



HAL
open science

Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines

Sylvie Grau

► **To cite this version:**

Sylvie Grau. Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines. Séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2019, Paris, France. hal-03173143

HAL Id: hal-03173143

<https://hal.science/hal-03173143>

Submitted on 18 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PROBLEMATISER EN MATHÉMATIQUES : LE CAS DE L'APPRENTISSAGE DES FONCTIONS AFFINES

Sylvie GRAU

ESPE - CREN Université de Nantes

sylvie.grau@univ-nantes.fr

Résumé

La notion de fonction affine n'est pas disponible pour bon nombre d'élèves malgré un enseignement par les problèmes. Nous avons essayé de comprendre pourquoi et de trouver des pistes pour y remédier. Pour cela, nous avons analysé le savoir enseigné en lien avec l'épistémologie de cette notion, évalué les connaissances des élèves à la sortie du collège pour identifier les difficultés qu'ils rencontrent, et expérimenté différentes situations d'apprentissage. Nous avons utilisé des outils inspirés du cadre de la problématisation (Fabre et Orange, 1997) pour analyser les productions langagières des élèves, comprendre la manière dont ils posent les problèmes liés à l'affinité, comment ils agissent sur les objets et effectuent des changements de cadres (Douady, 1986) ou de registres (Duval, 2006). Cette étude nous a amenée à penser que la disponibilité du savoir est issue d'un double processus : un apprentissage par problématisation de l'outil, un processus de secondarisation du discours (Jaubert, Rebière, & Pujo, 2010). Nous faisons l'hypothèse qu'une approche de l'affinité par un point de vue global et covariationnel doit permettre aux élèves de mieux comprendre en quoi la fonction affine peut être un outil de modélisation pour résoudre des problèmes liés à la covariation de deux grandeurs. Nous avons alors pensé un format de séquence basé sur l'enchaînement de situations dans l'idée d'un processus de problématisation par analyse des productions des élèves (PPAP). L'objectif est de travailler la relation entre l'action et l'objet de savoir. Nous avons expérimenté cette ingénierie afin d'en tirer quelques conditions favorables pouvant servir à l'enseignement d'un savoir problématisé en mathématiques.

Mots clés

problématisation, résolution de problème, proportionnalité, fonction affine, registre explicatif, communauté discursive

Cet article est une présentation de mon travail de thèse intitulé « problématiser en mathématiques, le cas de l'apprentissage des fonctions affines » (Grau, 2017). Ce travail est parti d'une question qui s'est d'abord posée à moi en tant que professeure de mathématiques de lycée avant que je ne m'en empare comme chercheuse : comment rendre disponible (Robert, 1998) la notion de fonction affine pour l'ensemble des élèves de seconde ? En effet, nombreux sont les élèves qui ne font pas appel d'eux-mêmes aux fonctions affines pour modéliser, résoudre des problèmes ou interpréter des variations proportionnelles que ce soit en mathématiques ou dans d'autres disciplines. Malgré un travail régulier autour de cette notion, il me fallait comprendre pourquoi cette difficulté était résistante, quels étaient les éventuels obstacles et comment les dépasser. J'ai orienté mon travail suivant deux axes : d'une part mieux comprendre les raisons de cette non-disponibilité, ce qui constituera la première partie de cet article, et d'autre part penser des conditions pour améliorer l'enseignement/apprentissage de la fonction affine, que je présenterai en deuxième partie. Je préciserai ensuite la méthodologie, le cadre de l'expérimentation d'une ingénierie didactique dans deux classes de seconde et

l'analyse des données recueillies. Je présenterai enfin quelques résultats et les nouvelles pistes de recherche qu'ouvre ce travail.

I. A QUELLES CONDITIONS UN SAVOIR EST-IL DISPONIBLE ?

On peut estimer qu'une notion est disponible chez un élève si, face à une situation plus ou moins inédite, il peut la mobiliser seul et sans aide. Plusieurs facteurs interviennent alors :

1. Cette situation doit présenter les caractéristiques de la classe de problèmes pour laquelle la notion apporte des pistes de solutions.
2. La notion doit avoir du sens dans le contexte de la situation rencontrée.
3. L'élève doit maîtriser des techniques lui permettant des traitements dans un registre de représentation de la notion. Il doit maîtriser des conversions pour éventuellement passer d'un registre sémiotique à un autre afin de pouvoir effectuer plus facilement certains traitements.
4. Il dispose d'une représentation de la notion d'un genre second, c'est-à-dire formalisée pour une pratique argumentative liée à ce savoir au sein d'une communauté discursive scolaire. Cela suppose « une construction formelle d'un certain répertoire de règles ou de théorèmes connus » (Brousseau, 2010, p. 4). Cela suppose aussi des outils sémiotiques et des références communes au sein de la classe, permettant des débats mathématiques au sujet de cette notion.

Chacun de ces facteurs relève d'un enseignement spécifique et peut apporter des éléments de réponse pour expliquer les difficultés que rencontrent les élèves.

Pour ce qui concerne la fonction affine, de nombreux travaux portent sur chacun de ces facteurs, mon ambition était d'en faire une synthèse globale. Cependant, je me suis heurtée à une difficulté. La notion de fonction affine englobe en fait deux concepts : celui de fonction et celui de linéarité. Ces deux concepts peuvent relever de différents cadres au sens de Douady (Douady, 1986). Si bien que certains travaux de recherche s'inscrivent uniquement dans un de ces cadres ou se focalisent plus sur un concept que sur l'autre. Au final nous avons des éclairages partiels et même parfois des éclairages contradictoires. Nous allons préciser cela pour chacun des facteurs.

1. La question du sens

Pour ce qui est du sens, je me suis d'abord appuyée sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau. Je suis partie de l'idée qu'une situation porteuse de sens devait être au plus près des problèmes qu'elle a aidé à résoudre dans la communauté scientifique. Mon analyse épistémologique a montré que les genèses des deux concepts (fonction et linéarité) n'ont pas la même temporalité et qu'elles ne se sont pas faites dans les mêmes cadres. En effet on rencontre initialement la proportionnalité des écarts dans des problèmes géométriques puis dans des problèmes cinétiques, qui plus tard sont résolus par l'algèbre avant que l'ensemble ne soit englobé dans une théorie générale : l'algèbre linéaire. Le tableau suivant (Tableau 1) résume succinctement cette évolution en précisant les périodes, les types de problèmes qui induisent l'utilisation des fonctions affines ou du moins de ce qui caractérise cette notion et le cadre dans lequel la théorie vient s'inscrire. Il semble donc impossible de trouver une situation problème permettant de faire émerger à elle seule la notion de fonction affine.

	Types de problèmes qui induisent l'utilisation des fonctions affines	Types de caractérisation	Cadre au sens de Douady (1986)
Avant le XIV ^e	Problèmes géométriques comme cas particulier des problèmes de grandeurs	Théorie des proportions $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$	Géométrie euclidienne
Moyen-âge et Renaissance	Problèmes de cinétique	Caractérisation fonctionnelle $v\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) = \frac{v(x_1) + v(x_3)}{2}$	Mécanique
Époque classique	Problèmes géométriques ou cinétiques résolus par l'algèbre	Caractérisation analytique $f(x) = ax + b$	Géométrie analytique
Époque moderne	Problèmes liés à la résolution de systèmes linéaires	Caractérisation vectorielle $u(M + \vec{v}) = u(M) + f(\vec{v})$	Algèbre linéaire

Tableau 1: Genèse de la notion de fonction affine.

Par contre, le cadre épistémologique de Piaget a permis de repérer des sauts importants dans cette construction, sauts qui peuvent être assimilés à des obstacles au sens de Bachelard : le passage du discret au continu, du ponctuel au global, de la variation à la co-variation. En effet, par l'analyse en 1950 de la genèse historique de la géométrie et celle de l'arithmétique, Piaget identifie trois périodes qui se caractérisent par le fait que le sujet contemple, opère puis transforme. Lors de la première étape, qui est celle du « contempler », le sujet est absent en ce sens que la réalité est propre à l'objet, elle existe en dehors du sujet et le sujet est alors en contemplation de cette réalité qui lui préexiste. Le stade suivant est celui où le sujet peut « opérer » sur les objets, il peut les comparer, les classer, les relier par des critères, mais ces opérations restent imposées par l'objet. Le dernier stade est celui où le sujet peut « transformer » les objets et donc modifier la réalité de l'objet, la construire. C'est le stade où s'élaborent de nouvelles théories. Piaget fixe ces trois moments à l'antiquité, le début du XVII^{ème} et le XIX^{ème} ce qui correspond à ce que nous avons pu identifier dans la sociogenèse de la notion de fonction affine. Dans l'antiquité, les objets sont les grandeurs et les objets géométriques et l'activité mathématique consiste à décrire cette réalité. Le passage par la cinématique est décisif pour que l'on puisse imaginer opérer sur ces objets : on classe les courbes correspondant à des trajectoires et on commence à organiser une typologie. C'est au XIX^{ème} que la transformation de ces objets va permettre d'élaborer une nouvelle théorie englobante.

Pour chacune de ces trois périodes, nous retrouvons les trois obstacles épistémologiques cités plus haut. C'est le franchissement de ces obstacles qui rend possible le passage d'un niveau de l'épistémologie génétique de Piaget à l'autre. Ainsi pour pouvoir opérer sur les objets et donc dépasser la contemplation des rapports de grandeurs, il fallait pouvoir penser l'infini, or l'infini ne peut pas être observé. Par contre le travail sur la cinématique a permis d'opérer sur les objets et de rendre perceptible un aspect de l'infini par le tracé des trajectoires. Il a fallu le changement de point de vue entre le local et le global pour concevoir la fonction comme un nouvel objet permettant de modéliser le processus lié à la dépendance de deux grandeurs. Un dernier obstacle est le changement de point de vue du statique au dynamique. C'est lui qui va nous intéresser plus particulièrement dans la suite de notre travail.

Nous avons à enseigner un savoir qui traverse différents cadres (Douady, 1986): les grandeurs, la géométrie, le numérique, l'algèbre, l'analyse. Pour chacun de ces cadres, il est possible d'utiliser différents registres sémiotiques (Duval, 1993, 2002, 2006) en particulier le registre des tableaux, celui des écritures algébriques et celui des graphiques auxquels s'ajoute celui de la programmation. Les registres sémiotiques sont des modes de représentation des objets mathématiques qui utilisent des signes, des icônes et des symboles, et obéissent à des règles de

traitement. Le passage d'un registre à l'autre ne correspond à aucun isomorphisme et il n'est pas certain que chaque registre permette de représenter toutes les propriétés d'un objet mathématique. Certains registres sont plus adaptés à certains cadres, au point qu'il est parfois difficile de distinguer le cadre du registre. Ainsi, pour certains élèves, un registre amène à penser uniquement dans un seul cadre. Par exemple dans le cadre algébrique, le registre algébrique amène à manipuler des expressions : la formule résume une classe de situations et permet des calculs algébriques, on la reconnaît par l'usage de lettres ($x, y, f, g...$ pour ce qui concerne les fonctions affines) et d'un traitement par des transformations ou des équations. Dans le cadre des grandeurs, le registre algébrique permet de désigner les Grandeurs par des lettres choisies souvent à partir de l'initiale du nom de la grandeur (par exemple T pour température) et on précise l'unité. Il est alors plus difficile de reconnaître les variables dépendantes. Le registre des tableaux peut aussi être utilisé dans différents cadres. Les données sont souvent présentées dans un tableau qui peut être considéré comme une organisation concernant des grandeurs, des coordonnées de points, ou des nombres. De même, le graphique peut être considéré comme un ensemble de points d'une courbe, mais la courbe représentative figure le graphe de la fonction. De nombreux travaux ont déjà mis en évidence que les conversions de cadres et de registres peuvent être des obstacles pour les élèves, En particulier Comin pour le passage de l'arithmétique à l'algèbre (Comin, 2009) et Chauvat pour le passage de la courbe au graphe (Chauvat, 1998).

Dans un même cadre nous pouvons aussi avoir différents points de vue (Rogalski, 2001). En effet, la fonction peut être considérée de manière statique comme une transformation, une opération d'un ensemble vers un autre, dans l'idée d'une « boîte noire » dans laquelle un élément pénètre et ressort modifié. On parle de « variation » pour dire que la valeur en entrée peut varier, ce qui joue sur la valeur de sortie. Elle peut cependant être considérée de manière dynamique comme la mise en relation non pas d'éléments mais de variations. A toute variation dans un ensemble E correspond une variation dans un ensemble F. On parle alors de « co-variation » ce qui amène à penser les fonctions comme des outils de modélisation au plus proche de phénomènes observés. La différence est très importante au niveau de la représentation que les élèves peuvent se faire de la notion car la première suppose une transformation, une action, ce qui peut se traduire par des opérations ponctuelles, alors que la seconde ne présuppose pas d'une loi préexistante et engage à considérer la fonction d'un point de vue local (Illustration 1).

La disponibilité des connaissances est très liée à la capacité ou non de changer de cadre, de registre ou de point de vue. Pour les élèves du collège, ces cadres ne sont pas encore construits et il peut être difficile à ce stade de les caractériser explicitement. De plus certains registres sémiotiques semblent associés plus spécifiquement à certains cadres, ce qui ne rend pas toujours possible les conversions attendues. Par exemple le travail sur les fonctions affines peut être associé à un travail dans le cadre algébrique du fait de leur définition par l'écriture de leur expression sous forme algébrique.

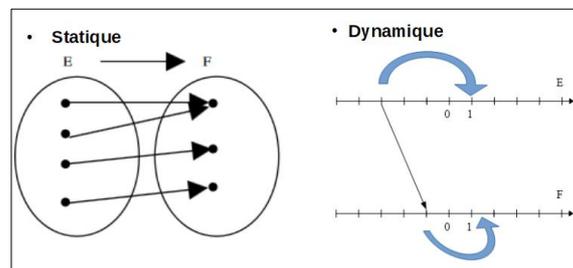


Illustration 1:

Deux points de vue (Rogalski, 2001).

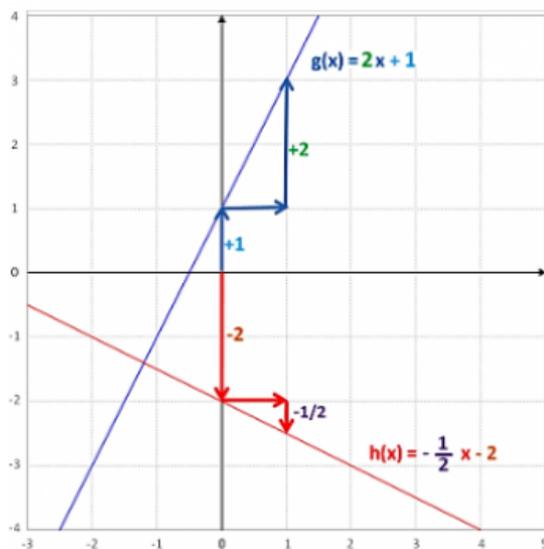
2. Analyse des programmes, des manuels et de l'organisation mathématique

La suite de mon travail m'a amenée à m'intéresser à la transposition didactique. J'ai donc cherché dans les programmes et dans les manuels comment la notion de fonction affine était supposée être enseignée. En fait, suivant les périodes, cet enseignement est différent, en fonction du contexte scientifique, des finalités de l'école et des pratiques. Il apparaît que le développement de l'algèbre de 1902 à 1960 et l'approche abstraite et formelle entre 1960 et 1980 ont laissé des traces dans la manière d'enseigner la notion de fonction affine. Jusqu'aux programmes de 2008, la fonction affine était définie par son expression algébrique comme un exemple simple de fonction, tout en servant de support à la construction du concept plus général de fonction, comprise comme « machine à calculer ». L'entraînement des élèves au calcul algébrique était censé leur donner un outil performant, permettant des traitements dans le registre des expressions algébriques ayant statut de preuve. Par ailleurs les fonctions linéaires sont introduites comme une nouvelle formalisation d'une situation de proportionnalité. L'aspect variation amenant à considérer principalement le coefficient de proportionnalité au détriment des propriétés de linéarité.

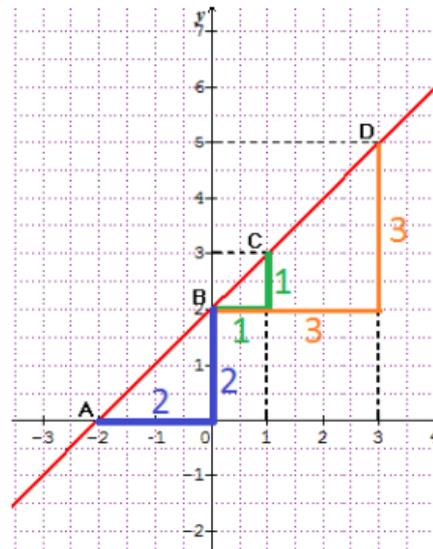
Depuis 2008, la fonction affine est considérée dès le collège comme un exemple de fonction, en parallèle de l'étude des généralités sur les fonctions, cette fois considérées comme outil de modélisation de la covariation de deux grandeurs. On peut penser que ce déplacement vise une plus grande disponibilité des fonctions affines. J'ai alors fait un détour pour voir ce qui se passe dans les pays ayant fait ce choix avant la France. Les travaux de Passaro (Passaro, 2009, 2013, 2016) en particulier, donnent une grille d'analyse fine de la manière dont le raisonnement covariationnel se met alors en place. Ce changement de point de vue est une vraie rupture et on peut comprendre que les enseignants français aient du mal avec son enseignement. A travers l'analyse des types de tâches attendues par le programme de 2008 en classe de 3^e, on voit que l'aspect ponctuel reste privilégié ainsi que le point de vue statique. Les conversions attendues sont des conversions de registres entre le registre des expressions algébriques et le registre graphique. Cependant ces conversions sont rarement à l'initiative de l'élève et leur nécessité n'est pas explicitée comme en atteste mon analyse des manuels les plus utilisés dans les classes de 3^e dans l'académie de Nantes.

Les seules formalisations relevant d'un genre second au sens de Jaubert et Rebière (2010) sont la caractérisation de la fonction affine par son tracé et sa caractérisation par son expression algébrique. La justification du lien entre ces deux caractéristiques n'est pas toujours étudiée en classe. Ces discours ne sont donc pas opérants pour modéliser puisqu'ils ne permettent pas d'expliquer ni de justifier.

Dans les manuels, les résumés de cours et les traces écrites, très peu d'arguments sont explicités dans les différents registres et permettent ainsi d'éventuelles conversions. Par exemple, les élèves identifient relativement facilement le coefficient additif b dans l'expression $ax + b$ sur le graphique comme étant « l'ordonnée à l'origine ». En effet, ils ont une formalisation qui permet de nommer le nombre en question tout en permettant son repérage sur le graphique. Ils peuvent donc utiliser cet élément dans leur argumentation quel que soit le registre utilisé. Il leur est beaucoup plus difficile de parler du coefficient multiplicateur (qui peut être nommé dans certains cas « coefficient de proportionnalité », « coefficient directeur » ou « pente ») car ce coefficient ne peut pas être lu directement sur le graphique. Pour le mettre en évidence, il est nécessaire d'ajouter des signes (souvent en couleur dans les manuels ou au tableau) dont la construction est souvent implicite et qui amènent un discours déictique par désignation avec le doigt (« Quand on avance de 1, on monte de a . ») impossible à transposer dans une pratique argumentative à l'écrit. De plus, suivant le codage choisi – car ce codage ne relève pas de conventions – les propriétés ainsi mises en évidence ne sont pas équivalentes. Dans l'exemple qui suit (Illustration 2) le premier graphique met en évidence la pente à partir du point de la droite d'ordonnée nulle alors que le second met en évidence la proportionnalité des écarts avec



Graphique 1



Graphique 2

Illustration 2: Graphiques proposés dans différents résumés de cours en classe de 3^e.

des couleurs différentes. Le premier indique des flèches dans l'idée d'un déplacement sur le graphique alors que le second indique des segments faisant apparaître des triangles semblables. En fait, les différents registres ne portent pas également le sens des paramètres et l'automatisation de l'usage de certains registres amène de fait des limites à l'interprétation. La fonction affine se caractérise par deux aspects : elle permet des traitements relativement simples sur les expressions algébriques, et surtout elle peut être entièrement déterminée à partir de données ponctuelles universelles. C'est pourquoi les recherches qui portent sur le concept général de fonctions au lycée et dans le supérieur sont difficilement transposables directement aux fonctions affines.

Nous avons donc plusieurs hypothèses pour expliquer les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des fonctions affines :

- une définition formelle des fonctions affines éloignée des utilisations dans les problèmes ;
- un travail dans différents cadres et l'utilisation de plusieurs registres sémiotiques sans explicitation des conversions et de leur nécessité ;
- une maîtrise devenue insuffisante du calcul algébrique par les élèves pour effectuer les traitements attendus ;
- un lien entre proportionnalité et linéarité qui ne prend pas en compte les propriétés de linéarité mais uniquement l'aspect opérateur.

3. La classe de problèmes associée aux fonctions affines

Toujours en analysant les manuels de 3^e, j'ai essayé de repérer une typologie des problèmes rencontrés au cours de l'apprentissage de la notion de fonctions. Si la classe de problèmes rencontrée n'est pas explicitée, certains aspects récurrents dans les situations mises au travail peuvent être interprétés par les élèves comme des caractéristiques. En particulier on remarque que dans certains manuels, les élèves rencontrent majoritairement des fonctions monotones croissantes (Tableau 2). La monotonie n'apparaît donc pas comme une spécificité des fonctions affines. Il semble aussi que certains élèves considèrent que toutes les fonctions sont des fonctions croissantes. Pour eux, la croissance peut suffire à identifier une fonction affine. A partir des erreurs des élèves, de leurs explicitations, des éléments proposés pour argumenter, j'ai pu lister plusieurs représentations erronées qui peuvent être considérées comme des

obstacles didactiques et qui peuvent s'expliquer du fait des situations les plus souvent rencontrées lors de l'apprentissage.

Manuels	Nombre total de contextes différents proposés	Nombre de fonctions mono-tones	Nombre de fonctions croissantes	Nombre de fonctions du temps
Sésamaths 2008 (Génération 5)	14	6 (43%)	5 (36%)	4 (29%)
Phare 2008 (Hachette)	26	21 (81%)	18 (69%)	11 (42%)
Transmath 2012 (Nathan)	45	36 (80%)	30 (67%)	16 (35%)
Prisme 2012 (Belin)	24	19 (79%)	11 (46%)	6 (25%)

Tableau 2: Caractéristiques des situations proposées dans différents manuels de 3^e.

Ces contextes ne sont pas représentatifs d'une classe de problèmes pour laquelle la fonction affine apporterait spécifiquement des pistes de solution. Alors comment identifier cette classe ? Les élèves sont censés reconnaître une fonction affine par l'alignement des points de sa représentation graphique ou la reconnaissance d'une expression algébrique de la forme $ax + b$. Ces deux caractéristiques expliquent le travail d'entraînement aux conversions entre le registre des expressions algébrique et le registre des graphiques, mais nous avons vu que ces conversions ne peuvent pas à elles seules porter le sens. La classe de problème qu'il s'agirait de construire à ce niveau de la scolarité se caractérise par la proportionnalité des variations de deux grandeurs. La difficulté est que les élèves ne disposent pas d'un système de représentation permettant des traitements à partir des variations. L'idée est donc de penser une ingénierie mettant à disposition des élèves des symboles pour pouvoir opérer sur les variations. Mettre en place une telle ingénierie suppose de pouvoir s'appuyer sur des connaissances communes. En particulier, les prérequis sont d'une part une certaine aisance pour opérer dans des situations de proportionnalité et d'autre part une bonne représentation de ce qu'est la mesure de grandeurs.

4. Un test pour voir si ce constat peut être généralisé

Toutes mes hypothèses devaient être vérifiées auprès d'un échantillon plus représentatif que les différentes cohortes d'un seul lycée. Un test a donc été proposé aux collègues de l'académie et j'ai sélectionné certains établissements de sorte à avoir un échantillon le plus représentatif possible (type d'établissement, taille, structure, résultats au DNB diplôme national du brevet). Chaque item de ce test a pour objectif de vérifier une seule hypothèse, par contre l'analyse peut être croisée pour montrer en quoi les réponses sont cohérentes ou non. Si une cohérence peut émerger, il s'agit de mettre alors en évidence les modèles ou les idées construites par l'élève qui peuvent expliquer ses réponses.

Ce test a permis de constater que :

- les élèves maîtrisent la proportionnalité dans le contexte des grandeurs mesurées ;
- la présentation de données en tableau induit la proportionnalité plus sûrement que des données sur un graphique preuve que la conversion de registre n'opère pas ;
- le vocabulaire et les notations liés aux fonctions sont globalement maîtrisés mais les élèves n'utilisent pas ces symboles pour effectuer des traitements, ils les utilisent uniquement pour désigner des objets.

Ce test a aussi confirmé que certains automatismes amènent l'élève à penser toute relation entre grandeurs comme une relation de proportionnalité. Pour préciser la nature de l'obstacle, j'ai effectué des expérimentations à différents niveaux de la scolarité. Elles ont montré qu'il

s'agissait plutôt d'un obstacle didactique. Par exemple, les propriétés de linéarité peuvent être disponibles sans avoir été objet d'étude assez tôt dans la scolarité alors qu'elles ne le sont plus en fin de collège après l'enseignement des fonctions linéaires ou du produit en croix. Ces propriétés permettent de vérifier parfois très facilement qu'une situation n'est pas proportionnelle.

5. Le cadre de la problématisation pour interpréter les représentations des élèves et leur fonctionnement

De manière générale, Brousseau (2010) définit les obstacles comme :

un ensemble de difficultés d'un actant (sujet ou institution), liées à « sa » conception d'une notion. Cette conception a été établie par une activité et par une adaptation correcte, mais dans des conditions particulières, qui l'ont déformée ou qui en ont limité la portée. Les difficultés créées par cette conception sont liées par des « raisonnements » mais aussi par les nombreuses circonstances où cette conception intervient. Ainsi la conception résiste au simple apprentissage d'une connaissance plus correcte. Les difficultés semblent disparaître, mais elles réapparaissent de façon inattendues et causent des erreurs par des relations insoupçonnées. L'identification et l'inclusion explicite du rejet d'un obstacle dans la nouvelle connaissance sont généralement des conditions nécessaires à son usage correct. (p. 4)

Cependant l'identification d'un obstacle n'est pas aisée, cela nécessite d'observer, entendre et faire s'exprimer chaque élève sur de multiples situations suffisamment bien choisies. En particulier, il est difficile d'avoir accès aux « raisonnements » qui organisent le fonctionnement des représentations de l'élève. Brousseau (1986) explique que nous ne pouvons que produire un « modèle implicite d'action pour expliquer le patron de réponses obtenu à partir des manifestations observables » (p.6).

Le cadre de la problématisation développé par Fabre et Orange (Fabre & Orange, 1997) m'a permis de mieux comprendre la manière dont les élèves se représentent les situations qu'ils rencontrent et donc de mieux identifier les obstacles qu'il s'agit de lever.

La problématisation se joue dans une dialectique d'ouverture/fermeture de possibles. Elle peut se résumer dans le schéma du losange de problématisation (Illustration 3). Ce losange met en évidence quatre composantes : la question en elle-même, sa solution et les contraintes qui peuvent être de deux natures (celles internes au problème, c'est-à-dire les contraintes liées au contexte, aux données initiales ou construites, et celles externes au problème qui sont les connaissances, représentations, schèmes d'actions...). Les conditions regroupent tout ce que l'actant a comme ressources internes, comme modèles, comme conceptions, pour se représenter

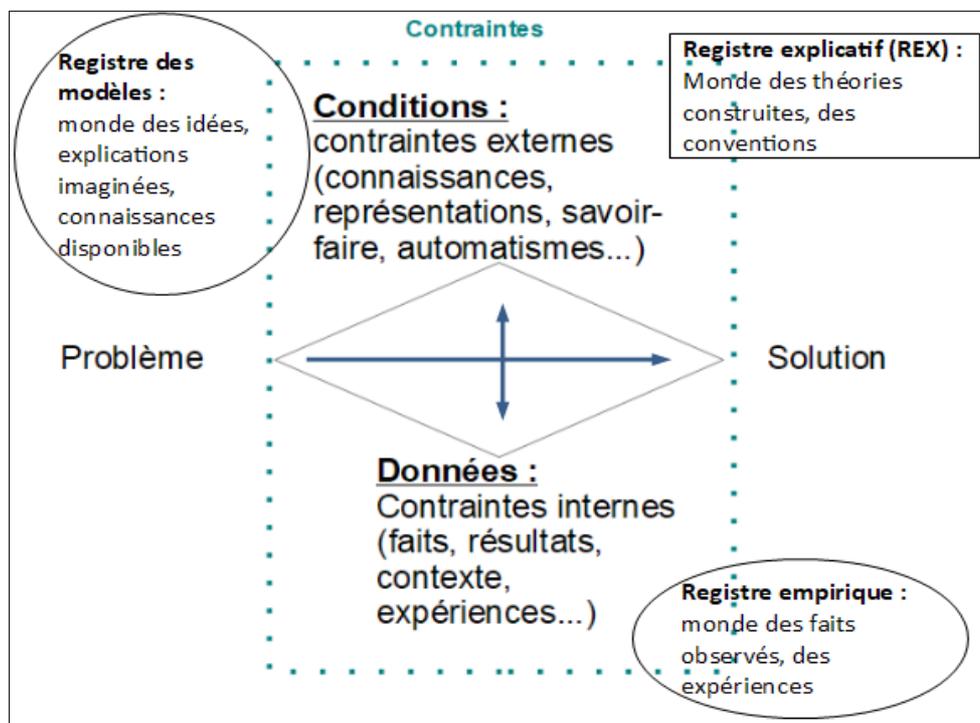


Illustration 3: Losange de problématisation (Fabre, 2011).

le problème et le traiter. Ces différents répertoires sont mobilisés suivant une certaine logique visant un équilibre et selon des principes d'ergonomie.

Si résoudre le problème amène à privilégier un axe horizontal du problème vers la solution, la problématisation suppose la mise en tension sur l'axe verticale des données et des conditions. Cette mise en tension donne des éléments de compréhension de la manière dont le sujet mobilise ses différents répertoires. On peut l'analyser à partir de trois entrées différentes que Orange appelle des registres de problématisations (Orange, 2005). Le registre empirique est le monde des faits, de ce qui est observé, de l'expérience. Le registre des modèles est celui des idées, des explications imaginées, des connaissances disponibles. Le registre explicatif (REX) est le monde des théories construites, des conventions, des structures.

Le registre des modèles est alimenté par différents éléments :

- la connaissance et la maîtrise des différents cadres et registres sémiotiques ;
- les capacités de traitement dans les différents registres sémiotiques, les automatismes installés, ces traitements peuvent permettre la construction de nouvelles données ;
- la capacité à effectuer des conversions de cadre ou de registre sémiotique ;
- la disposition d'un langage de type second permettant des justifications, des argumentations ;
- les classes de problèmes construites à travers la mise en évidence de caractéristiques explicites ou la fréquence des contextes rencontrés par l'élève.

L'apprentissage suppose l'inhibition pour ouvrir de nouveaux possibles, la disponibilité des savoirs outils et objets suppose, quant à elle, la mise en évidence de ce que nous appellerons des nécessités (ce qui fait que c'est ainsi et que ce ne peut pas être autrement).

II. CONCEPTION D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE

A partir des hypothèses sur les obstacles que rencontrent les élèves et sur ce qui peut devenir un frein à la disponibilité des connaissances, il s'agissait de concevoir une ingénierie didactique telle que la définit Brousseau (2011) :

« L'ingénierie didactique doit produire diverses sortes de situations : celles qui rendent nécessaire, pour le contrôle d'un milieu, la communication de telle connaissance choisie à l'avance alors que les répertoires auxquels il est fait appel sont connus, et celles qui exigent l'adaptation du répertoire ou la création d'un nouveau. » (p.7)

Dans notre cas, l'ingénierie doit rendre nécessaire l'utilisation de connaissances sur la proportionnalité et les mesures de grandeurs et exiger la création d'un nouveau répertoire lié à l'étude des variations. L'objectif étant de faire émerger la nécessité de proportionnalité des variations de deux grandeurs pour caractériser une relation affine entre ces grandeurs.

Concevoir des situations au sein d'une ingénierie didactique suppose à la fois un travail sur les savoirs et un travail sur la médiation de ces savoirs. Les résultats et analyses précédentes ainsi que de nombreuses expérimentations m'ont permis de faire des choix.

Au niveau du savoir, il s'agissait de concevoir une situation ayant les caractéristiques permettant d'identifier une classe de problèmes pertinente. C'est pourquoi j'ai laissé intentionnellement les aspects les plus communément travaillés dans les classes ordinaires pour me focaliser sur ce qui faisait le plus défaut, à savoir :

- une situation proposée dans le cadre des mesures de grandeurs et plus particulièrement des mesures de grandeurs repérables ;
- une situation de modélisation de la covariation de deux grandeurs mais pas de même nature et en évitant si possible les fonctions du temps ;
- une situation qui rende nécessaire d'opérer sur les variations et dans le registre des tableaux ;
- une situation qui s'appuie sur les connaissances relatives à la proportionnalité.

Pour ce qui est de la médiation, je suis restée dans le cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau, donc dans une approche constructiviste et un apprentissage par adaptation, dans une confrontation actant/milieu. Cependant, sachant que les élèves passent par les différentes unités de raisonnement définies par Passaro (2016), il me fallait comprendre comment la notion de fonction affine pouvait naître de nécessités clairement identifiées par le cheminement entre ces unités de raisonnement.

Pour cela, le cadre de la problématisation (Fabre & Orange, 1997) m'a apporté des outils. Les espaces de contraintes m'ont permis de compléter l'analyse *a priori* en mettant en évidence tous les possibles en lien avec les registres des modèles et les registres explicatifs (REX) considérés comme les grands domaines des mathématiques. Ces éléments ont permis de penser l'actant comme un individu qui a un projet par rapport à un problème qu'il a lui-même construit, problème qui peut être temporaire et éloigné du problème théorique comme nous le verrons un peu plus loin.

Dans les pratiques ordinaires, la rencontre avec les situations problèmes est souvent organisée suivant le modèle de séquence que j'ai appelée IGDT : un temps de travail individuel (I), un temps de travail de groupe (G), un débat autour des productions (D) et une mise en texte d'une solution porteuse des savoirs nouveaux (T).

Ce format a été fortement incité par les programmes à partir de 2000, dans les formations et dans de nombreux livres du maître. Il est très peu remis en cause du fait qu'il permet une avancée du temps didactique. Pourtant si on l'analyse en terme de problématisation, on voit un malentendu entre la représentation que se fait l'élève s'il pense l'activité en terme de résolution et celle de l'enseignant qui la pense en terme d'enseignement (Tableau 3). En particulier on comprend que le processus d'institutionnalisation ne porte sans doute pas sur les mêmes objets. Si l'enseignant cherche à construire un discours second autour du processus, l'élève peut ne retenir de la situation qu'un modèle de résolution associé à un contexte spécifique, sans identifier la classe de problèmes auxquels ce modèle peut s'appliquer. L'adaptation se fait donc à partir d'éléments du contexte, plus ou moins pertinents suivant que ces éléments ont été explicités ou non, et qui font office de conditions d'application du modèle.

Démarche IGDT	Objectifs en terme d'enseignement	Objectifs en terme de résolution de problème	Objectifs en terme de problématisation
Temps de recherche individuelle I	Dévolution du problème	Trouver la solution ou au moins une idée	Se représenter le problème, construire un schéma de résolution
Travail de groupe G	Confrontation pour amener les élèves à argumenter leurs choix et expliciter leurs procédures	Savoir si la réponse est correcte ou avoir une piste de solution	Comparer son schéma avec celui des autres pour mesurer sa pertinence et son efficacité, changer de point de vue, planifier
Débat autour des productions D	Justifier la validité des réponses, expliquer les procédures	Corriger	Expliciter les choix et les méthodes utilisées, faire des conversions, comparer les solutions
Mise en texte d'une solution T	Institutionnaliser	Recopier la solution qui servira de modèle pour pouvoir résoudre le même problème ou un problème semblable	Identifier le schéma correspondant au problème ou à une classe de problèmes

Tableau 3: Différents objectifs dans une démarche IGDT.

Par ailleurs, si on analyse des phases de débats en classe entière avec l'utilisation d'outils comme les structures argumentatives, on peut voir que l'évolution se fait linéairement avec un guidage plus ou moins conscient de l'enseignant pour arriver à une formalisation du savoir proche d'une forme préexistante. C'est par exemple le cas pour le débat en annexe 1. L'analyse des interventions montre par ailleurs que tous les élèves ne participent pas également à toutes les étapes du débat.

Le même outil d'analyse peut permettre de construire la structure argumentative des échanges dans de petits groupes d'élèves. Les structures ont alors d'autres organisations comme dans l'exemple de l'annexe 2 où il est possible de voir l'avancée des arguments et les rôles de chaque élève au sein du groupe. Nous avons en fait repéré quatre rôles au cours des interactions verbales entre élèves :

- Celui qui agit : il propose, fait, opère, exécute, construit de nouvelles données...
- Celui qui vérifie : il contrôle, compare, vérifie que la ligne directrice est respectée, il valide...

- Celui qui questionne : il remet en cause, demande des explicitations, des explications, il amène des reformulations...
- Celui qui formalise : synthétise, formule ou reformule, pose des conclusions provisoires, pose les problématiques, les savoirs...

Ces rôles sont identifiés à partir de l'activité (explicitée oralement, photographiée, filmée) ou des traces laissées de cette activité (productions, brouillons, écrans d'ordinateur ou de calculatrice...), et les pratiques langagières (enregistrement des interactions, productions écrites). Nous allons identifier leur fonction à travers le modèle du losange de Fabre.

La circulation dans le losange peut se faire d'un sommet à n'importe quel autre. Ainsi face au problème posé par l'enseignant et aux données, l'élève peut les mettre en tension avec ses conditions propres et donc construire un problème temporaire différent dont le traitement ou la résolution peut amener à la construction de nouvelles données ou de nouvelles conditions d'où la construction d'un nouveau problème et ainsi de suite. Si les problèmes construits par l'élève sont trop éloignés du problème théorique posé par l'enseignant, le milieu est très certainement insuffisant. Il me fallait donc un outil pour mesurer cet écart et mesurer les variations au cours du travail afin de repérer des moments clés identifiés comme des événements de problématisation. Ces informations devaient me permettre de savoir quand et comment introduire dans le milieu des éléments inducteurs de problématisation.

Le cadre épistémique de Piaget réinterprété par Tall (2006) au regard des connaissances en neurosciences et sciences cognitives amène à penser l'activité cognitive de l'élève dans trois mondes dont l'intersection est non-vide : l'empirique, le symbolique et le théorique. L'analyse des productions langagières en lien avec l'activité des élèves permet de faire des hypothèses sur les mondes dans lesquels les élèves pensent et agissent et de comprendre comment se fait, pour chaque élève, le tissage entre les différents registres de la problématisation : le registre empirique, celui des modèles et le registre explicatif. Il s'agit d'identifier les nécessités rétroactives ou proactives qui amènent l'élève à faire certains traitements, certains choix, à proposer certaines pistes, à en refuser d'autres. Comme l'explique Duval (2002) :

L'analyse en amont requiert que l'on prenne en compte les différentes variations possibles d'un énoncé de problème ET les variations éventuelles de conduite et de production des élèves. Elle renvoie donc aux conditions permettant à un sujet d'entrer, relativement rapidement, dans une démarche mathématique sur un type de problème. Et dans cette perspective, la reconnaissance proactive, ou même seulement rétroactive, d'un « changement de... » à effectuer est un enjeu décisif d'apprentissage. (p.19)

Or ces variations de conduite et de production des élèves sont liées au tissage entre les registres de problématisation. Dans la pratique IGDT, tout est fait pour amener les élèves à résoudre un problème théorique et l'analyse *a priori* comme celle *a posteriori* se base le plus souvent sur un élève générique. Si le débat donne des outils d'analyse rétroactive, j'ai cherché à mettre en place un autre format de séquence à visée proactive qui prenne aussi en compte les variations entre élèves.

Pour cela, j'ai adapté un modèle de séquence proposé en Sciences et Vie de la Terre par Christian Orange dans le but d'amener chaque élève à analyser des écrits intermédiaires pour réduire les écarts entre le problème qu'il a construit initialement et le problème théorique porteur des nécessités du savoir visé. Ces écarts peuvent concerner aussi bien la question, les données, les conditions ou les solutions du problème. Ce type de séquence que j'appelle PPAP (problématisation par analyse des productions), est constitué d'un enchaînement de situations (Annexe 3). Cet enchaînement se caractérise par une reconfiguration par l'enseignant des productions écrites des élèves à une étape n , pour en élaborer le support qui servira son projet d'enseignement dans la situation $n+1$. La PPAP vise la construction d'un savoir problématisé par la résolution de problèmes qui deviennent explicatifs d'une part et par une secondarisation du discours d'autre part.

Les grandes étapes de la PPAP sont :

- la construction et la résolution d'un problème dans un cadre précis ;
- la comparaison des procédures dans différents cadres et l'explication des changements de cadres ;
- l'explicitation des nécessités dans différents registres et différents cadres.

Un des éléments essentiels de la PPAP est la figuration, il s'agit du support proposé aux élèves à partir de ce qu'ils ont produit à l'étape précédente. La figuration est une production écrite anonyme dans laquelle l'enseignant a sélectionné et réorganisé les éléments produits par les élèves selon trois principes qui correspondent à trois fonctions :

- La figuration amène des éléments symboliques qui permettent un discours autour des éléments caractéristiques de la notion étudiée (dans notre cas par exemple les flèches dans les tableaux pour symboliser les variations). Elle est donc une épure du savoir visé car elle vise la construction de ce savoir.
- Elle exerce un floutage pour centrer l'attention sur les éléments essentiels qui doivent amener les élèves à questionner ce qui est proposé. Pour cela, elle doit mettre en évidence un paradoxe, une nouveauté, une incohérence. C'est un filtre qui a pour fonction de provoquer la critique ou de rendre nécessaire l'élaboration d'une preuve.
- Elle amplifie des éléments qui doivent appeler certaines connaissances, déclencher certains automatismes, amener une reconnaissance d'objets ou de procédures. Elle a donc une fonction d'appel, elle doit activer des connaissances.

III. EXPERIMENTATION ET ANALYSE

1. Méthodologie et analyse *a priori*

L'ingénierie a été expérimentée dans deux classes de seconde en début d'année scolaire pour éviter un impact trop important du contrat didactique. Les élèves sont issus de collèges différents, ils n'ont pas encore retravaillé les fonctions, ils n'ont pas encore été évalués, ils n'ont pas d'habitudes ou de postures établies trop fortement dans le groupe. Les élèves sont en demi-groupes pour la première séance, l'enseignant intervient le moins possible, le dispositif a été présenté comme un dispositif de recherche visant à mieux comprendre comment les élèves organisent leur recherche, tous les travaux sont anonymes, les groupes sont tirés au sort. Les données recueillies sont les travaux, des photographies (en particulier des écrans, de gestes singuliers, de postures), les notes prises pendant la séance et deux vidéos fixes. Les interactions sont analysées au regard des productions et des indices visuels recueillis pour reconstruire ce qu'on appelle un espace de problématisation, c'est-à-dire une reconstruction des différents registres de problématisation dans les groupes. L'évolution des problèmes temporaires que construisent les élèves vers un problème explicatif porteur des nécessités du savoir visé est un indicateur de problématisation.

Le problème proposé aux élèves est un problème de modélisation de la relation entre la variation de la température et la variation de la pression d'un même corps dans un récipient hermétique (Annexe 4). Ces grandeurs ont été choisies car il s'agit de grandeurs repérables alors que leur variation est une grandeur mesurable. Le passage par la variation est donc une nécessité pour caractériser la relation entre la pression et la température quelle que soit les unités choisies. C'est historiquement de cette manière que l'idée d'une unité permettant de modéliser la relation entre la pression et la température par une relation de proportionnalité est née avant même la notion de zéro absolu. La température et la pression sont deux grandeurs que les élèves connaissent, par contre ils ne connaissent pas la loi de Gay-Lussac.

La situation propose aux élèves un tableau de mesures. Cependant différentes unités ont été utilisées pour la température, il s'avère que la relation entre la température et la pression n'a

pas la même forme, elle est linéaire pour les Kelvins et affines pour les degrés Celsius ou Fahrenheit. Ce paradoxe doit amener les élèves à interpréter les données dans différents registres pour en tirer la caractéristique commune qui est la proportionnalité des variations. Des traitements au niveau des expressions algébriques peuvent alors permettre de caractériser la fonction affine qui modélise la relation entre les deux grandeurs pour chacune des unités choisies. L'objectif est de mettre en évidence la nécessité de la proportionnalité des écarts pour caractériser les problèmes relevant des fonctions affines et de formaliser cette nécessité dans chacun des registres sémiotiques.

Les élèves peuvent utiliser différentes procédures pour vérifier la proportionnalité. Ils peuvent faire une représentation graphique, tester les propriétés de linéarité, chercher s'il existe un coefficient de proportionnalité, utiliser le produit en croix, chercher l'image de 0. Les élèves ont à disposition des calculatrices et des ordinateurs. Les tracés et les calculs peuvent donc être rapidement effectués. Chaque groupe de trois ou quatre a un tableau dans une mesure spécifique mais dans l'étape suivante de nouveaux groupes sont constitués de trois ou quatre élèves ayant étudié des tableaux dans des unités différentes mettant en évidence le paradoxe. Après vérification des résultats et validation des conclusions, les élèves vont devoir trouver une relation valide quelle que soit l'unité de température choisie. Les représentations graphiques peuvent amener les élèves à reconnaître des fonctions affines du fait de l'alignement des points dans les trois cas. Les élèves peuvent aussi chercher à convertir les mesures dans une même unité pour pouvoir les comparer. Enfin les élèves peuvent aussi accéder aux formules de conversion et essayer de les utiliser pour exprimer les relations entre les grandeurs.

Pour mesurer l'évolution des problèmes, j'ai construit trois niveaux de problématisation pour chacun des sommets du losange de problématisation (Illustration 4).

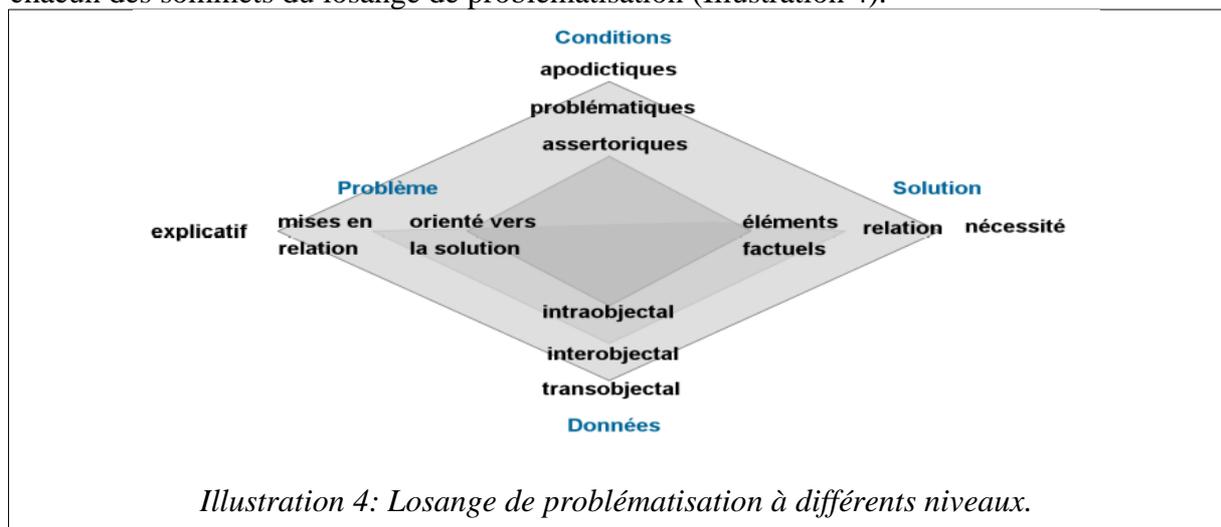


Illustration 4: Losange de problématisation à différents niveaux.

Le problème peut être orienté vers la solution, il peut être un problème de comparaison, de mise en relation ou un problème explicatif donc porteur d'arguments. La solution peut être factuelle, une relation ou une nécessité. Les données peuvent être traitées de manière intraobjectale, interobjectale ou transobjectale et les conditions peuvent être assertoriques, problématiques ou apodictiques. En fait l'évolution n'est pas linéaire on peut avoir une déformation du losange suivant le niveau à chaque sommet. Nous allons voir sur un exemple que ces déformations permettent de visualiser la dynamique de problématisation dans les petits groupes.

2. Un exemple de production langagière dans un groupe de 4 élèves dans une classe de seconde

Mon analyse a porté essentiellement sur les groupes pour lesquels un changement de registre explicatif a été mis en évidence afin de comprendre comment ce changement se produit. Dans l'extrait choisi, l'échange a duré 28 minutes. On peut le découper en épisodes, chaque épisode correspondant à un problème temporaire que les élèves énoncent explicitement ou que nous pouvons reconstruire à partir des productions. Deux épisodes correspondent à des échanges

autour de la mise en forme ou la rédaction de la production écrite qui sera rendue à la fin de la séance. Nous obtenons le découpage suivant :

Épisode 1	01:08 = le coefficient de proportionnalité
Épisode 2	05:45 = les différentes unités de température
Épisode 3	07:07 = le lien entre pression et température
Épisode 4	09:43 = la conversion des °C en K
Épisode 5	11:26 = la rédaction du compte-rendu
Épisode 6	16:20 = le paradoxe
Épisode 7	17:58 = les fonctions affines et linéaires
Épisode 8	19:42 = le modèle pour les °F
Épisode 9	20:49 = la formalisation avec les écritures algébriques
Épisode 10	24:53 = la rédaction et la conclusion

Ces épisodes schématisés avec le losange de problématisation et les différents niveaux que nous avons définis, montre que l'avancée dans le travail n'est pas linéaire, elle passe par des retours en arrière, des sauts, mais elle montre aussi une formalisation de nécessités qui atteste d'une problématisation (Annexe 5). En particulier l'épisode 8 témoigne de la construction d'un problème explicatif et la mise en relation de différentes données. Les élèves ont mis en évidence une nécessité durant l'épisode 6 : la relation entre pression et température doit être une relation affine. S'en suit un débat autour du modèle et à l'épisode 8, le nouveau problème qui se pose est alors de déterminer la fonction affine dans le cas où la température est exprimée en °F qui rende compte de l'ensemble des données initiales ou construites. Les conditions sont apodictiques et la solution attendue est bien une relation. Les données sont travaillées de manière trans-objectales puisqu'elles sont étudiées à partir de la structure « fonction affine » qui amène une nouvelle interprétation de certaines données.

La transcription des échanges dans le groupe permet de repérer les rôles endossés alternativement par les élèves et de voir comment la répartition des rôles évolue. La problématisation est le résultat d'un changement régulier de rôles car les nécessités émergent des allers-retours entre l'agir, le penser et le dire. L'extrait de l'épisode 8 qui suit montre comment chaque rôle vient nourrir la réflexion :

- Questionner : « Les Kelvins en fait le zéro absolu c'est zéro du coup y a pas de chiffres négatifs dans les degrés ? »
- Agir : « Au pire c'est bizarre par exemple regarde le premier ça fait le coefficient regarde, le premier coefficient ça fait 110 alors que le deuxième ça fait 17. »
- Vérifier : « Lui il fait tout, enfin le zéro absolu, il est pas, c'est pas un zéro en fait donc, ça peut pas être heu... »
- Formaliser : « J'ai compris... j'ai compris en fait les degrés Celsius c'est pas proportionnel mais c'est une fonction affine justement, parce que tu fais plus 273 à chaque fois. »

L'objectif est donc que chaque élève puisse prendre alternativement chacun de ces rôles ce qui correspondrait à un « débat intérieur ». Une manière de forcer ces changements de rôles peut être de proposer des situations contraignantes qui imposent à certains moments à tous les élèves d'endosser explicitement un de ces rôles. Ainsi demander de critiquer des solutions oblige l'élève à questionner alors que demander de valider une solution l'oblige à vérifier. L'enjeu des étapes de la PPAP est de faire passer les élèves par les différents rôles.

3. Résultats de l'expérimentation

La situation testée montre que :

- Le sens de l'affinité se construit bien en lien avec les connaissances qu'ont les élèves sur la proportionnalité. Le travail sur les fonctions affines semble même renforcer la maîtrise du concept de proportionnalité.

- Les élèves inventent de nouveaux répertoires pour pouvoir opérer sur les objets (comme les variations ou les relations fonctionnelles par exemple).
- Les consignes de travail à partir des figurations amènent les élèves à contrôler, vérifier, valider, expliquer, ce qui provoque des changements de rôles des élèves, soit par la tâche qui est demandée, soit par la nature des échanges dans les groupes.
- Enfin l'analyse des productions montre une évolution vers un discours qui tend vers un genre second et donc vers l'expression de nécessités indépendamment des registres sémiotiques utilisés.

IV. CONCLUSION ET PISTES DE TRAVAIL

Ce travail de thèse apporte des résultats suivant trois angles différents mais il ouvre pour chacun de nouvelles pistes de travail qu'il s'agirait d'explorer pour répondre à la fois aux attentes des enseignants dans les classes qui se disent en difficulté face à la place accordée aux problèmes dans l'enseignement-apprentissage et aux besoins des élèves peu efficaces devant des situations inédites.

Du point de vue de l'enseignement-apprentissage des fonctions affines, j'ai posé l'hypothèse que problématiser la notion la rend plus disponible. Ma recherche a cependant permis d'entrevoir d'autres pistes. Il serait intéressant de mesurer les effets d'une autre organisation mathématique tout au long des cycles 3 et 4. Au lieu de considérer la fonction affine comme un cas simple amenant à généraliser le concept de fonction, il s'agirait d'introduire la notion d'affinité comme un outil dans le cadre des mesures de grandeurs permettant des traitements dans différents registres lorsqu'il y a proportionnalité des écarts. Une seconde piste serait de tester le changement de point de vue sur les fonctions, en particulier privilégier l'approche covariationnelle dans le cadre des mesures de grandeurs. Enfin il pourrait être intéressant d'introduire des symboles pour travailler sur les variations et de mesurer les procepts ainsi développés.

Du point de vue de la structure des séquences autour de la résolution de problèmes, la PPAP offre des avantages. Elle se déroule sur un temps long, favorisant des pauses, retours en arrière, des ouvertures et des fermetures. Elle permet aussi des interventions moins spontanées de l'enseignant et une activité réflexive de l'élève à partir des figurations. L'élaboration des figurations nécessiterait cependant un travail de recherche conséquent pour penser la formation des enseignants. Elle suppose une analyse didactique et une empathie cognitive développées ainsi qu'une anticipation des éléments théoriques à mettre en place. L'explicitation du tissage entre les registres de problématisation (registre empirique, registre des modèles et REX) donne des pistes d'interprétation des erreurs et permet d'ouvrir de nouveaux possibles pour penser l'étayage ou comprendre la portée de certaines variables didactiques. C'est aussi un enjeu pour que l'enseignement soit moins discriminant socialement en prenant conscience des écarts entre les registres de problématisation liés aux expériences vécues et aux feedbacks reçus.

Du point de vue des cadres théoriques mobilisés différents champs de questions sont ouverts :

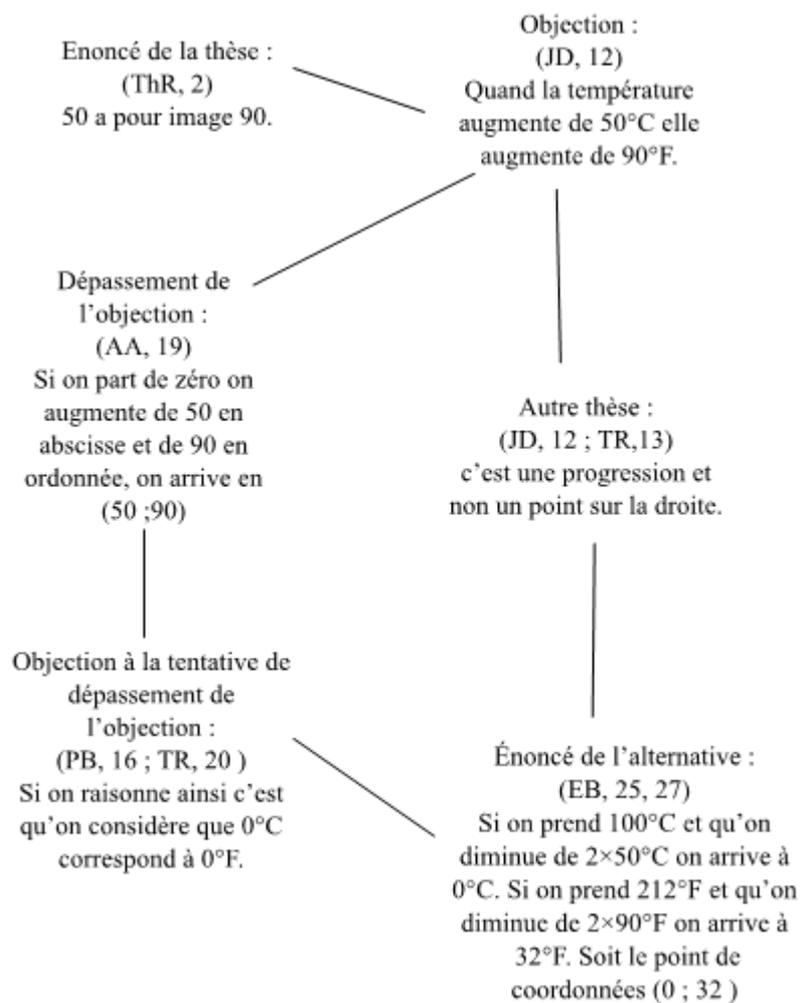
- Comment poursuivre l'articulation et la complémentarité entre la TSD et la problématisation ? Les outils de la problématisation se sont révélés utiles pour mieux comprendre et analyser l'activité de l'élève. J'ai posé l'hypothèse implicite que l'actant agit en fonction d'un projet en lien avec un problème qu'il a construit et que ce problème est lié à des contraintes externes et internes elles-mêmes en lien étroit avec la configuration que chaque élève tisse entre le registre empirique, celui des modèles et le registre explicatif. Que serait un apprentissage qui relèverait à la fois de l'adaptation et de la problématisation ?

- Le discours n'est peut-être pas aussi révélateur de l'activité cognitive. Comment savoir si un discours de genre premier ne cache pas une problématisation alors qu'un discours de genre second peut être tenu sans qu'il y ait eu problématisation ? Par ailleurs, il reste des élèves muets, ce qui ne signifie pas qu'ils ne problématisent pas. Comment peut-on avoir des traces de la problématisation chez les élèves ? Cette problématisation est-elle effectivement liée aux inter-actions ?
- Un apprentissage par problématisation amène-t-il réellement une meilleure disponibilité des connaissances ? En particulier, la PPAP proposée, permet-elle réellement à l'élève de problématiser ou ne vient-elle qu'exposer à l'élève un savoir problématisé par l'enseignant ? Cette approche permet-elle à chaque élève d'accéder à un savoir plus disponible ou serait-elle discriminante ? Et dans ce dernier cas, quels sont les implicites qui peuvent être source de malentendus ?

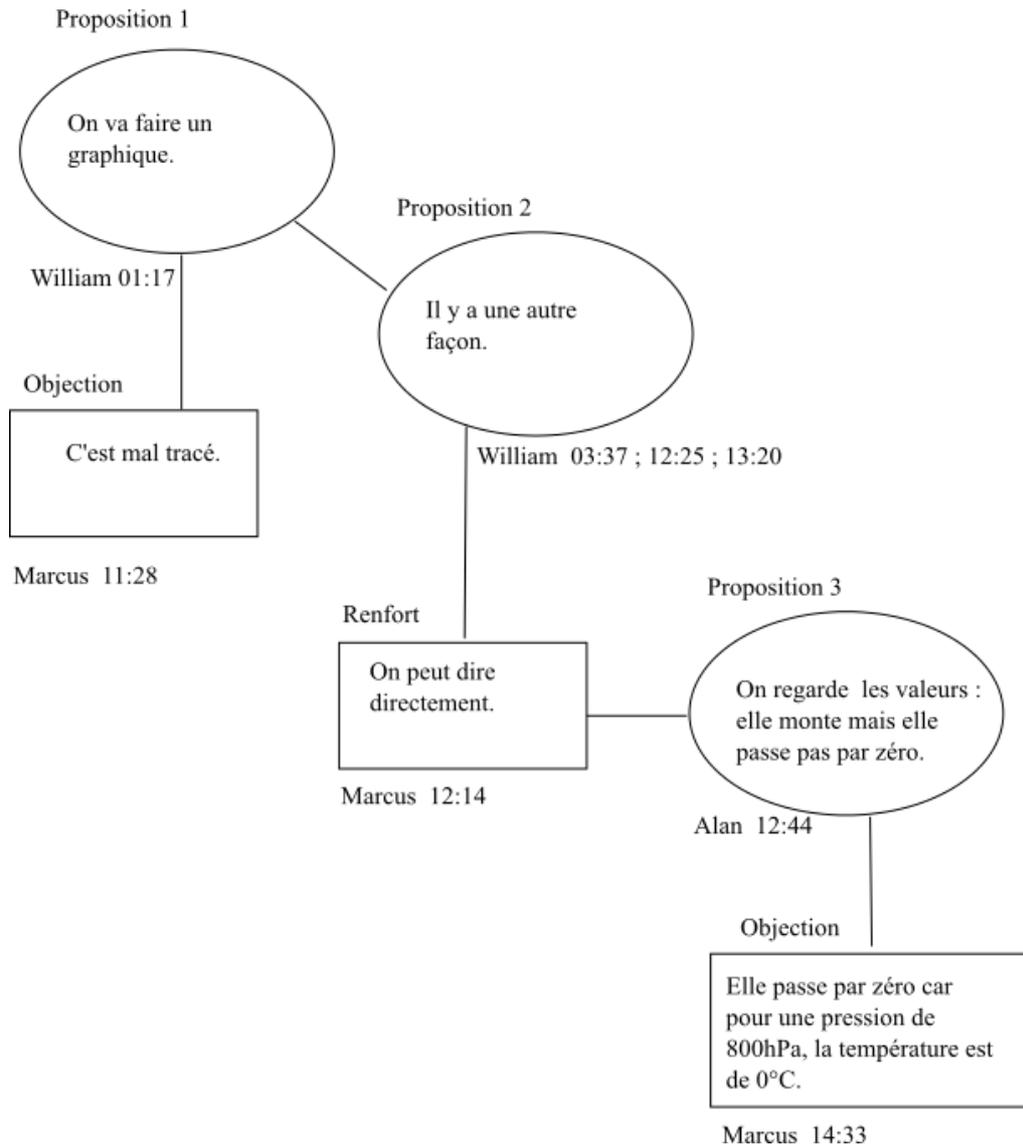
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BROUSSEAU, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'Enseignement des Mathématiques* (Université de Bordeaux 1). Consulté à l'adresse <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf>
- BROUSSEAU, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Consulté à l'adresse <http://guy-brousseau.com/biographie/glossaires/>
- CHAUVAT, G. (1998). Courbes et fonctions au collège. *Petit x*, 51, 23-44.
- COMIN, E. (2009). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions en seconde. *Petit x*, 79, 23-47.
- DOUADY, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-32.
- DUVAL, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Strasbourg: IREM.
- DUVAL, R. (2002). *Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres*. 83-105. Consulté à l'adresse <http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/staf26/Doua.pdf>
- DUVAL, R. (2006). *La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée*. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.
- FABRE, M. (2011). *Eduquer pour un monde problématique : la carte et la boussole*. Paris: PUF.
- FABRE, M. & ORANGE, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- GRAU, S. (2017). *Problématisation en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Thèse de Doctorat, Bretagne Loire, Nantes. Consulté à l'adresse HAL archives ouvertes <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01629911/document>.
- JAUBERT, M., REBIÈRE, M. & PUJO, J. (2010). Communauté discursives disciplinaires scolaires et formats d'interactions. *Colloque international ICAR Université Lyon 2*. Présenté à Spécificités et diversité des interactions didactiques : disciplines, finalités, contextes, Lyon. Consulté à l'adresse HAL archives ouvertes. (hal-00534616)
- ORANGE, C. (2005). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *ASTER*, 40, 3-12.
- PASSARO, V. (2009). Obstacle à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 61-77.
- PASSARO, V. (2013). Jouer avec le concept de fonction ou explorer la fonction par l'étude covariationnelle. *Bulletin AMQ*, LIII, 3, 73-86.
- PASSARO, V. (2016). Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Québec. *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : Éditions La pensée sauvage.
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- ROGALSKI, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 13-30.
- TALL, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de didactique de Strasbourg*, 11, 195-215.

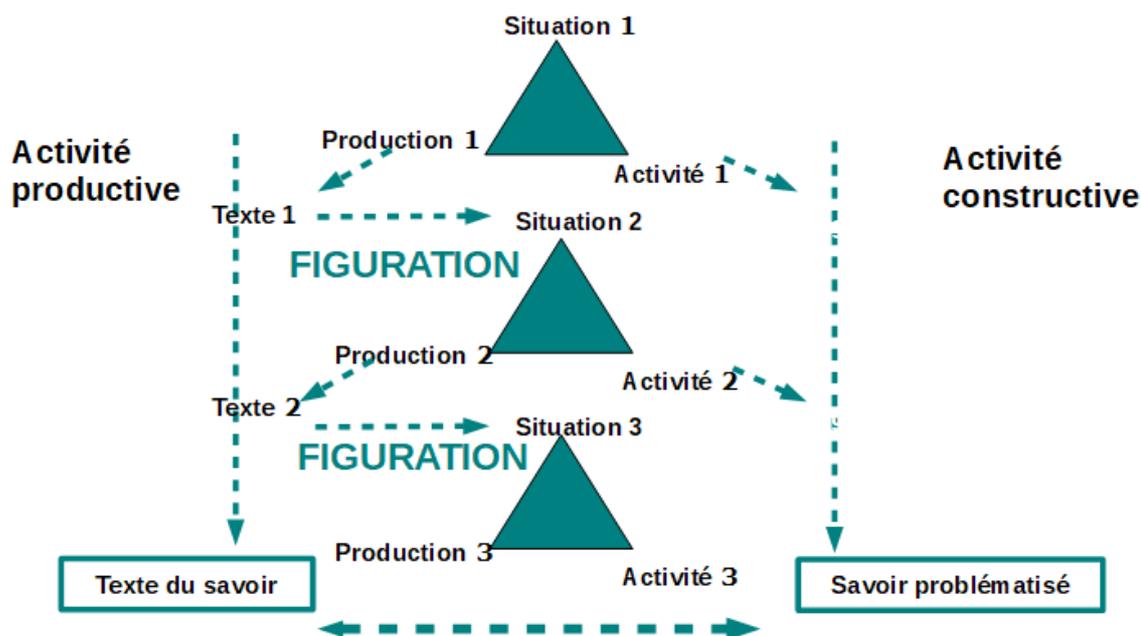
ANNEXE 1 : STRUCTURE ARGUMENTATIVE D'UN DÉBAT EN CLASSE ENTIÈRE



ANNEXE 2 : STRUCTURE ARGUMENTATIVE D'UN DÉBAT EN PETIT GROUPE



ANNEXE 3 : SCHÉMA D'UNE SÉQUENCE DE TYPE PPAP



ANNEXE 4 : PROBLÈME POSÉ EN SITUATION 1 DE L'INGÉNIERIE PPAP

Situation 1 : 1ère étape

Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient. Voici le tableau de mesures obtenues pour un volume constant et un nombre de moles constant par

le professeur A :

T en °C	- 15,2	7,5	10,2	23,7	41	43,7
P en hPa	774	842	850	890	942	950

le professeur B :

T en °F	4,64	45,5	50,36	74,66	105,8	110,66
P en hPa	774	842	850	890	942	950

le professeur C :

T en K	257,95	280,65	283,35	296,85	314,15	316,85
P en hPa	774	842	850	890	942	950

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ?

2ème étape :

Déterminer une relation entre la température et la pression qui est vraie quelle que soit l'unité choisie pour mesurer la température.

ANNEXE 5 : EVOLUTION DU LOSANGE DE PROBLEMATISATION AU COURS D'UNE INTER-ACTION DANS UN GROUPE DE 4 ELEVES EN CLASSE DE SECONDE

