



**HAL**  
open science

# Une approche énergétique de l'interaction entre particules de DIRAC

Patrick Vaudon

► **To cite this version:**

Patrick Vaudon. Une approche énergétique de l'interaction entre particules de DIRAC. 2021. hal-03175984v1

**HAL Id: hal-03175984**

**<https://hal.science/hal-03175984v1>**

Preprint submitted on 22 Mar 2021 (v1), last revised 13 Dec 2022 (v10)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une approche énergétique de l'interaction entre particules de DIRAC



Patrick VAUDON

Xlim - Université de Limoges – France

## Table des matières

I - Introduction.....	3
II – Collision entre particules ponctuelles.....	4
III – Le quadrivecteur impulsion-énergie quantique pour des solutions purement sinusoïdales.....	8
IV – Le quadrivecteur impulsion-énergie quantique pour des solutions exponentielles.....	15
V – Relations de conservation entre particules de DIRAC dans une collision .....	20
VI – Collision entre particules de DIRAC .....	24
VII – La diffusion électrons-muons .....	32
VIII – Somme des spins .....	38
IX – La diffusion élastique.....	50
X - Le Photon de DIRAC .....	55
XI - Conclusion .....	60
Bibliographie .....	62

# I - Introduction

La notion de collision de particule à une place centrale dans l'évolution de nos connaissances de l'infiniment petit. Le seul procédé expérimental qui permet d'explorer la composition des particules consiste à les projeter les unes contre les autres et à examiner les morceaux qui jaillissent de cette rencontre. Plus le choc se produit avec une énergie importante, plus on peut espérer observer de nouveaux détails dans la gerbe de particules issues de la collision.

Deux collisions effectuées dans des préparations les plus identiques possibles conduisent à des gerbes de particules différentes. Il s'ensuit que le traitement effectué est un traitement statistique car on ne connaît pas à l'avance le résultat d'une collision. Dans ce domaine, les calculs relatifs aux sections efficaces et matrices de diffusion ont atteint une maturité telle qu'ils constituent des piliers robustes, efficaces, et précis dans la modélisation des collisions.

La collision en elle-même est une boîte noire qui n'est jamais décrite en physique. On connaît en général les particules qui entrent, celles qui sortent, et les règles de conservation de l'énergie et de l'impulsion qu'elles doivent respecter. Ces règles sont issues de la relativité restreinte et consistent globalement à écrire l'égalité du quadrivecteur impulsion énergie en entrée et en sortie.

Nous proposons dans ce document de décrire la collision en termes de solutions exactes à l'équation de DIRAC, que nous appellerons particule de DIRAC. Cette description contient plus d'informations que le traitement relativiste macroscopique de particules ponctuelles. Elle contient en plus l'état des bispineurs de DIRAC qui représentent les particules avant et après le choc.

On admettra que toute l'information sur chaque particule est contenue dans sa représentation de DIRAC.

On espère alors pouvoir déduire d'une écriture globale de l'interaction, à la fois une description macroscopique du phénomène, et une description microscopique qui conduit à l'évaluation de l'amplitude de diffusion.

A ce jour, les graphes de FEYNMAN sont les outils majeurs qui permettent le calcul de l'amplitude de diffusion d'une réaction. On tente dans ce document de montrer que ce calcul peut être abordé de manière différente et complémentaire.

La vision globale de l'interaction qui est présentée est purement énergétique, et le postulat de conservation de l'énergie y joue le rôle fondamental. C'est lui qui va créer les conditions qui permettent la transformation et la diffusion des particules créées, en combinant des échanges d'énergies très complexes à des fréquences très élevées.

## II – Collision entre particules ponctuelles

Le traitement relativiste de la collision de particules ponctuelles est fondé sur la représentation de la particule ponctuelle par son quadrivecteur impulsion-énergie.

On désigne par  $i$  le numéro de la particule qui intervient dans la collision. On adopte dans ce document la notation et représentation suivante pour le quadrivecteur associé à chaque particule  $i$  :

$$\tilde{P}_i = \left( \frac{E_i}{c}, p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} \right) \quad (\text{II-1})$$

$E_i$  représente l'énergie totale de la particule  $i$ , tandis que  $p_{ix}$ ,  $p_{iy}$ ,  $p_{iz}$  représentent ses composantes d'impulsion suivant chaque axe  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . On désigne par  $m_{i0}$  la masse au repos de la particule  $i$ .

Sans changer de notation, ce quadrivecteur pourra être multiplié par la vitesse de la lumière  $c$  lorsque cela sera utile pour lui donner une dimension énergétique.

Dans l'espace-temps des quadri-vecteurs, aussi appelé espace de MINKOWSKI, on peut définir un pseudo-produit scalaire analogue au produit scalaire des espaces vectoriels classiques. Dans une métrique  $(+, -, -, -)$ , le pseudo-produit scalaire de deux quadrivecteurs indicés  $i$  et  $j$  est un scalaire obtenu par le calcul suivant :

$$\tilde{P}_i \cdot \tilde{P}_j = \left( \frac{E_i}{c}, p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{E_j}{c} \\ p_{jx} \\ p_{jy} \\ p_{jz} \end{pmatrix} = \frac{E_i E_j}{c} - p_{ix} p_{jx} - p_{iy} p_{jy} - p_{iz} p_{jz} \quad (\text{II-2})$$

La quasi-totalité des outils de calculs utilisés pour l'étude des collisions relativistes repose sur la propriété suivante : à l'image du produit scalaire de deux vecteurs dans un espace vectoriel ordinaire, le pseudo-produit scalaire de deux quadrivecteurs est une constante. Cette constante ne dépend pas du référentiel dans lequel elle est calculée.

On peut par exemple choisir de calculer cette constante dans le référentiel ( $R_i$ ) où la particule  $i$  est au repos. Dans ces conditions, ses composantes d'impulsion sont nulles et on obtient :

$$\tilde{P}_i \cdot \tilde{P}_j = \frac{E_i E_j}{c} \quad (\text{II-3})$$

L'énergie totale de la particule i est alors égale à son énergie de masse :

$$E_i = m_{i0} c^2 \quad (\text{II-4})$$

Si on suppose que la vitesse relative de la particule j par rapport à la particule i est égale à v, alors l'énergie totale de la particule j, dans le référentiel (R<sub>i</sub>), est égale à :

$$E_j = \frac{m_{j0} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{II-5})$$

On en déduit le pseudo produit scalaire à la valeur suivante, quel que soit le référentiel dans lequel il est calculé :

$$\tilde{P}_i \cdot \tilde{P}_j = \left( \frac{E_i}{c}, p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} \right) \cdot \left( \frac{E_j}{c}, p_{jx}, p_{jy}, p_{jz} \right) = \frac{E_i E_j}{c^2} - p_{ix} p_{jx} - p_{iy} p_{jy} - p_{iz} p_{jz} = m_{i0} c \frac{m_{j0} c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{II-6})$$

Le cas i=j est un cas particulier très important : dans cette situation, le pseudo produit scalaire devient égal à la pseudo-norme au carré du quadrivecteur.

Après multiplication par c<sup>2</sup>, la pseudo-norme au carré du quadri-vecteur impulsion-énergie devient une constante qui est égale à l'énergie de masse au repos élevée au carré. Entre les composantes du quadrivecteur, on a donc la relation énergétique suivante :

$$E_i^2 - (cp_{ix})^2 - (cp_{iy})^2 - (cp_{iz})^2 = (m_{i0} c^2)^2 \quad (\text{II-7})$$

Dans la suite de ce document, nous désignons l'expression (II-7) par (pseudo-norme)<sup>2</sup>.

Nous proposons, tout au long de ce document, de traiter une collision typique faisant intervenir deux particules entrantes indicées (a) et (b), et deux particules sortantes indicées (c) et (d).

Avant le choc, le quadrivecteur impulsion-énergie  $\tilde{P}_e$  qui représente les deux particules entrantes a pour expression :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_e &= \tilde{P}_a + \tilde{P}_b = \left( \frac{E_a}{c}, p_{ax}, p_{ay}, p_{az} \right) + \left( \frac{E_b}{c}, p_{bx}, p_{by}, p_{bz} \right) \\ \tilde{P}_e &= \left( \frac{E_e}{c}, p_{ex}, p_{ey}, p_{ez} \right) = \left( \frac{E_a + E_b}{c}, p_{ax} + p_{bx}, p_{ay} + p_{by}, p_{az} + p_{bz} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-8})$$

Ce nouveau quadrivecteur, indicé par la lettre e, vérifie l'équation de conservation de l'énergie (II-7) :

$$\begin{aligned}
E_e^2 - (cp_{ex})^2 - (cp_{ey})^2 - (cp_{ez})^2 &= (m_{e0}c^2)^2 \\
(E_a + E_b)^2 - c^2(p_{ax} + p_{bx})^2 - c^2(p_{ay} + p_{by})^2 - c^2(p_{az} + p_{bz})^2 &= ((m_{a0} + m_{b0})c^2)^2
\end{aligned} \tag{II-9}$$

Après le choc, le quadrivecteur impulsion-énergie  $\tilde{P}_s$  qui représente les deux particules sortantes a pour expression :

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_s &= \tilde{P}_c + \tilde{P}_d = \left( \frac{E_c}{c}, p_{cx}, p_{cy}, p_{cz} \right) + \left( \frac{E_d}{c}, p_{dx}, p_{dy}, p_{dz} \right) \\
\tilde{P}_s &= \left( \frac{E_s}{c}, p_{sx}, p_{sy}, p_{sz} \right) = \left( \frac{E_c + E_d}{c}, p_{cx} + p_{dx}, p_{cy} + p_{dy}, p_{cz} + p_{dz} \right)
\end{aligned} \tag{II-10}$$

Ce nouveau quadri-vecteur, indicé par la lettre s, vérifie l'équation de conservation de l'énergie (II-7) :

$$\begin{aligned}
E_s^2 - (cp_{sx})^2 - (cp_{sy})^2 - (cp_{sz})^2 &= (m_{s0}c^2)^2 \\
(E_c + E_d)^2 - c^2(p_{cx} + p_{dx})^2 - c^2(p_{cy} + p_{dy})^2 - c^2(p_{cz} + p_{dz})^2 &= ((m_{c0} + m_{d0})c^2)^2
\end{aligned} \tag{II-11}$$

Les changements opérés durant la collision sont régis par l'égalité des quadrivecteurs impulsion-énergie avant et après le choc.

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_e &= \tilde{P}_s \\
\tilde{P}_a + \tilde{P}_b &= \tilde{P}_c + \tilde{P}_d
\end{aligned} \tag{II-12}$$

Cette égalité, appliquée aux composantes de ces quadrivecteurs, implique la conservation de l'énergie totale, et de l'énergie impulsionnelle suivant chaque direction de l'espace

$$\begin{aligned}
E_a + E_b &= E_c + E_d \\
p_{ax} + p_{bx} &= p_{cx} + p_{dx} \\
p_{ay} + p_{by} &= p_{cy} + p_{dy} \\
p_{az} + p_{bz} &= p_{cz} + p_{dz}
\end{aligned} \tag{II-13}$$

Les quadrivecteurs impulsion-énergie étant égaux avant et après le choc, cela implique l'égalité de leur (pseudo-norme)<sup>2</sup>, que l'on pose en général égal à s :

$$\begin{aligned}
s &= E_e^2 - (cp_{ex})^2 - (cp_{ey})^2 - (cp_{ez})^2 = E_s^2 - (cp_{sx})^2 - (cp_{sy})^2 - (cp_{sz})^2 \\
s &= (E_a + E_b)^2 - c^2(p_{ax} + p_{bx})^2 - c^2(p_{ay} + p_{by})^2 - c^2(p_{az} + p_{bz})^2 \\
s &= (E_c + E_d)^2 - c^2(p_{cx} + p_{dx})^2 - c^2(p_{cy} + p_{dy})^2 - c^2(p_{cz} + p_{dz})^2
\end{aligned} \tag{II-14}$$

A partir de l'égalité fondamentale (II-12), on peut former une autre égalité de quadri-vecteurs formée par différence :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_c = \tilde{\mathbf{P}}_d - \tilde{\mathbf{P}}_b \quad (\text{II-15})$$

Il s'ensuit que l'on peut écrire l'égalité de leur (pseudo-norme)<sup>2</sup> que l'on pose généralement égale à t :

$$\begin{aligned} t &= (E_a - E_c)^2 - c^2(p_{ax} - p_{cx})^2 - c^2(p_{ay} - p_{cy})^2 - c^2(p_{az} - p_{cz})^2 \\ t &= (E_d - E_b)^2 - c^2(p_{dx} - p_{bx})^2 - c^2(p_{dy} - p_{by})^2 - c^2(p_{dz} - p_{bz})^2 \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

A partir de (II-12) on peut former un autre quadri-vecteur par différence :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a - \tilde{\mathbf{P}}_d = \tilde{\mathbf{P}}_c - \tilde{\mathbf{P}}_b \quad (\text{II-17})$$

On en déduit une nouvelle (pseudo-norme)<sup>2</sup> désignée par u :

$$\begin{aligned} u &= (E_a - E_d)^2 - c^2(p_{ax} - p_{dx})^2 - c^2(p_{ay} - p_{dy})^2 - c^2(p_{az} - p_{dz})^2 \\ u &= (E_c - E_b)^2 - c^2(p_{cx} - p_{bx})^2 - c^2(p_{cy} - p_{by})^2 - c^2(p_{cz} - p_{bz})^2 \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

Les grandeurs s, t, u, portent l'appellation de variables de MANDELSTAM. Leur intérêt provient du fait que, en tant que (pseudo-norme)<sup>2</sup>, elles sont indépendantes du référentiel dans lequel elles sont calculées, par exemple référentiel du centre de masse, d'une particule quelconque, ou du laboratoire.

La méthode se généralise sans difficultés. On peut par exemple utiliser l'égalité des quadri-vecteurs :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b - \tilde{\mathbf{P}}_c = \tilde{\mathbf{P}}_d \quad (\text{II-19})$$

On en éduit l'égalité de leur (pseudo-norme)<sup>2</sup>, désignée par v :

$$\begin{aligned} v &= (E_a + E_b - E_c)^2 - c^2(p_{ax} + p_{bx} - p_{cx})^2 - c^2(p_{ay} + p_{by} - p_{cy})^2 - c^2(p_{az} + p_{bz} - p_{cz})^2 \\ v &= E_d^2 - (cp_{dx})^2 - (cp_{dy})^2 - (cp_{dz})^2 \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

Ces outils vont être utilisés dans les chapitres suivants, en relation avec le quadri-vecteur des courants de DIRAC.

# III – Le quadrivecteur impulsion- énergie quantique pour des solutions purement sinusoïdales

Les idées développées dans ce document reposent essentiellement sur les propriétés d'un quadrivecteur impulsion-énergie quantique qui est développé dans ce chapitre.

Ce quadrivecteur est celui qui est « naturellement » issu des solutions à l'équation de DIRAC à travers les courants de DIRAC. C'est le seul quadrivecteur que l'on peut construire directement à partir des composantes des bispineurs.

Pour un bispineur de DIRAC  $\psi$ , ces courants sont donnés par la relation :

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{III-1})$$

Les  $\gamma^\mu$  représentent les matrices de DIRAC et  $\bar{\psi}$  représente le bispineur adjoint de  $\psi$  :

$$\bar{\psi} = (\psi^*)^T \gamma^0 = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*) \quad (\text{III-2})$$

Quelques lignes de calcul permettent de présenter une expression développée de ces courants :

$$\begin{aligned} J^0 &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 = J_t \\ J^1 &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_0^* \psi_3 = J_x \\ J^2 &= j \psi_3^* \psi_0 - j \psi_2^* \psi_1 + j \psi_1^* \psi_2 - j \psi_0^* \psi_3 = J_y \\ J^3 &= \psi_2^* \psi_0 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_0^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_3 = J_z \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

Nous adoptons dans la suite les indices t, x, y, z qui rappellent que, dans une approche énergétique, ces courants représentent respectivement la densité volumique d'énergie totale, et la part de cette densité qui évolue dans les directions x, y, z.

Considérons une solution exacte à l'équation de DIRAC qui ne contient pas d'exponentielle complexe : une telle solution sera désignée sous l'appellation « purement sinusoïdale ».

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right) - j\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right) \\
\Psi_1 &= 0 \\
\Psi_2 &= -j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right) \\
\Psi_3 &= \frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right) - j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin\left(\gamma\omega_0\left(t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z\right)\right)
\end{aligned}
\tag{III-4}$$

L'énergie de masse au repos est représentée par la quantité :

$$\hbar\omega_0 = m_0c^2 \tag{III-5}$$

Les composantes de vitesse de la particule sont  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , et  $\gamma$  représente le facteur de LORENTZ. Pour la solution examinée, l'équation de conservation de l'énergie est équivalente à l'expression du facteur de LORENTZ en fonction des composantes de la vitesse :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{III-6}$$

Le calcul des courants de DIRAC est détaillé dans les lignes suivantes. Les paramètres des fonctions sinusoïdales ont été omis car ils sont tous identiques.

Première composante du quadrivecteur courant :

$$\begin{aligned}
J_t &= \Psi_0^*\Psi_0 + \Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2 + \Psi_3^*\Psi_3 \\
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \cos^2 + \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_z^2}{c^2} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_y^2}{c^2} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_x^2}{c^2} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \\
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left( 1 + \frac{v_x^2}{c^2} + \frac{v_y^2}{c^2} + \frac{v_z^2}{c^2} \right) \right\} = \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{III-7}$$

Deuxième composante du quadrivecteur courant :

$$\begin{aligned}
J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\
J_x &= \left\{ \begin{aligned} &\left( \frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin + j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left( \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \\ &+ \left( \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos + j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left( \frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin - j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \end{aligned} \right\} \\
J_x &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{v_y}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + j \frac{v_x}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos - j \frac{v_y}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_x}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \\ &+ \frac{v_y}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos - j \frac{v_x}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + j \frac{v_y}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_x}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \end{aligned} \right\} \\
J_x &= 2\hbar\omega_0 \left( \frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_x}{c} \sin^2 \right)
\end{aligned} \tag{III-8}$$

Troisième composante du quadrivecteur courant :

$$\begin{aligned}
J_y &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\
J_y &= j \left\{ \begin{aligned} &\left( \frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin + j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left( \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \\ &- \left( \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos + j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left( \frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin - j \frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \end{aligned} \right\} \\
J_y &= j \left\{ \begin{aligned} &\frac{v_y}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + j \frac{v_x}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos - j \frac{v_y}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 + \frac{v_x}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \\ &- \frac{v_y}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + j \frac{v_x}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos - j \frac{v_y}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 - \frac{v_x}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \end{aligned} \right\} \\
J_y &= 2\hbar\omega_0 \left( -\frac{v_x}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_y}{c} \sin^2 \right)
\end{aligned} \tag{III-9}$$

Quatrième composante du quadrivecteur courant :

$$\begin{aligned}
J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \\
J_z &= \left( j \frac{v_z}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left( \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) + \left( -j \frac{v_z}{c} \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \left( \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos + j \sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \right) \\
J_z &= j \frac{v_z}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + \frac{v_z}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 - j \frac{v_z}{c} \hbar\omega_0 \sin \cos + \frac{v_z}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2 \\
J_z &= 2 \frac{v_z}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2
\end{aligned} \tag{III-10}$$

En résumé, le quadrivecteur courant de DIRAC a pour expression :

$$\begin{aligned}
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \\
J_x &= 2\hbar\omega_0 \left( \frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_x}{c} \sin^2 \right) \\
J_y &= 2\hbar\omega_0 \left( -\frac{v_x}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_y}{c} \sin^2 \right) \\
J_z &= 2 \frac{v_z}{c} \hbar\gamma\omega_0 \sin^2
\end{aligned} \tag{III-11}$$

On en déduit sa valeur moyenne dans le temps en remplaçant les fonctions sinusoïdales au carré par leur moyenne temporelle, c'est-à-dire  $\frac{1}{2}$ . On rappelle que le produit de deux fonctions sinusoïdales différentes a une moyenne temporelle nulle. On obtient :

$$\begin{aligned}
\langle J_t \rangle &= \hbar\gamma\omega_0 = \gamma m_0 c^2 = mc^2 \\
\langle J_x \rangle &= \gamma \hbar\omega_0 \frac{v_x}{c} = \gamma m_0 c^2 \frac{v_x}{c} = \gamma m_0 c v_x = mc v_x \\
\langle J_y \rangle &= \gamma \hbar\omega_0 \frac{v_y}{c} = \gamma m_0 c^2 \frac{v_y}{c} = \gamma m_0 c v_y = mc v_y \\
\langle J_z \rangle &= \gamma \hbar\omega_0 \frac{v_z}{c} = \gamma m_0 c^2 \frac{v_z}{c} = \gamma m_0 c v_z = mc v_z
\end{aligned} \tag{III-12}$$

La valeur moyenne du quadrivecteur impulsion-énergie de DIRAC est identique au quadrivecteur impulsion-énergie que la relativité attribue à une particule ponctuelle.

Pour définir le quadrivecteur impulsion-énergie de DIRAC, nous avons utilisé l'expression habituelle de la définition des courants de DIRAC, ce qui nous a imposé les coefficients de la solution exacte examinée. Nous conserverons ce choix dans la suite de ce document, mais il n'a rien d'absolu puisqu'il est défini à une constante multiplicative près.

La remarque concernant la valeur moyenne du quadrivecteur impulsion-énergie de DIRAC n'est pas spécifique à la solution examinée (III-4). Afin de vérifier cette propriété, nous écrivons cette solution de manière abrégée :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= -j\frac{v_z}{c} \sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_3 &= \frac{v_y}{c} \sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin - j\frac{v_x}{c} \sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin
\end{aligned} \tag{III-13}$$

On obtient une autre solution exacte en ajoutant une phase de  $\pi/2$  à chacune des fonctions sinusoïdales (cos  $\rightarrow$  -sin et sin  $\rightarrow$  cos) :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= -\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \sin - j\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \cos \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= -j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \cos \\
\psi_3 &= \frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \cos - j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \cos
\end{aligned} \tag{III-14}$$

Les courants de DIRAC se déduisent de (III-11), et il est apparent que leur valeur moyenne est inchangée pour cette solution.

On peut examiner une solution dans laquelle les échanges entre énergie de masse et énergie ondulatoire sont portés par la composante  $\psi_1$ . On sait qu'une telle solution conduit à une inversion du spin par rapport à la précédente. On obtient :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_2 &= -\frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin - j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_3 &= j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin
\end{aligned} \quad \begin{aligned}
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \\
J_x &= 2\hbar\omega_0 \left( -\frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_x}{c} \sin^2 \right) \\
J_y &= 2\hbar\omega_0 \left( \frac{v_x}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_y}{c} \sin^2 \right) \\
J_z &= 2\frac{v_z}{c} \hbar\omega_0 \sin^2
\end{aligned} \tag{III-15}$$

La valeur moyenne du quadrivecteur courant est inchangée.

En dernier exemple, on peut considérer le cas de l'antiparticule, lorsque les échanges entre énergie de masse et énergie ondulatoire sont portés par la composante  $\psi_2$  ou  $\psi_3$ .

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_1 &= -\frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin + j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_2 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos + j\sqrt{\hbar\omega_0\gamma} \sin \\
\psi_3 &= 0
\end{aligned} \quad \begin{aligned}
J_t &= \frac{\hbar\omega_0}{\gamma} \left\{ \cos^2 + \gamma^2 \sin^2 \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \\
J_x &= 2\hbar\omega_0 \left( -\frac{v_y}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_x}{c} \sin^2 \right) \\
J_y &= 2\hbar\omega_0 \left( \frac{v_x}{c} \sin \cos + \gamma \frac{v_y}{c} \sin^2 \right) \\
J_z &= 2\frac{v_z}{c} \hbar\omega_0 \sin^2
\end{aligned} \tag{III-16}$$

La valeur moyenne du quadrivecteur courant est inchangée.

Il apparaît que la valeur moyenne de ce quadrivecteur reste identique, pour toute solution purement sinusoidale associée à une même phase de de BROGLIE.

Puisque les échanges d'énergie au cours d'une collision suivent les règles de conservation de l'énergie totale et de l'énergie impulsionnelle relativistes détaillées au

chapitre II, il s'ensuit que pour les particules de DIRAC, ces règles s'appliquent à la valeur moyenne du tenseur impulsion-énergie construit sur les courants de DIRAC.

Cette propriété a des conséquences.

Lorsque nous examinons une collision entre particules de DIRAC, il n'est pas nécessaire de construire une égalité entre les fonctions d'onde somme des particules incidentes et les fonctions d'onde somme des particules diffusées (une telle égalité semble d'ailleurs impossible à obtenir). Il suffit que les valeurs moyennes des courants de DIRAC pour les particules mises en jeu obéissent aux règles de conservation relativistes.

En d'autres termes, si on est capable de construire un quadrivecteur courants de DIRAC pour les particules incidentes, il suffira que les particules diffusées possèdent, en moyenne temporelle, un quadrivecteur courants de DIRAC identique aux particules incidentes. Toutes les particules diffusées qui possèdent cette propriété peuvent être potentiellement produites au cours de la collision.

La collision conduit à un brassage de modes extrêmement complexe entre les particules incidentes et diffusées, sur lequel nous essaierons de progresser dans la suite de ce document. L'analyse de l'évolution temporelle de ce brassage de modes au cours de la collision semble, pour l'instant, hors de portée d'une description analytique.

Les particules diffusées peuvent être des particules massives, des particules sans masse ou les antiparticules correspondantes. Elles doivent respecter deux conditions : en régime libre (après la collision), elles sont représentées par une solution exacte à l'équation de DIRAC, et le courant de DIRAC diffusé global doit être identique, en valeur moyenne, au courant de DIRAC incident global.

Les solutions purement sinusoïdales mettent en évidence des mouvements d'énergie très rapides au voisinage des particules libres de DIRAC. Ce phénomène présente une grande analogie avec la notion d'énergie réactive qui apparaît en champ proche en électromagnétisme.

Cette mise en évidence constitue une particularité qui est propre aux solutions purement sinusoïdales, et qui est masquée dans les solutions exponentielles. Sur ce point, l'analogie est importante avec l'électromagnétisme, et plus précisément avec le vecteur de POYNTING.

Afin d'illustrer cette remarque, considérons un champ électromagnétique décrit par ses deux vecteurs champ électrique et magnétique, supposés orthogonaux pour simplifier la présentation :

Représentation instantanée

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Représentation complexe associée

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}} &= \vec{E}_0 \exp j(\omega t + \varphi) \\ \underline{\vec{H}} &= \vec{H}_0 \exp j(\omega t)\end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

Le vecteur de POYNTING admet une représentation instantanée qui correspond à la description réelle du phénomène, où une représentation dans le formalisme complexe associé :

$$\bar{P} = \bar{E} \wedge \bar{H} = (\bar{E}_0 \wedge \bar{H}_0) \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) \quad \bar{P} = \frac{1}{2} \bar{E} \wedge \bar{H}^* = \frac{1}{2} (\bar{E}_0 \wedge \bar{H}_0) \exp(j\varphi) \quad (\text{III-18})$$

On constate que le vecteur de POYNTING instantané fait apparaître des fluctuations temporelles de la densité surfacique d'énergie, alors que ces fluctuations sont masquées dans le vecteur de POYNTING complexe.

Le vecteur de POYNTING instantané peut être développé :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} (\bar{E}_0 \wedge \bar{H}_0) (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)) \quad (\text{III-19})$$

Et il apparaît que c'est la valeur moyenne de cette expression qui correspond à la partie réelle du vecteur de POYNTING complexe :

$$\langle \bar{P} \rangle = \frac{1}{2} (\bar{E}_0 \wedge \bar{H}_0) \cos(\varphi) = \text{Re}(\bar{P}) \quad (\text{III-20})$$

# IV – Le quadrivecteur impulsion- énergie quantique pour des solutions exponentielles

L'équation de DIRAC possède des solutions construites autour de fonctions exponentielles complexes.

Nous recherchons dans ce chapitre la forme de ces solutions qui conduit à un quadrivecteur impulsion-énergie correspondant à celui d'une particule ponctuelle en relativité restreinte.

L'intérêt de ces solutions apparaît dans l'expression des courants de DIRAC :

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{IV-1})$$

Si le bispineur  $\psi$  comporte une exponentielle complexe identique dans chacun de ses membres, alors le bispineur adjoint  $\bar{\psi}$  contient le conjugué de la même exponentielle complexe.

Il s'ensuit que les courants de DIRAC n'ont plus de dépendance temporelle ou spatiale, et ils peuvent être qualifiés de courants uniformes dans le temps et dans l'espace. Cela conduit à une simplification significative de l'ensemble des calculs.

L'obtention des solutions exponentielles est détaillée dans de nombreux ouvrages, et n'est pas reprise dans ce document.

Les solutions de l'équation de DIRAC sont définies à un coefficient multiplicatif près. Sous réserve d'un choix pertinent de ce coefficient multiplicatif, on peut supposer que les solutions exponentielles peuvent représenter une particule de DIRAC ayant les mêmes propriétés d'énergie-impulsion qu'une particule ponctuelle.

Nous adoptons une représentation du bispineur de DIRAC présentée dans les chapitres précédents, qui fait appel aux composantes de vitesse de la particule, ainsi qu'au facteur de LORENTZ.

Pour alléger la présentation, nous omettons l'énergie de masse au repos qui vient en facteur de tous les termes :

$$\hbar\omega_0 = m_0c^2 \quad (\text{IV-2})$$

Avec cette simplification d'écriture, nous adoptons la représentation suivante du quadrivecteur impulsion énergie de la relativité restreinte :

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \frac{v_x}{c} \\ \gamma \frac{v_y}{c} \\ \gamma \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_x}{c} \\ \frac{v_y}{c} \\ \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{IV-3})$$

Considérons alors une particule décrite à l'aide de la phase de l'onde de de BROGLIE suivante :

$$\phi = \gamma\omega_0 \left( t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \quad (\text{IV-4})$$

Il existe quatre solutions à l'équation de DIRAC qui sont associées à la phase (IV-4). Ces solutions sont présentées ci-dessous avec un coefficient multiplicateur qui permet de retrouver la première composante du quadrivecteur impulsion-énergie (IV-3) (les détails du calcul sont présentés par la suite). Les raisons du choix de la notation pour ces solutions apparaîtront à la fin du chapitre.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad (\text{IV-5})$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad (\text{IV-6})$$

On admet que chaque solution est associée aux propriétés suivantes :

- $v^{(1)}$  représente une particule avec un spin up.
- $v^{(2)}$  représente une particule avec un spin down.
- $v^{(1)}$  représente une antiparticule avec un spin up.
- $v^{(2)}$  représente une antiparticule avec un spin down.

La notation exponentielle autorise une autre manière de représenter les mêmes particules avec la même onde de de BROGLIE en choisissant une phase opposée à la précédente :

$$-\phi = -\gamma\omega_0 \left( t - \frac{v_x}{c^2}x - \frac{v_y}{c^2}y - \frac{v_z}{c^2}z \right) \quad (\text{IV-7})$$

On obtient alors l'ensemble de solutions suivant, en changeant le signe de  $\gamma$  dans les solutions (IV-6) :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad (\text{IV-8})$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad (\text{IV-9})$$

Comme précédemment, on admet que chaque solution est associée aux propriétés suivantes :

- $\mathbf{u}^{(1)}$  représente une particule avec un spin up.
- $\mathbf{u}^{(2)}$  représente une particule avec un spin down.
- $\mathbf{u}^{(1)}$  représente une antiparticule avec un spin up.
- $\mathbf{u}^{(2)}$  représente une antiparticule avec un spin down.

Pour chacune de ces 8 solutions on peut calculer les courants de DIRAC correspondants et les comparer au quadrivecteur impulsion énergie d'une particule ponctuelle que nous avons explicité en (IV-3).

Nous détaillons la vérification de cette propriété sur les exemples particuliers des particules représentées par  $\mathbf{v}^{(1)}$  et  $\mathbf{u}^{(1)}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\
\mathbf{J}_t^{v(1)} &= \frac{1}{2(\gamma-1)} \left\{ (\gamma-1)^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right\} = \frac{1}{2(\gamma-1)} \left\{ 1 - 2\gamma + \gamma^2 \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} = \frac{1}{2(\gamma-1)} \{ 2\gamma^2 - 2\gamma \} = \gamma \\
\mathbf{J}_t^{u(1)} &= \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\{ (\gamma+1)^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right\} = \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\{ 1 + 2\gamma + \gamma^2 \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} = \frac{1}{2(\gamma+1)} \{ 2\gamma^2 + 2\gamma \} = \gamma
\end{aligned} \tag{IV-10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\
\mathbf{J}_x^{v(1)} &= \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) \left( \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \left( \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) = \gamma \frac{v_x}{c} \\
\mathbf{J}_x^{u(1)} &= \left( \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) + \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \left( \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) = \gamma \frac{v_x}{c}
\end{aligned} \tag{IV-11}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_y &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\
\mathbf{J}_y^{v(1)} &= j \left\{ \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) \left( \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) - \left( \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) \left( j \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \right\} = \gamma \frac{v_y}{c} \\
\mathbf{J}_y^{u(1)} &= j \left\{ \left( \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \right) - \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \right) \left( \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \right\} = \gamma \frac{v_y}{c}
\end{aligned} \tag{IV-12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \\
\mathbf{J}_z^{v(1)} &= \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left( \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \frac{v_z}{c} \right) = \gamma \frac{v_z}{c} \\
\mathbf{J}_z^{u(1)} &= \left( \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) + \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \right) \left( \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \right) = \gamma \frac{v_z}{c}
\end{aligned} \tag{IV-13}$$

Toutes les solutions de forme exponentielle ont leurs courants de DIRAC qui coïncident avec le quadrivecteur impulsion énergie de la particule représentée.

Pour une description cohérente de l'interaction entre particules, ces solutions ne peuvent pas être choisies au hasard. Il existe deux ensembles de solutions distincts : le premier utilise le facteur  $(\gamma - 1)$ , et le second utilise le facteur  $(\gamma + 1)$ . Ces deux ensembles sont équivalents, et le choix est arbitraire.

Nous adoptons dans la suite de ce document la représentation des bispineurs en fonction de  $(\gamma + 1)$ . Les 4 bispineurs associés à cette représentation sont rappelés ci-dessous :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi} \quad (\text{IV-14})$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x + jv_y}{c} \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \frac{v_z}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi} \quad (\text{IV-15})$$

Avec :

$$\phi = \gamma\omega_0 \left( t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \quad (\text{IV-16})$$

Conformément à cette représentation, les particules sont affectées d'une phase  $e^{-j\phi}$ , tandis que les antiparticules sont affectées d'une phase  $e^{j\phi}$  dans la suite de ce document.

# V – Relations de conservation entre particules de DIRAC dans une collision

Lors d'une collision entre particules ponctuelles, les relations de conservation de l'énergie totale et de l'énergie impulsionnelle ont été établies au chapitre II.

Nous proposons dans ce chapitre d'établir les relations analogues, lorsque les particules sont représentées par des bispineurs de DIRAC, et d'en vérifier la cohérence avec la relation relativiste de conservation de l'énergie et de l'impulsion pour les particules ponctuelles.

Considérons deux particules incidentes (a) et (b) qui sont supposées indépendantes.

Comme nous allons nous intéresser aux valeurs moyennes des courants de DIRAC, nous savons que nous pouvons choisir n'importe quelle représentation purement sinusoïdale.

Pour avancer dans le détail du raisonnement, nous choisissons une représentation déjà utilisée dans un chapitre précédent.

Nous prenons comme point de départ le bispineur obtenu en sommant les bispineurs relatifs aux particules (a) et (b) (voir relation III-13).

Dans une notation abrégée, nous posons :

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 &= \Psi_{a0} + \Psi_{b0} = \left( \sqrt{\frac{\hbar\omega_{a0}}{\gamma_a}} \cos\alpha_a + \sqrt{\frac{\hbar\omega_{b0}}{\gamma_b}} \cos\alpha_b \right) - j \left( \sqrt{\hbar\gamma_a\omega_{a0}} \sin\alpha_a + \sqrt{\hbar\gamma_b\omega_{b0}} \sin\alpha_b \right) \\
 \Psi_1 &= \Psi_{a1} + \Psi_{b1} = 0 \\
 \Psi_2 &= \Psi_{a2} + \Psi_{b2} = -j \left( \frac{v_{az}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_a\omega_{a0}} \sin\alpha_a + \frac{v_{bz}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_b\omega_{b0}} \sin\alpha_b \right) \\
 \Psi_3 &= \Psi_{a3} + \Psi_{b3} = \left( \frac{v_{ay}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_a\omega_{a0}} \sin\alpha_a + \frac{v_{by}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_b\omega_{b0}} \sin\alpha_b \right) - j \left( \frac{v_{ax}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_a\omega_{a0}} \sin\alpha_a + \frac{v_{bx}}{c} \sqrt{\hbar\gamma_b\omega_{b0}} \sin\alpha_b \right)
 \end{aligned}
 \tag{V-1}$$

La question à laquelle nous tentons de répondre est la suivante : Peut-on représenter ce « bispineur somme » par un bispineur équivalent  $\psi$  qui serait associé à une particule de DIRAC unique ?

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\gamma}} \cos - j\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \\
\Psi_1 &= 0 \\
\Psi_2 &= -j\frac{v_z}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin \\
\Psi_3 &= \frac{v_y}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin - j\frac{v_x}{c}\sqrt{\hbar\gamma\omega_0} \sin
\end{aligned} \tag{V-2}$$

La cohérence avec le formalisme ponctuel de la relativité restreinte implique que les courants de DIRAC doivent être égaux, en valeur moyenne temporelle :

$$\begin{aligned}
\langle J_t \rangle &= \langle J_{(a+b)t} \rangle \\
\langle J_x \rangle &= \langle J_{(a+b)x} \rangle \\
\langle J_y \rangle &= \langle J_{(a+b)y} \rangle \\
\langle J_z \rangle &= \langle J_{(a+b)z} \rangle
\end{aligned} \tag{V-3}$$

Pour la particule unique, ces valeurs moyennes ont déjà été calculées dans les chapitres précédents :

$$\begin{aligned}
\langle J_t \rangle &= \gamma\hbar\omega_0 \\
\langle J_x \rangle &= \gamma\hbar\omega_0 \frac{v_x}{c} \\
\langle J_y \rangle &= \gamma\hbar\omega_0 \frac{v_y}{c} \\
\langle J_z \rangle &= \gamma\hbar\omega_0 \frac{v_z}{c}
\end{aligned} \tag{V-4}$$

Pour le « bispineur somme », on obtient en considérant que les particules sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
\langle J_{(a+b)t} \rangle &= \hbar\gamma_a\omega_{a0} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \\
\langle J_{(a+b)x} \rangle &= \hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \\
\langle J_{(a+b)y} \rangle &= \hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \\
\langle J_{(a+b)z} \rangle &= \hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c}
\end{aligned} \tag{V-5}$$

L'égalité entre les relations (V-4) et (V-5) ci-dessus impose :

$$\begin{aligned}
\gamma\omega_0 &= \gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0} \\
\gamma\omega_0 v_x &= \gamma_a\omega_{a0} v_{ax} + \gamma_b\omega_{b0} v_{bx} \\
\gamma\omega_0 v_y &= \gamma_a\omega_{a0} v_{ay} + \gamma_b\omega_{b0} v_{by} \\
\gamma\omega_0 v_z &= \gamma_a\omega_{a0} v_{az} + \gamma_b\omega_{b0} v_{bz}
\end{aligned} \tag{V-6}$$

On en déduit les caractéristiques de la particule unique équivalente au « bispineur somme » :

$$\begin{aligned}
\gamma\omega_0 &= \gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0} \\
v_x &= \frac{\gamma_a\omega_{a0}v_{ax} + \gamma_b\omega_{b0}v_{bx}}{\gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0}} \\
v_y &= \frac{\gamma_a\omega_{a0}v_{ay} + \gamma_b\omega_{b0}v_{by}}{\gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0}} \\
v_z &= \frac{\gamma_a\omega_{a0}v_{az} + \gamma_b\omega_{b0}v_{bz}}{\gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0}}
\end{aligned} \tag{V-7}$$

Une relation analogue peut être établie pour les particules (c) et (d) qui sont diffusées après collision :

$$\begin{aligned}
\gamma\omega_0 &= \gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0} \\
v_x &= \frac{\gamma_c\omega_{c0}v_{cx} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dx}}{\gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0}} \\
v_y &= \frac{\gamma_c\omega_{c0}v_{cy} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dy}}{\gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0}} \\
v_z &= \frac{\gamma_c\omega_{c0}v_{cz} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dz}}{\gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0}}
\end{aligned} \tag{V-8}$$

On en déduit la relation générale qui doit être vérifiée entre les particules de DIRAC entrantes et sortantes de la collision :

$$\begin{aligned}
\gamma_a\omega_{a0} + \gamma_b\omega_{b0} &= \gamma_c\omega_{c0} + \gamma_d\omega_{d0} \\
\gamma_a\omega_{a0}v_{ax} + \gamma_b\omega_{b0}v_{bx} &= \gamma_c\omega_{c0}v_{cx} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dx} \\
\gamma_a\omega_{a0}v_{ay} + \gamma_b\omega_{b0}v_{by} &= \gamma_c\omega_{c0}v_{cy} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dy} \\
\gamma_a\omega_{a0}v_{az} + \gamma_b\omega_{b0}v_{bz} &= \gamma_c\omega_{c0}v_{cz} + \gamma_d\omega_{d0}v_{dz}
\end{aligned} \tag{V-9}$$

Après avoir redimensionné tous les termes en énergie, il apparaît que ces relations de conservation sont l'image exacte des relations obtenues pour une particule ponctuelle relativiste en (II-13) :

$$\begin{aligned}
\hbar\gamma_a\omega_{a0} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} &= \hbar\gamma_c\omega_{c0} + \hbar\gamma_d\omega_{d0} \\
\hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} &= \hbar\gamma_c\omega_{c0} \frac{v_{cx}}{c} + \hbar\gamma_d\omega_{d0} \frac{v_{dx}}{c} \\
\hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} &= \hbar\gamma_c\omega_{c0} \frac{v_{cy}}{c} + \hbar\gamma_d\omega_{d0} \frac{v_{dy}}{c} \\
\hbar\gamma_a\omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} + \hbar\gamma_b\omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} &= \hbar\gamma_c\omega_{c0} \frac{v_{cz}}{c} + \hbar\gamma_d\omega_{d0} \frac{v_{dz}}{c}
\end{aligned} \tag{V-10}$$

$$\begin{aligned}
E_a + E_b &= E_c + E_d \\
cp_{ax} + cp_{bx} &= cp_{cx} + cp_{dx} \\
cp_{ay} + cp_{by} &= cp_{cy} + cp_{dy} \\
cp_{az} + cp_{bz} &= cp_{cz} + cp_{dz}
\end{aligned}$$

On en déduit les variables de MANDELSTAM associées aux particules de DIRAC :

$$\begin{aligned}
s &= \hbar^2 \left\{ \left( \gamma_a \omega_{a0} + \gamma_b \omega_{b0} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \right)^2 \right\} \\
s &= \hbar^2 \left\{ \left( \gamma_c \omega_{c0} + \gamma_d \omega_{d0} \right)^2 - \left( \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cx}}{c} + \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dx}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cy}}{c} + \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dy}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cz}}{c} + \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dz}}{c} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{V-11}$$

$$\begin{aligned}
t &= \hbar^2 \left\{ \left( \gamma_a \omega_{a0} - \gamma_c \omega_{c0} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} - \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cx}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} - \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cy}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} - \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cz}}{c} \right)^2 \right\} \\
t &= \hbar^2 \left\{ \left( \gamma_d \omega_{d0} - \gamma_b \omega_{b0} \right)^2 - \left( \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dx}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dy}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dz}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{V-12}$$

$$\begin{aligned}
u &= \hbar^2 \left\{ \left( \gamma_a \omega_{a0} - \gamma_d \omega_{d0} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} - \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dx}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} - \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dy}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} - \gamma_d \omega_{d0} \frac{v_{dz}}{c} \right)^2 \right\} \\
u &= \hbar^2 \left\{ \left( \gamma_c \omega_{c0} - \gamma_b \omega_{b0} \right)^2 - \left( \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cx}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cy}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \right)^2 - \left( \gamma_c \omega_{c0} \frac{v_{cz}}{c} - \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{V-13}$$

# VI – Collision entre particules de DIRAC

Nous allons proposer dans ce chapitre une description de la collision de particules de DIRAC qui regroupe à la fois les aspects relativistes entre particules ponctuelles, et les aspects relativistes entre particules quantiques.

Pour illustrer cette description, nous traiterons le cas d'une collision avec 2 particules entrantes notées (a) et (b), et deux particules sortantes notées (c) et (d).

Pour valider l'approche qui est proposée, nous aurons besoin de comparer nos résultats avec l'amplitude de diffusion obtenue par les graphes de FEYNMAN. Cette amplitude est calculée à partir de solutions exponentielles à l'équation de DIRAC, et donc, ce sont les solutions exponentielles qui vont être utilisées dans la suite de ce document.

Il existe plusieurs manières de normaliser ces solutions. Dans l'objectif d'une description physique des phénomènes, nous allons utiliser une normalisation qui permet, pour une particule indépendante, de faire en sorte que ses courants de DIRAC soient identiques au quadrivecteur impulsion énergie de la relativité restreinte. Ce quadrivecteur est représenté sous une forme utilisée dans les chapitres précédents, avec des composantes qui ont la dimension d'une énergie (à une constante de PLANCK près) :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \gamma\omega_0 \\ \gamma\omega_0 \frac{v_x}{c} \\ \gamma\omega_0 \frac{v_y}{c} \\ \gamma\omega_0 \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} = \gamma\omega_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_x}{c} \\ \frac{v_y}{c} \\ \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{VI-1})$$

La quantité  $\hbar\omega_0 = m_0c^2$  représente l'énergie de masse au repos.

## I – Les courants d'interaction

Soit deux particules de DIRAC indépendantes notées (a) et (b). Chaque particule est décrite par son bispineur :

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} \quad \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} \quad (\text{VI-2})$$

Ce chapitre utilise les propriétés d'une particule équivalente obtenue en sommant ces deux bispineurs :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \Psi_a + \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} + \Psi_{b0} \\ \Psi_{a1} + \Psi_{b1} \\ \Psi_{a2} + \Psi_{b2} \\ \Psi_{a3} + \Psi_{b3} \end{pmatrix} \quad (\text{VI-3})$$

Les courants de DIRAC de la particule équivalente sont donnés par les relations habituelles :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_y &= j \Psi_3^* \Psi_0 - j \Psi_2^* \Psi_1 + j \Psi_1^* \Psi_2 - j \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \end{aligned} \quad (\text{VI-4})$$

Pour exprimer ces courants en fonction des courants des particules (a) et (b), on effectue un développement, détaillé ci-dessous sur la composante  $J_t$  :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_t &= \left\{ \begin{aligned} &(\Psi_{a0}^* + \Psi_{b0}^*)(\Psi_{a0} + \Psi_{b0}) + (\Psi_{a1}^* + \Psi_{b1}^*)(\Psi_{a1} + \Psi_{b1}) \\ &+ (\Psi_{a2}^* + \Psi_{b2}^*)(\Psi_{a2} + \Psi_{b2}) + (\Psi_{a3}^* + \Psi_{b3}^*)(\Psi_{a3} + \Psi_{b3}) \end{aligned} \right\} \\ J_t &= \left\{ \begin{aligned} &\Psi_{a0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b1} \\ &\Psi_{a2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{b3}^* \Psi_{b3} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI-5})$$

On y retrouve les courants relatifs à chacune des particules (a) et (b) :

$$\begin{aligned} J_{at} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} \\ J_{bt} &= \Psi_{b0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{b1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{b2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{b3}^* \Psi_{b3} \end{aligned} \quad (\text{VI-6})$$

Ainsi que les courants d'interaction entre les particules (a) et (b) :

$$\begin{aligned} J_{abt} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} \\ J_{bat} &= \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} \end{aligned} \quad (\text{VI-7})$$

En procédant de manière analogue pour chaque composante, les courants de la particule équivalente apparaissent sous la forme :

$$\begin{aligned}
J_{it} &= J_{at} + J_{bt} + J_{abt} + J_{bat} \\
J_{ix} &= J_{ax} + J_{bx} + J_{abx} + J_{bax} \\
J_{iy} &= J_{ay} + J_{by} + J_{aby} + J_{bay} \\
J_{iz} &= J_{az} + J_{bz} + J_{abz} + J_{baz}
\end{aligned} \tag{VI-8}$$

L'indice i a été ajouté pour rappeler que les particules (a) et (b) représentent l'état initial du système, avant la collision.

Les quadrivecteurs courants qui apparaissent à droite de l'égalité ci-dessus sont représentatifs des courants associés à la particule (a), à la particule (b), et à l'interaction entre les particules (a) et (b).

$$\tilde{J}_a = \begin{pmatrix} J_{at} \\ J_{ax} \\ J_{ay} \\ J_{az} \end{pmatrix} \quad \tilde{J}_b = \begin{pmatrix} J_{bt} \\ J_{bx} \\ J_{by} \\ J_{bz} \end{pmatrix} \quad \tilde{J}_{ab} + \tilde{J}_{ba} = \begin{pmatrix} J_{abt} + J_{bat} \\ J_{abx} + J_{bax} \\ J_{aby} + J_{bay} \\ J_{abz} + J_{baz} \end{pmatrix} \tag{VI-9}$$

Nous savons, au vu lors des chapitres précédents, que pour des solutions exponentielles convenablement choisies, les courants associés à la particule (a) et à la particule (b) représentent le quadrivecteur impulsion énergie d'une particule ponctuelle :

$$\tilde{J}_a = \begin{pmatrix} \gamma_a \omega_{a0} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} \end{pmatrix} = \tilde{P}_a \quad \tilde{J}_b = \begin{pmatrix} \gamma_b \omega_{b0} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \end{pmatrix} = \tilde{P}_b \quad \begin{aligned} \gamma_a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \\ \gamma_b &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{bx}^2 + v_{by}^2 + v_{bz}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{VI-10}$$

Le quadrivecteur courant de la particule équivalente aux particules (a) et (b) se présente donc sous la forme :

$$\tilde{J}_i = \tilde{P}_a + \tilde{P}_b + \tilde{J}_{ab} + \tilde{J}_{ba} \tag{VI-11}$$

On y retrouve le quadrivecteur impulsion-énergie utilisé pour le traitement des particules ponctuelles relativistes, qui est égal à la somme des quadrivecteurs associés aux particules (a) et (b).

On y retrouve en plus un quadrivecteur d'interaction entre les particules (a) et (b), dont la moyenne temporelle est nulle sauf dans un cas particulier que nous allons préciser. Dans une approche énergétique, ce quadrivecteur est associé à une énergie réactive qui entoure la particule équivalente.

Le même traitement peut être développé pour les particules sortantes (c) et (d).

En ajoutant l'indice f pour rappeler que les particules (c) et (d) sont associées à l'état final, on peut écrire :

$$\tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d + \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc} \quad (\text{VI-12})$$

En termes de particules équivalentes associées aux états initial et final, la réaction produite lors de la collision peut être schématisée de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{J}}_i = \tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b + \tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba} \rightarrow \tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d + \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc} \quad (\text{VI-13})$$

On sait que d'un point de vue relativiste, la somme des quadrivecteurs des particules entrantes est égale à la somme des quadrivecteurs des particules sortantes :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d \quad (\text{VI-14})$$

On s'interroge alors sur le rôle des courants d'interactions.

Ces courants représentent des mouvements d'énergie oscillatoires extrêmement complexes et rapides dans le voisinage des particules d'entrée et des particules de sortie.

Il n'y a aucune raison pour que ces courants soient identiques dans la relation (VI-13) ci-dessus, et c'est dans le mélange propre à la collision qu'il doit y avoir une évolution des courants d'interactions d'entrée vers les courants d'interactions de sortie.

Nous conjecturons alors que cette évolution est en lien direct avec le produit scalaire (au sens de MINKOWSKY) de ces courants.

En d'autres termes, l'amplitude de diffusion doit apparaître de manière proportionnelle dans le produit scalaire  $M$  du courant d'interaction initial par le courant d'interaction final.

$$M = (\tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba})(\tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc}) \quad (\text{VI-15})$$

Ce produit scalaire représente en quelque sorte le degré de ressemblance entre les courants d'interaction initiaux et finaux, ou dit autrement, la part des courants initiaux que l'on peut retrouver dans les courants finaux. Il a un sens physique tout à fait analogue à celui du produit scalaire d'une force par un déplacement qui quantifie la part de la force qui contribue au travail réalisé.

On retrouve un sens physique équivalent dans d'autres domaines complètement disjoints, par exemple pour estimer la direction d'arrivée d'un signal dans les méthodes dites « haute résolution » (voir [lien document](#) pour plus de détails)

## **II – Collisions entre particule et antiparticule**

Chaque particule ou antiparticule est représentée par une solution exacte de l'équation de DIRAC, sous une forme exponentielle. Le terme de phase inclus dans l'exponentielle va jouer un rôle déterminant dans le processus qui va être décrit. Pour cette raison, il est mis en évidence dans les solutions de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Psi_a &= \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{a0} \\ \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{a2} \\ \mathbf{u}_{a3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} = \mathbf{u}_a e^{-j\phi_a} & \Psi_b &= \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{b0} \\ \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{b2} \\ \mathbf{u}_{b3} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} = \mathbf{u}_b e^{j\phi_b} \\
\Psi_c &= \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{c0} \\ \mathbf{u}_{c1} \\ \mathbf{u}_{c2} \\ \mathbf{u}_{c3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} = \mathbf{u}_c e^{-j\phi_c} & \Psi_d &= \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{d1} \\ \Psi_{d2} \\ \Psi_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{d0} \\ \mathbf{u}_{d1} \\ \mathbf{u}_{d2} \\ \mathbf{u}_{d3} \end{pmatrix} e^{j\phi_d} = \mathbf{u}_d e^{j\phi_d}
\end{aligned} \tag{VI-16}$$

Dans le respect des solutions exponentielles à l'équation de DIRAC qui ont été définies au chapitre IV, (a) et (c) représentent des particules, tandis que (b) et (d) représentent des antiparticules.

On rappelle que les indices (a) et (b) représentent les particules entrantes dans la réaction, et (c) et (d) les particules sortantes.

La phase représente une onde de BROGLIE qui est exprimée en fonction des caractéristiques de vitesse ( $v_x, v_y, v_z$ ) et de l'énergie au repos ( $\omega_0$ ) de chaque particule.

$$\begin{aligned}
\phi_a &= \gamma_a \omega_{a0} \left( t - \frac{v_{ax}}{c^2} x - \frac{v_{ay}}{c^2} y - \frac{v_{az}}{c^2} z \right) \\
\phi_b &= \gamma_b \omega_{b0} \left( t - \frac{v_{bx}}{c^2} x - \frac{v_{by}}{c^2} y - \frac{v_{bz}}{c^2} z \right) \\
\phi_c &= \gamma_c \omega_{c0} \left( t - \frac{v_{cx}}{c^2} x - \frac{v_{cy}}{c^2} y - \frac{v_{cz}}{c^2} z \right) \\
\phi_d &= \gamma_d \omega_{d0} \left( t - \frac{v_{dx}}{c^2} x - \frac{v_{dy}}{c^2} y - \frac{v_{dz}}{c^2} z \right)
\end{aligned} \tag{VI-17}$$

L'équation de conservation de l'énergie pour des particules de DIRAC a été établie dans un chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
\gamma_a \omega_{a0} + \gamma_b \omega_{b0} &= \gamma_c \omega_{c0} + \gamma_d \omega_{d0} \\
\gamma_a \omega_{a0} v_{ax} + \gamma_b \omega_{b0} v_{bx} &= \gamma_c \omega_{c0} v_{cx} + \gamma_d \omega_{d0} v_{dx} \\
\gamma_a \omega_{a0} v_{ay} + \gamma_b \omega_{b0} v_{by} &= \gamma_c \omega_{c0} v_{cy} + \gamma_d \omega_{d0} v_{dy} \\
\gamma_a \omega_{a0} v_{az} + \gamma_b \omega_{b0} v_{bz} &= \gamma_c \omega_{c0} v_{cz} + \gamma_d \omega_{d0} v_{dz}
\end{aligned} \tag{VI-18}$$

Ces relations expriment le fait qu'à chaque instant  $t$ , et en chaque point de l'espace ( $x, y, z$ ), les phases de de BROGLIE doivent respecter les conditions :

$$\phi_a + \phi_b = \phi_c + \phi_d \tag{VI-19}$$

En notation abrégé, nous écrirons désormais cette relation :

$$\begin{aligned}
\phi_a + \phi_b &= \phi_{ab} & \phi_{ab} &= \phi_{cd} \\
\phi_c + \phi_d &= \phi_{cd} & \phi_{ab} - \phi_{cd} &= 0
\end{aligned}
\tag{VI-20}$$

La relation (VI-20) ci-dessus joue un rôle fondamental dans le processus d'interaction entre les particules entrantes (a) et (b), et les particules sortantes (c) et (d). Elle signifie que la phase de l'onde de de BROGLIE  $\phi_{ab}$  qui est associée à la somme des particules entrantes doit être égale à la phase de l'onde de de BROGLIE  $\phi_{cd}$  associée à la somme des particules sortantes.

Lorsqu'on examine les courants d'interaction de DIRAC (qui vont être détaillés par la suite), on constate que la phase du courant d'interaction a pour expression :

Pour les particules (a) et (b) :  $(\phi_a + \phi_b)$  ou  $-(\phi_a + \phi_b)$   
 Pour les particules (c) et (d) :  $(\phi_c + \phi_d)$  ou  $-(\phi_c + \phi_d)$

Au cours de la réaction de diffusion, les interactions qui résultent du pseudo-produit scalaire entre les particules entrantes (a)(b) et sortantes (c)(d) sont associées aux phases suivantes :

$$\begin{aligned}
-(\phi_a + \phi_b) - (\phi_c + \phi_d) &= -(\phi_{ab} + \phi_{cd}) \\
-(\phi_a + \phi_b) + (\phi_c + \phi_d) &= -(\phi_{ab} - \phi_{cd}) = 0 \\
(\phi_a + \phi_b) - (\phi_c + \phi_d) &= \phi_{ab} - \phi_{cd} = 0 \\
(\phi_a + \phi_b) + (\phi_c + \phi_d) &= (\phi_{ab} + \phi_{cd})
\end{aligned}
\tag{VI-21}$$

Lorsqu'on introduit ces phases dans une exponentielle complexe, on obtient deux phases qui sont conjuguées l'une de l'autre. Une de ces phase est associée à l'interaction de (a)(b) vers (c)(d), l'autre à l'interaction de (c)(d) vers (a)(b). Le traitement symétrique qui est effectué contient implicitement ces deux interactions.

D'une manière générale, ces phases génèrent des variations sinusoïdales extrêmement rapides dont la valeur moyenne est nulle, sauf dans le cas particulier où ces phases sont égales à 0.

Dans les deux cas où les phases globales sont nulles (2ème ligne et 3ème ligne de VI-21), les exponentielles de ces phases sont égales à 1, et le phénomène d'interaction n'a plus une valeur moyenne qui est nulle.

Nous proposons de détailler la forme des courants d'interaction, en nous plaçant dans les conditions que nous venons d'établir.

### **III – Eléments de calcul pour l'amplitude de diffusion**

Nous rappelons la représentation de DIRAC qui a été adoptée pour les particules et les antiparticules qui vont interagir :

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{a0} \\ \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{a2} \\ \mathbf{u}_{a3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} = \mathbf{u}_a e^{-j\phi_a} \quad \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{b0} \\ \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{b2} \\ \mathbf{u}_{b3} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} = \mathbf{u}_b e^{j\phi_b} \quad (\text{VI-22})$$

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{c0} \\ \mathbf{u}_{c1} \\ \mathbf{u}_{c2} \\ \mathbf{u}_{c3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} = \mathbf{u}_c e^{-j\phi_c} \quad \Psi_d = \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{d1} \\ \Psi_{d2} \\ \Psi_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{d0} \\ \mathbf{u}_{d1} \\ \mathbf{u}_{d2} \\ \mathbf{u}_{d3} \end{pmatrix} e^{j\phi_d} = \mathbf{u}_d e^{j\phi_d}$$

Dans cet exemple, les bispineurs (a) et (c) représentent des particules, tandis que les bispineurs (b) et (d) représentent des antiparticules

Les courants d'interaction entre (a) et (b) peuvent être précisés. On obtient sur la première composante (qui est indiquée par la lettre t) :

$$\begin{aligned} J_{abt} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} \\ J_{abt} &= (\mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b1} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b3}) e^{j(\phi_a + \phi_b)} = \mathbf{K}_{abt} e^{j\phi_{ab}} \\ J_{bat} &= \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} \\ J_{bat} &= (\mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{a1} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{a3}) e^{-j(\phi_a + \phi_b)} = \mathbf{K}_{bat} e^{-j\phi_{ab}} = \mathbf{K}_{abt}^* e^{-j\phi_{ab}} \end{aligned} \quad (\text{VI-23})$$

On note que les courants  $J_{abt}$  et  $J_{bat}$  sont conjugués, mais il est opportun pour l'instant de les conserver dans leur forme ci-dessus.

Avec cette notation qui permet de laisser la phase de de BROGLIE apparente, les courants d'interaction (a)(b) et (c)(d) sont résumés ci-dessous :

$$\begin{aligned} J_{abt} + J_{bat} &= \mathbf{K}_{abt} e^{j\phi_{ab}} + \mathbf{K}_{bat} e^{-j\phi_{ab}} & J_{cdt} + J_{dct} &= \mathbf{K}_{cdt} e^{j\phi_{cd}} + \mathbf{K}_{dct} e^{-j\phi_{cd}} \\ J_{abx} + J_{bax} &= \mathbf{K}_{abx} e^{j\phi_{ab}} + \mathbf{K}_{bax} e^{-j\phi_{ab}} & J_{cdx} + J_{dcx} &= \mathbf{K}_{cdx} e^{j\phi_{cd}} + \mathbf{K}_{dcx} e^{-j\phi_{cd}} \\ J_{aby} + J_{bay} &= \mathbf{K}_{aby} e^{j\phi_{ab}} + \mathbf{K}_{bay} e^{-j\phi_{ab}} & J_{cdy} + J_{dcy} &= \mathbf{K}_{cdy} e^{j\phi_{cd}} + \mathbf{K}_{dcy} e^{-j\phi_{cd}} \\ J_{abz} + J_{baz} &= \mathbf{K}_{abz} e^{j\phi_{ab}} + \mathbf{K}_{baz} e^{-j\phi_{ab}} & J_{cdz} + J_{dcz} &= \mathbf{K}_{cdz} e^{j\phi_{cd}} + \mathbf{K}_{dcz} e^{-j\phi_{cd}} \end{aligned} \quad (\text{VI-24})$$

Où encore dans une notation plus concise :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}} = \tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab}^* e^{-j\phi_{ab}} \quad \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}} = \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{cd}^* e^{-j\phi_{cd}} \quad (\text{VI-25})$$

Il faut, pour terminer, effectuer le pseudo produit scalaire M des interactions (a)(b) et (c)(d). Ce pseudo produit scalaire est symbolisé par un point (.). Il est relatif à une métrique (+, -, -, -).

$$\begin{aligned} M &= (\tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}}) (\tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}}) \\ M &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}} \\ M &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{-j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} \end{aligned} \quad (\text{VI-26})$$

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que l'interaction moyenne est nulle sauf lorsque la condition de conservation de l'énergie est réalisée :  $\phi_{ab} - \phi_{cd} = 0$ .

Nous en concluons que la valeur moyenne du pseudo produit scalaire est égal à la quantité :

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \tilde{K}_{ab} \cdot \tilde{K}_{dc} + \tilde{K}_{ba} \cdot \tilde{K}_{cd} = \tilde{K}_{ab} \cdot \tilde{K}_{dc} + \tilde{K}_{ab}^* \cdot \tilde{K}_{dc}^* \\ \langle M \rangle &= \left( K_{abt} K_{dct} - K_{abx} K_{dcx} - K_{aby} K_{dcy} - K_{abz} K_{dcz} \right) + \left( K_{abt}^* K_{dct}^* - K_{abx}^* K_{dcx}^* - K_{aby}^* K_{dcy}^* - K_{abz}^* K_{dcz}^* \right) \end{aligned} \quad (VI-27)$$

Pour une utilisation concrète de cette relation, les expressions des grandeurs K sont rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned} K_{abt} &= u_{a0}^* u_{b0} + u_{a1}^* u_{b1} + u_{a2}^* u_{b2} + u_{a3}^* u_{b3} = K_{bat}^* \\ K_{abx} &= u_{a3}^* u_{b0} + u_{a2}^* u_{b1} + u_{a1}^* u_{b2} + u_{a0}^* u_{b3} = K_{bax}^* \\ K_{aby} &= ju_{a3}^* u_{b0} - ju_{a2}^* u_{b1} + ju_{a1}^* u_{b2} - ju_{a0}^* u_{b3} = K_{bay}^* \\ K_{abz} &= u_{a2}^* u_{b0} - u_{a3}^* u_{b1} + u_{a0}^* u_{b2} - u_{a1}^* u_{b3} = K_{baz}^* \end{aligned} \quad (VI-28)$$

Les deux termes entre parenthèses dans la valeur moyenne du produit scalaire (VI-27) sont conjugués. Le premier correspond à l'interaction de (a)(b) vers (c)(d), le second à l'interaction de (c)(d) vers (a)(b).

Nous allons montrer que dans le cas de l'interaction électron-muon, le premier de ces termes est directement proportionnel à l'amplitude de diffusion calculée à partir des graphes de FEYNMAN.

## VII – La diffusion électrons-muons

Le traitement général qui a été exposé dans le chapitre précédent va être repris en détail sur l'exemple particulier de la diffusion électrons-muons.

Il s'agit d'une réaction de diffusion classique qui permet d'introduire les graphes de FEYNMAN. Dans ce type de réaction, la masse au repos n'est pas conservée entre les particules entrantes et les particules sortantes. Il s'agit donc d'un processus différent d'une diffusion élastique dans laquelle les particules, antiparticules ou photon conservent leur structure d'origine : cet autre cas particulier sera traité dans un chapitre ultérieur.

En entrée, on trouve un électron noté (a) et un antiélectron noté (b) qui sont représentés par les bispineurs suivants :

$$\psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} \quad \psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VII-1})$$

$$\phi_a = \gamma_a \omega_{a0} \left( t - \frac{v_{ax}}{c^2} x - \frac{v_{ay}}{c^2} y - \frac{v_{az}}{c^2} z \right) \quad \phi_b = \gamma_b \omega_{b0} \left( t - \frac{v_{bx}}{c^2} x - \frac{v_{by}}{c^2} y - \frac{v_{bz}}{c^2} z \right)$$

Le coefficient multiplicatif de cette représentation a été déterminé pour que le quadrivecteur impulsion énergie relativiste soit identique au quadrivecteur courant de DIRAC de chaque particule.

En sortie de réaction, on trouve un muon noté (c) et un antimuon noté (d) qui sont représentés par les bispineurs suivants :

$$\Psi_c = u_c e^{-j\phi_c} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{c0}(1+\gamma_c)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_c \sqrt{\omega_{c0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_c)}} \frac{v_{cz}}{c} \\ \frac{\gamma_c \sqrt{\omega_{c0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_c)}} \frac{v_{cx} + jv_{cy}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} \quad \Psi_d = u_d e^{j\phi_d} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_d \sqrt{\omega_{d0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_d)}} \frac{v_{dz}}{c} \\ \frac{\gamma_d \sqrt{\omega_{d0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_d)}} \frac{v_{dx} + jv_{dy}}{c} \\ \frac{\sqrt{\omega_{d0}(1+\gamma_d)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi_d} \quad (\text{VII-2})$$

$$\phi_c = \gamma_c \omega_{c0} \left( t - \frac{v_{cx}}{c^2} x - \frac{v_{cy}}{c^2} y - \frac{v_{cz}}{c^2} z \right) \quad \phi_d = \gamma_d \omega_{d0} \left( t - \frac{v_{dx}}{c^2} x - \frac{v_{dy}}{c^2} y - \frac{v_{dz}}{c^2} z \right)$$

Certaines simplifications d'écriture seraient possibles car les particules en entrée ont une masse au repos identique ( $\omega_{a0} = \omega_{b0}$ ), de même que les particules en sortie ( $\omega_{c0} = \omega_{d0}$ ).

Dans le référentiel attaché au centre de masse, les vitesses des particules qui entrent en collision sont opposées, de même que les vitesses des particules diffusées.

Nous conservons malgré tout une notation générale, car elle se révèlera utile par la suite.

## I – Calcul de l'amplitude de diffusion par les courants de DIRAC

Ce calcul va être effectué pour la particule (a) et antiparticule (b). Il est en tout point analogue pour la particule (c) et l'antiparticule(d) en sortie.

L'indice i rappelle que ces courants sont associés à l'état initial avant collision.

Le bispineur équivalent associé aux particules d'entrée s'écrit :

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \Psi_{i0} \\ \Psi_{i1} \\ \Psi_{i2} \\ \Psi_{i3} \end{pmatrix} = \Psi_a + \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} + \Psi_{b0} \\ \Psi_{a1} + \Psi_{b1} \\ \Psi_{a2} + \Psi_{b2} \\ \Psi_{a3} + \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{a0} e^{-j\phi_a} + u_{b0} e^{j\phi_b} \\ u_{a1} e^{-j\phi_a} + u_{b1} e^{j\phi_b} \\ u_{a2} e^{-j\phi_a} + u_{b2} e^{j\phi_b} \\ u_{a3} e^{-j\phi_a} + u_{b3} e^{j\phi_b} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-3})$$

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \Psi_{i0} \\ \Psi_{i1} \\ \Psi_{i2} \\ \Psi_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_a} + \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} e^{j\phi_b} \\ \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j\phi_b} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} e^{-j\phi_a} + \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} e^{j\phi_b} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} e^{-j\phi_a} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-4})$$

Le calcul des courants de DIRAC est sans difficultés, mais un peu laborieux. Il est détaillé ci-dessous pour la première composante.

$$\begin{aligned}
J_{it} &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\
J_{it} &= \left\{ \begin{aligned} &\left( \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_a} + \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} e^{j\phi_b} \right) \left( \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} e^{j\phi_a} + \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} e^{-j\phi_b} \right) + \\ &\left( \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j\phi_b} \right) \left( \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} e^{-j\phi_b} \right) + \\ &\left( \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} e^{-j\phi_a} + \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} e^{j\phi_b} \right) \left( \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} e^{j\phi_a} + \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_b} \right) + \\ &\left( \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} e^{-j\phi_a} \right) \left( \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} e^{j\phi_a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{it} &= \left\{ \begin{aligned} &\omega_{a0} \frac{1+\gamma_a}{2} + \omega_{b0} \frac{\gamma_b^2}{2(1+\gamma_b)} \frac{v_{bz}^2}{c^2} + \frac{\gamma_b \sqrt{1+\gamma_a}}{2 \sqrt{1+\gamma_b}} \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}} \frac{v_{bz}}{c} \left( e^{-j(\phi_a+\phi_b)} + e^{j(\phi_a+\phi_b)} \right) + \\ &\omega_{b0} \frac{\gamma_b^2}{2(1+\gamma_b)} \frac{v_{bx}^2 + v_{by}^2}{c^2} + \\ &\omega_{b0} \frac{1+\gamma_b}{2} + \omega_{a0} \frac{\gamma_a^2}{2(1+\gamma_a)} \frac{v_{az}^2}{c^2} + \frac{\gamma_a \sqrt{1+\gamma_b}}{2 \sqrt{1+\gamma_a}} \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}} \frac{v_{az}}{c} \left( e^{-j(\phi_a+\phi_b)} + e^{j(\phi_a+\phi_b)} \right) + \\ &\omega_{a0} \frac{\gamma_a^2}{2(1+\gamma_a)} \frac{v_{ax}^2 + v_{ay}^2}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-6})
\end{aligned}$$

$$J_{it} = \left\{ \gamma_a \omega_{a0} + \gamma_b \omega_{b0} + \frac{\sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2} \left( \gamma_a \frac{\sqrt{1+\gamma_b}}{\sqrt{1+\gamma_a}} \frac{v_{az}}{c} + \gamma_b \frac{\sqrt{1+\gamma_a}}{\sqrt{1+\gamma_b}} \frac{v_{bz}}{c} \right) \cos(\phi_a + \phi_b) \right\}$$

Les calculs pour les composantes spatiales s'effectuent de manière analogue, et on obtient les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
J_{it} &= \left\{ \gamma_a \omega_{a0} + \gamma_b \omega_{b0} + \frac{\sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2} \left( \gamma_a \frac{\sqrt{1+\gamma_b}}{\sqrt{1+\gamma_a}} \frac{v_{az}}{c} + \gamma_b \frac{\sqrt{1+\gamma_a}}{\sqrt{1+\gamma_b}} \frac{v_{bz}}{c} \right) \left( e^{j(\phi_a+\phi_b)} + e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right\} \\
J_{ix} &= \left\{ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} + \frac{\gamma_a \gamma_b \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}} \left( \frac{v_{bz}}{c} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} + \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} + \frac{v_{bz}}{c} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right\} \\
J_{iy} &= \left\{ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} + j \frac{\gamma_a \gamma_b \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}} \left( \frac{v_{bz}}{c} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} - \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} - \frac{v_{bz}}{c} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right\} \\
J_{iz} &= \left\{ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} + \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} + \left( \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}} \frac{\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}}{2} + \frac{\gamma_a \gamma_b \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}} \frac{v_{az}}{c} \frac{v_{bz}}{c} \right) \left( e^{j(\phi_a+\phi_b)} + e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_a \gamma_b \sqrt{\omega_{a0}\omega_{b0}}}{2\sqrt{(1+\gamma_a)(1+\gamma_b)}} \left( \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} e^{j(\phi_a+\phi_b)} + \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} e^{-j(\phi_a+\phi_b)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

(VII-7)

Ces résultats correspondent à la somme des quadrivecteurs suivants qui représente l'état initial :

$$\tilde{\mathbf{J}}_i = \tilde{\mathbf{P}}_a + \tilde{\mathbf{P}}_b + \tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba} \quad (\text{VII-8})$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{P}}_a = \begin{pmatrix} \gamma_a \omega_{a0} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ax}}{c} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{ay}}{c} \\ \gamma_a \omega_{a0} \frac{v_{az}}{c} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_b = \begin{pmatrix} \gamma_b \omega_{b0} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bx}}{c} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{by}}{c} \\ \gamma_b \omega_{b0} \frac{v_{bz}}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-9})$$

On y retrouve les quadrivecteurs impulsion-énergie associés aux particules ponctuelles (a) et (b), ainsi que les courants d'interaction qui vont permettre de déterminer la probabilité de la réaction qui est décrite.

En ce sens, la description du processus de collision peut être considérée comme complète car elle contient toute l'information nécessaire à l'interprétation physique de la collision.

Les courants relatifs aux particules sortantes (c) et (d) sont analogues. L'indice f rappelle que ces courants sont relatifs à l'état final.

$$\tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_d + \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc} \quad (\text{VII-10})$$

Le pseudo produit scalaire entre les courants d'interaction de l'état initial et de l'état final est donné par la relation :

$$\begin{aligned} M &= (\tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba})(\tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc}) = (\tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j\phi_{ab}} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j\phi_{ab}})(\tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j\phi_{cd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j\phi_{cd}}) \\ M &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{-j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} \end{aligned} \quad (\text{VII-11})$$

La relation de conservation de l'énergie est rappelée pour mémoire :

$$\phi_{ab} - \phi_{cd} = 0 \quad (\text{VII-12})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j(\phi_{ab} + \phi_{cd})} \\ \langle M \rangle &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} \end{aligned} \quad (\text{VII-13})$$

La valeur moyenne de M est la somme de deux termes qui sont directement proportionnels aux amplitudes de diffusion de (a)(b) vers (c)(d), et de (c)(d) vers (a)(b).

$$\langle M \rangle = M_{(ab) \rightarrow (cd)} + M_{(cd) \rightarrow (ab)} \quad (\text{VII-14})$$

La dimension de M est une énergie au carré. Pour construire un terme sans dimension qui conduit à la probabilité de réaction, il convient de diviser la quantité M par le carré de l'énergie qui participe à la réaction. Dans ce cas particulier, cette énergie est égale à l'énergie totale en entrée ou sortie de réaction : son carré est représenté par la variable MANDELSTAM s.

Le terme qui apparaît dans la probabilité de réaction est donc proportionnel à la quantité :

$$\frac{M_{(ab) \rightarrow (cd)}}{s} \quad (\text{VII-16})$$

## II – Calcul par les graphes de FEYNMAN

Avec les notations de ce chapitre, l'amplitude de diffusion  $M_{fi}$  de l'état final vers l'état initial peut être calculée à l'aide des graphes de FEYNMAN. Elle a pour expression :

$$M_{fi} = (-je^2) \frac{-jg_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d] [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a] \quad q : \text{énergie totale en entrée ou sortie} \quad (\text{VII-17})$$

Cette amplitude  $M_{fi}$  est proportionnelle à la quantité  $M_F$  :

$$M_F = g_{\mu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d] [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a] = [\bar{u}_c \gamma^0 u_d] [\bar{u}_b \gamma^0 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d] [\bar{u}_b \gamma^1 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d] [\bar{u}_b \gamma^2 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d] [\bar{u}_b \gamma^3 u_a] \quad (\text{VII-18})$$

Le choix des représentations de DIRAC qui interviennent dans ce calcul a été fait en amont. Ce choix a été dicté par l'obligation d'une phase globale d'interaction qui est nulle, en application de la règle de conservation de l'énergie.

On pourrait penser que les termes entre crochets ne représentent pas les courants de DIRAC, car le terme de phase de l'exponentielle est absent, mais cette absence n'est qu'une illusion.

Pour le montrer, on introduit les courants de DIRAC dans l'expression de FEYNMAN en ajoutant la phase correspondante à chacun des termes :

$$M_F = \left\{ \begin{array}{l} [\bar{u}_c \gamma^0 u_d] e^{j\phi_{cd}} [\bar{u}_b \gamma^0 u_a] e^{-j\phi_{ab}} - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d] e^{j\phi_{cd}} [\bar{u}_b \gamma^1 u_a] e^{-j\phi_{ab}} \\ - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d] e^{j\phi_{cd}} [\bar{u}_b \gamma^2 u_a] e^{-j\phi_{ab}} - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d] e^{j\phi_{cd}} [\bar{u}_b \gamma^3 u_a] e^{-j\phi_{ab}} \end{array} \right\} \quad (\text{VII-19})$$

$$M_F = \left\{ [\bar{u}_c \gamma^0 u_d] [\bar{u}_b \gamma^0 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d] [\bar{u}_b \gamma^1 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d] [\bar{u}_b \gamma^2 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d] [\bar{u}_b \gamma^3 u_a] \right\} e^{j(\phi_{cd} - \phi_{ab})}$$

En appliquant la relation de conservation de l'énergie  $\phi_{ab} - \phi_{cd} = 0$ , on obtient la relation (VII-14) déduite des graphes de FEYNMAN.

La quantité  $M_F$  ci-dessus s'exprime en fonction des courants de DIRAC :

$$M_F = \tilde{J}_{ba} \cdot \tilde{J}_{cd} = \tilde{K}_{ba} e^{-j\phi_{ab}} \cdot \tilde{K}_{cd} e^{j\phi_{cd}} = \tilde{K}_{ba} \cdot \tilde{K}_{cd} e^{-j(\phi_{ab} - \phi_{cd})} = \tilde{K}_{ba} \cdot \tilde{K}_{cd} \quad (\text{VII-20})$$

On fait le constat que  $M_F$  est contenue dans la valeur moyenne de  $M$  ( $\langle M \rangle$ ) obtenue en (VII-13) et (VII-14), et plus précisément que  $M_F = M_{cd \rightarrow ab}$ .

Ce résultat permet de montrer, au moins dans ce cas particulier fondamental, que le raisonnement qui a été proposé pour donner un sens physique à la notion d'amplitude de diffusion est cohérent avec les résultats déduits du graphe de FEYNMAN.

Il est tentant d'essayer de prolonger ce formalisme pour décrire n'importe quelle collision entre 2 particules entrantes et 2 particules sortantes, pourvu que ces particules soient des particules de DIRAC.

On aimerait que le formalisme qui a été utilisé dans ce chapitre permette de traiter également les diffusions élastiques. Un essai de généralisation en ce sens est proposé dans un prochain chapitre.

Plusieurs réactions font intervenir une interaction avec des photons. Or un photon peut être considéré comme une particule de DIRAC, dans le sens où les courants de DIRAC qui sont issus de sa représentation sont égaux au quadrivecteur impulsion énergie associé à un photon. Cette propriété justifie la tentative de généralisation qui va être proposée dans la suite de ce document.

## VIII – Somme des spins

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes attachés à décrire l'interaction entre deux particules ou antiparticules, chacune d'entre elle étant dans une configuration donnée.

Par exemple dans le chapitre VII, nous avons choisi de décrire l'interaction entre une particule de spin « up » et une antiparticule de spin « up ». Ce choix est désigné par choix N°1 :

Choix N°1 :

$$\begin{array}{cc}
 \text{Spin up} & \text{Spin up} \\
 \psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} & \psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VIII-1})
 \end{array}$$

Lorsqu'on ne connaît pas la nature du spin des particules incidentes, il existe 3 autres choix possibles et donc 3 autres possibilités d'interaction :

Choix N°2 :

$$\begin{array}{cc}
 \text{Spin down} & \text{Spin up} \\
 \psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} \\ -\frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} & \psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} + jv_{by}}{c} \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VIII-2})
 \end{array}$$

Choix N°3 :

Spin up

Spin down

$$\Psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} \quad \Psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \\ -\frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VIII-3})$$

Choix N°4 :

Spin down

Spin down

$$\Psi_a = u_a e^{-j\phi_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} - jv_{ay}}{c} \\ -\frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} \quad \Psi_b = u_b e^{j\phi_b} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bx} - jv_{by}}{c} \\ -\frac{\gamma_b \sqrt{\omega_{b0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_b)}} \frac{v_{bz}}{c} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\omega_{b0}(1+\gamma_b)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} \quad (\text{VIII-4})$$

D'un point de vue expérimental, c'est un flot de particules et d'antiparticules qui entrent en collision. Si on suppose que ce flot contient une répartition équilibrée entre les 4 configurations ci-dessus, alors l'interaction qui va être observée en entrée correspond à la moyenne des interactions possibles.

Cette moyenne en entrée est obtenue en calculant chacune de ces interactions, en faisant la somme, et en divisant par 4.

D'un point de vue informatique, il s'agit d'un traitement élémentaire qui consiste à rentrer les variables  $u_a$  et  $u_b$  qui sont les composantes des bispineurs des particules incidentes dans une procédure de calcul convenablement programmée.

Il s'avère que ce calcul peut être mené jusqu'au bout de manière complètement analytique. Il s'agit d'un travail complexe et brillant, résultat des contributions de plusieurs chercheurs.

La complexité du calcul tient essentiellement à la quantité des indices que l'on doit manipuler lorsqu'on souhaite synthétiser au maximum le déroulement du raisonnement et le résultat obtenu.

Une approche pédagogique va être tentée, en incluant quelques développements de formules tensorielles, afin de favoriser la lecture des calculs.

Le point de départ correspond à la quantité  $M_F$  issue de la relation (VII-17,18). On rappelle que la notation tensorielle utilise la convention de sommation d'EINSTEIN :

$$M_F = g_{\mu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d] [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a] = [\bar{u}_c \gamma^0 u_d] [\bar{u}_b \gamma^0 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d] [\bar{u}_b \gamma^1 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d] [\bar{u}_b \gamma^2 u_a] - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d] [\bar{u}_b \gamma^3 u_a]$$

$\mu, \nu = 0..4 \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{pour} \quad \mu \neq \nu$

(VIII-5)

Cette quantité représente le pseudo produit scalaire des courants d'interaction entre les particules entrantes (a) et (b), et les particules sortantes (c) et (d).

$M_F$  est un nombre complexe,  $\bar{u}_b, \bar{u}_c$  sont des bispineurs adjoints (matrices lignes à 4 éléments),  $\gamma^\mu, \gamma^\nu$  des matrices de DIRAC (matrices 4X4),  $u_a$  et  $u_b$  des bispineurs (matrices colonnes à 4 éléments).

La première étape consiste à évaluer  $M_F^*$  qui représente le nombre complexe conjugué de  $M_F$ . Cette étape utilise un résultat intermédiaire concernant le courant conjugué d'un courant de DIRAC.

$$\begin{aligned} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d]^* &= [\bar{u}_d \gamma^\mu u_c] \\ [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a]^* &= [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b] \end{aligned}$$

(VIII-6)

Cette propriété est directement apparente sur les composantes développées des courants de DIRAC.

On en déduit l'expression de  $M_F^*$  :

$$M_F^* = g_{\mu\nu} [\bar{u}_d \gamma^\mu u_c] [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b] = [\bar{u}_d \gamma^0 u_c] [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] - [\bar{u}_d \gamma^1 u_c] [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] - [\bar{u}_d \gamma^2 u_c] [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] - [\bar{u}_d \gamma^3 u_c] [\bar{u}_a \gamma^3 u_b]$$

(VIII-7)

Dans cette expression, la règle de sommation d'EINSTEIN s'applique en rappelant une nouvelle fois que dans une métrique de MINKOWSKY, les seuls éléments non nuls de la métrique sont les  $g_{\mu\nu}$  tels que  $\mu = \nu$ .

$$g_{00} = 1 \quad g_{11} = -1 \quad g_{22} = -1 \quad g_{33} = -1$$

(VIII-8)

Le produit  $(M_F M_F^*)$  est directement proportionnel à la probabilité de la réaction (a)(b) -> (c)(d). C'est sur cette quantité que l'on doit effectuer la somme des interactions entre des spins différents.

$$M_F M_F^* = (g_{\mu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d] [\bar{u}_b \gamma^\nu u_a]) (g_{\mu\nu} [\bar{u}_d \gamma^\mu u_c] [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b])$$

(VIII-9)

D'apparence simple, cette relation comporte déjà un nombre important de termes, lorsqu'elle est développée :

$$M_F M_F^* = \left\{ \begin{array}{l} [\bar{u}_c \gamma^0 u_d [\bar{u}_b \gamma^0 u_a [\bar{u}_d \gamma^0 u_c [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] - [\bar{u}_c \gamma^0 u_d [\bar{u}_b \gamma^0 u_a [\bar{u}_d \gamma^1 u_c [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] \\ - [\bar{u}_c \gamma^0 u_d [\bar{u}_b \gamma^0 u_a [\bar{u}_d \gamma^2 u_c [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] - [\bar{u}_c \gamma^0 u_d [\bar{u}_b \gamma^0 u_a [\bar{u}_d \gamma^3 u_c [\bar{u}_a \gamma^3 u_b] \\ - [\bar{u}_c \gamma^1 u_d [\bar{u}_b \gamma^1 u_a [\bar{u}_d \gamma^0 u_c [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^1 u_d [\bar{u}_b \gamma^1 u_a [\bar{u}_d \gamma^1 u_c [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] \\ + [\bar{u}_c \gamma^1 u_d [\bar{u}_b \gamma^1 u_a [\bar{u}_d \gamma^2 u_c [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^1 u_d [\bar{u}_b \gamma^1 u_a [\bar{u}_d \gamma^3 u_c [\bar{u}_a \gamma^3 u_b] \\ - [\bar{u}_c \gamma^2 u_d [\bar{u}_b \gamma^2 u_a [\bar{u}_d \gamma^0 u_c [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^2 u_d [\bar{u}_b \gamma^2 u_a [\bar{u}_d \gamma^1 u_c [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] \\ + [\bar{u}_c \gamma^2 u_d [\bar{u}_b \gamma^2 u_a [\bar{u}_d \gamma^2 u_c [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^2 u_d [\bar{u}_b \gamma^2 u_a [\bar{u}_d \gamma^3 u_c [\bar{u}_a \gamma^3 u_b] \\ - [\bar{u}_c \gamma^3 u_d [\bar{u}_b \gamma^3 u_a [\bar{u}_d \gamma^0 u_c [\bar{u}_a \gamma^0 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^3 u_d [\bar{u}_b \gamma^3 u_a [\bar{u}_d \gamma^1 u_c [\bar{u}_a \gamma^1 u_b] \\ + [\bar{u}_c \gamma^3 u_d [\bar{u}_b \gamma^3 u_a [\bar{u}_d \gamma^2 u_c [\bar{u}_a \gamma^2 u_b] + [\bar{u}_c \gamma^3 u_d [\bar{u}_b \gamma^3 u_a [\bar{u}_d \gamma^3 u_c [\bar{u}_a \gamma^3 u_b] \end{array} \right\} \quad (VIII-10)$$

Chaque terme entre crochets est une composante d'un courant d'interaction de DIRAC, c'est-à-dire un nombre complexe qui dépend des 4+4=8 composantes des bispineurs qui interagissent : on touche ici du doigt la complexité du calcul analytique qui consiste à sommer la quantité  $M_F M_F^*$  sur les différentes possibilités de spin.

On peut modifier l'écriture de la quantité  $M_F M_F^*$  afin de permettre la poursuite du calcul.

Tous les  $g_{\mu\nu}$  sont nuls, sauf lorsque  $\mu = \nu$ , ce qui permet l'écriture suivante :

$$M_F M_F^* = g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d [\bar{u}_b \gamma^\mu u_a [\bar{u}_d \gamma^\nu u_c [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b] \quad (VIII-11)$$

Les quantités entre crochets sont des nombres complexes, donc on peut commuter à volonté ces quantités pour obtenir :

$$M_F M_F^* = g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} [\bar{u}_c \gamma^\mu u_d [\bar{u}_d \gamma^\nu u_c [\bar{u}_b \gamma^\mu u_a [\bar{u}_a \gamma^\nu u_b] \quad (VIII-12)$$

L'étape suivante consiste à sommer cette quantité sur toutes les possibilités d'interaction. Ces possibilités ont été précisées en début de chapitre pour les particules entrantes. Elles sont analogues pour les particules sortantes à une exception près : il suffit de faire la somme des possibilités d'interaction des particules sortantes sans faire de moyenne, c'est-à-dire sans diviser par 4.

Pour écrire de manière concise la somme de ces possibilités, nous devons introduire de nouveaux indices.

Pour chaque particule, il existe deux états de spin qui vont être repérés par les indices (1) et (2). On peut par exemple associer l'indice (1) à un spin up, et l'indice (2) à un spin down.

Les couples d'interaction possibles entre les particules entrantes sont les suivants :

$$\begin{array}{l} (u_a^{(1)}, u_b^{(1)}) \\ (u_a^{(1)}, u_b^{(2)}) \\ (u_a^{(2)}, u_b^{(1)}) \\ (u_a^{(2)}, u_b^{(2)}) \end{array} \quad (VIII-13)$$

Les couples d'interaction possibles entre les particules sortantes sont analogues :

$$\begin{aligned}
 & \left( u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left( u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{VIII-14}$$

Il existe donc globalement 16 manières d'interagir dans cette rencontre entre 2 particules entrantes et 2 particules sortantes. Ces possibilités sont listées ci-dessous de manière exhaustive.

$$\begin{aligned}
 & \left( u_a^{(1)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_a^{(1)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_a^{(2)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_a^{(2)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(1)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_a^{(1)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left( u_a^{(1)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left( u_a^{(2)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left( u_a^{(2)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(1)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left( u_a^{(1)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_a^{(1)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_a^{(2)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_a^{(2)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(2)}, u_d^{(1)} \right) \\
 & \left( u_a^{(1)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left( u_a^{(1)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left( u_a^{(2)}, u_b^{(1)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right) \\
 & \left( u_a^{(2)}, u_b^{(2)} \right) \rightarrow \left( u_c^{(2)}, u_d^{(2)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{VIII-15}$$

Pour décrire les possibilités d'interaction de manière plus concise, on choisit 4 indices qui seront notés (h), (i), (j), (k) dans ce document. Chaque indice peut prendre la valeur (1) ou la valeur (2) suivant l'état de spin de la particule ou antiparticule. Chaque indice est associé à une particule ou antiparticule correspondante :

$$\begin{aligned}
 & (h) \rightarrow u_a^{(h)} \\
 & (i) \rightarrow u_b^{(i)} \\
 & (j) \rightarrow u_c^{(j)} \\
 & (k) \rightarrow u_d^{(k)}
 \end{aligned}
 \tag{VIII-16}$$

Dans ces conditions, la somme des interactions décrites ci-dessus peut être représentée de la manière suivante :

$$\sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* = \sum_{h,i,j,k=1..2} g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} \left[ \bar{u}_c^{(j)} \gamma^\mu u_d^{(k)} \right] \left[ \bar{u}_d^{(k)} \gamma^\nu u_c^{(j)} \right] \left[ \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu u_a^{(h)} \right] \left[ \bar{u}_a^{(h)} \gamma^\nu u_b^{(i)} \right] \quad (\text{VIII-17})$$

Les coefficients de la métrique  $g_{\mu\mu}$  et  $g_{\nu\nu}$  sont utilisés pour abaisser les indices des matrices de DIRAC dans les deux premiers crochets :

$$\sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* = \sum_{h,i,j,k=1..2} \left[ \bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)} \right] \left[ \bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)} \right] \left[ \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu u_a^{(h)} \right] \left[ \bar{u}_a^{(h)} \gamma^\nu u_b^{(i)} \right] \quad (\text{VIII-18})$$

On notera que la somme sur les indices (h), (i), (j), (k) n'affecte pas les indices  $\mu$  et  $\nu$ .

Cette somme peut se décomposer en un produit de deux termes :

$$\sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* = \left( \sum_{j,k=1..2} \left[ \bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)} \right] \left[ \bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)} \right] \right) \left( \sum_{h,i=1..2} \left[ \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu u_a^{(h)} \right] \left[ \bar{u}_a^{(h)} \gamma^\nu u_b^{(i)} \right] \right) \quad (\text{VIII-19})$$

L'étape suivante consiste en l'évaluation de chacun de ces termes. Nous choisissons celui qui est relatif aux particules (a) et (b) :

$$\sum_{h,i=1..2} \left[ \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu u_a^{(h)} \right] \left[ \bar{u}_a^{(h)} \gamma^\nu u_b^{(i)} \right] \quad (\text{VIII-20})$$

Dans cette expression, les crochets ne sont là que pour rappeler que l'expression entre crochets est un courant d'interaction de DIRAC. Ils peuvent donc être enlevés.

Chaque terme de la somme a un caractère matriciel, et on sait que le produit de matrices est toujours associatif. On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{h,i=1..2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu \left( u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)} \right) \gamma^\nu u_b^{(i)} &= \sum_{i=1..2} \left( \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu \left( \sum_{h=1..2} u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)} \right) \right) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \sum_{i=1..2} \left( \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu \left( u_a^{(1)} \bar{u}_a^{(1)} + u_a^{(2)} \bar{u}_a^{(2)} \right) \right) \gamma^\nu u_b^{(i)} \\ \sum_{h,i=1..2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu \left( u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)} \right) \gamma^\nu u_b^{(i)} &= \left( \bar{u}_b^{(1)} \gamma^\mu \left( u_a^{(1)} \bar{u}_a^{(1)} + u_a^{(2)} \bar{u}_a^{(2)} \right) \right) \gamma^\nu u_b^{(1)} + \left( \bar{u}_b^{(2)} \gamma^\mu \left( u_a^{(1)} \bar{u}_a^{(1)} + u_a^{(2)} \bar{u}_a^{(2)} \right) \right) \gamma^\nu u_b^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{VIII-21})$$

La suite du calcul utilise une propriété appelée relation de complétude. Pour un bispineur  $u$ , solution exponentielle de l'équation de DIRAC qui a été adoptée dans ce document, cette relation s'écrit :

$$\sum_{h=1..2} u^{(h)} \bar{u}^{(h)} = u^{(1)} \bar{u}^{(1)} + u^{(2)} \bar{u}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \gamma^\alpha p_\alpha \pm \omega_0 \mathbf{I} \right) \quad (\text{VIII-22})$$

I représente la matrice identité. Le facteur  $1/2$  qui apparaît par rapport à la formulation habituelle est lié à la forme particulière des solutions exponentielles qui ont été retenues. L'indice muet  $\alpha$  obéit à la règle de sommation d'EINSTEIN.

On rappelle que ces solutions ont été choisies car leurs courants de DIRAC sont identiques au tenseur impulsion énergie de la particule.

Le signe + s'applique lorsque le bispineur représente une particule, le signe – lorsque le bispineur représente une antiparticule.

La démonstration générale est donnée dans tous les ouvrages spécialisée et n'est pas reproduite. Par contre, la notation de ce document étant spécifique, il peut être utile d'en donner une illustration sur un exemple, et nous allons utiliser le bispineur  $\psi_a$  proposé au début de ce chapitre.

Les détails sont donnés dans les lignes suivantes, encadrées par les lignes en pointillés. Ils peuvent être passés pour accéder directement à la suite du calcul de l'amplitude de diffusion.

----- Début des détails sur la relation de complétude-----

$$\mathbf{u}_a^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\omega_{a0}(1+\gamma_a)}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a \sqrt{\omega_{a0}}}{\sqrt{2(1+\gamma_a)}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \frac{v_{az}}{c} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \frac{v_{ax} + jv_{ay}}{c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} V_{az} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (V_{ax} + jV_{ay}) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-23})$$

Dans un souci d'allègement d'écriture, les composantes de vitesse normalisées par rapport à la vitesse de la lumière sont représentées par des lettres majuscules. On en déduit le bispineur de spin opposé :

$$\mathbf{u}_a^{(2)} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1+\gamma_a} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (V_{ax} - jV_{ay}) \\ -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} V_{az} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-24})$$

Ainsi que les bispineurs adjoints :

$$\bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} & 0 & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} V_{az} & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (V_{ax} - jV_{ay}) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-25})$$

$$\mathbf{u}_a^{(2)} = \sqrt{\frac{\omega_{a0}}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+\gamma_a} & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (V_{ax} + jV_{ay}) & \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} V_{az} \end{pmatrix}$$

La relation de complétude se vérifie en calculant séparément les deux termes de l'égalité (VIII-22).

Premier terme :

$$\sum_{h=1..2} \mathbf{u}_a^{(h)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(h)} = \mathbf{u}_a^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} + \mathbf{u}_a^{(2)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} \quad (\text{VIII-26})$$

$$\mathbf{u}_a^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} \\ 0 \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \mathbf{V}_{az} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\gamma_a} & 0 & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \mathbf{V}_{az} & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-27})$$

$$\mathbf{u}_a^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 1+\gamma_a & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az}^2 & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az} (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & 0 & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az} (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_a^{(2)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1+\gamma_a} \\ \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \mathbf{V}_{az} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+\gamma_a} & -\frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \frac{\gamma_a}{\sqrt{1+\gamma_a}} \mathbf{V}_{az} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-28})$$

$$\mathbf{u}_a^{(2)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\gamma_a & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ 0 & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2) & \frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az} (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & \frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az} (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} \mathbf{V}_{az}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_a^{(1)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} + \mathbf{u}_a^{(2)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 1+\gamma_a & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & 1+\gamma_a & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2 + \mathbf{V}_{az}^2) & 0 \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & -\frac{\gamma_a^2}{1+\gamma_a} (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2 + \mathbf{V}_{az}^2) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-30})$$

On utilise la relation suivante pour simplifier les 2 derniers termes de la diagonale principale :

$$\gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{V}_a^2}} \quad (\text{VIII-31})$$

$$-\frac{\gamma_a^2 (\mathbf{V}_{ax}^2 + \mathbf{V}_{ay}^2 + \mathbf{V}_{az}^2)}{1+\gamma_a} = -\frac{\gamma_a^2 \mathbf{V}_a^2}{1+\gamma_a} = -\frac{\gamma_a^2 - 1}{1+\gamma_a} = 1 - \gamma_a$$

On obtient au final la matrice suivante :

$$\mathbf{u}_a^{(1)}\bar{\mathbf{u}}_a^{(1)} + \mathbf{u}_a^{(2)}\bar{\mathbf{u}}_a^{(2)} = \frac{\omega_{a0}}{2} \begin{pmatrix} 1+\gamma_a & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & 1+\gamma_a & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & 1-\gamma_a & 0 \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & 1-\gamma_a \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-32})$$

Second terme :

$$\frac{1}{2}(\gamma^\alpha \mathbf{p}_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a = \frac{1}{2}(\gamma^0 \mathbf{p}_{a0} - \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} - \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} - \gamma^3 \mathbf{p}_{a3} + \omega_{0a} \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\gamma^0 \mathbf{p}_{a0} - \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} - \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} - \gamma^3 \mathbf{p}_{a3}) + \frac{\omega_{0a}}{2} \mathbf{I} \quad (\text{VIII-33})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \gamma^0 \mathbf{p}_{a0} &= \gamma_a \omega_{0a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} &= \gamma_a \omega_{0a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{V}_{ax} \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_{ax} & 0 \\ 0 & -\mathbf{V}_{ax} & 0 & 0 \\ -\mathbf{V}_{ax} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} &= \gamma_a \omega_{0a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j\mathbf{V}_{ay} \\ 0 & 0 & j\mathbf{V}_{ay} & 0 \\ 0 & j\mathbf{V}_{ay} & 0 & 0 \\ -j\mathbf{V}_{ay} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 \mathbf{p}_{a3} &= \gamma_a \omega_{0a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{V}_{az} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{V}_{az} \\ -\mathbf{V}_{az} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_{az} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VIII-34})$$

En sommant ces résultats partiels, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\gamma^0 \mathbf{p}_{a0} - \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} - \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} - \gamma^3 \mathbf{p}_{a3}) &= \frac{\omega_{0a}}{2} \begin{pmatrix} \gamma_a & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & \gamma_a & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a & 0 \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & -\gamma_a \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2}(\gamma^0 \mathbf{p}_{a0} - \gamma^1 \mathbf{p}_{a1} - \gamma^2 \mathbf{p}_{a2} - \gamma^3 \mathbf{p}_{a3}) + \frac{\omega_{0a}}{2} \mathbf{I} &= \frac{\omega_{0a}}{2} \begin{pmatrix} \gamma_a + 1 & 0 & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) \\ 0 & \gamma_a + 1 & -\gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & \gamma_a \mathbf{V}_{az} \\ \gamma_a \mathbf{V}_{az} & \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} - j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a + 1 & 0 \\ \gamma_a (\mathbf{V}_{ax} + j\mathbf{V}_{ay}) & -\gamma_a \mathbf{V}_{az} & 0 & -\gamma_a + 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VIII-35})$$

----- Fin des détails sur la relation de complétude -----  
--

La relation de complétude est introduite dans la somme des spins :

$$\sum_{h,i=1,2} \bar{\mathbf{u}}_b^{(i)} \gamma^\mu (\mathbf{u}_a^{(h)} \bar{\mathbf{u}}_a^{(h)}) \gamma^\nu \mathbf{u}_b^{(i)} = \sum_{i=1,2} \bar{\mathbf{u}}_b^{(i)} \gamma^\mu \left( \frac{1}{2} (\gamma^\alpha \mathbf{p}_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \right) \gamma^\nu \mathbf{u}_b^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \bar{\mathbf{u}}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha \mathbf{p}_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu \mathbf{u}_b^{(i)} \quad (\text{VIII-36})$$

On notera que cette dernière somme est uniquement relative à l'indice (i).

L'indice a qui a été ajouté dans la parenthèse signifie que l'impulsion  $P_a$  et l'énergie au repos  $\omega_0$  sont relatifs à la particule (a). Le signe + a été retenu, car (a) représente, dans cet exemple, une particule.

Pour les particules et antiparticule sortantes, on obtient de manière analogue :

$$\sum_{j,k=1..2} [\bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)}] [\bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)}] = \sum_{j,k=1..2} \bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)} \bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)} = \sum_{j,k=1..2} \bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu (u_d^{(k)} \bar{u}_d^{(k)}) \gamma_\nu u_c^{(j)} \quad (\text{VIII-37})$$

$$\sum_{j,k=1..2} [\bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)}] [\bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)}] = \frac{1}{2} \sum_{j=1..2} \bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu (\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 I)_d \gamma_\nu u_c^{(j)}$$

Le signe – a été retenu dans la parenthèse car (d) représente, dans cet exemple, une antiparticule.

Pour poursuivre le calcul vers une solution analytique, l'étape suivante utilise un procédé désigné par astuce de CASIMIR. Cette astuce permet d'établir un lien entre la dernière relation de sommation (VIII-37) et la trace d'une matrice désignée par Tr.

----- Début des détails sur la l'astuce de CASIMIR-----

Soit à évaluer le produit de trois matrices de nombres complexes A, B, et C. Ces matrices ne sont pas quelconques : La première est une matrice ligne de rang N, la seconde une matrice carré de rang NxN, et la dernière une matrice colonne de rang N. Chaque terme de ces matrices est représenté par la lettre minuscule correspondante :  $a_i$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_j$ , les indices i et j varient entre 1 et N.

Le résultat de ce produit matriciel est un nombre complexe.

Ce produit de matrice peut être écrit en fonction des termes de chaque matrice :

$$ABC = \sum_{ij} a_i b_{ij} c_j \quad (\text{VIII-38})$$

Puisque  $a_i$ ,  $b_{ij}$  et  $c_j$  sont des nombres complexes, ils peuvent être commutés :

$$ABC = \sum_{ij} b_{ij} c_j a_i \quad (\text{VIII-39})$$

Le produit matriciel CA, où C est une matrice colonne et A une matrice ligne donne une matrice NxN. Dans ce cas particulier, la matrice produit s'exprime de manière simple en fonction des indices i et j :

$$[CA]_{ij} = c_i a_j = (ca)_{ij} \quad (\text{VIII-40})$$

Considérons le produit matriciel B(CA). Le résultat est une matrice NxN, dont chaque terme, de ligne i et de colonne j, est donné par la relation :

$$[B(CA)]_{ji} = \sum_{k=1}^N b_{ik}(ca)_{kj} \quad (\text{VIII-41})$$

Les termes de la diagonale principale de cette matrice sont les termes pour lesquels  $i=j$  :

$$[B(CA)]_{ii} = \sum_{k=1}^N b_{ik}(ca)_{ki} = \sum_{j=1}^N b_{ij}(ca)_{ji} = \sum_{j=1}^N b_{ij}c_j a_i \quad (\text{VIII-42})$$

La trace de la matrice s'obtient en sommant les termes de la diagonale principale pour chaque ligne :

$$\text{Tr}[B(CA)] = \sum_{i=1}^N [B(CA)]_{ii} = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N b_{ij}c_j a_i \right) = \sum_{i,j=1}^N b_{ij}c_j a_i \quad (\text{VIII-43})$$

On déduit de (VIII-39) et (VIII-43) :

$$ABC = \text{Tr}[B(CA)] = \sum_{i,j=1}^N b_{ij}c_j a_i = \text{Tr}[(CA)B] \quad (\text{VIII-44})$$

On peut ainsi transformer, dans les conditions bien particulières qui ont été énoncées, un produit de matrice en un calcul de trace de matrice : c'est ce résultat qui est appliqué dans la suite du calcul.

----- Fin des détails sur la l'astuce de CASIMIR -----

Dans la relation établie ci-dessus et rappelée pour mémoire :

$$\sum_{h,i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)}) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu u_b^{(i)} \quad (\text{VIII-45})$$

La matrice B est une matrice 4x4 qui correspond à la quantité :

$$B \rightarrow \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu \quad (\text{VIII-46})$$

La somme (VIII-45) ci-dessus devient ainsi :

$$\sum_{h,i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)}) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \text{Tr}(u_b^{(i)} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu) \quad (\text{VIII-47})$$

Le signe somme passe à travers la fonction trace :

$$\sum_{h,i=1,2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)}) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \sum_{i=1,2} u_b^{(i)} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu \right) \quad (\text{VIII-48})$$

On peut à nouveau invoquer la relation de complétude qui s'utilise avec un signe – car (b) est une antiparticule dans l'exemple traité. On obtient finalement :

$$\sum_{h,i=1..2} \bar{u}_b^{(i)} \gamma^\mu (u_a^{(h)} \bar{u}_a^{(h)}) \gamma^\nu u_b^{(i)} = \frac{1}{2} \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_b \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu) \quad (\text{VIII-49})$$

Le même traitement peut être effectué pour la somme des spins des particules ou antiparticules sortantes.

$$\sum_{j,k=1..2} [\bar{u}_c^{(j)} \gamma_\mu u_d^{(k)}] [\bar{u}_d^{(k)} \gamma_\nu u_c^{(j)}] = \frac{1}{2} \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_c \gamma_\mu (\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_d \gamma_\nu) \quad (\text{VIII-50})$$

On rappelle que le facteur 1/2 est dû à la forme particulière des solutions exponentielles qui sont utilisées.

$$\begin{aligned} \sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* &= \left( \sum_{j,k=1..2} [\bar{u}_c^{(j)} \gamma^\mu u_d^{(k)}] [\bar{u}_d^{(k)} \gamma^\nu u_c^{(j)}] \sum_{h,i=1..2} [\bar{u}_b^{(i)} \gamma_\mu u_a^{(h)}] [\bar{u}_a^{(h)} \gamma_\nu u_b^{(i)}] \right) \\ \sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* &= \frac{1}{4} \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_b \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu) \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_c \gamma_\mu (\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_d \gamma_\nu) \end{aligned} \quad (\text{VIII-51})$$

Pour obtenir une moyenne sur les spins d'entrée, cette quantité doit encore être divisée par 4 :

$$\left\langle \sum_{h,i,j,k=1..2} M_F M_F^* \right\rangle_{\text{spins\_entrée}} = \frac{1}{16} \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_b \gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_a \gamma^\nu) \text{Tr}((\gamma^\alpha p_\alpha + \omega_0 \mathbf{I})_c \gamma_\mu (\gamma^\alpha p_\alpha - \omega_0 \mathbf{I})_d \gamma_\nu) \quad (\text{VIII-52})$$

La suite du calcul consiste à évaluer la trace des sommes et produits de matrices de DIRAC ci-dessus et enfin à utiliser ces derniers résultats pour déterminer la section efficace de diffusion.

Les détails sont souvent inclus dans les cours qui traitent de ces sujets. Ils ne présentent pas d'intérêts particuliers dans le cadre de ce document et n'ont pas été repris.

## IX – La diffusion élastique

La diffusion électrons-muons qui a été traitée dans un chapitre précédent est une diffusion inélastique, car une partie de l'énergie cinétique des particules incidentes (électron et antiélectron) est transformée en énergie de masse des particules diffusées (muon et antimuon).

Au cours d'une rencontre entre particules lancées à grandes vitesses l'une contre l'autre, il est possible que les deux particules passent l'une à côté de l'autre. Elles vont subir une influence réciproque, mais leur masse au repos ne sera pas affectée par cette rencontre. Dans cette situation, l'énergie cinétique est conservée, en ce sens que l'énergie cinétique totale des deux particules incidentes est égale à l'énergie cinétique totale des deux particules diffusées. On parle alors de diffusion élastique.

La diffusion RUTHERFORD est un exemple de diffusion élastique.

Un autre exemple se rencontre dans la diffusion BHABHA. Cette diffusion met en œuvre un électron (a) et un positron (b) en entrée, et on recueille un électron (c) et un positron (d) en sortie.

Deux processus sont susceptibles de participer à cette réaction.

Le premier consiste en une annihilation de l'électron et du positron entrant, puis à la création d'un électron et positron sortant : ce processus est analogue à la diffusion électron-muon.

Le second consiste en une diffusion élastique telle qu'elle a été décrite. Le processus de diffusion complet comprend donc deux diagrammes de FEYNMAN correspondant à ces deux processus.

La question se pose de savoir s'il est possible de décrire une diffusion élastique, dans l'approche énergétique qui a été mise en œuvre pour traiter la diffusion inélastique.

Pour traiter cette réaction, nous prenons en compte le fait que la seule énergie qui est échangée est de l'énergie cinétique. C'est donc cette énergie, et seulement celle-là qui va participer au processus d'interaction.

Les phases de l'onde de BROGLIE associées aux particules incidentes et diffusées sont conservées dans une écriture très générale, qui ne tient pas compte des simplifications possibles dans ce cas particulier :

$$\begin{aligned}
\phi_a &= \gamma_a \omega_{a0} \left( t - \frac{v_{ax}}{c^2} x - \frac{v_{ay}}{c^2} y - \frac{v_{az}}{c^2} z \right) & \text{Electron} & \text{ incident} \\
\phi_b &= \gamma_b \omega_{b0} \left( t - \frac{v_{bx}}{c^2} x - \frac{v_{by}}{c^2} y - \frac{v_{bz}}{c^2} z \right) & \text{Positron} & \text{ incident} \\
\phi_c &= \gamma_c \omega_{c0} \left( t - \frac{v_{cx}}{c^2} x - \frac{v_{cy}}{c^2} y - \frac{v_{cz}}{c^2} z \right) & \text{Electron} & \text{ diffusé} \\
\phi_d &= \gamma_d \omega_{d0} \left( t - \frac{v_{dx}}{c^2} x - \frac{v_{dy}}{c^2} y - \frac{v_{dz}}{c^2} z \right) & \text{Positron} & \text{ diffusé}
\end{aligned} \tag{IX-1}$$

La conservation de l'énergie s'obtient par la relation présentée dans les chapitres précédents :

$$\phi_a + \phi_b = \phi_c + \phi_d \tag{IX-2}$$

Dans le cas d'une diffusion élastique, la quantité d'énergie conservée qui va participer à la diffusion suggère d'écrire cette relation sous la forme :

$$\phi_a - \phi_c = \phi_d - \phi_b \tag{IX-3}$$

Puisque (a) et (c) (respectivement (b) et (d)) représentent la même particule (ou antiparticule) avec une énergie cinétique différente, les quantités de part et d'autre du signe égal sont représentatives de l'énergie cinétique échangée dans l'interaction.

Le traitement est analogue à celui de la collision inélastique, mais en considérant uniquement l'énergie d'interaction(IX-13) ci-dessus.

Ce constat conduit à considérer (a) et (c) comme des particules « entrantes », et (b) et (d) comme des particules « sortantes ». *Il est important de noter ce changement par rapport à la description de la collision qui a été faite en (IX-1) en termes de particules incidentes et diffusées.* Le lien avec les graphes de FEYNMAN s'effectue en considérant que les particules ou antiparticules qui interagissent sont celles qui arrivent à un vertex.

Les bispineurs de DIRAC qui participent à l'interaction sont désormais les suivants :

$$\begin{aligned}
\Psi_a &: \text{électron « entrant »} & \Psi_b &: \text{positron « sortant »} \\
\Psi_c &: \text{électron « entrant »} & \Psi_d &: \text{positron « sortant »}
\end{aligned}$$

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{a0} \\ \mathbf{u}_{a1} \\ \mathbf{u}_{a2} \\ \mathbf{u}_{a3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} = \mathbf{u}_a e^{-j\phi_a} \quad \Psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{b0} \\ \mathbf{u}_{b1} \\ \mathbf{u}_{b2} \\ \mathbf{u}_{b3} \end{pmatrix} e^{j\phi_b} = \mathbf{u}_b e^{j\phi_b} \quad (\text{IX-4})$$

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{c0} \\ \mathbf{u}_{c1} \\ \mathbf{u}_{c2} \\ \mathbf{u}_{c3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} = \mathbf{u}_c e^{-j\phi_c} \quad \Psi_d = \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{d1} \\ \Psi_{d2} \\ \Psi_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{d0} \\ \mathbf{u}_{d1} \\ \mathbf{u}_{d2} \\ \mathbf{u}_{d3} \end{pmatrix} e^{j\phi_d} = \mathbf{u}_d e^{j\phi_d}$$

On forme ensuite la particule équivalente qui correspond à l'énergie d'interaction. On obtient pour les particules « entrantes » :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \Psi_a - \Psi_c = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} - \Psi_{c0} \\ \Psi_{a1} - \Psi_{c1} \\ \Psi_{a2} - \Psi_{c2} \\ \Psi_{a3} - \Psi_{c3} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-5})$$

On calcule les courants de DIRAC correspondants :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_x &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\ J_y &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\ J_z &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \end{aligned} \quad (\text{IX-6})$$

Pour exprimer ces courants en fonction des courants des particules (a) et (c), on effectue un développement, détaillé ci-dessous sur la composante  $J_t$  :

$$\begin{aligned} J_t &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ J_t &= \left\{ (\Psi_{a0}^* - \Psi_{c0}^*) (\Psi_{a0} - \Psi_{c0}) + (\Psi_{a1}^* - \Psi_{c1}^*) (\Psi_{a1} - \Psi_{c1}) \right. \\ &\quad \left. + (\Psi_{a2}^* - \Psi_{c2}^*) (\Psi_{a2} - \Psi_{c2}) + (\Psi_{a3}^* - \Psi_{c3}^*) (\Psi_{a3} - \Psi_{c3}) \right\} \\ J_t &= \left\{ \begin{aligned} &\Psi_{a0}^* \Psi_{a0} - \Psi_{a0}^* \Psi_{c0} - \Psi_{c0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{c0}^* \Psi_{c0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} - \Psi_{a1}^* \Psi_{c1} - \Psi_{c1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{c1}^* \Psi_{c1} \\ &\Psi_{a2}^* \Psi_{a2} - \Psi_{a2}^* \Psi_{c2} - \Psi_{c2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{c2}^* \Psi_{c2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} - \Psi_{a3}^* \Psi_{c3} - \Psi_{c3}^* \Psi_{a3} + \Psi_{c3}^* \Psi_{c3} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX-7})$$

On y retrouve les courants relatifs à chacune des particules (a) et (c) :

$$\begin{aligned} J_{at} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{a3} \\ J_{ct} &= \Psi_{c0}^* \Psi_{c0} + \Psi_{c1}^* \Psi_{c1} + \Psi_{c2}^* \Psi_{c2} + \Psi_{c3}^* \Psi_{c3} \end{aligned} \quad (\text{IX-8})$$

Ainsi que les courants d'interaction entre les particules (a) et (c) :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{act}} &= -(\Psi_{a0}^* \Psi_{c0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{c1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{c2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{c3}) \\ \mathbf{J}_{\text{cat}} &= -(\Psi_{c0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{c1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{c2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{c3}^* \Psi_{a3}) \end{aligned} \quad (\text{IX-10})$$

On peut mettre en évidence la phase de de BROGLIE dans ces courants d'interaction :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{act}} &= -(\mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{c0} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{c1} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{c2} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{c3}) e^{j(\phi_a - \phi_c)} = -\mathbf{K}_{\text{act}} e^{j(\phi_a - \phi_c)} \\ \mathbf{J}_{\text{cat}} &= -(\mathbf{u}_{c0}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{c1}^* \mathbf{u}_{a1} + \mathbf{u}_{c2}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{c3}^* \mathbf{u}_{a3}) e^{-j(\phi_a - \phi_c)} = -\mathbf{K}_{\text{cat}} e^{-j(\phi_a - \phi_c)} = -\mathbf{K}_{\text{act}}^* e^{-j(\phi_a - \phi_c)} \end{aligned} \quad (\text{IX-11})$$

Un travail analogue sur les composantes spatiales permet de construire le quadrivecteur d'interaction :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\text{ac}} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\text{act}} \\ \mathbf{J}_{\text{acx}} \\ \mathbf{J}_{\text{acy}} \\ \mathbf{J}_{\text{acz}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{J}}_{\text{ca}} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\text{cat}} \\ \mathbf{J}_{\text{cax}} \\ \mathbf{J}_{\text{cay}} \\ \mathbf{J}_{\text{caz}} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-12})$$

Ce déroulement est repris à l'identique pour les particules « sortantes ». La composante temporelle des courants d'interaction a pour expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{bdt}} &= -(\mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{d0} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{d1} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{d2} + \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{d3}) e^{-j(\phi_b - \phi_d)} = -\mathbf{K}_{\text{bdt}} e^{-j(\phi_b - \phi_d)} \\ \mathbf{J}_{\text{dbt}} &= -(\mathbf{u}_{d0}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{d1}^* \mathbf{u}_{b1} + \mathbf{u}_{d2}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{d3}^* \mathbf{u}_{b3}) e^{j(\phi_b - \phi_d)} = -\mathbf{K}_{\text{dbt}} e^{j(\phi_b - \phi_d)} = -\mathbf{K}_{\text{bdt}}^* e^{j(\phi_b - \phi_d)} \end{aligned} \quad (\text{IX-13})$$

On calcule ensuite le pseudo produit scalaire d'interaction M entre les particules « entrantes » et « sortantes » :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\tilde{\mathbf{J}}_{\text{ac}} + \tilde{\mathbf{J}}_{\text{ca}})(\tilde{\mathbf{J}}_{\text{bd}} + \tilde{\mathbf{J}}_{\text{db}}) = (\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ac}} e^{j(\phi_a - \phi_c)} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ca}} e^{-j(\phi_a - \phi_c)})(\tilde{\mathbf{K}}_{\text{bd}} e^{-j(\phi_b - \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{db}} e^{j(\phi_b - \phi_d)}) \\ \mathbf{M} &= \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ac}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bd}} e^{j(\phi_a - \phi_c - \phi_b + \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ac}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{db}} e^{j(\phi_a - \phi_c + \phi_b - \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ca}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bd}} e^{-j(\phi_a - \phi_c + \phi_b - \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ca}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{db}} e^{-j(\phi_a - \phi_c - \phi_b + \phi_d)} \end{aligned} \quad (\text{IX-14})$$

La conservation de l'énergie impose :

$$\phi_a - \phi_c + \phi_b - \phi_d = 0 \quad (\text{IX-15})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ac}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bd}} e^{j(\phi_a - \phi_c - \phi_b + \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ac}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{db}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ca}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bd}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ca}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{db}} e^{-j(\phi_a - \phi_c - \phi_b + \phi_d)} \\ \langle \mathbf{M} \rangle &= \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ac}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{db}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ca}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bd}} \end{aligned} \quad (\text{IX-16})$$

Les deux termes qui composent la valeur moyenne de M sont conjugués, et sont associés à l'amplitude de diffusion de (a)(c) vers (b)(d), et (b)(d) vers (a)(c).

Si on ne retient que le terme de diffusion de (a)(c) vers (b)(d) :

$$\mathbf{M}_{\text{ac} \rightarrow \text{bd}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ac}} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{db}} = \mathbf{K}_{\text{act}} \mathbf{K}_{\text{dbt}} - \mathbf{K}_{\text{acx}} \mathbf{K}_{\text{dbx}} - \mathbf{K}_{\text{acy}} \mathbf{K}_{\text{dby}} - \mathbf{K}_{\text{acz}} \mathbf{K}_{\text{dbz}} \quad (\text{IX-17})$$

Comme dans le cas de la diffusion inélastique, il convient de diviser la quantité  $M$  par le carré de l'énergie qui participe à la réaction pour construire un terme sans dimension qui conduira à la probabilité de réaction. Dans ce cas particulier, cette énergie est égale à la variation de l'énergie cinétique de chacune des particules ou antiparticules incidentes : son carré est représenté par la variable MANDELSTAM  $t$  (V-12).

Le terme qui apparaît dans la probabilité de réaction est donc proportionnel à la quantité :

$$\frac{M_{ac \rightarrow db}}{t} \tag{IX-18}$$

Ce terme est effectivement présent dans le calcul du graphe de FEYNMAN correspondant.

On notera que dans ce cas particulier la particule qui diffuse est de même nature que la particule incidente, ce qui indique que sa masse au repos est identique. Il s'ensuit que la variable de MANDELSTAM  $t$  (V-12) prend nécessairement une valeur négative.

# X - Le Photon de DIRAC

Le formalisme d'interaction présenté dans les chapitres précédents permet de traiter l'interaction entre particules et antiparticules.

Ce formalisme aurait une portée plus générale, s'il permettait de traiter également l'interaction avec des photons, car il pourrait être utilisé sans distinction entre particule massive, antiparticule, et photon.

Nous conjecturons qu'une telle possibilité existe, si le photon peut être considéré comme une particule de DIRAC sans masse.

Il est connu que le photon possède une énergie et une impulsion, et donc qu'il peut être représenté par un quadrivecteur énergie-impulsion.

Nous admettons qu'un photon peut être considéré comme une particule de DIRAC s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- Il est représenté par une solution exacte à l'équation de DIRAC.
- La quadrivecteur des courants de DIRAC est identique au quadrivecteur impulsion énergie de la relativité restreinte.

$$\tilde{p} = \hbar \begin{pmatrix} \omega \\ k_x c \\ k_y c \\ k_z c \end{pmatrix} = \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_x}{c} \\ \frac{v_y}{c} \\ \frac{v_z}{c} \end{pmatrix} \quad (X-1)$$

Pour un photon de pulsation  $\omega$ , les solutions sont recherchées sous la forme d'exponentielles complexes  $e^{i\phi}$  ou  $e^{-j\phi}$  avec une phase de de BROGLIE :

$$\phi = (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = \omega \left( t - \frac{v_x}{c^2} x - \frac{v_y}{c^2} y - \frac{v_z}{c^2} z \right) \quad (X-2)$$

Ces solutions sont associées à la relation de conservation de l'énergie, qui dans ce cas particulier représente uniquement de l'énergie impulsionnelle :

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2 \quad (X-3)$$

Les bispineurs qui représentent le photon sont solutions de l'équation de DIRAC obtenue en enlevant le terme relatif à la masse :

$$\begin{aligned}
0 &= j \frac{\partial \psi_0}{\partial(ct)} + j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\
0 &= j \frac{\partial \psi_1}{\partial(ct)} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\
0 &= -j \frac{\partial \psi_2}{\partial(ct)} - j \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \\
0 &= -j \frac{\partial \psi_3}{\partial(ct)} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_1}{\partial z}
\end{aligned} \tag{X-4}$$

On peut vérifier que les expressions ci-dessous sont des solutions exactes du système de DIRAC (X-4).

$$\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x + jv_y}{c} \end{pmatrix} e^{\pm j\phi} \quad \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{v_x - jv_y}{c} \\ -\frac{v_z}{c} \end{pmatrix} e^{\pm j\phi} \quad \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} \frac{v_z}{c} \\ v_x + jv_y \\ c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm j\phi} \quad \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} \frac{v_x - jv_y}{c} \\ c \\ -\frac{v_z}{c} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm j\phi} \tag{X-5}$$

Les courants de DIRAC sont identiques pour chacune des solutions ci-dessus. Un calcul explicite est détaillé pour le premier élément de (X-5) :

$$\begin{aligned}
J_t &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 \\
J_t &= \frac{\hbar\omega}{2} \left( 1 + \left( \frac{v_z}{c} \right)^2 + \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 + \left( \frac{v_y}{c} \right)^2 \right) = \hbar\omega \\
J_x &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_0^* \psi_3 \\
J_x &= \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{v_x - jv_y}{c} + \frac{v_x + jv_y}{c} \right) = \hbar\omega \frac{v_x}{c} = \hbar c k_x \\
J_y &= j\psi_3^* \psi_0 - j\psi_2^* \psi_1 + j\psi_1^* \psi_2 - j\psi_0^* \psi_3 \\
J_y &= j \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ \frac{v_x - jv_y}{c} - \frac{v_x + jv_y}{c} \right\} = \hbar\omega \frac{v_y}{c} = \hbar c k_y \\
J_z &= \psi_2^* \psi_0 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_0^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_3 \\
J_z &= \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{v_z}{c} + \frac{v_z}{c} \right) = \hbar\omega \frac{v_z}{c} = \hbar c k_z
\end{aligned} \tag{X-6}$$

Au vu de ces résultats, nous admettons que le photon peut être considéré comme une particule de DIRAC. Sa représentation pourra être l'une quelconque des solutions (X-5) ci-dessus. On notera que la phase de l'exponentielle peut être indifféremment (+ $\phi$ ) ou (- $\phi$ ).

D'autres éléments, basés sur une analyse énergétique modale et présentés dans le chapitre XXXII de [ce document](#), plaident également en faveur d'une représentation du photon comme particule de DIRAC.

Cette conception est en contradiction avec l'idée couramment admise que les solutions de l'équation de DIRAC ne représentent que des particules de spin 1/2. Nous poursuivons malgré tout le développement de ce chapitre, en prévenant le lecteur qu'il est à contre-courant des idées majoritaires.

Si on admet que le photon est une particule de DIRAC, alors il doit participer aux réactions de diffusion de manière analogue aux particules et anti particules massives.

Pour illustrer cette conception, considérons un des diagrammes de diffusion de l'effet COMPTON.

Un photon est incident sur un électron. La particule équivalente en entrée cumule l'énergie impulsionnelle du photon incident avec l'énergie impulsionnelle de l'électron. La particule équivalente en sortie cumule l'énergie impulsionnelle du photon diffusé avec l'énergie impulsionnelle de l'électron diffusé.

On considère qu'il s'agit d'une diffusion inélastique, car le photon incident est absorbé par l'électron. Cela conduit à mettre en œuvre une démarche analogue à la diffusion électron-muon du chapitre VII.

On désigne par :

- $\psi_a$  le bispineur de DIRAC qui représente l'électron incident
- $\psi_b$  le bispineur de DIRAC qui représente le photon incident
- $\psi_c$  le bispineur de DIRAC qui représente l'électron diffusé
- $\psi_d$  le bispineur de DIRAC qui représente le photon diffusé

$$\psi_a = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{a0} \\ u_{a1} \\ u_{a2} \\ u_{a3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_a} = u_a e^{-j\phi_a} \quad \psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{b0} \\ u_{b1} \\ u_{b2} \\ u_{b3} \end{pmatrix} e^{\pm j\phi_b} = u_b e^{\pm j\phi_b} \quad (X-7)$$

$$\psi_c = \begin{pmatrix} \Psi_{c0} \\ \Psi_{c1} \\ \Psi_{c2} \\ \Psi_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{c0} \\ u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{pmatrix} e^{-j\phi_c} = u_c e^{-j\phi_c} \quad \psi_d = \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{d1} \\ \Psi_{d2} \\ \Psi_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{d0} \\ u_{d1} \\ u_{d2} \\ u_{d3} \end{pmatrix} e^{\pm j\phi_d} = u_d e^{\pm j\phi_d}$$

On forme la particule de DIRAC équivalente aux deux particules incidentes :

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \psi_a + \psi_b = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} \\ \Psi_{a1} \\ \Psi_{a2} \\ \Psi_{a3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{b0} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{b3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{a0} + \Psi_{b0} \\ \Psi_{a1} + \Psi_{b1} \\ \Psi_{a2} + \Psi_{b2} \\ \Psi_{a3} + \Psi_{b3} \end{pmatrix} \quad (X-8)$$

On calcule les courants de DIRAC de la particule équivalente. On y retrouve les quadrivecteurs impulsion-énergie de l'électron et du photon, plus les courants d'interaction. On obtient par exemple pour la composante temporelle :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{abt} &= \Psi_{a0}^* \Psi_{b0} + \Psi_{a1}^* \Psi_{b1} + \Psi_{a2}^* \Psi_{b2} + \Psi_{a3}^* \Psi_{b3} \\ \mathbf{J}_{bat} &= \Psi_{b0}^* \Psi_{a0} + \Psi_{b1}^* \Psi_{a1} + \Psi_{b2}^* \Psi_{a2} + \Psi_{b3}^* \Psi_{a3} \end{aligned} \quad (\text{X-9})$$

On fait apparaître la phase de l'onde de BROGLIE dans ces courants d'interaction. Sur l'exemple de la composante temporelle, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{abt} &= \left( \mathbf{u}_{a0}^* \mathbf{u}_{b0} + \mathbf{u}_{a1}^* \mathbf{u}_{b1} + \mathbf{u}_{a2}^* \mathbf{u}_{b2} + \mathbf{u}_{a3}^* \mathbf{u}_{b3} \right) e^{j(\phi_a \pm \phi_b)} = \mathbf{K}_{abt} e^{j(\phi_a \pm \phi_b)} \\ \mathbf{J}_{bat} &= \left( \mathbf{u}_{b0}^* \mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{b1}^* \mathbf{u}_{a1} + \mathbf{u}_{b2}^* \mathbf{u}_{a2} + \mathbf{u}_{b3}^* \mathbf{u}_{a3} \right) e^{-j(\phi_a \pm \phi_b)} = \mathbf{K}_{bat} e^{-j(\phi_a \pm \phi_b)} \end{aligned} \quad (\text{X-10})$$

En ajoutant les composantes spatiales, on obtient le quadrivecteur d'interaction :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{ab} + \tilde{\mathbf{J}}_{ba} = \tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j(\phi_a \pm \phi_b)} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j(\phi_a \pm \phi_b)} \quad (\text{X-11})$$

Le travail est en tout point analogue pour l'électron et le photon diffusé :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mathbf{J}}_{dc} = \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_c \pm \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j(\phi_c \pm \phi_d)} \quad (\text{X-12})$$

On effectue le pseudo produit scalaire M des interactions (a)(b) et (c)(d).

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left( \tilde{\mathbf{K}}_{ab} e^{j(\phi_a \pm \phi_b)} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} e^{-j(\phi_a \pm \phi_b)} \right) \left( \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_c \pm \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{-j(\phi_c \pm \phi_d)} \right) \\ \mathbf{M} &= \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{j(\phi_a \pm \phi_b + \phi_c \pm \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{j(\phi_a \pm \phi_b - \phi_c \pm \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{-j(\phi_a \pm \phi_b - \phi_c \pm \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{j(\phi_a \pm \phi_b + \phi_c \pm \phi_d)} \end{aligned} \quad (\text{X-13})$$

Les seuls termes qui ont une valeur moyenne non nulle sont ceux dont la phase respecte la conservation de l'énergie :

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} e^{j(\phi_a + \phi_b - \phi_c - \phi_d)} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} e^{-j(\phi_a + \phi_b - \phi_c - \phi_d)} = \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} + \tilde{\mathbf{K}}_{ba} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd} = \tilde{\mathbf{K}}_{ab} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{dc} + \tilde{\mathbf{K}}_{ab}^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{cd}^* \quad (\text{X-14})$$

Chacun de ces deux termes est associé à l'amplitude de diffusion de (a)(b) vers (c)(d) et (c)(d) vers(a)(b).

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{M}_{ab \rightarrow cd} + \mathbf{M}_{cd \rightarrow ab} \quad (\text{X-15})$$

Il reste pour terminer à normaliser ce terme par rapport au carré de l'énergie totale qui participe à la réaction.

Le carré de cette énergie est donné par la variable de MANDELSTAM  $s$  (V-11), à laquelle on doit retirer le carré de l'énergie de masse de l'électron (les énergies qui interagissent sont les énergies impulsionnelles). Dans la notation de ce document, l'amplitude de diffusion est proportionnelle au terme :

$$\frac{\mathbf{M}_{ab \rightarrow cd}}{s - (\gamma_a \Psi_{a0})^2} \quad (\text{X-16})$$

Le calcul de diffusion pour une polarisation donnée de chaque particule incidente et de chaque particule diffusée est terminé.

Dans le cas d'une diffusion où la polarisation des particules n'est pas connue, il convient de faire la moyenne des amplitudes de diffusion sur les particules incidentes, et la somme sur les particules diffusées.

Cette somme peut être effectuée de manière élémentaire d'un point de vue informatique. Elle est par contre d'une complexité certaine si l'on souhaite aboutir à une formulation analytique comme dans le chapitre VIII. Le travail engagé dans ce sens n'est pas abouti à ce jour.

La différence par rapport au traitement qui a été effectué au chapitre VIII réside dans le fait que le photon, tel qu'il est décrit dans ce document possède 4 états de polarisation qui sont donnés en (X-5). Cette propriété est liée au fait que le photon est également son antiparticule, et qu'on ne peut distinguer expérimentalement un photon particule d'un photon antiparticule.

L'électron a 2 états de spin, ce qui conduit à  $2 \times 4 = 8$  combinaisons de polarisation pour les particules incidentes, et autant pour les particules diffusées. Il faut donc sommer  $8 \times 8 = 64$  amplitudes de diffusion pour obtenir l'amplitude de diffusion d'un état non polarisé.

# XI - Conclusion

La notion de diffusion de particules fait partie des sujets les plus complexes de la physique contemporaine. Sa compréhension résulte des travaux de recherche et d'expérimentation d'innombrables chercheurs, sur une période qui atteint désormais près d'un siècle.

Elle s'appuie sur la théorie quantique des champs et sur les graphes de FEYNMAN, qui constituent un des outils les plus puissants inventés par l'homme pour effectuer des calculs sur un phénomène physique.

Cet outil est quelquefois présenté comme un outil proche des techniques de l'ingénieur : on admet sa validité démontrée à l'aide de théories complexes, et on l'applique en utilisant des règles rigoureuses, avec peu d'interrogation sur la physique qui est sous-jacente à chacune de ses règles.

Dans une approche énergétique de la diffusion, on tente d'ouvrir une autre porte d'entrée sur cet univers bien particulier. L'ouverture proposée est modeste, et fragile sur bien des points, mais elle essaie de décrire les phénomènes au plus près des échanges qui interviennent dans une vision énergétique de la physique. Elle ne rivalise en rien avec les graphes de FEYNMAN qui ont une portée plus générale, mais elle semble apte à en simplifier quelques éléments de calcul et de compréhension.

La cohérence de l'approche énergétique qui est présentée tient au fait qu'elle décrit dans les mêmes relations, à la fois les propriétés relativistes des particules supposées ponctuelles, et les propriétés statistiques des particules quantiques.

En prenant les valeurs moyennes des courants de DIRAC, on obtient les quadrivecteurs impulsions qui représentent les propriétés macroscopiques des particules.

En prenant la valeur moyenne du pseudo produit scalaire de ces courants, on obtient les amplitudes de diffusion qui représentent les propriétés statistiques quantiques de ces particules.

L'approche proposée peut être résumée de la manière suivante :

- On définit une particule équivalente en entrée. Cette phase nécessite une analyse simple du système suivant le type de diffusion.

- On calcule les courants de DIRAC de cette particule équivalente. Ces courants font apparaître les quadrivecteurs impulsion-énergie de chacune des particules, plus des courants d'interaction.

- On procède de même pour les particules diffusées.

- On fait le pseudo-produit scalaire  $M$  des courants d'interaction d'entrée et des courants d'interaction de sortie. La valeur moyenne de  $M$  permet d'extraire le terme représentatif de la diffusion entrée-sortie ou sortie-entrée en utilisant la relation de conservation de l'énergie.

- On normalise ce terme par rapport à l'énergie totale qui a interagi dans la diffusion.

Le résultat obtenu est proportionnel à l'amplitude de diffusion du cas particulier qui est traité. Pour traiter une diffusion non polarisée, il faut ensuite faire la somme de tous les cas de diffusion possibles, suivant les états de spins des particules d'entrée et de sortie, et enfin faire la moyenne sur les spins d'entrée en divisant par le nombre de cas possibles en entrée.

La démarche adoptée dans ce document est complètement déterministe et ne laisse aucune place à des principes pourtant souvent qualifiés de fondamentaux comme le principe de complémentarité, et le principe de superposition.

Ces principes ont été adoptés dans les débuts de la mécanique quantique afin de prendre en compte un ensemble de faits expérimentaux que les premiers éléments de théorie ne permettaient pas d'expliquer.

D'un point de vue expérimental, la notion de gouttelettes marcheuses montre que ces principes ne sont pas nécessaires pour expliquer les phénomènes d'interférence et de diffraction.

D'un point de vue théorique, la construction de plus en plus élaborée du monde quantique ne repose à aucun moment sur ces principes.

Du point de vue de l'auteur, ils doivent être abandonnés, car ils ne sont plus d'aucune utilité dans la compréhension des phénomènes quantiques.

Cet abandon qui semble inéluctable à plus ou moins court terme aura des conséquences. En particulier, le caractère déterministe qui émerge à la fois en théorie et expérimentation indique qu'il n'est pas envisageable de construire des ordinateurs quantiques sur la base du principe de superposition, qui est un principe non physique.

Pour autant, il est certain que les progrès de la physique quantique permettront des progrès significatifs dans l'informatique quantique, à la fois dans l'accroissement de la vitesse des horloges de base, mais également, si on ne censure pas son imagination, dans la conception de portes logiques photoniques, dans l'utilisation d'une base 4 (4 états de polarisation) au lieu de 2, ...etc.

# Bibliographie

Les documents consultés lors de l'écriture de ce document concernent essentiellement la physique des particules, la théorie quantique des champs et les graphes de FEYNMAN.

Ces documents décrivent ces différents domaines avec quelques différences sur la forme, mais peu d'écart sur le fond. Ils privilégient souvent les aspects mathématiques des raisonnements complexes qui sont formulés, quelquefois au détriment des aspects physiques. Il n'a été trouvé, dans aucun des documents consultés, une référence à une voie similaire à celle qui est présentée dans ce mémoire.

L. Marleau, *Introduction à la physique des particules*, Université Laval, Québec, Canada, 2016

[http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/intl/fr/marleau\\_ppnotes.pdf](http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/intl/fr/marleau_ppnotes.pdf)

S. Teber, *Introduction à la théorie quantique des champs*, Sorbonne Université,

[https://www.lpthe.jussieu.fr/~teber/Teaching/poly\\_TQC\\_part.pdf](https://www.lpthe.jussieu.fr/~teber/Teaching/poly_TQC_part.pdf)

F. Brümmer, *théorie quantique des champs*, 2018, <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-02000731>

A. Lawson, *Compton Scattering from Quantum Electrodynamics*, 2014,

[https://www.personal.soton.ac.uk/ab1u06/teaching/qft/qft1/christmas\\_problems/2014/xmas\\_problem\\_solution.pdf](https://www.personal.soton.ac.uk/ab1u06/teaching/qft/qft1/christmas_problems/2014/xmas_problem_solution.pdf)

Krešimir Kumeričkiy, *Feynman Diagrams for Beginners*, 2016, <https://arxiv.org/pdf/1602.04182>

T. Ohl, *Feynman Diagrams For Pedestrians*, 2014,

[https://www.ippp.dur.ac.uk/~mspannow/files/Feynman\\_Pedestrians.pdf](https://www.ippp.dur.ac.uk/~mspannow/files/Feynman_Pedestrians.pdf)

C. Longuemare, *Introduction aux graphes de Feynman*, 2010,

<http://claudel1.chez-alice.fr/documents/longuemare/grapheF.pdf>

M. Thomson, *Particle physics*, 2011,

<https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~thomson/partIIIparticles/welcome.html>

G. Burdman, *Quantum Electrodynamics*, [http://fma.if.usp.br/~burdman/QFT1/lecture\\_18.pdf](http://fma.if.usp.br/~burdman/QFT1/lecture_18.pdf)

A. Nelson, *Notes on Feynman diagrams*, 2008

[https://researchgate.net/publication/255655091\\_NOTES\\_ON\\_FEYNMAN\\_DIAGRAMS](https://researchgate.net/publication/255655091_NOTES_ON_FEYNMAN_DIAGRAMS)

R. Kleiss, *Quantum Field Theory.A Diagrammatic Approach*, 2019,

<https://agenda.irmp.ucl.ac.be/event/3340/contributions/4015/attachments/2087/2506/qft.pdf>

B. Ydri, *Quantum Field Theory and Particle Physics*, 2016,

[https://www.researchgate.net/publication/303966579\\_Quantum\\_Field\\_Theory\\_and\\_Particle\\_Physics\\_preliminary\\_version\\_1](https://www.researchgate.net/publication/303966579_Quantum_Field_Theory_and_Particle_Physics_preliminary_version_1)

G. Barnich, *Théorie quantique des champs*, Université libre de Bruxelles et international Solvay institutes, <http://homepages.ulb.ac.be/~gbarnich/TQC.pdf>

Sur l'aspect énergétique des solutions stationnaires de l'équation de Dirac :

P. Vaudon, *Une approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique*, 2018

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01223516>

P. Vaudon, *L'onde de de Broglie dans les solutions de l'équation de Dirac*, 2020

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02425969>