



**HAL**  
open science

# Penser l'organisation mathématique pour un enseignement-apprentissage par problématisation

Sylvie Grau

► **To cite this version:**

Sylvie Grau. Penser l'organisation mathématique pour un enseignement-apprentissage par problématisation. 17ème colloque du réseau PROBLEMA, 2020, Saint-Lô, France. hal-03173186

**HAL Id: hal-03173186**

**<https://hal.science/hal-03173186>**

Submitted on 18 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Penser l'organisation mathématique pour un enseignement-apprentissage par problématisation**

Sylvie GRAU

Docteure en sciences de l'éducation chercheuse associée au CREN

Professeure agrégée de mathématiques INSPE Université de Nantes

Nous allons essayer de caractériser le registre explicatif (REX) en mathématiques à partir de la définition donnée par Orange (Orange, 2005) et dans la continuité des travaux de Hersant (Hersant, 2016). Après avoir identifié quelques obstacles à la délimitation de ce qui est en question et ce qui est hors question (désormais EHQ), nous explorerons plusieurs pistes pour penser un enseignement-apprentissage par problématisation : repenser l'organisation mathématiques, non plus en termes de domaines et d'axiomatics mais bien en termes de problèmes ou de classes de problèmes, faire construire les critères de validation aux élèves, penser la formation au regard critique à travers les situations de formulation-validation (Mathé et al., 2020). Notre objectif est d'aider les élèves à délimiter le EHQ tout en développant leur capacité à prendre en charge le problème.

### Enseigner par problématisation en mathématiques

Former les élèves à la problématisation suppose de les amener à construire un certain rapport au monde, un rapport dynamique où l'élève ne se pose plus comme observateur mais comme acteur, lui donnant la possibilité d'agir et de penser pour effectuer des choix. C'est une posture qui peut sembler indispensable dans notre société mais qui n'est pas également partagée car éloignée de l'identité culturelle de nombreux élèves. C'est pourquoi un enseignement à et par la problématisation vise la construction d'un savoir apodictique, mais il doit aussi amener les élèves à faire évoluer leur représentation du monde et leur identité. La question du sens est alors essentielle pour amener l'élève à définir des buts qui motivent les apprentissages. Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, cette question est encore plus difficile à traiter du fait du caractère abstrait des savoirs qui lui sont associés. Trois aspects peuvent être explorés : l'aspect pragmatique (le sens est donné par l'utilité), l'aspect intégrateur (le sens est donné par la cohérence avec l'existant, la non remise en cause de ses connaissances, de ses représentations) et l'aspect théorique (le sens est donné par l'organisation logique et axiomatique des savoirs). Tout l'enjeu est de réussir à lier ces aspects et non les opposer ou d'en oublier un. Privilégier l'aspect pragmatique amène l'élève à mettre en œuvre des techniques et à résoudre des problèmes par analogie, l'élève construit un savoir-outil qu'il peut avoir du mal à mobiliser dans des contextes différents. Privilégier l'aspect intégrateur amène à simplifier, oublier des facettes du savoir, il devient impossible de dépasser les obstacles épistémologiques, l'apprentissage est donc limité. Privilégier l'aspect théorique permet de construire un savoir

objet souvent associé à un domaine des mathématiques, la structure théorique n'autorise cependant pas toujours l'élève à utiliser ce savoir pour modéliser des situations concrètes ou relevant d'un autre domaine mathématique, rendant le savoir peu disponible. Lier les trois approches suppose de ne pas négliger la décontextualisation/recontextualisation qui vise à extraire de situations de référence les caractéristiques d'une classe de situations et à recontextualiser ces éléments caractéristiques dans une organisation théorique.

Brousseau part de l'hypothèse que :

Chaque connaissance mathématique possède au moins une situation qui la caractérise et la différencie de toutes les autres, [...] l'ensemble des situations qui caractérisent une même notion est structuré et il peut être engendré à partir d'un petit nombre de situations dites fondamentales, par le jeu de variantes, de variables et de bornes sur ces variables. (Brousseau, 1999)

L'enseignant a donc à charge d'organiser un milieu, la situation étant un modèle d'interaction d'un sujet avec un certain milieu, amenant un apprentissage par un processus d'adaptation et d'acculturation. Une analyse épistémologique et la genèse des savoirs mathématique permettent d'identifier certaines situations fondamentales. Nous avons mis en place des ingénieries à différents niveaux scolaires et sur différentes notions (Grau, 2017) dans le but d'amener l'élève à construire un problème associé à ces situations fondamentales. Une analyse *a priori* permet de choisir parmi les variables didactiques celles qui sont susceptibles d'apporter des réponses du milieu favorables à l'adaptation attendue. Cette analyse aboutit à l'élaboration d'un problème que nous appelons problème théorique.

L'enregistrement de petits groupes d'élèves au travail a montré qu'un même problème théorique amène cependant les élèves à construire des problèmes qui en sont parfois très éloignés. Nous avons analysé ces écarts en pointant ceux relevant de malentendus socio-scolaires (Rayou, 2019) qui peuvent être cognitifs si la tâche semble à l'élève très éloignée de sa représentation du dire, agir, penser en mathématiques ; culturels si le contexte est sans rapport avec la représentation que l'élève a des mathématiques ; identitaires si l'élève ne se considère pas faisant partie d'une certaine communauté reconnue capable de résoudre le problème (Grau, 2019).

Par ailleurs, pour amener les élèves à faire émerger des nécessités, la situation doit les inciter à construire un problème explicatif (Fabre & Orange, 1997). Une incohérence, un paradoxe, sont des moteurs de la preuve, ils vont encourager l'élève à chercher une explication, ils émergent de faits construits qui entrent en tension avec les données ou les contraintes déjà-là et peuvent jouer sur l'aspect pragmatique (« ça ne fonctionne pas »), intégrateur (« c'est contraire à ce que je sais ») ou théorique (« c'est contraire à une propriété ou une définition »). Cela suppose que les élèves ont traité des données pour en construire de nouvelles et qu'ils sont convaincus que ces données sont valides et non contestables. Par ailleurs, l'élève doit pouvoir agir pour obtenir une rétroaction du milieu sans être assujéti à l'enseignant. Ce principe de dévolution est absolument indispensable.

Dans tous les cas, la difficulté rencontrée relève de l'identification du EQH. Pour mieux comprendre comment chaque élève le délimite, nous devons identifier les traces de problématisation dans l'activité des élèves.

### Définir le REX en mathématiques

La problématisation s'appuie sur la mise en relation des données et des conditions du problème. Ces conditions regroupent les connaissances, les représentations et les expériences vécues, qu'elles soient scolaires, scientifiques, ce que Brousseau appelle le répertoire (Brousseau, 2010) ou culturelles (liées à son rapport au monde et à son identité). Cette mise en relation est organisée pour chaque individu par un registre explicatif (REX) en lien avec le problème, à partir duquel s'élaborent des modèles lui permettant d'agir, interpréter et reformuler les situations. La difficulté est d'identifier la nature de ce REX afin de repérer son évolution, considérée comme témoin d'un apprentissage. Une première piste est de considérer le REX comme un grand domaine des mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie...) et donc d'assimiler le REX aux cadres mathématiques au sens de Douady (Rogalski, 2001) mais les cadres ne prennent pas en compte d'autres variables comme les différents registres sémiotiques, les changements de points de vue et les différents niveaux d'analyse qui interviennent dans un même cadre (Grau, 2020). En outre, cette conception du REX ne permet pas de régler la question des malentendus socio-scolaires. Hersant a pointé les interactions entre le cadre mathématique, le cadre épistémique de Piaget (Legendre, 2006) considéré comme le cadre conceptuel dans lequel se fait la réflexion scientifique et dans lequel le système social prend une part importante, et le contrat didactique dans sa facette épistémologique et sa facette sociale (Hersant, 2016). Le cadre épistémique semble englober l'ensemble et nous proposons de penser le REX comme ce qui caractérise un certain rapport aux mathématiques et de le considérer à l'intersection de trois modes de pensée qui en font ses trois composantes :

- La composante pragmatique (REXP) correspond à une configuration des connaissances ancrée dans l'empirique (a statut de preuve le fait que ce soit réalisable, perceptible, que cela existe concrètement). Ce REXP est celui sur lequel s'appuient les apprentissages premiers, il passe par le corps, par la manipulation et l'instrumental, il peut être très intuitif et être dans l'ici et le maintenant.
- La composante intégratrice (REXI) correspond à une organisation par comparaison, analogie, classification (ont statut de preuve des exemples ou des modèles déjà rencontrés qui sont généralisés).
- La composante théorique (REXT) correspond à une structure logique et axiomatique (l'explication du vrai s'appuie sur la démonstration à partir de propriétés elles-mêmes démontrées ou d'axiomes explicites).

Problématiser demande d'explorer ces différentes composantes et l'évolution de l'équilibre entre ces composantes témoigne d'un apprentissage. Le milieu doit pour cela produire des rétroactions permettant à l'élève de choisir la composante la mieux adaptée au contexte, le dire, agir, penser n'étant pas le même pour chacune des composantes.

## Rendre le savoir disponible pour construire de nouvelles données, de nouveaux faits

La résolution de problème étant au cœur de l'activité mathématiques, face à un problème ouvert<sup>1</sup>, l'élève fait appel à des connaissances sans que l'enseignant, l'énoncé, ou quelque élément du contrat didactique ne les induisent. Ces connaissances sont alors dites disponibles. Nous avons analysé un problème posé en classe de seconde pour mettre en évidence les obstacles rencontrés par les élèves et tenter d'expliquer la non-disponibilité des connaissances (voir Annexe 1). Les conversions de cadres et de registres sémiotiques permettent de produire de nouveaux faits et de construire peu à peu le problème. Il s'avère que les élèves ne prennent pas l'initiative de ces conversions et n'arrivent pas à mobiliser leurs connaissances. La séquence doit alors accompagner la mise en place de ces conversions pour amener une évolution du REX (voir annexe 2). Mais comment penser l'enseignement des conversions ?

L'organisation mathématique des programmes et la planification des enseignements à l'école se font essentiellement autour des grands domaines (géométrie, algèbre...). Nous proposons plutôt de penser l'enseignement à partir de grandes questions pouvant traverser plusieurs cadres mathématiques (les problèmes d'alignement, de position, de lieux, de construction, de mesures de longueurs, d'aire...). Une classe de problème peut s'apparenter à un champ conceptuel, que Vergnaud définit comme « un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion. » (Vergnaud, 1990), mais en réduisant ce champ conceptuel à un sous-ensemble relevant d'une même grande question. Pour illustrer la rupture avec l'organisation usuelle, prenons l'exemple de l'enseignement du théorème de Pythagore. Actuellement, un chapitre spécifique permet de découvrir le théorème et ses applications, dans l'idée développée par Vergnaud « qu'un concept scolaire se définit par trois ensembles : l'ensemble des situations qui lui donnent du sens, l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement, l'ensemble des invariants opératoires » (Vergnaud, 1990, p. 145). Or le théorème de Pythagore peut apporter une réponse à deux types de problèmes : ceux relevant de la perpendicularité (cadre de la géométrie) et ceux relevant du calcul de longueurs (cadre des mesures de grandeurs). Il semblerait intéressant de séparer ces deux aspects pour regrouper dans une unité d'enseignement les savoirs liés à la perpendicularité (médiatrice, hauteur, perpendiculaire à une parallèle...) et dans une autre ceux liés au calcul de longueurs (théorème de Thalès, milieu, polygones particuliers...) tant qu'à retrouver une même notion dans plusieurs unités mais avec des points de vue différents et au travers de plusieurs cadres mathématiques. Cette organisation pourrait aider les élèves à mieux comprendre le EHQ du fait que le répertoire serait structuré autour d'une grande question explicite qui traverse différents domaines mathématiques.

## Faire construire les critères de validation par l'élève

Problématiser suppose une ouverture et une fermeture de possibles. L'élève doit donc disposer de critères pour évaluer son activité. Une expérimentation est en cours dans un collège au niveau 6<sup>e</sup> pour comprendre l'impact de la construction des critères de validité par les élèves sur l'apprentissage. Cette recherche menée sous forme de recherche action est basée sur une co-construction et analyse de séances. La situation fondamentale choisie pour l'étude des figures planes est la reproduction d'une figure. Les élèves doivent rédiger un programme de

---

1 Les « problèmes ouverts » se caractérisent par un énoncé court qui n'induit ni la méthode, ni la solution et par le fait que le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité pour se représenter la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution (Arsac & Mante, 2007).

construction à partir d'une figure modèle permettant à un autre élève de construire une figure superposable. La séquence doit amener les élèves à identifier des nécessités : analyser la figure, prendre les informations nécessaires pour caractériser la figure, planifier des étapes de construction, rédiger une consigne pour chaque étape sans faire référence aux instruments, faire un programme le plus court possible. La mise en œuvre atteste cependant d'une grande réticence à laisser effectivement les élèves construire ces critères. Une analyse du choix des activités, du processus d'institutionnalisation au travers des feedbacks de l'enseignant, de ses écrits au tableau, montre que les critères sont certes explicités par l'enseignant à partir de l'agir des élèves mais que les élèves ne construisent pas les nécessités correspondant à ces critères de validation qui apparaissent plutôt comme imposées par l'enseignant dans un souci de conformité à un modèle « savant » (voir annexe 3).

Nous faisons l'hypothèse que la construction des critères de validation par les élèves peut sans doute être une manière de faire émerger des nécessités mais que les pratiques ordinaires sont encore très éloignées de cet objectif. La poursuite de cette expérimentation devra apporter des éléments permettant de penser cette construction de manière problématisée.

### Former au regard critique

Dans l'expérimentation précédente, la rédaction d'un programme de construction est une situation de formulation. La construction par un autre élève et la critique du programme sont des situations de validations. Au travers des critiques, il est possible de définir le EHQ. Certains éléments relèvent de nécessités liées au savoir (analyser pour identifier les éléments à construire, définir un ordre permettant la construction), d'autres de conventions au sein de la communauté mathématique (vocabulaire, notations), d'autres relèvent d'un changement de REX (passer de la géométrie instrumentée à la géométrie des propriétés), d'autres du contrat didactique dans sa facette épistémique (chercher une procédure à moindre coût) ou sociale (le groupe doit être d'accord sur la formulation). La situation de formulation est essentielle à l'explicitation des éléments du REX mobilisé par les élèves et à la délimitation du EHQ. Nous avons analysé une situation en classe de CE1 montrant que, sans situation de formulation, l'élève peut contourner les adaptations attendues (voir Annexe 4). Il s'agit d'un atelier autonome de reproduction de figures à partir de modèles sur des transparents permettant l'autocorrection. L'objectif de l'enseignante est d'entraîner les élèves à l'utilisation de l'équerre. Cependant, un élève produit plusieurs tracés, tous valides car superposables au modèle, sans utiliser son équerre. Il identifie « au jugé » les positions des différents segments constituant la figure, en comparant son tracé au modèle à chaque étape de la construction. Sans doute un choix différent des instruments aurait-il permis des rétroactions plus ciblées. Cependant « l'apprentissage ne résulte pas du mouvement d'un élève isolé en interaction avec une situation, mais d'un mouvement d'un collectif immergé dans une institution. Le processus de rencontre des élèves avec des pratiques, des connaissances et des savoirs géométriques passe donc aussi par une construction collective dans lesquels les interactions sociales jouent un rôle important. » (Mathé et al., 2020, p. 91). Le EHQ se définit au travers des échanges langagiers autour des situations proposées. Il est donc important de provoquer ces échanges à différentes étapes. En particulier, les situations de formulation autour de la critique des productions sont importantes pour que l'élève apprenne à autoréguler son activité. Elles forment l'élève au regard critique en l'amenant à développer les différentes composantes que sont : s'informer, évaluer l'information, distinguer les faits des interprétations, confronter les interprétations, évaluer les interprétations. Mettre en débat les interprétations permet de dévoiler certains aspects du REX et d'explicitier comment on peut évaluer, par confrontation à l'expérience, aux modèles ou aux théories. Former au regard critique relève aussi d'une construction identitaire (avoir envie de

se lancer de manière autonome, savoir ce que l'on sait, ce que l'on suppose et ce que l'on ignore, accepter de se tromper, savoir écouter et accepter le débat) et d'un entraînement à certaines pratiques (relever les informations, analyser leur nature, distinguer les données initiales des données construites, confronter avec les données construites par d'autres et les évaluer) qui constituent des éléments du contrat didactique et donc du REX en mathématiques.

## Conclusion

Penser un enseignement mathématique par problématisation demande de construire des situations d'apprentissage qui favorisent chez l'élève une évolution du REX prenant en compte une évolution de son rapport au monde. Aider l'élève à délimiter le EHQ tout en développant sa capacité à prendre en charge le problème suppose d'intervenir à chaque étape du processus : en amont en s'assurant de connaissances disponibles permettant à l'élève de construire des données et d'établir de nouveaux faits, pendant l'activité en pensant la formation au regard critique par des situations de formulation permettant d'explicitier les REX mobilisés et la construction et l'explicitation des critères de validation par les élèves, en aval par un processus d'institutionnalisation organisant les connaissances autour de grandes questions et articulant les différentes facettes du REX (pragmatique, intégrateur et théorique). L'organisation axiomatique des savoirs reste nécessaire pour assurer des preuves théoriques, elle doit être cohérente avec une organisation par classes de problèmes indépendante des cadres mathématiques. Il s'agit sans doute d'un changement radical de la perception de la discipline.

## Références :

- Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Canopé - CRDP de Lyon.
- Brousseau, G. (1999, octobre). Education et didactique des mathématiques. *Educacion y didactica de las matematicas*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00466260>
- Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. <http://guy-brousseau.com/biographie/glossaires/>
- Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- Grau, S. (2017). *Problématisation en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Bretagne Loire.
- Grau, S. (2019, octobre). Entre problème construit par l'élève et problème théorique : Distance et/ou malentendu. *EEDM 2019*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02517943>
- Grau, S. (2020, juin). *Questions curriculaires et problématisation dans l'enseignement-apprentissage en mathématiques*. Séminaire de problématisation, Nantes.
- Hersant, M. (2016, mai). *Cadre épistémique, Registre explicatif et contrat didactique*. 13<sup>e</sup> colloque du réseau Probléma, Lille.

- Legendre, M.-F. (2006). *L'épistémologie de Piaget*. [http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index\\_gen\\_page.php?IDPAGE=323&IDMODULE=72#s02](http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=323&IDMODULE=72#s02)
- Mathé, A.-C., Barrier, T., & Perrin-Glorian, M.-J. (2020). *Enseigner la Géométrie Elementaire—Enjeux, Ruptures et Continuités*. Academia.
- Orange, C. (2005). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *ASTER*, 40, 3-12.
- Rayou, P. (2019, janvier 16). *Malentendus socioscolaires*. Journée académique maîtrise des langages, académie de Nantes, Angers.
- Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 13-30.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.



## Annexe 1 : Problème du jardin

Le problème est contextualisé, il s'agit d'une surface carrée qu'un paysagiste veut aménager. Il faut découper cette surface en différentes zones par le tracé de deux figures : un carré et un triangle ayant un sommet commun. Il est demandé de déterminer les dimensions du carré pour que l'aire totale des deux figures soit minimale. Cette situation est une situation fondamentale pour l'étude des fonctions. Elle s'appuie sur la nécessité d'un modèle de la covariation de deux grandeurs permettant de justifier l'existence d'un minimum et sa détermination. Construire le problème suppose de le recontextualiser dans un cadre mathématique permettant des traitements par l'utilisation de registres sémiotiques. Dans le registre numérique, l'élève peut effectuer des calculs et comparer ses résultats. Il peut organiser ses mesures dans le registre des tableaux ou dans le registre graphique. Le graphique peut le convaincre de l'existence d'un minimum, le traitement arithmétique peut l'amener à déterminer ce minimum.

Or, lors de l'expérimentation, très peu d'élèves ont proposé des pistes de résolution. Un premier obstacle est lié à l'analyse du schéma, elle doit se faire contre une visualisation iconique des figures consistant à identifier automatiquement un carré et un triangle. En effet, il s'agit de mobiliser d'autres opérations : la division méréologique (envisager le dessin comme un assemblage ou une superposition de figures), la déconstruction dimensionnelle (repérer les éléments de dimension 0, 1 et 2), la déconstruction instrumentale (identification par usage d'instruments pour reproduire la figure), pour comprendre la dépendance entre l'aire du carré et celle du triangle. Or ces opérations ne sont pas enseignées ni entraînées dans leur dialectique outil/objet, elles sont rarement explicitées dans les pratiques ordinaires.

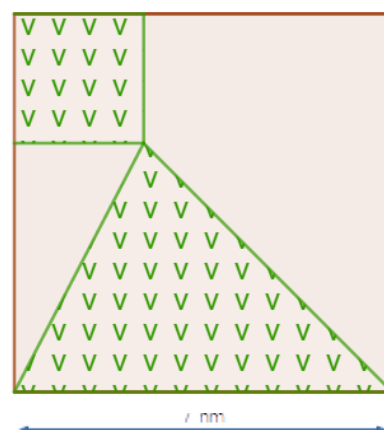
### Énoncé :

Un paysagiste prévoit de planter sur une partie d'un terrain carré de 700m de côté.

Il veut une partie carrée et une autre triangulaire suivant le schéma ci-dessous.

Le propriétaire donne son accord mais il souhaite que la partie avec les plantations (hachurée avec des vvv sur le schéma) soit la plus petite possible pour avoir suffisamment de place pour d'autres aménagements.

Quelle dimension donner à la surface carrée qui sera plantée pour que la surface totale de plantation soit la plus petite possible ?



## Annexe 2 : Figuration proposée

Les quelques productions collectées lors de la première phase de travail permettent d'identifier d'autres obstacles :

- **La perception de la covariation des grandeurs** : l'aire du carré varie en fonction de la longueur de son côté qui entraîne la variation de la hauteur du triangle et donc de son aire. Les élèves ont du mal à imaginer la figure de manière dynamique et s'ils le font, ils définissent une multitude de variables sans identifier les variables dépendantes.
- **Le concept de grandeur continue** : la longueur du côté du carré peut prendre toutes les valeurs réelles entre 0m et 7m, il est impossible de résoudre le problème par un traitement exhaustif de tous les cas.
- **La conception d'une covariation non proportionnelle ni même monotone** : spontanément les élèves conçoivent la covariation comme proportionnelle (si le carré double de côté, l'aire double), confondent monotonie et proportionnalité ou considèrent toute covariation comme monotone (si la longueur du côté du carré augmente alors l'aire augmente). L'existence d'un minimum leur semble donc incohérente.

Pour initier la recherche et donc provoquer un changement de REX, l'enseignant va élaborer une figuration à partir des productions des élèves : un codage de la figure et une description avec une reformulation dans le cadre géométrique ; différents exemples de construction rendant visible la covariation et le sommet commun aux deux polygones ; des calculs d'aires dans quatre cas particuliers avec une valeur décimale ; une représentation et modélisation de la covariation par un logiciel. L'objectif est de donner la possibilité aux élèves d'effectuer ou du moins de terminer les traitements proposés afin de produire des données, et de vérifier leurs résultats pour qu'ils deviennent des faits. Il s'agit de faire évoluer le REXP afin que les élèves puissent construire le problème explicatif correspondant à la situation. La suite de la séquence doit amener les élèves à comparer les mêmes faits dans les différents cadres et registres pour faire évoluer ce REXP vers un REXI puis un REXT avec la preuve. Ce problème pourrait intégrer la classe des « problèmes de recherche d'extremum ».

Reformulation du problème :

ABCD est le carré de côté 7.

E est un point de [AD].

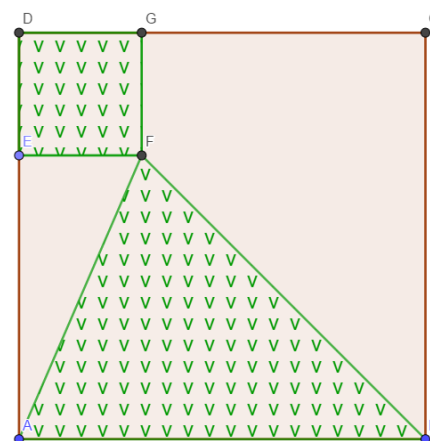
EFGD est un carré.

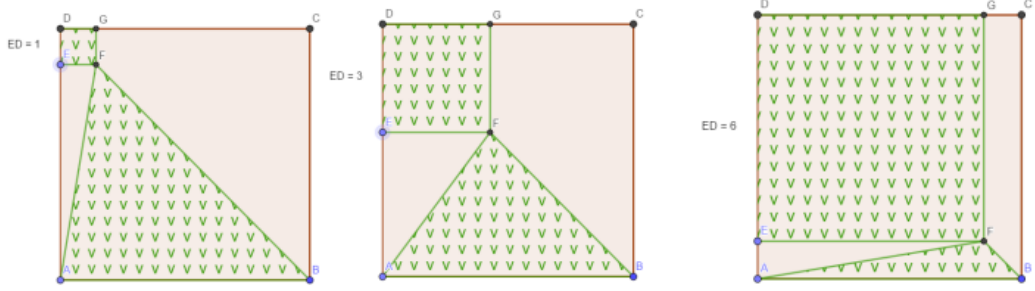
AFB est un triangle.

L'aire  $S$  de la surface plantée est la somme de l'aire du carré EFGD et de l'aire du triangle AFB.

Pour quelle valeur de ED a-t-on  $S$  minimale ?

1. Plusieurs schémas permettent de voir comment les surfaces se modifient. Quelles sont vos conclusions et hypothèses de travail ?





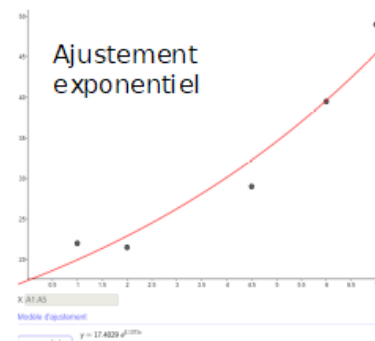
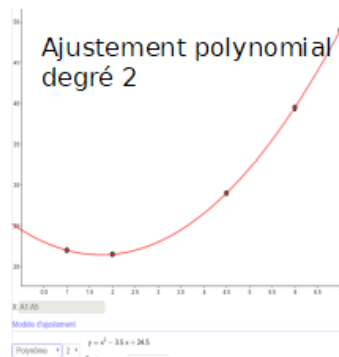
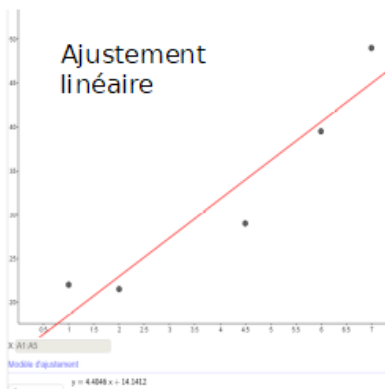
2. Calcul de quelques cas particuliers :

pour ED = 1	pour ED = 4,5
pour ED = 2	pour ED = 6

3. Vérifiez que vous trouvez les valeurs du tableau ci-dessous.

ED	Aire S
1	22
2	21,5
4,5	29
6	39,5

A l'aide du logiciel GEOGEBRA, on a tracé un graphique avec les points obtenus dans le tableau. Le logiciel propose plusieurs modélisations, laquelle te semble la plus pertinente ? Pourquoi ?



4. Si on note  $x = ED$ , exprimez  $S$  en fonction de  $x$ .

### Annexe 3 : Séquence en 6<sup>e</sup>

L'enseignant choisit de préparer la situation fondamentale par un enchaînement d'exercices censés entraîner l'élève aux différentes capacités attendues : associer des consignes aux figures correspondant à des étapes d'une construction, remettre en ordre des étapes de construction à partir de la figure modèle, rédiger les consignes pour chaque étape à partir de vignettes correspondant au tracé pas à pas, lecture du codage d'une figure. Pour chaque exercice, l'enseignant valide et énonce des principes sans explication. Par exemple « Il faut recopier la phrase dans son entier, c'est important. » suppose qu'il s'agit d'un critère de validation pour l'exercice demandant de remettre dans l'ordre les consignes d'un programme de construction. On peut s'interroger sur l'intérêt de ce critère au regard de l'apprentissage visé. Les interventions montrent que la maîtrise des notations et du vocabulaire est une nécessité première pour l'enseignant, mais elle n'est pas construite par les élèves. Les élèves sont par groupes de trois ou quatre et l'enseignant leur demande de se mettre d'accord sur leurs réponses « vous devez échanger ensemble » cependant les élèves discutent peu des nécessités, ils corrigent les fautes d'orthographe, se donnent les réponses. Les exercices sont globalement réussis et n'engagent pas de débats. Lors de la deuxième séance, l'enseignant organise le tissage autour des verbes d'action utilisés dans les consignes lors de la séance précédente. Il écrit au tableau : placer, tracer, construire. Il propose ensuite des exercices qui demandent d'analyser des figures pour reconnaître des polygones particuliers à partir d'un codage. L'enseignant insiste sur la maîtrise du vocabulaire donnant des explications sur l'étymologie des mots. Il invite les élèves à sortir leur résumé de cours et donc permet aux élèves d'identifier des éléments du répertoire à mobiliser. Enfin lorsque la situation fondamentale est proposée, l'enseignant donne la consigne mais aussi certains critères de validation :

- P : Je vais vous donner..., je vais maintenant faire un dessin à main levée, et j'aurais besoin que vous n'utilisiez que des verbes d'action. Sur ce dessin, il y a des triangles et aussi des codages. Vous allez écrire un texte, un programme de construction qui permet par exemple à l'un de vos camarades de tracer la figure. On ne vous demande pas de tracer la figure, on vous demande simplement d'écrire les étapes. (...) Alors je fais mon dessin avec un codage. (...) Donc la première des choses, c'est de regarder et de voir n'est-ce pas les codages, de remarquer ce que signifient les codages sur la figure. Et ensuite, prendre son temps, parce que vous allez écrire un texte qui va permettre à votre camarade de tracer la figure, les étapes de construction comme on a vu la dernière fois. On a vu un dessin, étape 1, phrase 1. Donc vous allez écrire les étapes de construction, d'accord ?
- E : On peut les dessiner ?
- P : Non normalement, oui tu peux dessiner à main levée mais en réalité c'est l'écriture qui nous intéresse, ce sont les étapes. D'accord, vous regardez, par exemple, vous devez commencer toujours avec des phrases, des verbes d'action placer ou construire, ou tracer. Pas du style prends ta règle d'accord il faut éviter ça. Vous allez donc produire un texte. Généralement il faut qu'il soit le plus court possible.

Dans cette expérimentation qui débute, on peut constater un malentendu, les élèves ne construisent pas les critères de validation au sens d'une mise en évidence de nécessités induites par les rétroactions du milieu. L'enseignant propose un enchaînement d'exercices censés isoler certains critères de validation, pourtant dans les critères énoncés lors de la dernière activité (utiliser des verbes d'action, écrire un texte, écrire des étapes, utiliser les informations données

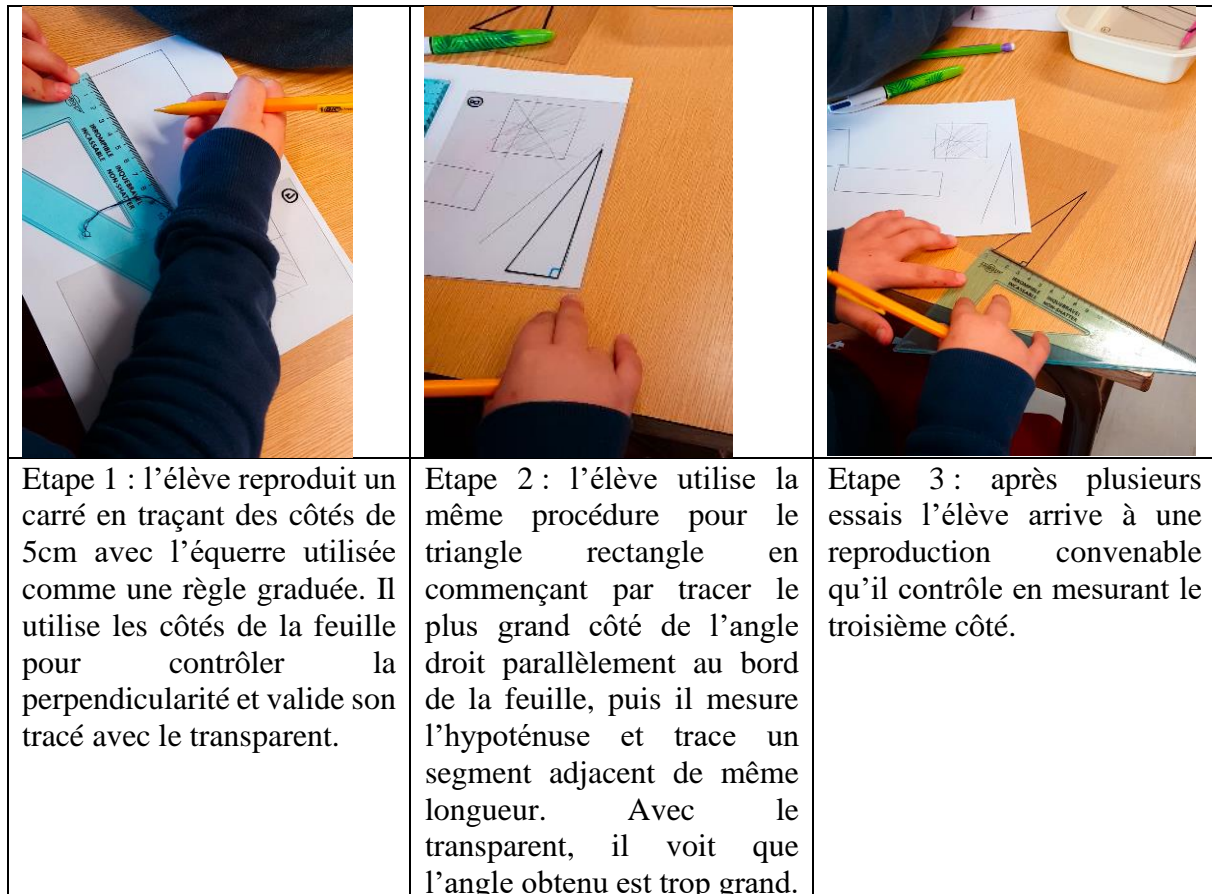
par le codage) un nouveau critère apparaît (écrire un texte le plus court possible) sans avoir été mis en évidence dans les exercices proposés. Aucun de ces critères n'est porteur de nécessités, les élèves ne problématisent donc pas. L'enseignant pense aux critères de validation du produit et non du processus, or c'est bien le processus qu'il s'agit d'enseigner : comment observer une figure ? comment identifier les étapes d'une construction ? comment réduire au maximum les informations ? Ce processus est lié à des nécessités : la division métréologique pour identifier des sur ou sous-figures, la déconstruction dimensionnelle pour repérer des surfaces (triangles), des lignes (côtés) et des points (sommets) et l'analyse des relations entre les différents éléments pour identifier l'ordre dans lequel on peut construire la figure. La contrainte de faire un texte court rend nécessaire la connaissance du vocabulaire et des propriétés, poussant ainsi l'élève à réduire une construction point par point (placer un point A, placer un point B à 3cm de A, tracer le segment [AB]) à une formulation qui intègre tous les éléments (tracer un segment [AB] de longueur 3cm). Il serait intéressant de déterminer ce qui, dans le milieu, peut apporter des rétroactions porteuses de cette nécessité. L'idée de « coût de construction » peut être empruntée à Mathé pour imaginer un « coût de programme » en définissant le coût comme un nombre d'étapes et un nombre de mots par étapes (Mathé et al., 2020). Il pourrait alors être demandé à l'élève d'écrire le programme le plus économique.

Ici le processus d'institutionnalisation ne permet pas aux élèves d'identifier le EHQ d'un point de vue épistémique tant les critères proposés sont éloignés du but qui est de reproduire une figure superposable à un modèle. Ainsi la focalisation sur le choix des verbes, sur l'orthographe, sur le vocabulaire, peuvent détourner de ce qui est en question : quels critères permettent de caractériser et de reproduire une figure ? Par contre les critères mis en évidence par l'enseignant permettent de construire une communauté discursive dans laquelle l'élève peut s'acculturer à une manière de dire, agir, penser en mathématiques et plus particulièrement ici en reproduction de figures planes.

#### Annexe 4 : reproduction de figures au CE1

La situation fondamentale est toujours la reproduction de figure mais cette fois à partir d'une figure modèle sur un transparent. Les élèves sont répartis en atelier et un groupe travaille en autonomie. Chaque élève prend une barquette dans laquelle il trouve une règle, une équerre, un crayon et une gomme, une feuille blanche format A5 et un modèle de figure tracé au feutre relativement épais sur un transparent et codée (angles droits, côtés égaux, mesures). La consigne est de reproduire le modèle et une fois terminé, valider le tracé par superposition avec le transparent. Si les figures sont superposables, l'élève peut choisir un autre modèle, sinon il peut effacer ou prendre une nouvelle feuille pour recommencer. L'objectif de l'enseignante stagiaire est d'entraîner les élèves à l'utilisation des instruments et en particulier ici de l'équerre. Les figures proposées sont des rectangles, carrés, triangles rectangles, dans des positions non prototypiques. Le travail étant en autonomie, l'enseignante n'intervient pas, elle doit récupérer les travaux à la fin de la séance. Le milieu est porteur de différentes rétroactions. Le tracé en lui-même peut envoyer des informations permettant des adaptations (segments qui ne se rejoignent pas, figure qui sort de la feuille, perception visuelle de défauts ...), l'activité des autres élèves (la manière d'utiliser les instruments, la comparaison entre les productions). La figure sur transparent valide mais porte aussi des informations (angle trop grand, segment trop court...). Par ces adaptations, on peut espérer que l'élève fasse émerger des nécessités (analyser la figure, définir un ordre pour construire les segments, bien tenir la règle, positionner l'équerre le long d'un côté, partir du 0 de la règle pour mesurer...) pourtant le milieu n'est pas suffisant

pour porter une des nécessités visées par l'enseignante : positionner l'équerre sur un côté et l'angle droit à l'extrémité du segment. En effet, les élèves ne vont pas respecter la consigne, ils vont contrôler leur tracé au fur et à mesure. Ainsi pour tracer un triangle rectangle, un élève commence par tracer un côté de l'angle droit puis l'hypoténuse et se trouve en difficulté pour tracer le troisième côté du triangle car il n'a pas la longueur attendue (voir figure 1). L'élève efface et fait plusieurs tentatives en évaluant l'angle par essai/erreur. Il a donc mobilisé un REXP, et le milieu ne lui a pas permis de faire évoluer le REX vers une composante REXI (analyse de la figure et prise en compte du codage de l'angle droit).



*Figure 1 : étapes dans la reproduction de figures planes au CE1*