

Identification de fissures en statique par l'écart à la réciprocité

Renaud Ferrier (LMA, Marseille)

Pierre Gosselet (LamCube, Lille)

Mohamed Larbi Kadri (LAMSIN, Tunis)

**Travaux effectués
Au cours de ma thèse
au LMT, Cachan**

Contexte

Contrôle des pièces mécaniques

On cherche à contrôler l'intégrité d'une pièce mécanique à partir de mesures de bord

Phénomènes ondulatoires

exemple : Tomographie à rayons X



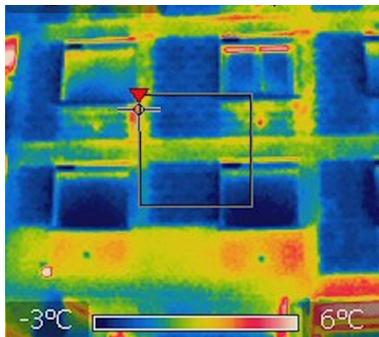
Phénomènes vibratoires

exemple : Tomographie d'impédance électrique



Phénomènes de diffusion

exemple : Thermographie

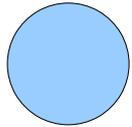


Phénomènes (quasi-)statiques

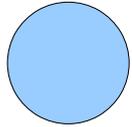
Exemple : essais mécaniques statiques



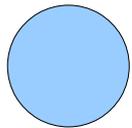
Plan



Présentation du problème



L'écart à la réciprocité : identification et régularisation



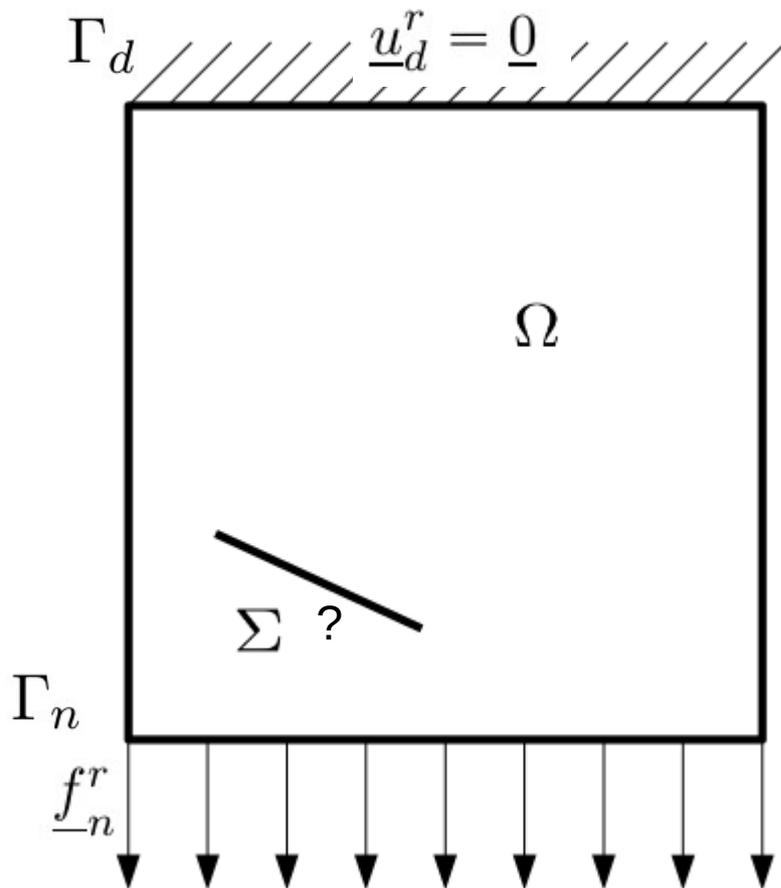
Généralisation aux données incomplètes

Le problème d'identification de fissures

Le problème :

Mesures de déplacement sur une partie du bord
Plusieurs cas de chargement

➡ Déduire la position et forme d'une fissure



Équations du problème direct

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_r)) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \setminus \Sigma \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_r) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Sigma \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_r) \cdot \underline{n} = \underline{f}_n^r \text{ sur } \Gamma_n \\ \underline{u}_r = \underline{u}_d^r \text{ sur } \Gamma_d \end{cases}$$

$$1 \leq r \leq r_{max}$$

État de l'art

Identifiabilité des fissures à partir de données de bord

La solution existe pour n'importe quel jeu de données

FAUX

Si elle existe, la solution est unique
(identifiabilité)

Laplace : [Friedman, Vogelius 89]
Élastostatique: [Ben Abda et al. 99]

Si elle existe, la solution est stable

Laplace : [Alessandrini, Rondi 99]
Élastostatique: [Ben Abda et al. 99]

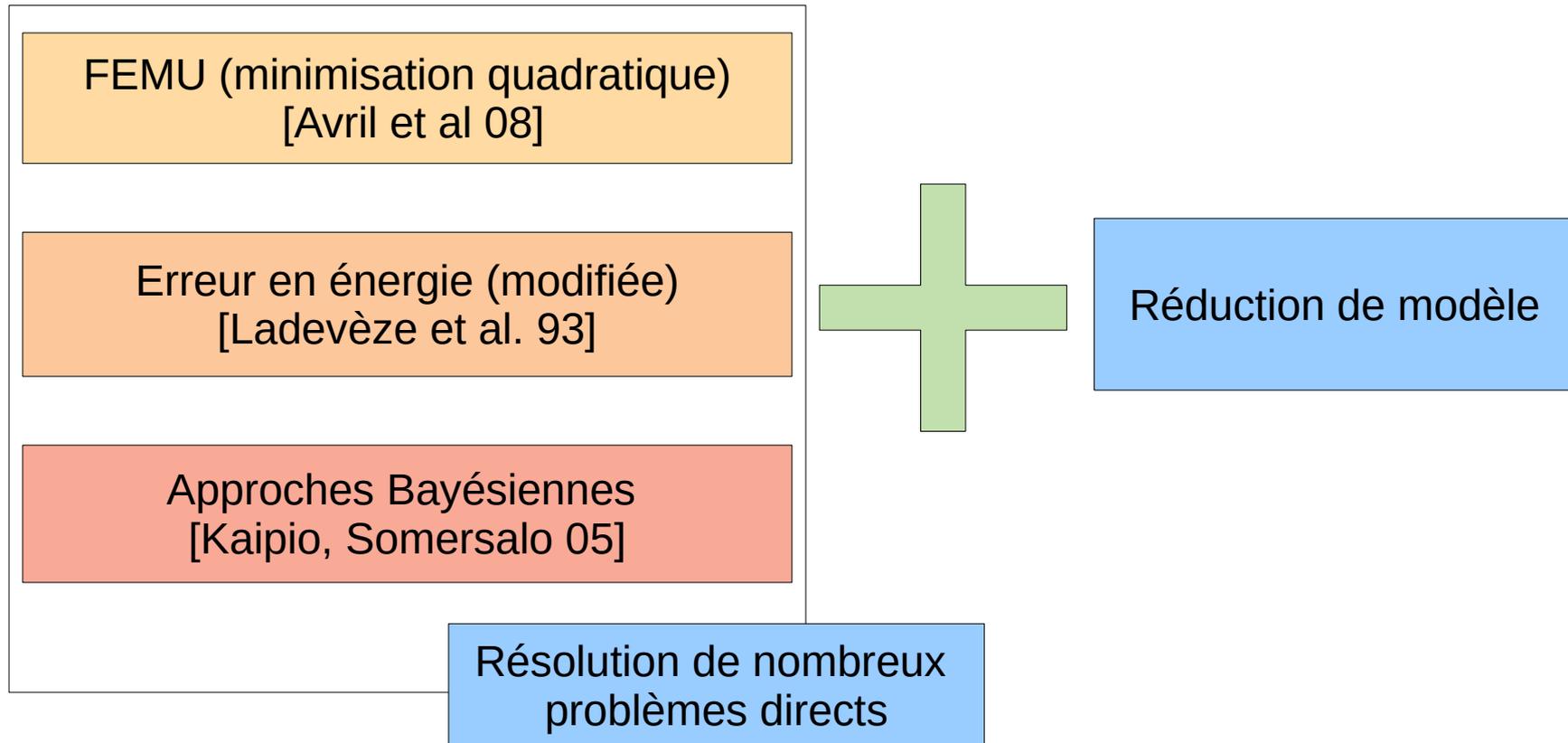
En pratique, la constante
de stabilité est très défavorable

Définition d'un pb
bien posé
au sens de Hadamard

Il s'agit d'un problème dit **inverse**

État de l'art

Quelques méthodes d'inversion



État de l'art

Méthode de l'Écart à la Réciprocité (RG)

[Andrieux, Ben Abda 93]
[Andrieux et al. 99]

Pas besoin de résoudre numériquement de problème direct



Inversion en temps réel



Plus simple

Difficultés inhérentes aux problèmes mal posés



Sensibilité au bruit



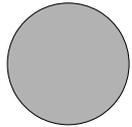
Hypothèses sur la forme de fissure
(plane dans notre cas)

Limitation principale

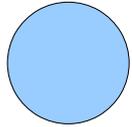


Besoin de données sur tout le bord

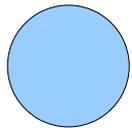
Plan



Présentation du problème



L'écart à la réciprocité : identification et régularisation



Généralisation aux données incomplètes

Méthode de l'Écart à la Réciprocité

[Andrieux, Ben Abda 93]
[Andrieux et al. 99]

$$\forall \underline{v} \in H^1(\Omega), \quad RG_r(\underline{v}) = \int_{\partial\Omega} \left(\hat{\underline{f}}_r \cdot \underline{v} - \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \right) dS$$

Mesures

Champ-test

The diagram illustrates the relationship between 'Mesures' and 'Champ-test' in the reciprocity gap formula. The formula is $\forall \underline{v} \in H^1(\Omega), \quad RG_r(\underline{v}) = \int_{\partial\Omega} \left(\hat{\underline{f}}_r \cdot \underline{v} - \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \right) dS$. The terms $\hat{\underline{f}}_r$ and $\hat{\underline{u}}_r$ are enclosed in green boxes, and \underline{v} and $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})$ are enclosed in purple boxes. Arrows from 'Mesures' point to the green boxes, and arrows from 'Champ-test' point to the purple boxes.

Mesures

$$\forall \underline{v} \in H^1(\Omega), \quad RG_r(\underline{v}) = \int_{\partial\Omega} \left(\hat{\underline{f}}_r \cdot \underline{v} - \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \right) dS$$

Champ-test

Les mesures respectent l'EDP :

$$\exists \underline{w}_r \in H^1(\Omega), \quad \left\{ \hat{\underline{u}}_r = \underline{w}_r|_{\partial\Omega}, \quad \hat{\underline{f}}_r = (\underline{\underline{\sigma}}(\underline{w}_r) \cdot \underline{n})|_{\partial\Omega}, \quad \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{w})) = 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} RG_r(\underline{v}) &= \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}(\underline{w}_r) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v} dS - \int_{\partial\Omega} \underline{w}_r \cdot (\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n}) dS \\ &= \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{w}_r)) \cdot \underline{v} dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{w}_r) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}) dV - \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})) \cdot \underline{w}_r dV - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{w}_r) dV \end{aligned}$$

Symétrie de l'opérateur de rigidité

$$\mathcal{V} = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega), \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \in H_{div}(\Omega), \quad \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \}$$

$$\forall \underline{v} \in H^1(\Omega), \quad RG_r(\underline{v}) = \int_{\partial\Omega} \left(\hat{\underline{f}}_r \cdot \underline{v} - \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \right) dS$$

$$\mathcal{V} = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \in H_{div}(\Omega), \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \}$$

S'il y a un bord libre inconnu à l'intérieur du domaine (une fissure) Σ :

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{V}, \quad RG_r(\underline{v}) = \int_{\Sigma} \llbracket \underline{u}_r \rrbracket \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n} dS$$

Méthode de l'Écart à la Réciprocité

[Andrieux, Ben Abda 93]
[Andrieux et al. 99]

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{V}, RG_r(\underline{v}) = \int_{\Sigma} [[\underline{u}_r]] \cdot \underline{\sigma}(\underline{v}) \cdot \underline{n} dS$$

Hypothèse : fissure plane

Fct-test
linéaires

I) Normale au plan

Fct-test
quadratiques

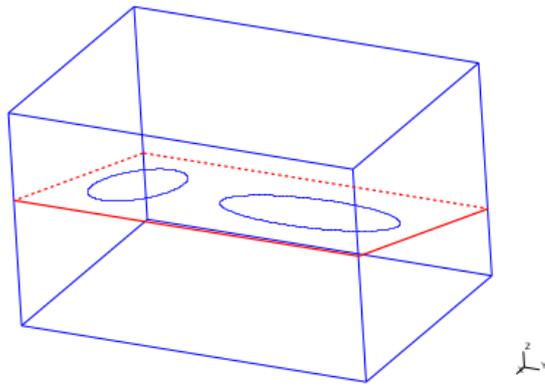
II) Position du plan

Famille de
fct-test

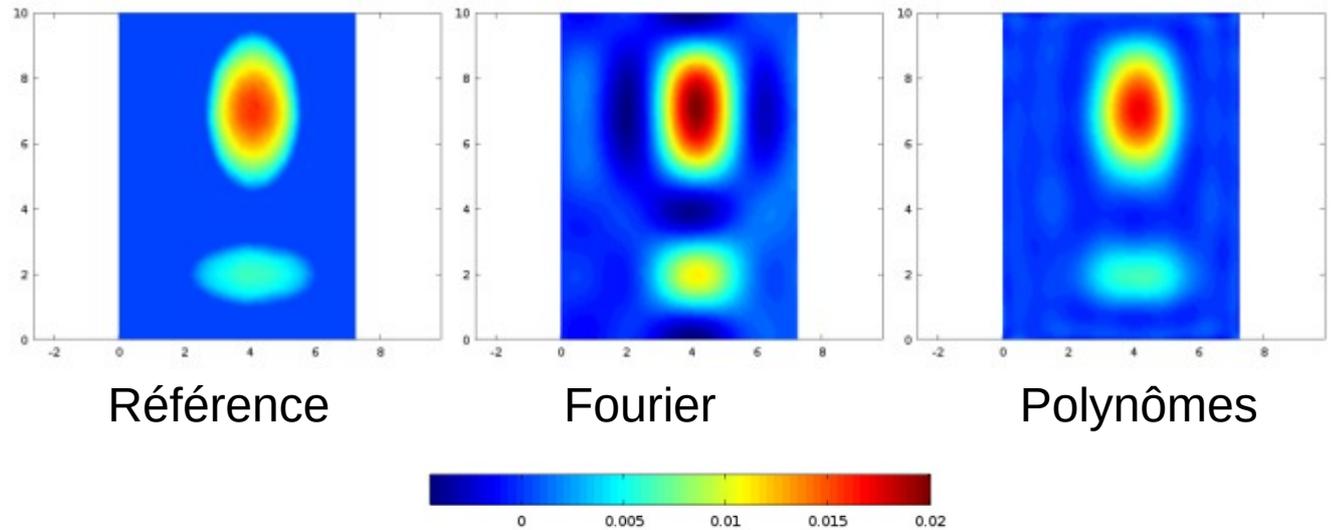
III) Saut de déplacement dans le plan

IV) Forme de la fissure

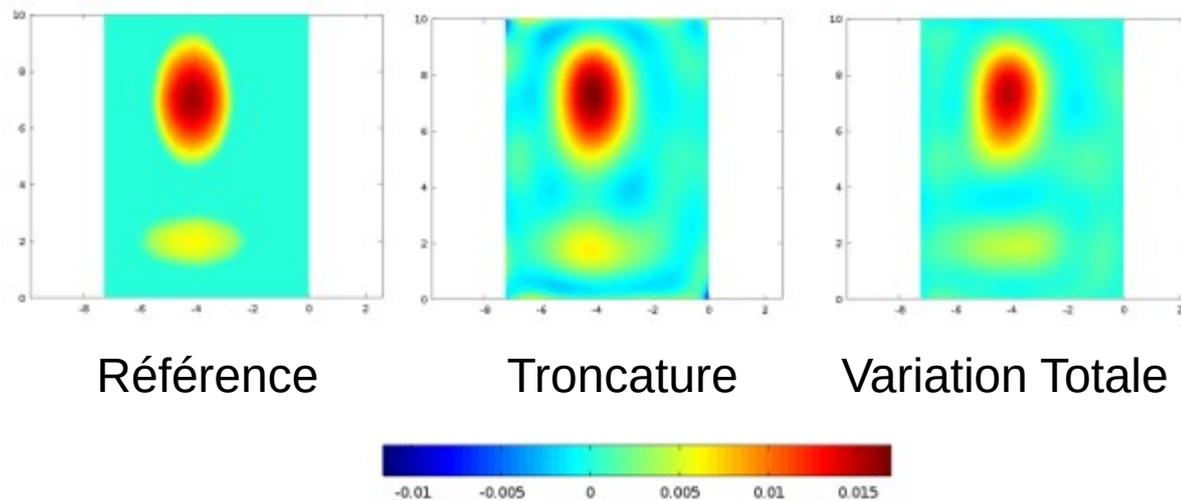
Méthode de l'écart à la réciprocity Projection de Galerkin et régularisation



Domaine étudié



Comparaison entre les fonctions de Fourier et les polynômes



[Ferrier et al. 19]

Comparaison entre deux approches régularisantes (NB=2%)

Méthode de l'écart à la réciprocité

Autres applications



Sources ponctuelles de chaleur [Auffray et al. 13]



Fissures sur l'équation d'Helmholtz [Ben Abda et al. 05]

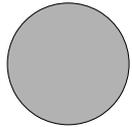


Fissures multiples [Shifrin, Kapstov 17]

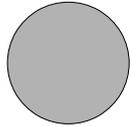


Cavités [Zeng et al. 16]

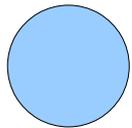
Plan



Présentation du problème



L'écart à la réciprocité : identification et régularisation



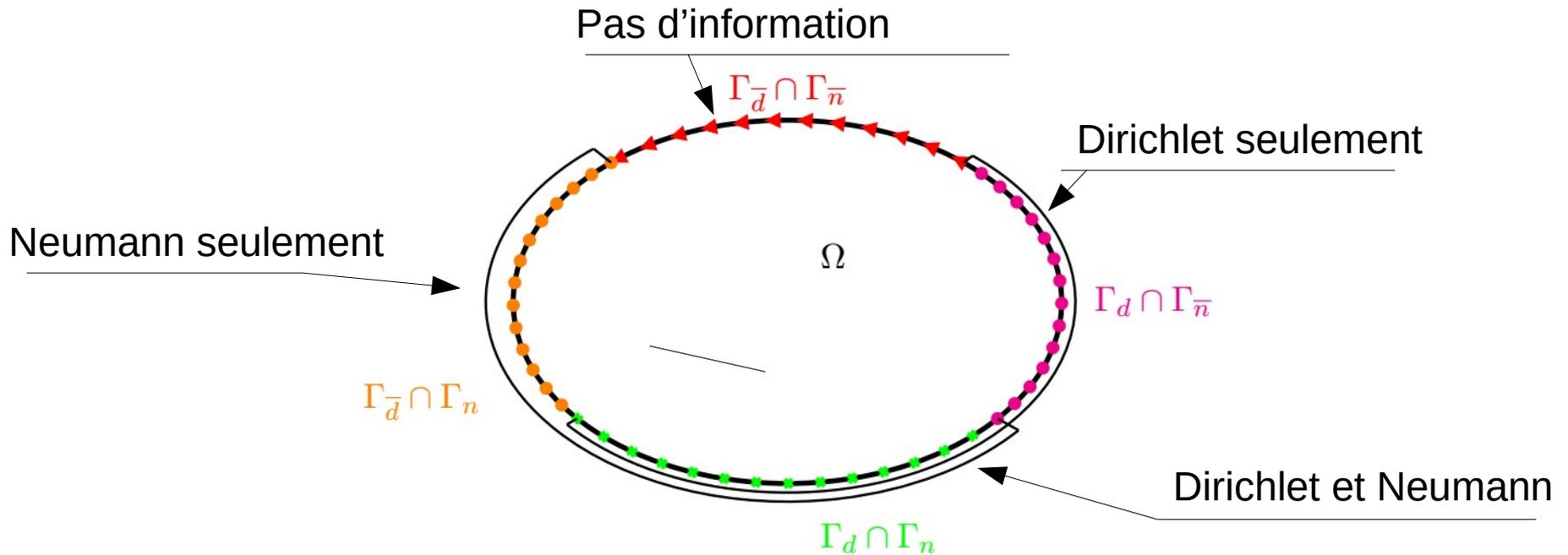
Généralisation aux données incomplètes

$$\forall \underline{v} \in H^1(\Omega), \quad RG_r(\underline{v}) = \int_{\partial\Omega} \left(\hat{\underline{f}}_r \cdot \underline{v} - \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \right) dS$$

Méthode de l'écart à la réciprocity Projection de Petrov-Galerkin

Γ_d : Bord sur lequel la donnée de Dirichlet est disponible

Γ_n : Bord sur lequel la donnée de Neumann est disponible



$$\int_{\Gamma_n} \hat{\underline{f}}_r \cdot \underline{v} \, dS + \int_{\Gamma_{\bar{n}}} \underline{f}_r \cdot \underline{v} \, dS - \int_{\Gamma_d} \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\sigma}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \, dS - \int_{\Gamma_{\bar{d}}} \underline{u}_r \cdot \underline{\sigma}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \, dS$$

$$=$$

$$\int_{\Sigma} \underline{\sigma}(\underline{v}) : \underline{n}_{\Pi} \otimes \llbracket \underline{u}_r \rrbracket \, dS$$

Méthode de l'écart à la réciprocité Projection de Petrov-Galerkine

Γ_d : Bord sur lequel la donnée de Dirichlet est disponible

Γ_n : Bord sur lequel la donnée de Neumann est disponible

$$\int_{\Gamma_n} \hat{\underline{f}}_r \cdot \underline{v} \, dS + \int_{\Gamma_{\bar{n}}} \underline{f}_r \cdot \underline{v} \, dS - \int_{\Gamma_d} \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \, dS - \int_{\Gamma_{\bar{d}}} \underline{u}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \, dS$$

$$=$$

$$\int_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) : (\underline{n}_{\Pi} \otimes \llbracket \underline{u}_r \rrbracket) \, dS$$

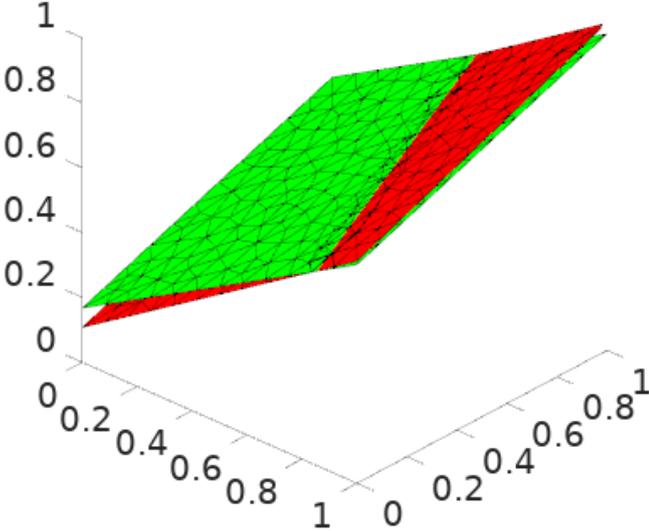
Première idée :
Construire \underline{v} tq les intégrales
sur les bords inconnus s'annulent

Deuxième idée :
Identifier à la fois le saut et
les conditions limites inconnues

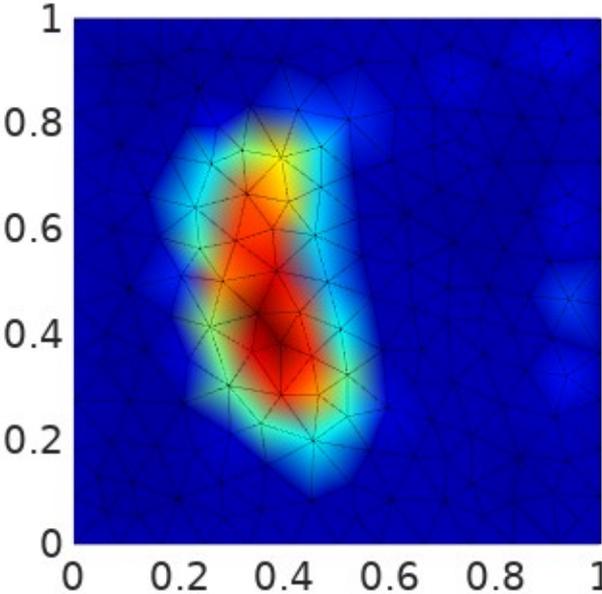
Méthode de l'écart à la réciprocity

Projection de Petrov-Galerkin

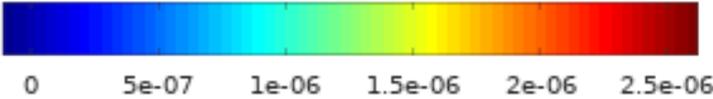
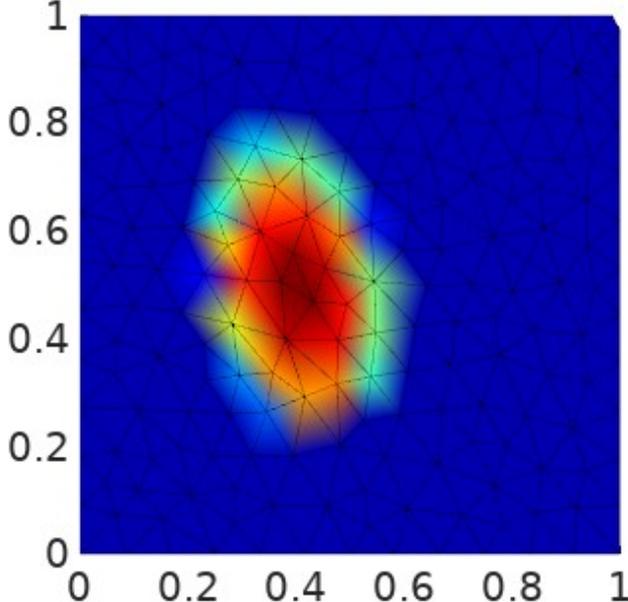
Identification du plan
Rouge : référence
Vert : plan identifié



Saut identifié



Saut de référence



NB = 1 %

Méthode de l'écart à la réciprocity Confrontation à un cas expérimental

[Vargas et al. 16]

Trace sur le bord de la mesure de champ

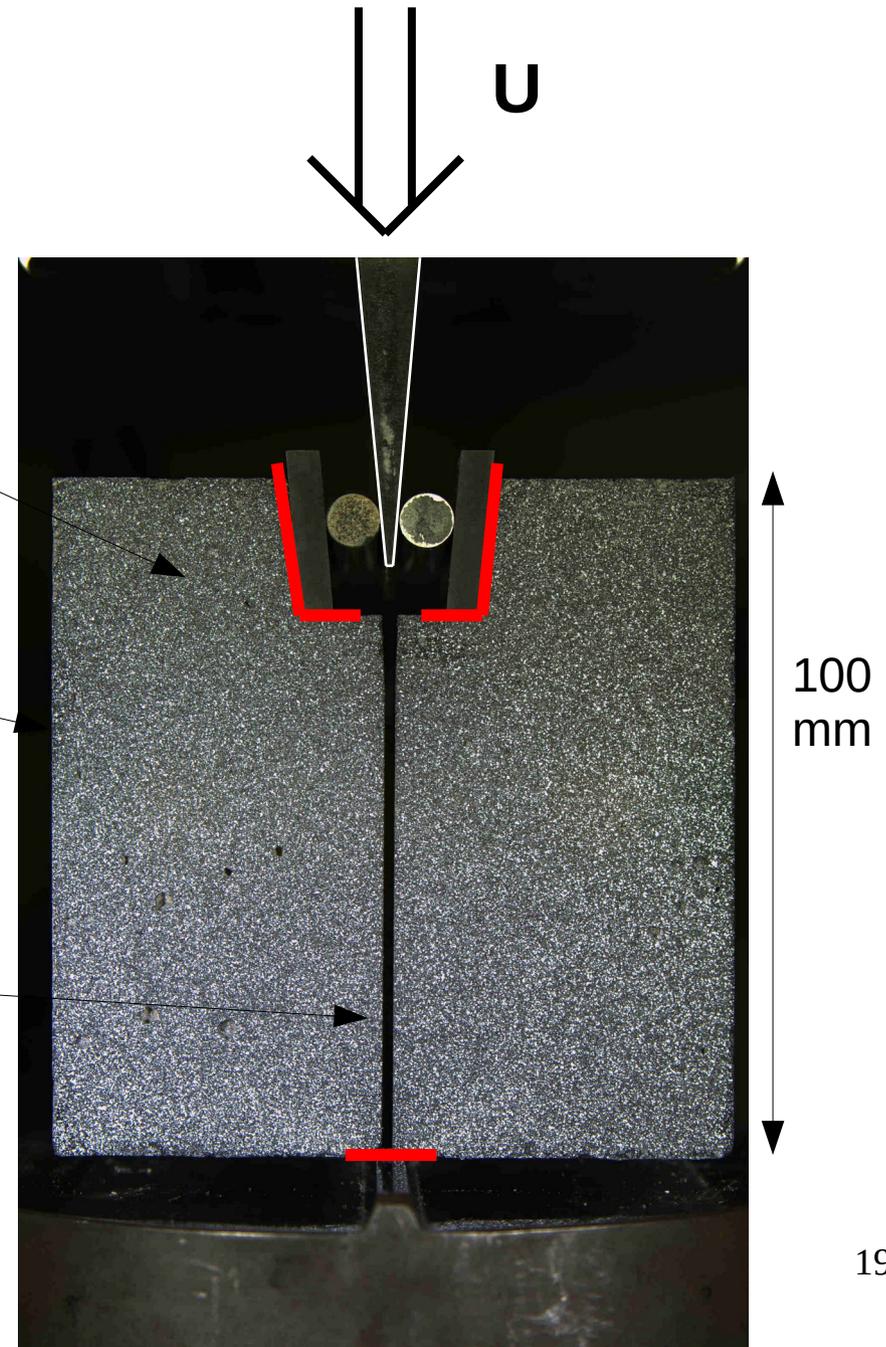
Bords libres

Données de Neumann manquantes

Ligne de fissure connue

Objectif :

Retrouver le saut de déplacement sur la ligne de fissure à partir des données de bord

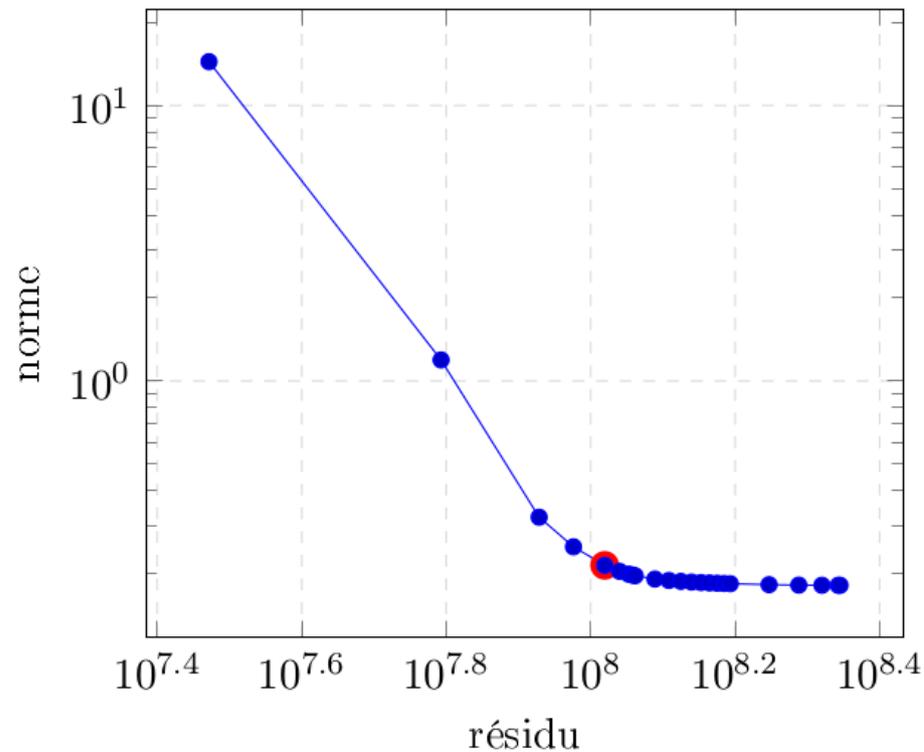


Méthode de l'écart à la réciprocité

Confrontation à un cas expérimental

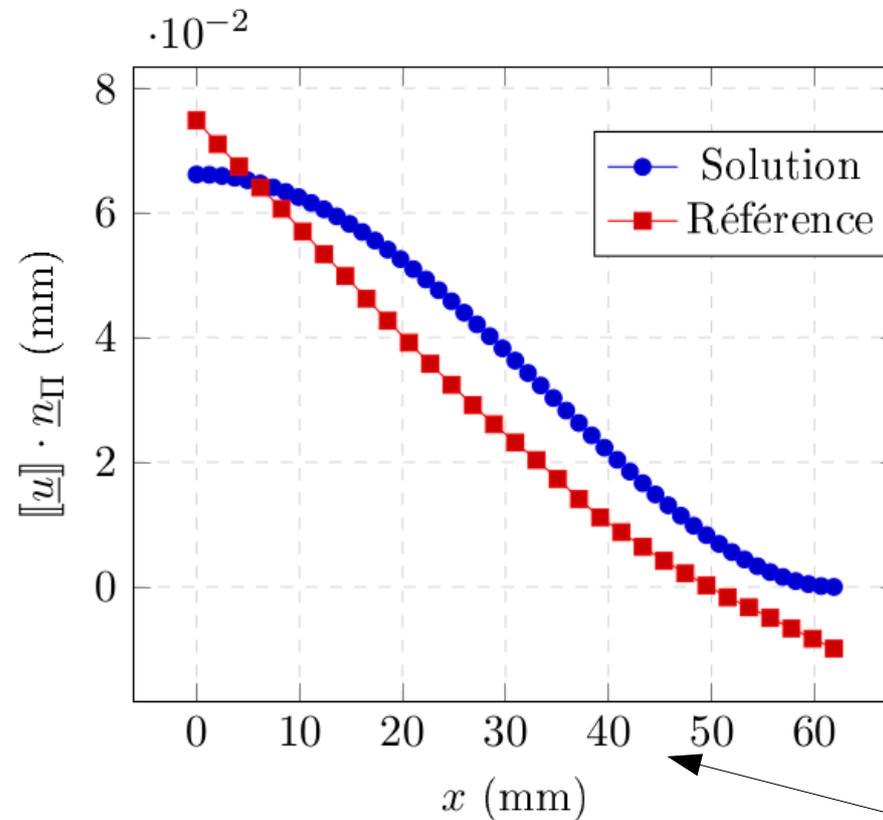
Conditions du calcul :

- 1 seul cas-test
- 2D : 82 fonctions-test
- La ligne de fissure est connue
- Paramètre de Tikhonov déterminé par L-curve :



Méthode de l'écart à la réciprocité

Confrontation à un cas expérimental



Comparaison entre le saut identifié et la référence

Longueur de Fissure
~40 mm

Une question subsiste : comment en déduire la taille de la fissure ?
Lien avec la corrélation d'images intégrée [Roux et al. 09]

Conclusion



La méthode de l'écart à la réciprocité permet d'identifier des défauts dans des pièces



La difficulté principale est la nécessité d'avoir des mesures sur tout Le bord du domaine



L'identification des mesures manquantes permet de dépasser cette difficulté



Une preuve de concept expérimentale donne une première validation

- A. Friedman and M. Vogelius. Determining cracks by boundary measurements. *Mathematics Journal* , 38(2) :497525, 1989.
- A. Ben Abda, H. Ben Ameer, and M. Jaoua. Identification of 2D cracks by elastic boundary measurements. *Inverse Problems* , 15(1) :67, 1999.
- G. Alessandrini and L. Rondi. Stable determination of a crack in a planar inhomogeneous conductor. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* , 30(2) :326340, 1999.
- S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Grediac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, et al. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics* , 48(4) :381, 2008.
- P. Ladeveze, M. Reynier, and D. Nedjar. Parametric correction of finite element models using modal tests. In *Inverse problems in engineering mechanics* , pages 91100. Springer, 1993.
- J. Kaipio and E. Somersalo. *Statistical and computational inverse problems*. Vol. 160. Springer Science & Business Media, 2006.
- S. Andrieux and A. Ben Abda. The reciprocity gap : a general concept for crack identification problems. *Mechanics research communications* , 20(5) :415420, 1993.
- S. Andrieux, A. Ben Abda, and H. D. Bui. Reciprocity principle and crack identification. *Inverse problems*, 15(1) :59, 1999.
- R. Ferrier, M. L. Kadri, and P. Gosselet. Planar crack identification in 3D linear elasticity by the Reciprocity Gap method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 355 :193215, 2019.
- S. Roux, J. Réthoré, and F. Hild. "Digital image correlation and fracture: an advanced technique for estimating stress intensity factors of 2D and 3D cracks." *Journal of Physics D: Applied Physics* 42.21 (2009): 214004.
- F. Zeng, X. Liu, J. Sun, and L. Xu. The reciprocity gap method for a cavity in an inhomogeneous medium. *Inverse Problems & Imaging* , 10(3) :855868, 2016
- E. I. Shifrin and A. V. Kaptsov. Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis. *Inverse Problems* , 34(1) :015009, 2017.
- A. Ben Abda, F. Delbary, and H. Haddar. On the use of the reciprocity-gap functional in inverse scattering from planar cracks. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* , 15(10) :15531574, 2005.
- N. Auray, M. Bonnet, and S. Pagano. Identification of transient heat sources using the reciprocity gap. *Inverse Problems in Science and Engineering* , 21(4) :721738, 2013.
- R. Vargas, J. Neggers, R. Canto, J. Rodrigues, and F. Hild. Analysis of wedge splitting test on refractory castable via integrated DIC. *Journal of the European Ceramic Society* , 36(16) :43094317, 2016.
- R. Ferrier. *Stratégies de résolution numérique pour des problèmes d'identification de fissures et de conditions aux limites*. 2019. Thèse de doctorat.