \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) = -\gamma \frac{v_z}{c} \\ \mathbf{J}_{bx5} &= \Psi_{b3}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b1} = \Psi_{b1}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b1} \\ \mathbf{J}_{bx5} &= \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \mathbf{J}_{by5} &= j\Psi_{b3}^* \Psi_{b2} - j\Psi_{b2}^* \Psi_{b3} + j\Psi_{b1}^* \Psi_{b0} - j\Psi_{b0}^* \Psi_{b1} = j\Psi_{b1}^* \Psi_{b0} - j\Psi_{b0}^* \Psi_{b1} \\ \mathbf{J}_{by5} &= j \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) - j \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \mathbf{J}_{bz5} &= \Psi_{b2}^* \Psi_{b2} - \Psi_{b3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b0} - \Psi_{b1}^* \Psi_{b1} = -\Psi_{b3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b0} - \Psi_{b1}^* \Psi_{b1} \\ \mathbf{J}_{bz5} &= -\left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \right)^2 \left(\frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} \right) - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \right)^2 \left(\frac{v_z^2}{c^2} \right) \\ \mathbf{J}_{bz5} &= -\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\gamma^2}{2(\gamma+1)} \frac{v_x^2 + v_y^2 - v_z^2}{c^2} = -1 - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_z v_z}{c^2} \end{aligned} \quad (\text{XIX-14})$$

Les courants axiaux de l'antiparticule (b) sont opposés aux courants axiaux de la particule (a).

Il reste à évaluer les courants axiaux d'interaction entre la particule (a) et l'antiparticule(b) :

$$\begin{aligned}
J_{abt5} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b1} = \Psi_{a2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b1} \\
J_{abt5} &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) e^{2j\phi} + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) e^{2j\phi} = 0 \\
J_{abx5} &= \Psi_{a3}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b1} = \Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b1} \\
J_{abx5} &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) e^{2j\phi} + \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) e^{2j\phi} = 0 \\
J_{aby5} &= j\Psi_{a3}^* \Psi_{b2} - j\Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + j\Psi_{a1}^* \Psi_{b0} - j\Psi_{a0}^* \Psi_{b1} = -j\Psi_{a2}^* \Psi_{b3} - j\Psi_{a0}^* \Psi_{b1} = -j(\Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b1}) = 0 \\
J_{abz5} &= \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} - \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} - \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} = -\Psi_{a3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} \\
J_{abz5} &= -\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) e^{2j\phi} + \left(\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) e^{2j\phi} = 0
\end{aligned} \tag{XIX-15}$$

Les courants axiaux d'interaction entre la particule (a) et l'antiparticule (b) sont nuls.

Il s'ensuit que les courants axiaux de la combinaison particule(a) + antiparticule (b) sont nuls.

$$J_{\mu 5} = \begin{pmatrix} J_{t5} \\ J_{x5} \\ J_{y5} \\ J_{z5} \end{pmatrix} = J_{a\mu 5} + J_{b\mu 5} + J_{ab\mu 5} + J_{ba\mu 5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{XIX-16}$$

II-2 : Combinaison particule spin down – antiparticule spin up

Ce cas de figure correspond aux solutions exponentielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi} \tag{XIX-17}$$

Des calculs analogues à ceux du paragraphe précédent montrent que cette combinaison conduit également à des courants axiaux globalement nuls.

III – Conclusion

Il résulte de ce chapitre qu'il existe des combinaisons particules-antiparticules telles que les courants axiaux sont nuls, et qui par conséquent vérifient l'équation locale de conservation de l'énergie. De telles combinaisons n'ont pas pu être mises en évidence entre 2 particules de spin opposés ou 2 antiparticules de spin opposés.

Du point de vue de la physique, nous allons admettre dans la suite de ce chapitre que les courants axiaux sont représentatifs de l'énergie en rotation au sein de la particule ou de l'antiparticule.

Il découle des observations ci-dessus que si deux particules de DIRAC échangent de l'énergie par l'intermédiaire des courants axiaux, alors la conservation locale de l'énergie relative aux courants axiaux impose une décomposition sous la forme d'une particule et d'une antiparticule de spin opposé à la particule.

XX – La conservation locale de l'énergie pour des particules de nature différente.

Le chapitre précédent a montré qu'il existe des solutions exactes à l'équation de DIRAC qui conduisent à des courants axiaux $J_{\mu 5}$ qui sont nuls. Cette propriété implique de fait la relation de conservation de l'énergie pour les courants axiaux relatifs à ces solutions :

$$\frac{\partial J_{\mu 5}}{\partial x^\mu} = 0$$

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux conditions de conservation de l'énergie représentée par les courants axiaux dans le cas de deux particules de nature différente.

Nous reprenons en détail l'une des configurations obtenues dans le chapitre précédent, à savoir une particule (a) de spin up, et une anti particule (b) de spin down.

Particule (a) :

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma_a + 1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{2(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{2(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} u_{a0} \\ u_{a1} \\ u_{a2} \\ u_{a3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} \quad (\text{XX-1})$$

$$\phi_a = \gamma_a \omega_{a0} \left(t - \frac{v_{ax}}{c^2} x - \frac{v_{ay}}{c^2} y - \frac{v_{az}}{c^2} z \right)$$

Anti-particule (b) :

$$\Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b}{\sqrt{2(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \\ -\frac{\gamma_b}{\sqrt{2(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma_b + 1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} u_{b0} \\ u_{b1} \\ u_{b2} \\ u_{b3} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{XX-2})$$

$$\phi_b = \gamma_b \omega_{b0} \left(t - \frac{v_{bx}}{c^2} x - \frac{v_{by}}{c^2} y - \frac{v_{bz}}{c^2} z \right)$$

Dans une démarche analogue aux chapitres précédents, nous allons rechercher les conditions pour lesquelles les courants axiaux $J_{\mu 5}$ de la particule somme $\psi = \psi_a + \psi_b$ satisfont aux conditions de conservation de l'énergie.

Les courants axiaux relatifs à cette somme sont notés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{\mu 5} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{t5} \\ \mathbf{J}_{x5} \\ \mathbf{J}_{y5} \\ \mathbf{J}_{z5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0^* \Psi_2 + \Psi_1^* \Psi_3 + \Psi_2^* \Psi_0 + \Psi_3^* \Psi_1 \\ \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_1^* \Psi_0 + \Psi_0^* \Psi_1 \\ j \Psi_3^* \Psi_2 - j \Psi_2^* \Psi_3 + j \Psi_1^* \Psi_0 - j \Psi_0^* \Psi_1 \\ \Psi_2^* \Psi_2 - \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_0^* \Psi_0 - \Psi_1^* \Psi_1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{J}_{\mu 5} &= \begin{pmatrix} (\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) + (\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) + (\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) + (\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \\ (\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) + (\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) + (\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) + (\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \\ j(\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) - j(\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) + j(\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) - j(\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \\ (\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) - (\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) + (\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) - (\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \end{pmatrix} \quad (\text{XX-3})
 \end{aligned}$$

Ces courants peuvent être décomposés sous la forme de 4 termes :

$$\mathbf{J}_{\mu 5} = \mathbf{J}_{a\mu 5} + \mathbf{J}_{b\mu 5} + \mathbf{J}_{ab\mu 5} + \mathbf{J}_{ba\mu 5} \quad (\text{XX-4})$$

On y retrouve les courants axiaux relatifs à chacune des particules :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{a\mu 5} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{at5} \\ \mathbf{J}_{ax5} \\ \mathbf{J}_{ay5} \\ \mathbf{J}_{az5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a3} + \Psi_{a2}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a1} \\ \Psi_{a3}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a2}^* \Psi_{a3} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a0}^* \Psi_{a1} \\ j \Psi_{a3}^* \Psi_{a2} - j \Psi_{a2}^* \Psi_{a3} + j \Psi_{a1}^* \Psi_{a0} - j \Psi_{a0}^* \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2}^* \Psi_{a2} - \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{a0} - \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{a3} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{a3} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{a1} \\ j \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{a2} - j \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{a3} + j \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{a0} - j \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{a2} - \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{a3} + \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{a0} - \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{a1} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{J}_{b\mu 5} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{bt5} \\ \mathbf{J}_{bx5} \\ \mathbf{J}_{by5} \\ \mathbf{J}_{bz5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{b0}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b3}^* \Psi_{b1} \\ \Psi_{b3}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b1} \\ j \Psi_{b3}^* \Psi_{b2} - j \Psi_{b2}^* \Psi_{b3} + j \Psi_{b1}^* \Psi_{b0} - j \Psi_{b0}^* \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2}^* \Psi_{b2} - \Psi_{b3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b0} - \Psi_{b1}^* \Psi_{b1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{b1} \\ j \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{b2} - j \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{b3} + j \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{b0} - j \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{b2} - \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{b0} - \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{b1} \end{pmatrix} \quad (\text{XX-5})
 \end{aligned}$$

Ainsi que les courants axiaux d'interaction entre les 2 particules :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{ab\mu 5} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{abt5} \\ \mathbf{J}_{abx5} \\ \mathbf{J}_{aby5} \\ \mathbf{J}_{abz5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b1} \\ \Psi_{a3}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b1} \\ j \Psi_{a3}^* \Psi_{b2} - j \Psi_{a2}^* \Psi_{b3} + j \Psi_{a1}^* \Psi_{b0} - j \Psi_{a0}^* \Psi_{b1} \\ \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} - \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} - \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b1} \\ j \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b2} - j \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b3} + j \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b0} - j \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b2} - \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b0} - \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b1} \end{pmatrix} e^{j(\phi_a + \phi_b)} \\
 \mathbf{J}_{ba\mu 5} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{bat5} \\ \mathbf{J}_{bax5} \\ \mathbf{J}_{bay5} \\ \mathbf{J}_{baz5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{b0}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a3} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a1} \\ \Psi_{b3}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a3} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{a1} \\ j \Psi_{b3}^* \Psi_{a2} - j \Psi_{b2}^* \Psi_{a3} + j \Psi_{b1}^* \Psi_{a0} - j \Psi_{b0}^* \Psi_{a1} \\ \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} - \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} - \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{a3} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{a3} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{a1} \\ j \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{a2} - j \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{a3} + j \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{a0} - j \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{a2} - \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{a3} + \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{a0} - \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{a1} \end{pmatrix} e^{-j(\phi_a + \phi_b)} \quad (\text{XX-6})
 \end{aligned}$$

L'équation locale de conservation de l'énergie s'écrit, dans une notation où l'indice μ obéit à la convention d'EINSTEIN :

$$\frac{\partial J_{\mu 5}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial J_{a\mu 5}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial J_{b\mu 5}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial J_{ab\mu 5}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial J_{ba\mu 5}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\text{XX-7})$$

Les termes $J_{a\mu 5}$ et $J_{b\mu 5}$ ne dépendent pas des variables de temps et d'espace, et ont par conséquent leurs dérivées temporelles et spatiales nulles.

Il reste à déterminer les conditions pour lesquelles les courants d'interactions $J_{ab\mu 5}$ et $J_{ba\mu 5}$ vérifient la conservation de l'énergie. Ces courants sont conjugués l'un de l'autre.

Nous détaillons ci-dessous les calculs relatifs au courant axial d'interaction $J_{ab\mu 5}$:

Composante temporelle :

$$\begin{aligned} J_{ab5} &= (\mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b1}) e^{j(\phi_a + \phi_b)} = (\mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b1}) e^{j(\phi_a + \phi_b)} \\ J_{ab5} &= \left\{ \left(\frac{\gamma_a}{\sqrt{2(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{az}}{c} \right) \left(\frac{\gamma_b}{\sqrt{2(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \right) + \left(\frac{\gamma_a}{\sqrt{2(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} \right) \left(-\frac{\gamma_b}{\sqrt{2(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bz}}{c} \right) \right\} e^{j(\phi_a + \phi_b)} \\ J_{ab5} &= \left\{ \frac{\gamma_a \gamma_b}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{az} v_{bx} - jv_{az} v_{by}}{c^2} - \frac{\gamma_a \gamma_b}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{ax} v_{bz} - jv_{ay} v_{bz}}{c^2} \right\} e^{j(\phi_a + \phi_b)} \\ J_{ab5} &= \frac{\gamma_a \gamma_b}{2c^2 \sqrt{(\gamma_a + 1)(\gamma_b + 1)}} (v_{az} v_{bx} - v_{ax} v_{bz} - j(v_{az} v_{by} - v_{ay} v_{bz})) e^{j(\phi_a + \phi_b)} \end{aligned} \quad (\text{XX-8})$$

Composante spatiale suivant x :

$$\begin{aligned} J_{abx5} &= (\mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b1}) e^{j(\phi_a + \phi_b)} = (\mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b1}) e^{j(\phi_a + \phi_b)} \\ J_{abx5} &= \left\{ \left(\frac{\gamma_a}{\sqrt{2(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{az}}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma_b + 1}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\sqrt{\gamma_a + 1}}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{\gamma_b}{\sqrt{2(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bz}}{c} \right) \right\} e^{j(\phi_a + \phi_b)} \\ J_{abx5} &= \left\{ \frac{\gamma_a \sqrt{\gamma_b + 1}}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{az}}{c} - \frac{\gamma_b \sqrt{\gamma_a + 1}}{2\sqrt{(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bz}}{c} \right\} e^{j(\phi_a + \phi_b)} \end{aligned} \quad (\text{XX-9})$$

Composante spatiale suivant y :

$$\begin{aligned} J_{aby5} &= (j\mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b2} - j\mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b3} + j\mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b0} - j\mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b1}) = (-j\mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b3} - j\mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b1}) \\ J_{aby5} &= -j \left(\frac{\gamma_a \sqrt{\gamma_b + 1}}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{az}}{c} - \frac{\gamma_b \sqrt{\gamma_a + 1}}{2\sqrt{(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bz}}{c} \right) e^{j(\phi_a + \phi_b)} \end{aligned} \quad (\text{XX-10})$$

Composante spatiale suivant z :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{abz5} &= (\mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b2} - \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b0} - \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b1}) e^{j(\phi_a + \phi_b)} = (-\mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b3} + \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b0}) e^{j(\phi_a + \phi_b)} \\
\mathbf{J}_{abz5} &= \left\{ - \left(\frac{\gamma_a}{\sqrt{2(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} \right) \left(\frac{\sqrt{\gamma_b + 1}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\sqrt{\gamma_a + 1}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\gamma_b}{\sqrt{2(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \right) \right\} e^{j(\phi_a + \phi_b)} \\
\mathbf{J}_{abz5} &= \left(- \frac{\gamma_a \sqrt{\gamma_b + 1}}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} + \frac{\gamma_b \sqrt{\gamma_a + 1}}{2\sqrt{(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \right) e^{j(\phi_a + \phi_b)}
\end{aligned} \tag{XX-11}$$

La conservation locale de l'énergie pour les courants d'interaction s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{ab\mu 5}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathbf{J}_{abt5}}{\partial x_t} + \frac{\partial \mathbf{J}_{abx5}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{J}_{aby5}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{J}_{abz5}}{\partial z} = 0 \tag{XX-12}$$

Les variables temporelles et spatiales apparaissent dans l'exponentielle relative à la somme des phases de de BROGLIE :

$$\phi_a + \phi_b = \gamma_a \omega_{a0} \left(t - \frac{v_{ax}}{c^2} x - \frac{v_{ay}}{c^2} y - \frac{v_{az}}{c^2} z \right) + \gamma_b \omega_{b0} \left(t - \frac{v_{bx}}{c^2} x - \frac{v_{by}}{c^2} y - \frac{v_{bz}}{c^2} z \right) \tag{XX-13}$$

On en déduit que l'équation locale de conservation de l'énergie doit vérifier (les exponentielles en facteur ont été omises) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{J}_{ab\mu 5}}{\partial x^\mu} &= j \left(\frac{\gamma_a \gamma_b}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)(\gamma_b + 1)}} \left(\frac{v_{az} v_{bx}}{c^2} - \frac{v_{ax} v_{bz}}{c^2} - j \left(\frac{v_{az} v_{by}}{c^2} - \frac{v_{ay} v_{bz}}{c^2} \right) \right) \right) \left(\gamma_a \frac{\omega_{a0}}{c} + \gamma_b \frac{\omega_{b0}}{c} \right) \\
&- j \left(\frac{\gamma_a \sqrt{\gamma_b + 1}}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{az}}{c} - \frac{\gamma_b \sqrt{\gamma_a + 1}}{2\sqrt{(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bz}}{c} \right) \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c^2} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c^2} \right) \\
&- j \left(-j \left(\frac{\gamma_a \sqrt{\gamma_b + 1}}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{az}}{c} - \frac{\gamma_b \sqrt{\gamma_a + 1}}{2\sqrt{(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bz}}{c} \right) \right) \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c^2} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c^2} \right) \\
&- j \left(- \frac{\gamma_a \sqrt{\gamma_b + 1}}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} + \frac{\gamma_b \sqrt{\gamma_a + 1}}{2\sqrt{(\gamma_b + 1)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \right) \left(\gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c^2} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{XX-14}$$

Soit encore :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{ab\mu 5}}{\partial x^\mu} = j \left(\frac{\gamma_a \gamma_b}{2\sqrt{(\gamma_a + 1)(\gamma_b + 1)}} \left(\frac{v_{az} v_{bx}}{c^2} - \frac{v_{ax} v_{bz}}{c^2} - j \left(\frac{v_{az} v_{by}}{c^2} - \frac{v_{ay} v_{bz}}{c^2} \right) \right) \right) \left(\gamma_a \frac{\omega_{a0}}{c} + \gamma_b \frac{\omega_{b0}}{c} \right) = 0 \tag{XX-15}$$

La condition imposée par la conservation locale de l'énergie revient donc à annuler la composante temporelle.

Puisque les γ et ω sont positifs, cela revient à imposer les conditions sur les vitesses :

$$\begin{aligned} v_{az} v_{bx} - v_{ax} v_{bz} &= 0 \\ v_{az} v_{by} - v_{ay} v_{bz} &= 0 \end{aligned} \tag{XX-16}$$

Soit encore :

$$\frac{v_{ax}}{v_{bx}} = \frac{v_{ay}}{v_{by}} = \frac{v_{az}}{v_{bz}} \tag{XX-17}$$

Il s'ensuit que le produit vectoriel des vitesses relatives à la particule (a) et l'antiparticule (b) doit être nul :

$$\begin{pmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \\ v_{az} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{az} v_{by} - v_{ay} v_{bz} \\ v_{az} v_{bx} - v_{ax} v_{bz} \\ v_{ax} v_{by} - v_{ay} v_{bx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{XX-18}$$

Conclusion :

Considérons un système isolé constitué par une particule de DIRAC en interaction avec une antiparticule de DIRAC de spin opposé.

Lorsque ce système n'échange que de l'énergie en rotation, alors les deux particules évoluent sur une trajectoire portée par une même droite, car le produit vectoriel de leurs vecteurs vitesses doit être nul.

Formulé autrement, si la particule et l'antiparticule évoluent avec des vitesses colinéaires, alors elles peuvent échanger de l'énergie par l'intermédiaire des courants axiaux, et cet échange peut respecter l'équation locale de conservation de l'énergie.

XXI – La conservation globale de l'énergie.

Ce chapitre reprend plus en détail la conservation de la somme des pseudo-normes relatives aux courants ordinaires et courants axiaux de DIRAC (Chapitre XVII)

Nous connaissons une relation de conservation de l'énergie pour des particules de DIRAC en translation. Cette relation est obtenue en écrivant que la pseudo-norme du courant ordinaire de cette particule ne dépend pas du référentiel considéré, et donc est égale à une constante pour une particule libre.

Considérons les 4 solutions exponentielles utilisées dans ce document pour décrire les particules et antiparticules de DIRAC :

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\hbar\omega_0} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} & \sqrt{\hbar\omega_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \\
 & \sqrt{\hbar\omega_0} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi} & \sqrt{\hbar\omega_0} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi}
 \end{aligned} \tag{XXI-1}$$

Avec la phase de de BROGLIE :

$$\phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \tag{XXI-2}$$

La pseudo-norme des courants ordinaires de DIRAC est une constante indépendante du référentiel dans lequel elle est calculée. Pour ces solutions exponentielles, cette constante est égale à l'énergie de masse au repos, élevée au carré.

$$J_\mu J^\mu = J_t^2 - J_x^2 - J_y^2 - J_z^2 = (\hbar\omega_0)^2 = (m_0 c^2)^2 \tag{XXI-3}$$

La pseudo-norme des courants axiaux est aussi indépendante du référentiel. Pour les particules et antiparticules de DIRAC décrites ci-dessus, la pseudo-norme au carré des courants axiaux est négative :

$$J_{\mu 5} J^{\mu 5} = J_{t5}^2 - J_{x5}^2 - J_{y5}^2 - J_{z5}^2 = -(\hbar\omega_0)^2 = -(m_0 c^2)^2 \quad (\text{XXI-4})$$

Il résulte des deux relations ci-dessus qu'on peut écrire une relation générale de conservation de l'énergie qui relie les courants ordinaires de DIRAC et les courants axiaux de DIRAC :

$$(J_{\mu} J^{\mu} + J_{\mu 5} J^{\mu 5}) = (J_t^2 - J_x^2 - J_y^2 - J_z^2) + (J_{t5}^2 - J_{x5}^2 - J_{y5}^2 - J_{z5}^2) = 0 \quad (\text{XXI-5})$$

Cette propriété à une portée plus générale que les exemples qui ont été utilisés pour la mettre en évidence d'une manière simplifiée ; elle est valide pour toute particule représentée par un bispineur solution de l'équation de DIRAC.

La relation (XXI-5) ne fait plus apparaître explicitement la masse au repos. Elle peut être interprétée comme une possibilité d'échange entre l'énergie de translation et l'énergie en rotation.

Pour les solutions (XXI-1) ci-dessus, les composantes des courants de DIRAC J_{μ} sont égales à celles du quadrivecteur impulsion-énergie :

$$\begin{aligned} J_t^2 &= (\gamma \hbar \omega_0)^2 \\ J_x^2 &= \left(\gamma \hbar \omega_0 \frac{v_x}{c} \right)^2 \\ J_y^2 &= \left(\gamma \hbar \omega_0 \frac{v_y}{c} \right)^2 \\ J_z^2 &= \left(\gamma \hbar \omega_0 \frac{v_z}{c} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{XXI-6})$$

On obtient de même pour les composantes du vecteur $J_{\mu 5}$:

$$\begin{aligned} J_{t5}^2 &= \left(\gamma \hbar \omega_0 \frac{v_z}{c} \right)^2 \\ J_{x5}^2 &= \left(\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \hbar \omega_0 \frac{v_x v_z}{c^2} \right)^2 \\ J_{y5}^2 &= \left(\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \hbar \omega_0 \frac{v_y v_z}{c^2} \right)^2 \\ J_{z5}^2 &= \left(\hbar \omega_0 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \hbar \omega_0 \frac{v_z v_z}{c^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{XXI-7})$$

Pour les solutions examinées dans ce chapitre, on fait le constat que :

$$J_z^2 = J_{t5}^2 = \left(\gamma \hbar \omega_0 \frac{v_z}{c} \right)^2 \quad (\text{XXI-8})$$

Il s'ensuit que la relation globale de conservation de l'énergie prend une forme simplifiée :

$$\left(J_\mu J^\mu + J_{\mu 5} J^{\mu 5} \right) = \left(J_t^2 - J_x^2 - J_y^2 \right) - \left(J_{x5}^2 + J_{y5}^2 + J_{z5}^2 \right) = 0 \quad (\text{XXI-9})$$

On peut faire une vérification directe de cette relation pour les solutions examinées dans ce chapitre. Cette vérification n'apporte aucune information supplémentaire, mais permet de visualiser comment les termes de cette relation se compensent pour donner un résultat nul.

$$(\hbar \omega_0)^2 \left\{ (\gamma)^2 - \left(\gamma \frac{v_x}{c} \right)^2 - \left(\gamma \frac{v_y}{c} \right)^2 - \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_x v_z}{c^2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_y v_z}{c^2} \right)^2 - \left(1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v_z v_z}{c^2} \right)^2 \right\} = 0 \quad (\text{XXI-10})$$

XXII – La fonction de GREEN

La fonction de GREEN joue un rôle important dans la recherche des solutions à des équations différentielles avec second membre. Nous consacrons ce chapitre à en présenter quelques-unes de ses propriétés, en essayant de les rattacher aux propriétés physique du système étudié. Son intérêt va apparaître de manière évidente au chapitre suivant

I – L'impulsion de DIRAC à une dimension

L'impulsion de DIRAC à une dimension est notée par le symbole $\delta(t)$ lorsqu'elle représente une impulsion temporelle, $\delta(x)$ lorsqu'elle représente une impulsion spatiale à une dimension.

Considérons, dans un exemple unidimensionnel, l'impulsion de DIRAC temporelle. Cette impulsion peut être définie dans les termes habituels qui définissent une fonction par les propriétés suivantes :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases} \quad (\text{XXII-1})$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Cette définition montre que $\delta(t)$ n'est pas une fonction au sens habituel du terme, car cette fonction est nulle presque partout. Les mathématiciens, parmi lesquels Laurent SCHWARTZ a joué un rôle déterminant, ont montré qu'elle appartient à une famille d'objets mathématiques appelée distribution. Nous admettrons que cette distribution possède la propriété suivante lorsqu'elle est associée à une fonction $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0) \quad (\text{XXII-2})$$

Nous omettrons par la suite les bornes de l'intégrale lorsqu'elles s'étendent entre plus ou moins l'infini.

De la relation (XXII-2) ci-dessus, on déduit que pour un instant t quelconque :

$$\int f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \int \delta(t-\tau)f(\tau)d\tau = f(t) \quad (\text{XXII-3})$$

Cette dernière relation exprime le fait qu'un signal quelconque $f(t)$ peut être décomposé comme la somme de signaux ponctuels, on dira plutôt impulsionnels, qui composent ce signal.

D'un point de vue physique, cette somme peut être interprétée comme la juxtaposition de distributions de DIRAC à des instants τ qui se succèdent de manière infiniment proche, chaque distribution étant affectée d'une « amplitude » $f(\tau)$.

Considérons alors un système physique représenté par une boîte noire. On applique à l'entrée un signal $e(t)$, et on récupère en sortie un signal $s(t)$:



Nous imposons à ce système les deux conditions suivantes :

- Il doit être linéaire, de sorte que le signal de sortie puisse être considéré comme la somme des réponses aux signaux appliqués à l'entrée.
- La réponse du système est invariante dans le temps, c'est-à-dire que quel que soit l'instant, la réponse à deux signaux égaux est identique.

Si on applique une impulsion de DIRAC à l'entrée à l'instant $t=0$, on obtient en sortie une réponse appelée réponse impulsionnelle ou fonction de GREEN $G(t)$:



La connaissance de cette réponse impulsionnelle permet d'en déduire la réponse à une attaque quelconque, en considérant que le signal d'entrée est représenté par une somme d'impulsion de DIRAC décalées dans le temps. La réponse à cette attaque est constituée de la somme des réponses à chacune de ces impulsions de DIRAC décalées dans le temps.

$$e(t) = \int \delta(t - \tau) e(\tau) d\tau \quad \longrightarrow \quad s(t) = \int G(t - \tau) e(\tau) d\tau$$

$G(t)$ est appelée la fonction de GREEN du système. Lorsque cette fonction est connue, le signal de sortie est obtenu en effectuant le produit de convolution de la fonction de GREEN par le signal d'entrée.

Il arrive souvent que le signal de sortie soit relié au signal d'entrée par une équation différentielle. L'utilisation de la fonction de GREEN permet de déterminer le signal de sortie sans résoudre explicitement cette équation différentielle.

II – L'impulsion de DIRAC à trois dimensions

La méthode décrite dans le paragraphe précédent s'applique tout aussi bien aux variables spatiales, et la notation la plus fréquente est la suivante :

$$\delta^3(x) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{XXII-4}$$

La condition d'invariance dans le temps est remplacée par une condition d'invariance dans l'espace.

Pour illustrer son utilisation, considérons l'équation des potentiels issue de l'électromagnétisme. Lorsqu'on se place en régime harmonique, à une fréquence donnée, les exponentielles temporelles se simplifient, et il ne reste plus qu'une équation de propagation portant sur les variables spatiales et le potentiel vecteur \vec{A} . Si on désigne par \vec{J} les courants à l'origine des potentiels, nous avons :

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)\vec{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \text{ avec } k^2 = \omega^2 / c^2 \quad (\text{XXII-5})$$

La fonction de GREEN à 3 dimensions $G(x,y,z)$ est définie par la relation suivante :

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)G(x,y,z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (\text{XXII-6})$$

Physiquement, un point de l'espace représenté par une distribution spatiale à 3 dimensions rayonne de manière sphérique lorsque l'espace est isotrope, et ne dépend donc que de la variable r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{XXII-7})$$

En utilisant la relation :

$$\vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(r) \quad (\text{XXII-8})$$

On obtient une fonction de GREEN de l'espace libre :

$$G(r) = -\frac{e^{jk\vec{r}}}{4\pi r} \quad (\text{XXII-9})$$

Chaque élément volumique ponctuel de courant rayonne de manière sphérique, avec une décroissance en $1/r$ et un état de phase donné par le produit scalaire $\vec{k}\vec{r}$.

Les composantes vectorielles du potentiel sont alors déduites suivant la relation qui met en œuvre le produit de convolution :

$$A_i(x,y,z) = G(x,y,z) * (-\mu_0 J_i(x,y,z)) = -\mu_0 \int_V J_i(x',y',z') G(x-x',y-y',z-z') dx' dy' dz' \quad (\text{XXII-10})$$

On peut interpréter physiquement cette relation.

Les éléments de courant sont situés aux points $M'(x',y',z')$ qui constituent le volume V entourant les sources.

Le potentiel au point $M(x,y,z)$ est obtenu en sommant les contributions de chaque source « ponctuelle » qui a propagé son interaction du point M' au point M .

Dans ce cas particulier, chaque source « ponctuelle » rayonne de manière sphérique. Le décalage temporel du paragraphe précédent s'est transformé en décalage spatial.

Une telle interprétation avait été suggérée par FRESNEL sans aucun calcul, bien avant que les lois de l'électromagnétisme aient été établies.

III – La fonction de GREEN de l'opérateur de KLEIN-GORDON

On peut définir une fonction de GREEN pour un opérateur spatio-temporel à 4 dimensions.

Nous utilisons dans ce chapitre et les suivants la notation abrégée qui consiste à poser :

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{XXII-11})$$

de telle sorte que ces grandeurs n'apparaissent plus dans les relations.

L'équation de KLEIN-GORDON sans second membre s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m_0^2 \right) (\psi) = (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) (\psi) = 0 \quad (\text{XXII-12})$$

La fonction de GREEN G_{kl} de l'opérateur de KLEIN-GORDON répond à la définition :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m_0^2 \right) G_{kl} = (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) G_{kl} = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \delta^4(x) \quad (\text{XXII-13})$$

La transformée de FOURIER est un outil utile pour obtenir la fonction de GREEN. Nous adoptons la définition suivante pour une fonction à une variable :

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int f(x) e^{-jkx} dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(k) e^{jkx} dk \end{aligned} \quad (\text{XXII-14})$$

Une propriété intéressante concerne la transformée de FOURIER de la dérivée d'une fonction (sous réserve des bonnes propriétés de la fonction au voisinage de l'infini). On obtient en intégrant par parties :

$$\int f'(x) e^{-jkx} dx = jk \int f(x) e^{-jkx} dx = jk \hat{f}(k) \quad (\text{XXII-15})$$

D'une manière générale, cette propriété transforme un opérateur différentiel (supposé linéaire et à coefficients constants) appliqué à une fonction en un polynôme multiplié par la transformée de FOURIER de la fonction. Les calculs dans l'espace de FOURIER s'en trouvent grandement simplifiés, et une fois les calculs faits, il est commode de retrouver l'espace d'origine par une transformée de FOURIER inverse. Ce procédé sera utilisé dans la suite de ce document.

Il permet d'obtenir simplement la fonction de GREEN G_{kl} de KLEIN-GORDON définie par :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m_0^2 \right) G_{kl} = \delta^4(x) \quad (\text{XXII-16})$$

Par convention visant à un allègement d'écriture, la variable (x) représente le quadrivecteur (t, x, y, z) dans un espace à 4 dimensions.

Les variables de FOURIER associées aux variables (t, x, y, z) sont désignées respectivement par (k_t, k_x, k_y, k_z) . La variable (k) représente le quadrivecteur (k_t, k_x, k_y, k_z) dans un espace à 4 dimensions.

On effectue une transformée de FOURIER de chacun des membres de l'égalité ci-dessus. La propriété de la transformée d'une dérivée rappelée ci-dessus permet d'écrire sans calcul :

$$\left(-k_t^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m_0^2 \right) \hat{G}_{kl} = \left(-k^2 + m_0^2 \right) = 1^4 \quad (\text{XXII-17})$$

A condition que $(k^2 - m_0^2)$ soit différent de zéro, on en déduit la transformée de FOURIER de la fonction de GREEN :

$$\hat{G}_{kl} = -\frac{1^4}{k^2 - m_0^2} \quad (\text{XXII-18})$$

La fonction de GREEN s'obtient alors par transformée de FOURIER inverse :

$$G_{kl} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \hat{G}_{kl}(k) e^{jkx} d^4k = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{jkx}}{k^2 - m_0^2} d^4k \quad (\text{XXII-19})$$

La fonction à intégrer est complexe. Lorsque cette fonction est suffisamment régulière (holomorphe), son intégrale entre deux points dans le plan complexe ne dépend pas du chemin suivi. Ce n'est pas le cas dans l'intégrale ci-dessus qui présente deux pôles en $k = \pm m_0$. Il faut examiner séparément les cas où le chemin d'intégration passe « au-dessus » ou « au-dessous » des pôles. Nous y reviendrons en tant que de besoin.

On peut changer le signe de l'exposant avec un changement de variable $k \rightarrow -k$. Alors, $dk \rightarrow -dk$, et après avoir échangé les bornes d'intégration, on obtient :

$$G_{kl} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jkx}}{k^2 - m_0^2} d^4k \quad (\text{XXII-20})$$

IV – La fonction de GREEN de l'opérateur de DIRAC

Nous adoptons la convention d'écriture habituelle pour l'équation de DIRAC :

$$(j\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi = (j\partial - m_0)\psi = 0 \quad (\text{XXII-21})$$

La fonction de GREEN G_D de l'opérateur de DIRAC répond à la définition :

$$(j\partial - m_0)G_D = \delta^4(x) \quad (\text{XXII-22})$$

On effectue une transformée de FOURIER de chacun des membres de l'égalité ci-dessus. La propriété de la transformée d'une dérivée permet d'écrire sans calcul :

$$(-k - m_0)\hat{G}_D = 1^4 \quad (\text{XXII-23})$$

A condition que $(-k - m_0)$ soit différent de zéro, on en déduit la transformée de FOURIER de la fonction de GREEN :

$$\hat{G}_D = -\frac{1^4}{k + m_0} \quad (\text{XXII-24})$$

La fonction de GREEN s'obtient alors par transformée de FOURIER inverse :

$$G_D = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \hat{G}_D(k) e^{jkx} d^4k = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{jkx}}{k + m_0} d^4k \quad (\text{XXII-25})$$

Avec les mêmes manipulations que dans le paragraphe précédent, on obtient :

$$G_D = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jkx}}{-k + m_0} d^4k = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jkx}}{k - m_0} d^4k \quad (\text{XXII-26})$$

Comme dans les paragraphes I ou II, la fonction de GREEN peut être utilisée pour rechercher la solution d'une équation de DIRAC avec second membre :

$$(j\partial - m_0)\psi = J(x) \quad (\text{XXII-27})$$

La solution est donnée par le produit de convolution :

$$\psi(x) = \int J(x') G_D(x - x') dx' = \int J(x - x') G_D(x') dx' \quad (\text{XXII-28})$$

On rappelle que dans cette notation, x et x' représentent des quadrivecteurs associés aux variables temporelles et spatiales.

$J(x')$ est un terme ponctuel de source localisé à l'espace temps (t', x', y', z') . Il est à l'origine de la fonction d'onde ψ localisée à l'espace temps (t, x, y, z) .

En sommant toutes les contributions ponctuelles à l'aide de la fonction de GREEN, avec les décalages temporels et spatiaux adéquats $(t-t', x-x', y-y', z-z')$, on obtient la fonction d'onde $\psi(x)$ issue de la source $J(x')$.

L'interaction électromagnétique donne un sens physique à cette source que nous allons préciser dans le chapitre suivant.

XXIII – L’interaction électromagnétique

Pour une particule chargée, il existe une interaction entre le champ électromagnétique représenté par son quadrivecteur potentiel A_μ , et la fonction d’onde ψ associée à l’énergie de masse de la particule qui se déplace. Cette interaction se présente sous la forme de deux relations différentes et couplées que nous analysons dans ce chapitre.

I – Le quadrivecteur courant électromagnétique

Les équations de MAXWELL peuvent être exprimées en fonction du quadrivecteur potentiel, et des courants qui sont à l’origine des champs électromagnétiques rayonnés.

Dans la jauge de LORENZ, l’équation des potentiels est une équation d’onde avec second membre :

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu = \mu_0 J_{\mu e} \quad (\text{XXIII-1})$$

Avec la convention $c=1$:

$$\partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (\text{XXIII-2})$$

Dans cette expression, $J_{\mu e}(x)$ représente le quadrivecteur courant issu de la relativité restreinte. Ce quadrivecteur est obtenu en multipliant le quadrivecteur vitesse par la densité volumique de charge ρ_0 contenue dans un volume au repos V_0 . Cette quantité est invariante par changement de référentiel :

$$J_{\mu e} = \rho_0 (\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) \quad (\text{XXIII-3})$$

Pour une charge e répartie dans un volume V_0 :

$$J_{\mu e} = \frac{e}{V_0} (\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) \quad (\text{XXIII-4})$$

Considérons une particule décrite par son bispineur de DIRAC normalisé par rapport à la racine carré de son énergie. En admettant que son énergie est répartie sur un volume V_0 :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2V_0}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2V_0(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2V_0(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad (\text{XXIII-5})$$

$$\phi = \gamma\omega_0 \left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right)$$

Les courants de DIRAC relatifs à cette particule ont pour expression ($c=1$) :

$$J_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = \frac{1}{V_0}(\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) \quad (\text{XXIII-6})$$

Si cette particule porte une charge e répartie sur le volume V_0 , alors la quantité :

$$eJ_\mu = e\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = \frac{e}{V_0}(\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = J_{\mu e} \quad (\text{XXIII-7})$$

est exactement égale au courant électromagnétique $J_{\mu e}$ qui sert de source aux équations de MAXWELL.

On peut donc écrire l'équation des potentiels sous la forme :

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu = \mu_0 J_{\mu e} = \mu_0 e J_\mu = \mu_0 e \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \quad (\text{XXIII-8})$$

Cette relation montre qu'il existe une relation entre la particule chargée décrite par son bispineur de DIRAC et le potentiel électromagnétique.

Pour une particule chargée, il existe une autre relation qui relie le potentiel électromagnétique à la fonction d'onde de DIRAC. Elle a été établie par FOCK, et est identifiée sous l'appellation de couplage minimum :

$$(j\partial - e\mathbf{A} - m_0)\psi = 0 \quad (\text{XXIII-9})$$

Soit encore :

$$(j\partial - m_0)\psi = e\mathbf{A}\psi \quad (\text{XXIII-10})$$

Cette relation se présente sous la forme d'une équation de DIRAC avec second membre, c'est-à-dire avec source. Cette source est manifestement dépendante du potentiel électromagnétique.

En résumé, l'interaction électromagnétique avec une particule chargée décrite par une fonction d'onde de DIRAC est décrite par deux relations différentielles :

$$\begin{cases} \partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu = \mu_0 e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \\ (j\partial - m_0)\psi = eA\psi \end{cases} \quad (\text{XXIII-11})$$

Ce système est exprimé de manière particulièrement concise, et il est extrêmement complexe à résoudre. Sous cette forme, il semble bien adapté aux outils numériques qui traitent les systèmes différentiels comme les différences finies ou les éléments finis. Il est en revanche très difficile de progresser vers une solution analytique.

Les fonctions de GREEN des deux opérateurs différentiels ci-dessus sont connues :

$$\begin{cases} \partial_\alpha \partial^\alpha G_E(x) = \delta^4(x) \\ (j\partial - m_0)G_D(x) = \delta^4(x) \end{cases} \quad \begin{aligned} G_E(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jkx}}{k^2} d^4k \\ G_D(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jkx}}{k - m_0} d^4k \end{aligned} \quad (\text{XXIII-12})$$

L'utilisation de la fonction de GREEN permet de réécrire ce système sous la forme de 2 équations intégrales couplés :

$$\begin{cases} A_\mu(x) = \int \mu_0 e \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') G_E(x - x') d^4x' \\ \psi(x) = \int eA(x') \psi(x') G_D(x - x') d^4x' \end{cases} \quad (\text{XXIII-13})$$

Cette formulation intégrale est incomplète. Pour le montrer, on repère par un indice (0) les solutions des équations sans second membre :

$$\begin{cases} \partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu^{(0)} = 0 \\ (j\partial - m_0)\psi^{(0)} = 0 \end{cases} \quad (\text{XXIII-14})$$

Il est apparent que ces solutions peuvent être ajoutées aux solutions du système d'équations intégrales ci-dessus :

$$\begin{cases} A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + \int \mu_0 e \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') G_E(x - x') d^4x' \\ \psi(x) = \psi^{(0)}(x) + \int eA(x') \psi(x') G_D(x - x') d^4x' \end{cases} \quad (\text{XXIII-15})$$

Sous cette forme, le couplage électromagnétique montre un rôle analogue entre la propagation du champ électromagnétique et la propagation de la fonction d'onde de DIRAC.

La fonction de GREEN $G_D(x - x')$ est appelé le propagateur de FEYNMAN, en raison du sens physique que FEYNMAN lui a donné.

Pour progresser vers une expression de cette interaction, on suppose qu'une première approximation des solutions peut être obtenue en supposant que le potentiel est perturbé par la fonction d'onde de DIRAC qui existerait si elle n'était pas influencée par le potentiel ; et de même pour la fonction d'onde :

$$\begin{cases} A_{\mu}^{(1)}(x) = A_{\mu}^{(0)}(x) + \int \mu_0 e \bar{\psi}^{(0)}(x') \gamma_{\mu} \psi^{(0)}(x') G_E(x-x') d^4x' \\ \psi^{(1)}(x) = \psi^{(0)}(x) + \int e A^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x') G_D(x-x') d^4x' \end{cases} \quad (\text{XXIII-16})$$

Le second ordre est obtenu par un raisonnement analogue :

$$\begin{cases} A_{\mu}^{(2)}(x) = A_{\mu}^{(1)}(x) + \int \mu_0 e \bar{\psi}^{(1)}(x') \gamma_{\mu} \psi^{(1)}(x') G_E(x-x') d^4x' \\ \psi^{(2)}(x) = \psi^{(1)}(x) + \int e A^{(1)}(x') \psi^{(1)}(x') G_D(x-x') d^4x' \end{cases} \quad (\text{XXIII-17})$$

On peut ainsi progresser vers une évaluation de plus en plus précise de l'interaction, mais on conçoit que cette évaluation devient très vite fastidieuse. On obtient à l'ordre 2 pour la fonction d'onde de DIRAC :

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(x) &= \psi^{(1)}(x) + \int e A^{(1)} \psi^{(1)}(x') G_D(x-x') d^4x' \\ \psi^{(2)}(x) &= \psi^{(0)}(x) + \int e A^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x') G_D(x-x') d^4x' \\ &+ \int e \left(\gamma^{\mu} A_{\mu}^{(0)}(x') + \gamma^{\mu} \int \mu_0 e \bar{\psi}^{(0)}(x'') \gamma_{\mu} \psi^{(0)}(x'') G_E(x'-x'') d^4x'' \right) \left(\psi^{(0)}(x') + \int e A^{(0)}(x'') \psi^{(0)}(x'') G_D(x'-x'') d^4x'' \right) G_D(x-x') d^4x' \end{aligned} \quad (\text{XXIII-18})$$

Soit encore en ne conservant que les termes d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(x) &= \psi^{(0)}(x) + e \int A^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x') G_D(x-x') d^4x' \\ &+ e^2 \iint \left(A_{\mu}^{(0)}(x') A^{(0)}(x'') \psi^{(0)}(x'') G_D(x'-x'') G_D(x-x') \right. \\ &\left. + \mu_0 \gamma^{\mu} \psi^{(0)}(x') \bar{\psi}^{(0)}(x'') \gamma_{\mu} \psi^{(0)}(x'') G_E(x'-x'') G_D(x-x') \right) d^4x' d^4x'' \end{aligned} \quad (\text{XXIII-19})$$

Le traitement rigoureux de l'interaction électromagnétique que l'on doit en grande partie à FEYNMAN repose sur le système d'équations intégrales qui traduit l'influence réciproque de la fonction d'onde de DIRAC sur le champ électromagnétique.

Considérons en particulier la relation :

$$\psi(x) = \int e A(x') \psi(x') G_D(x-x') d^4x' \quad (\text{XXIII-20})$$

Son interprétation physique est analogue à toutes les précédentes. Elle représente l'expression de la fonction d'onde à l'espace-temps x , lorsqu'on connaît la fonction d'onde perturbée par le potentiel à l'espace-temps x' . On suppose ici que $\psi^{(0)}(x) = 0$, c'est-à-dire « qu'il n'y avait rien » en x avant l'arrivée de l'onde de DIRAC émise en x' .

Pour une fonction d'onde donnée ψ , à un point d'espace-temps fixe (x) , les invariants relativistes susceptibles de rendre compte du couplage sont peu nombreux, au nombre de 5 exactement.

Le plus simple d'entre d'eux est représenté par la quantité :

$$\bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (\text{XXIII-21})$$

Pour deux particules (a) et (b) différentes, situées au même point d'espace temps x , la relation de couplage devient :

$$\bar{\psi}_a(x)\psi_b(x) \quad (\text{XXIII-22})$$

Dans une approximation du premier ordre, si nous supposons que le champ électromagnétique A perturbe faiblement la fonction d'onde, nous pouvons conserver la même formule de couplage :

$$A_a(x)\bar{\psi}_a(x)A_b(x)\psi_b(x) \quad (\text{XXIII-23})$$

On ne peut pas transposer naïvement cette relation lorsque les particules (a) et (b) sont considérées en des points d'espace-temps différents (x) et (x').

Pour établir de manière heuristique, au premier ordre, une formulation de l'interaction entre deux particules (a) et (b) différentes, en deux points d'espace-temps différents (x) et (x'), nous devons généraliser la relation établie pour une seule particule :

$$\int eA(x')\psi(x')G_D(x-x')d^4x' \quad (\text{XXIII-24})$$

Cette généralisation consiste à faire jouer un rôle symétrique aux particules (a) et (b) situées en x et x' , afin de traduire une influence réciproque. On introduit pour cela une intégration suivant x analogue à l'intégration suivant x'

$$\iint eA_a(x)\bar{\psi}_a(x)G_D(x-x')eA_b(x')\psi_b(x')d^4x'd^4x \quad (\text{XXIII-25})$$

Cette relation permet de calculer au premier ordre l'élément de diffusion COMPTON. Bien que ce ne soit pas encore apparent, la valeur moyenne du terme d'interaction présent dans l'intégrale est nulle, sauf dans le cas particulier où l'équation de conservation de l'énergie est vérifiée. Ce n'est que lorsque cette condition est réalisée que les mélanges d'ondes entrantes permettent de « construire » les particules sortantes. On retrouve ainsi des éléments du formalisme décrit en première partie.

Pour terminer le calcul d'une diffusion COMPTON, nous devons préciser les phases de De BROGLIE des particules entrantes (indiquées par a) et sortantes (indiquées par b). La cohérence des signes de ces phases est dictée par l'équation de conservation de l'énergie :

| | | | |
|------------------------------------|----------|----------|------------|
| $\psi_a = u_a e^{-ip_a x}$ | Electron | incident | (XXIII-26) |
| $A_a = \varepsilon_a e^{ik_a x}$ | Photon | incident | |
| $\psi_b = u_b e^{-ip_b x'}$ | Electron | diffusé | |
| $A_b = \varepsilon_b e^{-jk_b x'}$ | Photon | diffusé | |

Ces phases sont introduites dans l'expression du couplage électromagnétique :

$$\iint e\mathbf{A}_a(x)\bar{\psi}_a(x)G_D(x-x')e\mathbf{A}_b(x')\psi_b(x')d^4x'd^4x = e^2 \iint \boldsymbol{\varepsilon}_a \bar{u}_a e^{j(p_a+k_a)x} G_D(x-x') \boldsymbol{\varepsilon}_b u_b e^{-j(p_b+k_b)x'} d^4x' d^4x \quad (\text{XXIII-27})$$

L'énergie totale en entrée et en sortie est représentée par les variables q_a et q_b dans un souci de simplification d'écriture :

$$\begin{aligned} p_a + k_a &= q_a \\ p_b + k_b &= q_b \end{aligned} \quad (\text{XXIII-28})$$

On extrait de l'intégrale les termes qui ne dépendent pas de x et x' :

$$e^2 \boldsymbol{\varepsilon}_a \bar{u}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b u_b \iint e^{jq_a x} G_D(x-x') e^{-jq_b x'} d^4x' d^4x \quad (\text{XXIII-29})$$

On introduit l'expression de la fonction de GREEN, ou propagateur de FEYNMAN, qui relie les fonctions d'onde en présence de champ électromagnétique, entre les points d'espace-temps x et x' .

$$e^2 \boldsymbol{\varepsilon}_a \bar{u}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b u_b \iint e^{jq_a x} \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jq(x-x')}}{q - m_0} d^4q \right) e^{-jq_b x'} d^4x' d^4x \quad (\text{XXIII-30})$$

On rassemble les termes en x et x' relatifs aux exponentielles :

$$\frac{e^2 \boldsymbol{\varepsilon}_a \bar{u}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b u_b}{(2\pi)^4} \iint \int \frac{e^{j(q_a - q)x} e^{j(q - q_b)x'}}{q - m_0} d^4q d^4x' d^4x \quad (\text{XXIII-31})$$

On utilise une des définitions intégrales de la distribution de DIRAC :

$$\begin{aligned} \int e^{j(q_a - q)x} d^4x &= (2\pi)^4 \delta^4(q_a - q) \\ \int e^{j(q - q_b)x'} d^4x' &= (2\pi)^4 \delta^4(q - q_b) \end{aligned} \quad (\text{XXIII-32})$$

On obtient le résultat qui traduit la diffusion électromagnétique d'un photon sur un électron :

$$\begin{aligned} e^2 \boldsymbol{\varepsilon}_a \bar{u}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b u_b (2\pi)^4 \int \frac{\delta^4(q_a - q) \delta^4(q - q_b)}{q - m_0} dq \\ e^2 \boldsymbol{\varepsilon}_a \bar{u}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b u_b (2\pi)^4 \int \delta^4(q - q_b) \frac{\delta^4(q_a - q)}{q - m_0} dq = e^2 \boldsymbol{\varepsilon}_a \bar{u}_a \boldsymbol{\varepsilon}_b u_b (2\pi)^4 \frac{\delta^4(q_a - q_b)}{q_b - m_0} \end{aligned} \quad (\text{XXIII-33})$$

Les termes $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ représentent les polarisations du photon incident (a) et diffusé (b).

Pour être en cohérence avec l'expression issue des graphes de FEYNMAN, ce terme doit être divisé par un terme de normalisation égal à $-j(2\pi)^4$.

La distribution de DIRAC $\delta^4(q_a - q_b)$ présente dans ce résultat correspond à l'équation de conservation de l'énergie $q_a = q_b$. En d'autres termes, l'interaction décrite par les relations intégrales (XXIII-27,29,30,31) ci-dessus ne peut avoir lieu que si la somme des phases de De BROGLIE des particules entrantes est identique, à chaque instant et en chaque point de l'espace, à la somme des phases de De BROGLIE des particules sortantes.

XXIV – L’interaction entre particules de DIRAC

La première partie de ce document a présenté une description grossière de l’interaction entre particules de DIRAC. Ce chapitre a pour objet d’affiner cette description en se fondant sur le système différentiel qui régit l’évolution de ces particules :

$$\begin{cases} \partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu = \mu_0 e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \\ (j\partial - m_0)\psi = eA\psi \end{cases} \quad (\text{XXIV-1})$$

On rappelle que dans cette écriture allégée, les constantes c et \hbar n’apparaissent pas car elles sont posées égales à l’unité par convention.

Le chapitre précédent a montré que l’interaction électromagnétique au premier ordre entre une particule de DIRAC chargée et un potentiel pouvait se déduire de la seconde relation.

Le système ci-dessus représente toute l’information dont nous disposons sur le comportement des particules de DIRAC. On doit donc pouvoir également en déduire l’interaction entre deux particules chargées représentées par un bispineur.

Toujours dans une approximation du premier ordre, nous nous intéressons à la première relation :

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu = \mu_0 e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (\text{XXIV-2})$$

La perméabilité du vide μ_0 peut être rendue égale à l’unité en utilisant le système d’unités CGS, qui est différent du système SI. Cette simplification permet un allègement d’écriture, et est désormais adoptée dans la suite de ce document.

On écrira donc :

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = eJ_\mu \quad (\text{XXIV-3})$$

Cette relation montre que pour une particule chargée, le quadrivecteur A_μ se propage par le biais d’une équation d’onde ordinaire, et il a pour source le courant de DIRAC attaché à la particule multiplié par la charge de l’électron. Au point d’espace-temps (x) , cette équation différentielle s’écrit :

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu(x) = eJ_\mu(x) \quad (\text{XXIV-4})$$

La fonction de GREEN $G(x)$ de l'opérateur d'équation d'onde est connue :

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jqx}}{q^2} d^4q \quad (\text{XXIV-5})$$

On en déduit la forme de la relation intégrale qui représente l'équation d'onde :

$$A_\mu(x) = \int eJ_\mu(x') G(x - x') d^4x' \quad (\text{XXIV-6})$$

La notion de photon étant directement liée à celle de potentiel électromagnétique, cette relation exprime la propagation d'un photon depuis sa source située au point d'espace-temps x' , jusqu'au point d'espace-temps x . Elle va servir de base à la construction de l'interaction entre deux particules chargées.

Pour illustrer une situation d'interaction, considérons un phénomène de diffusion avec 2 particules entrantes (a) et (b), et 2 particules sortantes (c) et (d).

Nous admettons que l'équation d'onde ci-dessus vaut également pour le courant d'interaction $J_{\mu ab}$ entre particules entrantes, et le courant d'interaction entre particules sortantes $J_{\mu cd}$:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial^\alpha A_{\mu ab} &= eJ_{\mu ab} \\ \partial_\alpha \partial^\alpha A_{\mu cd} &= eJ_{\mu cd} \end{aligned} \quad (\text{XXIV-7})$$

Parmi tous les phénomènes d'interaction possibles, considérons celui qui concerne l'interaction entre les courants d'entrée $J_{\mu ab}$ et les courants de sortie $J_{\mu cd}$.

Il s'agit d'une interaction entre 2 quadrivecteurs.

Si ces courants sont positionnés au même point d'espace-temps (x), alors l'interaction invariante par changement de référentiel la plus simple est donnée par le produit scalaire de ces courants dans l'espace de MINKOWSKY :

$$eJ_{\mu ab}(x)eJ_{\mu cd}(x) = e^2 J_{\mu ab}(x) J^{\mu cd}(x) \quad (\text{XXIV-8})$$

A gauche de l'égalité, le produit scalaire est symbolisé par un point.

A droite de l'égalité, le produit scalaire est décrit par un produit tensoriel entre un quadrivecteur covariant et un quadrivecteur contravariant.

Pour formuler une relation de couplage entre deux courants, l'un situé en (x), et l'autre en (x'), nous devons généraliser l'interaction (XXIV-8) en utilisant la relation intégrale (XXIV-6) qui traduit la propagation de la grandeur qui a pour origine ce courant. Cette généralisation consiste à faire jouer un rôle analogue à chacun des courants dans leur interaction à distance :

$$\iint eJ_{\mu ab}(x) G(x - x') eJ^{\mu cd}(x') d^4x d^4x' = e^2 \iint J_{\mu ab}(x) G(x - x') J_{\mu cd}(x') d^4x d^4x' \quad (\text{XXIV-9})$$

La relation ci-dessus suggère que le vecteur de l'interaction est un photon. Cette affirmation repose sur des arguments concrets, mais elle est néanmoins sujette à des discussions sur lesquelles nous reviendrons.

Pour illustrer comment cette relation permet de décrire une interaction, nous allons nous placer dans un cas particulier déjà examiné en première partie, celui de la diffusion électron-muon.

En entrée, nous avons un antiélectron (a) et un électron (b).
En sortie, nous avons un muon(c) et un antimuon (d)

Les phases de De BROGLIE correspondantes sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \psi_a &= u_a e^{ip_a x} && \text{antiélectron} && \text{incident} \\
 \psi_b &= u_b e^{-ip_b x} && \text{électron} && \text{incident} \\
 \psi_c &= u_c e^{-ip_c x} && \text{muon} && \text{diffusé} \\
 \psi_d &= u_d e^{ip_d x} && \text{antimuon} && \text{diffusé}
 \end{aligned}
 \tag{XXIV-10}$$

Le choix de ces phases, et des particules associées, est dicté par le fait que la relation d'interaction (XXIV-9) a une valeur moyenne nulle, sauf dans le cas où la phase globale de l'interaction est nulle. Cette condition correspond exactement à la condition de conservation de l'énergie :

$$p_a + p_b = p_c + p_d \tag{XXIV-11}$$

Le courant d'interaction entre l'antiparticule (a) et la particule (b) a pour expression :

$$J_{\mu ab}(x) = \bar{\psi}_a \gamma_\mu \psi_b = (\bar{u}_a \gamma_\mu u_b) e^{-j(p_a + p_b)x} \tag{XXIV-12}$$

Le courant d'interaction entre la particule (c) et l'antiparticule (d) a pour expression :

$$J_{\mu cd}(x) = \bar{\psi}_c \gamma_\mu \psi_d = (\bar{u}_c \gamma_\mu u_d) e^{j(p_c + p_d)x} \tag{XXIV-13}$$

On note que l'interaction entre les courants $J_{\mu ab}$ et $J_{\mu cd}$, prise au même point d'espace-temps(x), fournit une phase de De BROGLIE nulle :

$$e^{-j(p_a + p_b)x} e^{j(p_c + p_d)x} = e^{-j(p_a + p_b - p_c - p_d)x} = e^{-j0} = 1 \tag{XXIV-14}$$

Les règles de FEYNMAN formalisent cette condition de manière automatique, c'est-à-dire sans réflexion préalable sur la phase attribuée à chaque particule ou antiparticule entrante ou sortante.

Le terme d'interaction (XXIV-9) entre les courants de DIRAC entrant et sortant s'écrit alors :

$$e^2 \iint J_{\mu cd}(x) G(x - x') J_{\mu ab}(x') d^4 x d^4 x' = e^2 \iint (\bar{u}_c \gamma_\mu u_d) e^{j(p_c + p_d)x} G(x - x') (\bar{u}_a \gamma_\mu u_b) e^{-j(p_a + p_b)x'} d^4 x d^4 x'$$

(XXIV-15)

On notera que l'ordre dans lequel apparaissent les courants $J_{\mu ab}$ et $J_{\mu cd}$ est important dans l'expression du terme d'interaction (XXIV-15) ci-dessus. En d'autres termes, le point d'espace-temps (x') doit être associé à l'interaction initiale entre (a) et (b), tandis que le point d'espace-temps (x) doit être associé à l'interaction finale entre (c) et (d). C'est cette contrainte qui nécessite l'introduction d'un opérateur chronologique dans une théorie générale des interactions entre particules.

On peut extraire de l'intégrale les termes qui ne dépendent pas de x et x' :

$$(\bar{u}_c \gamma_\mu u_d)(\bar{u}_a \gamma_\mu u_b) e^2 \iint e^{j(p_c + p_d)x} G(x - x') e^{-j(p_a + p_b)x'} d^4 x d^4 x' \quad (XXIV-16)$$

On introduit l'expression explicite de la fonction de GREEN :

$$(\bar{u}_c \gamma_\mu u_d)(\bar{u}_a \gamma_\mu u_b) e^2 \iint e^{j(p_c + p_d)x} \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jq(x-x')}}{q^2} d^4 q \right) e^{-j(p_a + p_b)x'} d^4 x d^4 x' \quad (XXIV-17)$$

Dans un souci de simplification d'écriture, on pose :

$$\begin{aligned} p_a + p_b &= q_{ab} \\ p_c + p_d &= q_{cd} \end{aligned} \quad (XXIV-18)$$

On rassemble les termes exponentiels en x et x' :

$$\begin{aligned} &(\bar{u}_c \gamma_\mu u_d)(\bar{u}_a \gamma_\mu u_b) e^2 \iint e^{jq_{cd}x} \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-jq(x-x')}}{q^2} d^4 q \right) e^{-jq_{ab}x'} d^4 x d^4 x' \\ &\frac{(\bar{u}_c \gamma_\mu u_d)(\bar{u}_a \gamma_\mu u_b)}{(2\pi)^4} e^2 \iint \int \frac{e^{j(q_{cd}-q)x} e^{j(q-q_{ab})x'}}{q^2} d^4 x d^4 x' d^4 q \end{aligned} \quad (XXIV-19)$$

On utilise une définition intégrale de la distribution de DIRAC :

$$\begin{aligned} \int e^{j(q_{cd}-q)x} d^4 x &= (2\pi)^4 \delta^4(q_{cd} - q) \\ \int e^{j(q-q_{ab})x'} d^4 x' &= (2\pi)^4 \delta^4(q - q_{ab}) \end{aligned} \quad (XXIV-20)$$

On obtient finalement le terme d'interaction :

$$(2\pi)^4 (\bar{u}_c \gamma_\mu u_d)(\bar{u}_a \gamma_\mu u_b) e^2 \int \frac{\delta^4(q_{cd} - q) \delta^4(q - q_{ab})}{q^2} d^4 q = (2\pi)^4 e^2 \frac{(\bar{u}_c \gamma_\mu u_d)(\bar{u}_a \gamma_\mu u_b)}{q_{cd}^2} \delta^4(q_{cd} - q_{ab}) \quad (XXIV-21)$$

Comme dans le chapitre précédent, pour être en cohérence avec l'expression issue des graphes de FEYNMAN, ce terme doit être divisé par un terme de normalisation égal à $-j(2\pi)^4$.

Il existe d'autres possibilités d'interaction entre les courants de DIRAC qui associent 2 particules. Elles sont toutes dictées par l'équation de conservation de l'énergie :

$$P_a + P_b = P_c + P_d \quad (\text{XXIV-22})$$

Considérons par exemple, une représentation équivalente de cette relation :

$$P_a - P_d = P_c - P_b \quad (\text{XXIV-23})$$

On en déduit les courants $J_{\mu ad}$ et $J_{\mu cb}$:

$$\begin{aligned} J_{\mu ad}(x) &= \bar{\Psi}_a \gamma_\mu \Psi_d = (\bar{u}_a \gamma_\mu u_d) e^{-j(P_a - P_d)x} \\ J_{\mu cb}(x) &= \bar{\Psi}_c \gamma_\mu \Psi_b = (\bar{u}_c \gamma_\mu u_b) e^{j(P_c - P_b)x} \end{aligned} \quad (\text{XXIV-24})$$

Le produit scalaire d'interaction fait apparaître le terme :

$$J_{\mu ad}(x) \cdot J_{\mu cb}(x) = (\bar{u}_a \gamma_\mu u_d) e^{-j(P_a - P_d)x} \cdot (\bar{u}_c \gamma_\mu u_b) e^{j(P_c - P_b)x} = (\bar{u}_a \gamma_\mu u_d) (\bar{u}_c \gamma_\mu u_b) e^{-j(P_a + P_b - P_c - P_d)x} \quad (\text{XXIV-25})$$

Ce produit scalaire a une valeur nulle, sauf lorsque la relation de conservation de l'énergie est vérifiée. Il conduit à l'élément de diffusion :

$$e^2 \iint J_{\mu cb}(x) G(x - x') J_{\mu ad}(x') d^4x d^4x' = e^2 \iint (\bar{u}_c \gamma_\mu u_b) e^{j(P_c - P_b)x} G(x - x') (\bar{u}_a \gamma_\mu u_d) e^{-j(P_a - P_d)x'} d^4x d^4x' \quad (\text{XXIV-26})$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, l'ordre des courants d'interaction est important. Dans la situation examinée, l'interaction initiale a lieu entre (a) et (d), elle est associée au point d'espace-temps (x'), tandis que l'interaction finale a lieu entre (c) et (b) au point d'espace-temps (x).

On pose :

$$\begin{aligned} P_a - P_d &= q_{ad} \\ P_c - P_b &= q_{cb} \end{aligned} \quad (\text{XXIV-27})$$

On procède aux mêmes étapes que dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} &\frac{e^2 (\bar{u}_c \gamma_\mu u_b) (\bar{u}_a \gamma_\mu u_d)}{(2\pi)^4} \iiint \frac{e^{j(q_{cb} - q)x} e^{j(q - q_{ad})x'}}{q^2} d^4x d^4x' d^4q \\ &(2\pi)^4 (\bar{u}_c \gamma_\mu u_b) (\bar{u}_a \gamma_\mu u_d) e^2 \int \frac{\delta^4(q_{cb} - q) \delta^4(q - q_{ad})}{q^2} d^4q = (2\pi)^4 e^2 \frac{(\bar{u}_c \gamma_\mu u_b) (\bar{u}_a \gamma_\mu u_d)}{q_{cb}^2} \delta^4(q_{cb} - q_{ad}) \end{aligned} \quad (\text{XXIV-28})$$

Cette interaction correspond à la diffusion élastique dans la réaction étudiée.

Pour clore ce chapitre, on remarque que dans les deux réactions analysées, nous avons associé (a) à (b), puis (a) à (d) dans la construction des courants d'interaction.

La question qui vient à l'esprit est la suivante : existe-t-il une réaction qui associe (a) à (c), et par conséquent (b) et (d) ?

Les courants d'interaction correspondants sont les suivants :

$$\begin{aligned} J_{\mu ac}(x) &= \bar{\Psi}_a \gamma_\mu \Psi_c = (\bar{u}_a \gamma_\mu u_c) e^{-j(p_a + p_c)x} \\ J_{\mu bd}(x) &= \bar{\Psi}_b \gamma_\mu \Psi_d = (\bar{u}_b \gamma_\mu u_d) e^{j(p_b + p_d)x} \end{aligned} \quad (XXIV-29)$$

L'interaction entre ces courants au même point d'espace-temps (x) fait intervenir le produit scalaire :

$$(\bar{u}_a \gamma_\mu u_c) e^{-j(p_a + p_c)x} \cdot (\bar{u}_b \gamma_\mu u_d) e^{j(p_b + p_d)x} = (\bar{u}_a \gamma_\mu u_c) (\bar{u}_b \gamma_\mu u_d) e^{-j(p_a + p_c - p_b - p_d)x} \quad (XXIV-30)$$

Le terme de phase ne s'annule pas et il s'ensuit que l'interaction a toujours une valeur moyenne qui est nulle : une telle réaction ne peut pas avoir lieu.

En conclusion de ce chapitre, il apparaît que l'interaction entre courants de DIRAC est de nature vectorielle (ce à quoi on pouvait s'attendre), tandis que l'interaction électromagnétique du chapitre précédent est de nature scalaire.

Bibliographie

Les documents consultés concernent essentiellement la physique des particules, la théorie quantique des champs et les graphes de FEYNMAN.

Ces documents décrivent ces différents domaines avec quelques différences sur la forme, mais peu d'écart sur le fond. Ils privilégient souvent les aspects mathématiques des raisonnements complexes qui sont formulés, quelquefois au détriment des aspects physiques. Il n'a été trouvé, dans aucun des documents consultés, une référence à une voie purement énergétique similaire à celle qui est présentée dans ce mémoire.

L. Marleau, *Introduction à la physique des particules*, Université Laval, Québec, Canada, 2016

http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/intl/fr/marleau_ppnotes.pdf

M. Thomson, *Particle physics*, 2011,

<https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~thomson/partIIIparticles/welcome.html>

S. Teber, *Introduction à la théorie quantique des champs*, Sorbonne Université,

https://www.lpthe.jussieu.fr/~teber/Teaching/poly_TQC_part.pdf

F. Brümmer, *théorie quantique des champs*, 2018, <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-02000731>

A. Lawson, *Compton Scattering from Quantum Electrodynamics*, 2014,

https://www.personal.soton.ac.uk/ab1u06/teaching/qft/qft1/christmas_problems/2014/xmas_problem_solution.pdf

Krešimir Kumeričkiy, *Feynman Diagrams for Beginners*, 2016, <https://arxiv.org/pdf/1602.04182>

T. Ohl, *Feynman Diagrams For Pedestrians*, 2014,

https://www.ippp.dur.ac.uk/~mspannow/files/Feynman_Pedestrians.pdf

C. Longuemare, *Introduction aux graphes de Feynman*, 2010,

<http://claudel1.chez-alice.fr/documents/longuemare/grapheF.pdf>

M. Thomson, *Particle physics*, 2011,

<https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~thomson/partIIIparticles/welcome.html>

G. Burdman, *Quantum Electrodynamics*, http://fma.if.usp.br/~burdman/QFT1/lecture_18.pdf

A. Nelson, *Notes on Feynman diagrams*, 2008

https://researchgate.net/publication/255655091_NOTES_ON_FEYNMAN_DIAGRAMS

R. Kleiss, *Quantum Field Theory. A Diagrammatic Approach*, 2019,

<https://agenda.irmp.ucl.ac.be/event/3340/contributions/4015/attachments/2087/2506/qft.pdf>

B. Ydri, *Quantum Field Theory and Particle Physics*, 2016,

https://www.researchgate.net/publication/303966579_Quantum_Field_Theory_and_Particle_Physics_preliminary_version_1

G. Barnich, *Théorie quantique des champs*, Université libre de Bruxelles et international Solvay institutes, <http://homepages.ulb.ac.be/~gbarnich/TQC.pdf>

Sur l'aspect énergétique des solutions stationnaires de l'équation de Dirac :

P. Vaudon, *Une approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique*, 2018

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01223516>

P. Vaudon, *L'onde de de Broglie dans les solutions de l'équation de Dirac*, 2020

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02425969>

Sur la théorie de FERMI et les invariants de DIRAC:

E. Amaldi, *beta Decay opens the way to weak interactions*, Journal de Physique, Colloques, 1982, 43 (C8), pp.C8-261-C8-300. 10.1051/jphyscol:1982816. jpa-00222376

<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00222376>

J. Collot, *Edification de la théorie des interactions électrofaibles*, 2007-2008

<http://lpsc.in2p3.fr/atlas/cours/ElectroFaible.pdf>

W. Pauli, *Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac*, Annales de l'I. H. P.,
tome 6, no 2 (1936), p. 109-136, http://www.numdam.org/item/AIHP_1936__6_2_109_0/

A.G. Clark, *Introduction à la Physique des Particules Fondamentales*, 2011

http://dpnc.unige.ch/~clarka/COURS_ch3.pdf

C. Carimalo, *Les spineurs et matrices de Dirac*,

<https://physique-univ.fr/onewebmedia/Lagrangien-c7-site.pdf>