HAL
open science

La fonction de Möbius à la rencontre des systèmes dynamiques

Thierry de La Rue

To cite this version:

Thierry de La Rue. La fonction de Möbius à la rencontre des systèmes dynamiques. La gazette des mathématiciens, 2016, 150, pp.31-40. hal-03143838

HAL Id: hal-03143838

https://hal.science/hal-03143838

Submitted on 24 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La fonction de Möbius à la rencontre des systèmes dynamiques

Thierry de la Rue

mai 2016

On désigne par $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et on note $\#A$ le cardinal d'un ensemble fini A.

1 Des conjectures sur le caractère aléatoire de la fonction de Möbius

La fonction de Möbius $\boldsymbol{\mu}$ est définie sur l'ensemble des entiers strictement positifs par

$$\boldsymbol{\mu}(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier,} \\ (-1)^m & \text{si } n \text{ est le produit de } m \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

C'est un cas particulier de *fonction multiplicative*, ce qui signifie que $\boldsymbol{\mu}(n_1 n_2) = \boldsymbol{\mu}(n_1)\boldsymbol{\mu}(n_2)$ à chaque fois que n_1 et n_2 sont deux entiers premiers entre eux.

Déjà utilisée par Euler et Gauss, c'est August Ferdinand Möbius qui l'étudia de manière systématique en 1832. Cette fonction apparaît en effet de manière naturelle dans différentes branches des mathématiques. On mentionnera notamment ici son importance en théorie analytique des nombres : le comportement de la fonction de Möbius se révèle étroitement lié à la répartition des nombres premiers. Ainsi, il est possible de montrer de manière « élémentaire » l'équivalence du théorème des nombres premiers, selon lequel le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs à x est asymptotiquement équivalent à $x/\ln(x)$, avec le fait que les 1 et les -1 dans la fonction de Möbius se compensent asymptotiquement :

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \boldsymbol{\mu}(n) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0. \tag{1}$$

Figure 1 – August Ferdinand Möbius (1790–1868)

(Voir par exemple [17].)

La vitesse à laquelle cette compensation s'effectue est actuellement inconnue. Une conjecture raisonnable serait que l'ordre de grandeur de la somme des N premiers termes de la fonction de Möbius se comporte asymptotiquement comme si les signes de ses termes non nuls étaient tirés indépendamment à pile ou face, et serait donc de l'ordre de $\sqrt{N}$. Ainsi, on aurait

$$\forall \varepsilon > 0,\ \frac{1}{N^{1/2+\varepsilon}} \sum_{1 \le n \le N} \boldsymbol{\mu}(n) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0, \tag{2}$$

ce qui constitue un énoncé équivalent à l'hypothèse de Riemann [21].

Mais ce sont d'autres aspects du caractère apparemment aléatoire de la fonction de Möbius qui nous intéressent ici. La *loi de l'aléa de Möbius*, énoncée informellement par exemple par Iwaniec et Kowalski [13, p. 338], stipule que la fonction de Möbius est si chaotique qu'à chaque fois que l'on considère une suite bornée de nombres complexes $\xi = \big(\xi(n)\big)_{n \ge 0}$ « raisonnablement simple », il n'existe aucune corrélation entre $\boldsymbol{\mu}$ et ξ, au sens où

l'on a l'orthogonalité suivante :

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \xi(n)\, \boldsymbol{\mu}(n) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0. \tag{3}$$

Notons que (1) fournit déjà l'orthogonalité de $\boldsymbol{\mu}$ à toute suite constante. Il s'agit maintenant de préciser ce que l'on entend par une suite ξ « raisonnablement simple ». C'est précisément ce qu'a fait Peter Sarnak en 2010, dans des notes mises en lignes sur sa page web [19]. (Voir aussi une version postérieure de ces notes [20], publiée en 2012.) Il y propose un énoncé mathématiquement précis, en se plaçant dans le cadre des systèmes dynamiques : selon Sarnak, la bonne façon de définir la complexité d'une suite dans ce contexte est de la mesurer par la complexité du système dynamique « le plus simple » qui la produit.

1.1 Suites produites par un système dynamique

Les systèmes dynamiques considérés ici sont ce que l'on appelle des systèmes dynamiques *topologiques*, qui sont définis par l'action d'une transformation continue T sur un espace métrique compact X. Voyons dès maintenant une classe importante d'exemples de tels systèmes : on part d'un ensemble fini $\mathbb{A}$ (appelé *alphabet*), et on considère l'ensemble $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies d'éléments de $\mathbb{A}$, qui est un compact pour la topologie produit. Sur $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$, la transformation $S : \big(x(n), n \geq 0\big) \mapsto \big(x(n+1), n \geq 0\big)$, qui décale les suites d'un cran vers la gauche, est continue. On la nomme usuellement le *décalage*, ou *shift*. On appelle *sous-shift* un sous-ensemble fermé $Y \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ qui est stable par S. Chaque sous-shift Y fournit alors un système dynamique dit *symbolique* (Y, S).

Une suite $\xi = \big(\xi(n)\big)_{n \geq 0}$ est dite *produite par un système dynamique* (X, T) s'il existe un point $x \in X$ et une fonction f continue sur X telle que pour tout n, $\xi(n) = f(T^n x)$. Sarnak note que ce n'est pas restreindre le problème que de considérer uniquement des suites ξ produites par de tels systèmes dynamiques. En effet, si par exemple ξ est une suite dont les termes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, disons $\xi(n) \in \mathbb{A}$ pour un sous-ensemble fini $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$, il suffit de prendre le système symbolique $(\mathbb{A}^{\mathbb{N}}, S)$, la fonction f qui à une suite associe sa coordonnée d'indice 0, et la suite $x \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ définie par $x(n) := \xi(n)$ pour tout $n \geq 0$: on a alors $\xi(n) = f(S^n x)$ pour tout $n \geq 0$. (Le cas général où ξ est une suite bornée de nombres complexes n'est pas plus difficile, puisque la construction du système fonctionne encore si l'on remplace l'ensemble fini $\mathbb{A}$ par un compact de $\mathbb{C}$.)

Il existe une façon naturelle de mesurer la complexité d'un système dynamique, en considérant son *entropie topologique* $h_{\mathrm{top}}(X,T)$. Sans entrer dans les détails pour le cas général (pour lequel on renvoie le lecteur par exemple à [22]), on peut en donner la définition dans le cas d'un système symbolique (Y,S). On introduit d'abord, pour chaque entier $\ell \geq 1$, l'ensemble $B_\ell(Y) \subset \mathbb{A}^\ell$ des *blocs de longueur* ℓ *dans* Y : $B_\ell(Y)$ est l'ensemble des $w = w_0 w_1 \cdots w_{\ell-1}$ dans $\mathbb{A}^\ell$ pour lesquels il existe une suite $y \in Y$ et un entier $k \geq 0$ tels que $y(k) = w_0, \ldots, y(k+\ell-1) = w_{\ell-1}$. Alors l'entropie topologique de (Y,S) est donnée par

$$h_{\mathrm{top}}(Y,S) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} \log_2 \#B_\ell(Y).$$

(Voir par exemple [15].)

La suite ξ est dite *déterministe* si elle est produite par un système dynamique d'entropie topologique nulle. Par exemple, toute suite ξ appartenant à un sous-shift d'entropie topologique nulle est déterministe, et le choix de ce terme se justifie dans ce contexte par l'argument suivant : le nombre de blocs de longueur ℓ dans la suite croît avec ℓ de manière sous-exponentielle. Donc si ℓ est grand, la plupart des blocs de longueur ℓ qui apparaissent dans la suite se prolongent (à droite) de manière unique en un bloc de longueur $\ell+1$, *i.e. déterminent* le symbole suivant dans la suite.

1.2 La conjecture de Sarnak

C'est précisément cette notion de suite déterministe qui est proposée par Sarnak pour jouer le rôle de suite « raisonnablement simple ». En remontant le fil, on arrive donc à cet énoncé :

Conjecture 1.1 (Conjecture de Sarnak). *Pour tout système dynamique (X,T) d'entropie topologique nulle, pour toute fonction $f : X \to \mathbb{C}$ continue sur X, pour tout $x \in X$,*

$$\frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} f(T^n x)\, \boldsymbol{\mu}(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{4}$$

Ce type de résultat était déjà connu bien avant 2010 pour certaines suites déterministes. Comme on l'a déjà souligné, le cas des suites constantes revient au théorème des nombres premiers. Sarnak note également que le cas d'une suite ξ périodique (autrement dit, produite par un système dynamique *fini*), est lui-même équivalent au théorème des nombres premiers le long des suites arithmétiques. En fait, l'estimation suivante, prouvée par Davenport

en 1937 [8], permet de traiter une classe plus générale de suites : pour tout $A > 0$, il existe une constante $C_A > 0$ telle que, pour tout $N \geq 2$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{1\leq n\leq N} e^{i2\pi nt} \boldsymbol{\mu}(n) \right| \leq C_A \frac{N}{(\ln N)^A}. \tag{5}$$

La relation d'orthogonalité (3) s'en déduit dès que ξ est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire de la forme $\xi(n) = \sum_{1\leq j\leq k} z_j e^{i2\pi nt_j}$, puis s'étend immédiatement au cas où ξ est une limite uniforme de tels polynômes trigonométriques, ce qui correspond à la classe des suites *presque périodiques*. Or, les suites presque périodiques sont exactement celles qui sont produites par des systèmes dynamiques particuliers, appelés *systèmes de Kronecker* ([9], Théorème 1.9). Les systèmes de Kronecker sont ceux pour lesquels l'espace est un groupe métrisable compact, et la transformation correspond à la multiplication par un élément fixé du groupe. Ces systèmes sont d'entropie topologique nulle, et la conjecture de Sarnak est donc valide pour eux.

Beaucoup plus récemment, un résultat prouvé par Green et Tao en 2008 étend la validité de (3) pour les suites produites par des *nilsystèmes* [11]. Dans le cas des nilsystèmes, l'espace est un groupe de Lie nilpotent quotienté par un sous-groupe discret cocompact, et la transformation est encore la multiplication par un élément fixé du groupe.

Après la publication des notes de Sarnak, la conjecture 1.1 a été vérifiée dans de nombreuses autres classes de systèmes dynamiques, incluant des exemples beaucoup moins structurés que ceux décrits ci-dessus. L'un des travaux les plus importants dans ce domaine, dû à Bourgain, Sarnak et Ziegler [6] concerne les *flots horocycliques*. Outre le fait qu'il prouve pour la première fois la conjecture de Sarnak pour un système *mélangeant*, ce travail fournit également un critère fondamental pour prouver l'orthogonalité de la fonction de Möbius (en fait, de n'importe quelle suite multiplicative bornée) à une suite donnée. On reviendra sur ce critère dans la section 3.3.

1.3 La conjecture de Chowla

Mais l'argument le plus marquant avancé par Sarnak en faveur de sa conjecture vient du rapprochement avec une autre conjecture formulée par Chowla en 1965, et qui traite des corrélations multiples de la fonction de Möbius. (En fait, Chowla formula cette conjecture pour la fonction de Liouville, qui vaut 1 ou -1 suivant la parité du nombre de diviseurs premiers de n, comptés avec multiplicité.)

Conjecture 1.2 (Conjecture de Chowla). *Pour tout entier $s \geq 1$, pour tout choix d'entiers $1 \leq a_1 < \ldots < a_s$, et pour tout choix des exposants $i_0, i_1, \ldots, i_s \in \{1, 2\}$ avec au moins l'un d'entre eux égal à 1,*

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \boldsymbol{\mu}(n)^{i_0} \boldsymbol{\mu}(n + a_1)^{i_1} \cdots \boldsymbol{\mu}(n + a_s)^{i_s} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0. \tag{6}$$

Sarnak donne une interprétation dynamique de la conjecture de Chowla, qui sera présentée dans la section 2.3. Puis il explique que la validité de la conjecture de Chowla entraînerait celle de la conjecture 1.1. On donnera dans la section 3.1 les grandes lignes d'une preuve ergodique de cette implication, et en section 3.2 un argument en faveur de la conjecture de Chowla.

2 Des systèmes symboliques liés à la fonction de Möbius

Au-delà de la conjecture 1.1, Sarnak suggère plus généralement d'étudier la fonction de Möbius du point de vue des systèmes dynamiques, en introduisant notamment deux systèmes symboliques liés à la fonction de Möbius.

2.1 Système dynamique engendré par une suite et généricité

On a expliqué ci-dessus que toute suite ξ à valeurs dans un ensemble fini $\mathbb{A}$ est produite par un système dynamique symbolique, ce qui revient à considérer la suite comme un point d'un sous-shift particulier. Parmi tous les sous-shifts contenant la suite ξ, il en existe un plus petit, qui est donné par

$$X_\xi := \overline{\{S^n \xi : n \geq 0\}}.$$

Ainsi, l'action du décalage sur le sous-shift X_ξ peut être considérée comme le système dynamique « le plus simple » produisant la suite ξ.

Ce système peut être étudié du point de vue topologique, et sous cet angle les questions soulevées relèvent essentiellement de l'identification des blocs de longueur finie apparaissant dans la suite ξ (par exemple, l'entropie topologique de (X_ξ, S) est obtenue à partir du nombre de blocs de longueur finie donnée). Mais un point de vue complémentaire consiste également à envisager (X_ξ, S) sous l'angle des *systèmes dynamiques mesurés*, c'est-à-dire en munissant X_ξ d'une mesure de probabilité invariante par l'action du décalage, et qui soit naturelle dans ce contexte. Ce sont cette fois les *fréquences* avec lesquelles les blocs apparaissent dans la suite ξ qui sont déterminantes, et la notion essentielle est ici celle de *généricité*.

Dans un système dynamique topologique (X, T), un point x est dit *générique* (sous l'action de T) pour une mesure de probabilité ν sur X si la suite des *mesures empiriques* $\left(\frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N}\delta_{T^n x}\right)_{N\geq 1}$ converge faiblement vers ν, autrement dit si pour toute fonction f continue sur X,

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N} f(T^n x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int f\, d\nu.$$

Si l'on sait seulement que la convergence a lieu le long d'une suite d'entiers (N_k) tendant vers l'infini, on dit que x est *quasi-générique* pour ν le long de (N_k). On notera que si x est quasi-générique pour une mesure de probabilité ν, alors celle-ci est automatiquement T-*invariante* : pour toute fonction f continue sur X, on a $\int_X f\, d\nu = \int_X f\circ T\, d\nu$. Observons également que, par compacité de l'ensemble des mesures de probabilités muni de la convergence faible, tout point $x \in X$ est quasi-générique pour au moins une mesure de probabilité (ce qui au passage prouve l'existence de mesures de probabilités T-invariantes).

Dans le cas d'un système symbolique, dire qu'une suite ξ est générique sous l'action du décalage pour une mesure de probabilité ν revient à dire que, pour tout bloc fini $w = w_0\cdots w_{\ell-1} \in \mathbb{A}^\ell$, la fréquence avec laquelle on observe w dans la suite ξ est égale à la mesure ν du cylindre $C_w := \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}} : x_0 = w_0, \ldots, x_{\ell-1} = w_{\ell-1}\right\}$:

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N} \mathbb{1}_{C_w}(S^n\xi) \xrightarrow[N\to\infty]{} \nu(C_w).$$

En partant de $\xi = \boldsymbol{\mu}$ [1], on obtient le système dynamique $(X_{\boldsymbol{\mu}}, S)$, qui est le plus simple produisant la fonction de Möbius. La proposition de Sarnak consiste à étudier pour lui-même ce système dynamique, appelé *flot de Möbius*. En particulier, identifier la (ou les) mesure(s) de probabilité pour laquelle (lesquelles) la fonction de Möbius est (quasi-)générique serait extrêmement intéressant, mais comme on va le voir, cela reviendrait essentiellement à résoudre le problème posé par la conjecture de Chowla.

La compréhension de la dynamique engendrée par la fonction de Möbius passe d'abord par l'étude d'un système symbolique plus simple, lui-même naturellement lié à la fonction de Möbius.

1. Pour que la construction fonctionne, on doit pouvoir considérer $\boldsymbol{\mu}$ comme un point de $\{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$, ce que l'on peut faire en prolongeant naturellement en 0 par $\boldsymbol{\mu}(0) := 0$.

2.2 Le flot des sans-carré

Introduisons la suite $\boldsymbol{\eta}$ définie comme le carré de la fonction de Möbius :

$$\boldsymbol{\eta}(n) := \boldsymbol{\mu}^2(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sarnak nomme le système symbolique $(X_{\boldsymbol{\eta}}, S)$ le *flot des sans-carré*, et énonce un certain nombre de résultats précis sur ce système, dont on donnera une esquisse de preuve un peu plus loin.

Tout d'abord, il est possible de caractériser précisément les suites appartenant au sous-shift $X_{\boldsymbol{\eta}}$. Remarquons que si A est une partie finie de $\mathbb{N}$ telle que $\boldsymbol{\eta}(n) = 1$ pour tout $n \in A$, et si p est un nombre premier, alors il n'existe aucun entier $n \in A$ tel que $n = 0 \mod p^2$ (c'est la définition de $\boldsymbol{\eta}$). En particulier, le nombre

$$t(A, p^2) := \#\big\{q \in \{0, 1, \ldots, p^2 - 1\} : \exists n \in A,\ n = q \mod p^2\big\}$$

de classes de congruence modulo p^2 que l'on voit dans A vérifie toujours

$$t(A, p^2) < p^2. \tag{7}$$

On dit qu'un ensemble A est *admissible* s'il vérifie l'inégalité ci-dessus pour tout p premier. De même, un bloc fini $w = w_0 \cdots w_{\ell-1} \in \{0, 1\}^\ell$ est dit *admissible* si $\{j : w_j = 1\}$ est admissible, puis qu'une suite ξ à valeurs dans $\{0, 1\}$ est *admissible* si chacun de ses sous-blocs finis l'est. C'est le cas de $\boldsymbol{\eta}$, et comme l'ensemble des suites admissibles est visiblement stable par le décalage et fermé, toute suite de $X_{\boldsymbol{\eta}}$ est admissible. Or, il se trouve que cette condition nécessaire est également suffisante : une suite ξ à valeurs dans $\{0, 1\}$ appartient à $X_{\boldsymbol{\eta}}$ si et seulement si elle est admissible.

En comptant le nombre de blocs admissibles de longueur ℓ donnée, on peut en déduire que l'entropie topologique du flot des sans-carré est donnée par

$$h_{\text{top}}(X_{\boldsymbol{\eta}}, S) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}. \tag{8}$$

De plus, $\boldsymbol{\eta}$ est générique pour une mesure de probabilité ν_M qui peut être caractérisée par la formule suivante : pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$, si l'on note

$$C_A := \Big\{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n \in A,\ x(n) = 1\Big\},$$

alors

$$\nu_M(C_A) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{t(A,p^2)}{p^2}\right). \tag{9}$$

On appelle ν_M la *mesure de Mirsky*, car elle apparaît implicitement dans un travail de Mirsky de 1949 [16] (en fait dans un cadre un peu plus général où les carrés des nombres premiers sont remplacés par les puissances r-ièmes de nombres premiers pour un certain $r \geq 2$).

Enfin, Sarnak identifie un *facteur* particulier du système mesuré $(X_{\boldsymbol{\eta}}, S, \nu_M)$: considérons le groupe compact $\Omega := \prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, sur lequel agit la translation T définie par l'addition de $(1, 1, \ldots)$. Alors (Ω, T) est un système de Kronecker, qui de plus est *minimal* : toutes les orbites sont denses dans Ω (ce qui découle du fait que les p^2 sont premiers entre eux, en utilisant le théorème chinois). La mesure de Haar (normalisée) sur Ω, que l'on note $\mathbb{P}$, est l'unique mesure de probabilité sur Ω invariante par T (on dit que (Ω, T) est *uniquement ergodique*). Remarquons que cette mesure est particulièrement simple à décrire. Écrivons les points de Ω sous la forme $\omega = (\omega_p)_{p\in\mathscr{P}}$, avec $\omega_p \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Alors sous $\mathbb{P}$, les coordonnées ω_p sont indépendantes et uniformément distribuées dans chaque $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Sarnak annonce que le système mesuré $(\Omega, T, \mathbb{P})$ est un *facteur mesurable* de $(X_{\boldsymbol{\eta}}, S, \nu_M)$, ce qui signifie qu'il existe une application mesurable ψ, définie sur une partie de $X_{\boldsymbol{\eta}}$ de mesure 1 et à valeurs dans Ω, la mesure image de ν_M par ψ étant $\psi_*(\nu_M) = \mathbb{P}$, et telle que $T \circ \psi = \psi \circ S$. Autrement dit, on « voit » le système de Kronecker $(\Omega, T, \mathbb{P})$ dans le système symbolique $(X_{\boldsymbol{\eta}}, S, \nu_M)$ en observant $\psi(x)$.

Quelque temps après la parution des notes de Sarnak, Cellarosi et Sinai [7] sont parvenus à montrer qu'en fait, les deux systèmes mesurés $(\Omega, T, \mathbb{P})$ et $(X_{\boldsymbol{\eta}}, S, \nu_M)$ sont même *isomorphes*, c'est-à-dire que l'on peut construire un ψ comme ci-dessus qui soit de plus inversible sur une partie de Ω de mesure 1. Ainsi les propriétés « mesurables » du flot des sans-carré sont exactement celles du système de Kronecker $(\Omega, T, \mathbb{P})$. Leur méthode est basée sur l'analyse spectrale du système $(X_{\boldsymbol{\eta}}, S, \nu_M)$: en utilisant notamment les résultats de Mirsky [16], on montre que l'espace $L^2(\nu_M)$ admet une base hilbertienne de vecteurs propres pour l'opérateur de Koopman $U_S : f \mapsto f \circ S$. (On dit alors que le système a *spectre discret*.) De plus, les valeurs propres sont précisément les $e^{i2\pi j/p^2}$, $p \in \mathscr{P}$, $0 \leq j < p^2$. Or ces propriétés spectrales sont partagées par $(\Omega, T, \mathbb{P})$, et il suffit alors d' invoquer un fameux théorème dû à von Neumann : si deux systèmes ergodiques à spectre discret ont le même spectre, alors ils sont mesurablement isomorphes [12].

Il existe une méthode plus directe pour prouver l'isomorphisme entre $(\Omega, T, \mathbb{P})$ et $(X_{\boldsymbol{\eta}}, S, \nu_M)$, qui de plus fournit explicitement un isomorphisme,

une interprétation naturelle de la mesure de Mirsky, et des preuves dynamiques des propriétés du flot des sans-carré annoncées par Sarnak. Elle est exposée dans [4] dans un cadre plus général, où les carrés des nombres premiers peuvent être remplacés par une famille $\mathscr{B} = \{b_k : k \geq 1\}$ d'entiers deux-à-deux premiers entre eux et satisfaisant $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{b_k} < \infty$. Un entier qui n'est divisible par aucun des éléments de $\mathscr{B}$ est dit *$\mathscr{B}$-libre*, et tous les résultats exposés ci-dessus se généralisent au cas où la suite $\boldsymbol{\eta}$ est remplacée par la suite $\boldsymbol{\eta}_{\mathscr{B}}$, indicatrice des entiers $\mathscr{B}$-libres. On se contentera cependant de rester dans le cadre des entiers sans facteur carré pour exposer rapidement les grandes lignes de l'argument.

On commence par remarquer que la suite $\boldsymbol{\eta}$ elle-même peut être observée le long d'une orbite du système de Kronecker (Ω, T) : en effet, en partant du point $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots) \in \Omega$, et en considérant la fonction $f : \Omega \to \{0, 1\}$ définie par

$$f(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p \in \mathscr{P} : \omega_p = 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on vérifie que pour tout $n \geq 0$, $\boldsymbol{\eta}(n) = f(T^n \mathbf{0})$. (Notons toutefois que $\boldsymbol{\eta}$ n'est pas *produite* par (Ω, T) au sens défini précédemment, car la fonction f utilisée ici n'est pas continue.) De manière équivalente, on peut aussi écrire $\boldsymbol{\eta} = \varphi(\mathbf{0})$, en définissant la fonction mesurable $\varphi : \Omega \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par

$$\varphi(\omega) := \big(f(T^n \omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Par construction, on a évidemment $\varphi \circ T = S \circ \varphi$. L'image $\varphi_*(\mathbb{P})$ de la mesure de Haar sur Ω, qui est l'unique mesure de probabilité T-invariante, est alors S-invariante sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, et on peut facilement calculer ses valeurs sur les cylindres de la forme C_A : on constate qu'elles coïncident avec les expressions données en (9), et ainsi $\varphi_*(\mathbb{P})$ n'est autre que la mesure de Mirsky ν_M. La généricité de $\boldsymbol{\eta}$ pour ν_M se déduit ensuite du fait que, dans (Ω, T), $\mathbf{0}$ est générique pour $\mathbb{P}$ (conséquence de l'unique ergodicité). Le passage à la généricité de $\boldsymbol{\eta}$ serait direct si φ était continue. Mais φ n'est pas continue, et on a besoin d'un argument d'approximation qui utilise la convergence de la série de terme général $\frac{1}{p^2}$ pour conclure. Enfin, la caractérisation du sous-shift $X_{\boldsymbol{\eta}}$ s'obtient par le raisonnement suivant. On sait déjà que toute suite de $X_{\boldsymbol{\eta}}$ est admissible. À partir de (9), on montre que le support de ν_M est précisément constitué de l'ensemble des suites admissibles. Mais comme $\boldsymbol{\eta}$ est générique pour ν_M, le support de ν_M doit être contenu dans $X_{\boldsymbol{\eta}}$.

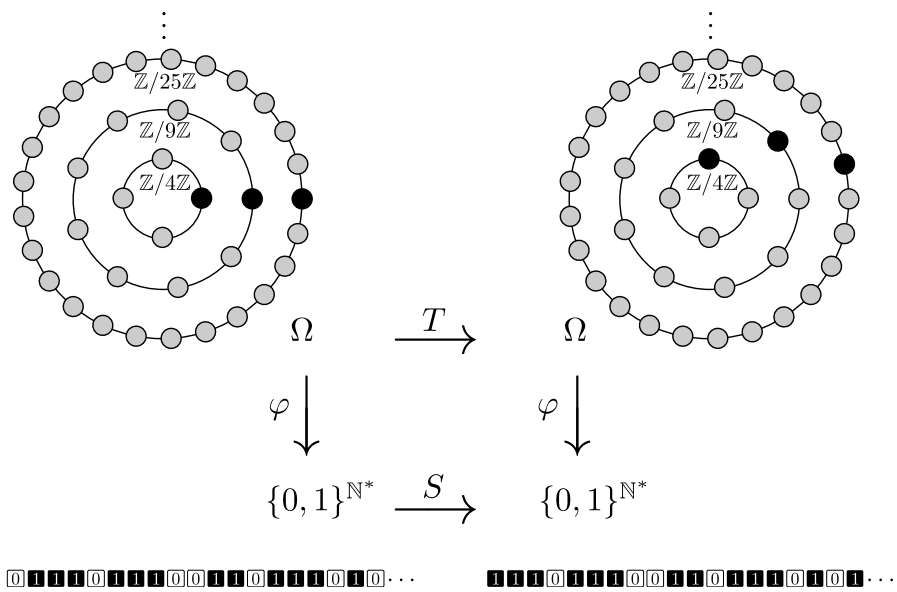

FIGURE 2 – La suite $\boldsymbol{\eta}$ produite par le système (Ω, T)

2.3 Le flot de Möbius, et une interprétation de la conjecture de Chowla

On a donc une bonne compréhension du flot des sans-carré, ce qui fournit déjà une connaissance partielle sur le flot de Möbius $(X_{\boldsymbol{\mu}}, S)$. En effet, considérons l'application π qui à une suite $\xi \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ fait correspondre la suite $\big(\xi^2(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, de sorte que $\boldsymbol{\eta} = \pi(\boldsymbol{\mu})$. Alors π est continue sur $X_{\boldsymbol{\mu}}$, $\pi \circ S = S \circ \pi$, et $\pi(X_{\boldsymbol{\mu}}) = X_{\boldsymbol{\eta}}$. On dit que $(X_{\boldsymbol{\eta}}, S)$ est un *facteur topologique* de $(X_{\boldsymbol{\mu}}, S)$, et le flot de Möbius en hérite un certain nombre de propriétés. Notamment, l'entropie topologique du flot de Möbius vaut au moins celle du flot des sans-carré, donc elle est strictement positive. C'est la moindre des choses, sinon $\boldsymbol{\mu}$ serait elle-même une suite déterministe, ce qui contredirait la conjecture de Sarnak. En effet, $\boldsymbol{\mu}$ ne peut pas être orthogonale à elle-même, car par généricité de $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^2$ pour la mesure ν_M, et par application de (9) lorsque $A = \{1\}$, on obtient la formule suivante qui donne la densité des termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{1\le n\le N} \boldsymbol{\mu}^2(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} \prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

On sait aussi que toute mesure de probabilité ν pour laquelle $\boldsymbol{\mu}$ est

quasi-générique doit vérifier $\pi_*(\nu) = \nu_M$, par généricité de $\boldsymbol{\eta}$ pour ν_M. Malheureusement, ce que l'on sait du flot de Möbius s'arrête essentiellement à ce que le flot des sans-carré lui apporte, et aller plus loin nécessite de retourner dans le domaine des conjectures.

Parmi toutes les mesures de probabilité invariantes par le décalage sur $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ et qui se projettent sur ν_M, Sarnak considère *l'extension complètement aléatoire de* ν_M. C'est la loi d'une suite aléatoire $\xi \in \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ obtenue de la façon suivante : on tire d'abord une suite de 0 et de 1 suivant ν_M, qui fixe la place des symboles 0 dans ξ, puis on détermine le signe de chaque position restante par une suite de tirages indépendants à pile ou face (un tirage par position). Plus formellement, on définit l'opération $\odot$, « produit terme à terme » de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$, et on munit $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ de la mesure de probabilité produit $\beta := (1/2,1/2)^{\otimes\mathbb{N}}$. Alors l'extension complètement aléatoire de ν_M est la mesure image de $\nu_M \otimes \beta$ par l'application $(\eta,\rho) \mapsto \eta \odot \rho$. Dans la suite, on l'appellera la *mesure de Sarnak*, et on la notera ν_S.

Conjecture 2.1 (Conjecture de Sarnak-Chowla). *La suite $\boldsymbol{\mu}$ est générique pour la mesure de Sarnak ν_S, extension complètement aléatoire de ν_M.*

En fait, Sarnak explique que la conjecture ci-dessus est équivalente à la conjecture de Chowla. On trouve dans [4, théorème 6.1] une preuve élémentaire de cette équivalence, valable dans un cadre plus général que le contexte de la fonction de Möbius. L'essentiel de l'argument se résume ainsi : prouver la généricité de $\boldsymbol{\mu}$ pour la mesure de Sarnak revient à vérifier la convergence

$$\frac{1}{N}\sum_{1\le n\le N} f(S^n\boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int f\,d\nu_S \tag{10}$$

pour toute fonction $f : \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ qui est un polynôme en les variables $\xi(j)$, $j \in \mathbb{N}$ (par densité des polynômes dans l'espace des fonctions continues). Or, (6) n'est rien d'autre que (10) exprimée pour une fonction f qui est un monôme de la forme $f(\xi) = \xi(0)^{i_0}\xi(a_1)^{i_1}\cdots\xi(a_s)^{i_s}$, dans lequel les exposants $i_0,\dots,i_s$ ne sont pas tous pairs. Par ailleurs, le cas d'une fonction monôme pour laquelle les exposants sont tous pairs découle de la généricité de $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^2$ pour la mesure de Mirsky.

3 Le point de vue ergodique, et l'utilisation de la théorie des couplages

Le but de cette section est d'apporter l'éclairage de la théorie ergodique, en particulier de la théorie des couplages de systèmes dynamiques mesurés initiée par Furstenberg [9], sur les différentes conjectures exposées ci-dessus. En particulier, on va donner les idées principales d'un argument ergodique, déjà esquissé dans les notes de Sarnak [19], prouvant que si la conjecture de Chowla est vraie, alors celle de Sarnak est vraie également (voir aussi [1, section 4.3]).

3.1 Pourquoi Chowla implique Sarnak

On suppose donc ici la validité de la conjecture de Chowla, que l'on interprète dynamiquement par la généricité de la suite $\boldsymbol{\mu}$ pour la mesure de Sarnak ν_S. Considérons un système dynamique (X, T) d'entropie topologique nulle, une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ continue, et un point $x \in X$. Il s'agit d'établir la convergence (4). Pour cela, on écrit

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} f(T^n x)\boldsymbol{\mu}(n) = \int_{X \times \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}} f \otimes F_0 \, d\sigma_N,$$

où σ_N est la mesure de probabilité empirique

$$\sigma_N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \delta_{(T^n x, S^n \boldsymbol{\mu})},$$

et F_0 la fonction qui à une suite associe son terme d'indice 0. Par compacité de l'ensemble des mesures de probabilité sur $X \times \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie de la convergence faible, il suffit de vérifier que si, pour une suite d'entiers (N_k) tendant vers l'infini, σ_{N_k} converge faiblement vers une mesure de probabilité ν, alors ν vérifie $\int_{X \times \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}} f \otimes F_0 \, d\nu = 0$. Supposons donc que le point $(x, \boldsymbol{\mu})$ est quasi-générique, le long de la suite (N_k), pour une mesure de probabilité ν. La transformation sous-jacente est ici $T \times S$, et donc ν est $T \times S$-invariante. Quitte à remplacer si nécessaire la suite (N_k) par une sous-suite, on peut supposer également que le point x lui-même est quasi-générique, le long de la même suite (N_k), pour une mesure de probabilité ν_x sur X, qui est T-invariante. En rappelant que $\boldsymbol{\mu}$ est supposée générique pour ν_S, on obtient donc que ν est une mesure de probabilité invariante sous l'action produit $T \times S$ sur $X \times \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$, dont les marginales respectives sur X et $\{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sont ν_x et ν_S. On dit que ν est un *couplage* de ν_x et ν_S.

Par ailleurs, rappelons que ν_S est la mesure image de la mesure produit $\nu_M \otimes \beta$ par l'opération produit terme à terme de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$. En formant ce que l'on appelle un *couplage relativement indépendant* au-dessus de $\left(\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}, S, \nu_S\right)$ (voir par exemple [10], p. 126), on obtient un couplage γ des deux systèmes mesurés

$$(X, T, \nu_x) \text{ et } \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}}, S \times S, \nu_M \otimes \beta\right),$$

qui vérifie

$$\int_{X \times \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}} f \otimes F_0 \, d\nu = \int_{X \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}}} f(y)\, \eta(0)\, \xi(0)\, d\gamma(y, \eta, \xi). \quad (11)$$

Appelons ν' la marginale de γ sur $X \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$: ν' est elle-même un couplage de (X, T, ν_x) et $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, S, \nu_M\right)$, et la mesure de probabilité γ peut être vue comme un couplage des deux systèmes

$$\left(X \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, T \times S, \nu'\right) \text{ et } \left(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, S, \beta\right). \quad (12)$$

L'argument se termine en établissant que γ est nécessairement la mesure produit $\nu' \otimes \beta$: alors l'intégrale à droite de (11) se factorise par $\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \xi(0)\, d\beta$, qui vaut 0.

Il reste à expliquer pourquoi le couplage γ est le produit de ses deux marginales. Cela découle du fait que les deux systèmes mesurés présentés en (12) sont si différents qu'il n'existe pas d'autre couplage possible que le couplage produit : on dit qu'ils sont *disjoints*. La notion de disjonction a été introduite par Furstenberg [9], qui donne les premiers exemples de classes de systèmes disjoints parmi lesquels se trouve celui utilisé ici.

On a besoin pour l'exposer d'utiliser la notion d'*entropie de Kolmogorov-Sinai*, ou *entropie métrique* qui est l'analogue pour les systèmes dynamiques mesurés de l'entropie topologique pour les systèmes dynamiques topologiques (historiquement, elle fut d'ailleurs introduite par Kolmogorov en 1959 six ans avant l'entropie topologique par Adler, Konheim et McAndrew). À nouveau, on renvoie le lecteur à un ouvrage de référence (par exemple [5]) pour la définition générale de l'entropie de Kolmogorov-Sinai, et on se limitera ici à ce dont on a besoin dans ce contexte.

D'une part, dans le cadre d'une transformation continue sur un espace métrique compact, l'entropie métrique associée à une mesure de probabilité invariante est toujours majorée par l'entropie topologique. (En fait, l'entropie topologique est même le supremum des entropies métriques sur toutes les mesures de probabilité invariantes : c'est le *principe variationnel*. Voir

par exemple [18, théorème 3.10].) Puisque (X, T) est supposé d'entropie topologique nulle, le système (X, T, ν_x) est donc d'entropie métrique nulle. De même, l'entropie du système mesuré $\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, S, \nu_M\big)$ coïncide, par isomorphisme, avec celle de l'addition de $(1, 1, \ldots)$ sur $\prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Haar, qui est nulle également (rappelons qu'un système de Kronecker est d'entropie topologique nulle).

D'autre part, l'entropie métrique d'un système obtenu comme un couplage de deux autres systèmes est toujours majorée par la somme des entropies métriques des deux systèmes couplés. Ici, on en déduit que le système $\big(X \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, T \times S, \nu'\big)$ est d'entropie métrique nulle.

Enfin, rappelons que, sous β, les termes successifs d'une suite aléatoire de -1 et de 1 sont identiquement distribués et indépendents. On dit que le système dynamique $\big(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, S, \beta\big)$ est un *schéma de Bernoulli*. Les schémas de Bernoulli sont toujours d'entropie strictement positive et, dans l'univers des systèmes mesurés, ils sont aussi loin que possible des systèmes d'entropie nulle. Ainsi, Furstenberg prouve qu'un schéma de Bernoulli est toujours disjoint d'un système d'entropie métrique nulle [9, théorème 1.2].

3.2 Chowla à la limite

En se basant sur l'interprétation dynamique de la conjecture de Chowla donnée en 2.3, et par des arguments de couplages très similaires à ceux exposés dans la section précédente, on peut aussi apporter un élément en faveur de cette conjecture. Pour tout entier $\ell \geq 1$, considérons l'approximation $\boldsymbol{\mu}_\ell$ de la fonction de Möbius, obtenue en ne comptant que les nombres premiers jusqu'à ℓ :

$$\boldsymbol{\mu}_\ell(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ possède un facteur carré,} \\ (-1)^{m_\ell(n)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $m_\ell(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n inférieurs ou égaux à ℓ. Par les mêmes techniques que celles exposées dans [4] pour établir la généricité de $\boldsymbol{\eta}$, on peut montrer que $\boldsymbol{\mu}_\ell$ est générique pour une certaine mesure de probabilité ν_ℓ, invariante par le décalage sur $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$. On peut aussi écrire $\boldsymbol{\mu}_\ell = \boldsymbol{\eta} \odot \pi_\ell$, où $\pi_\ell(n) := (-1)^{m_\ell(n)}$ (pour les entiers n divisibles par un carré, $m_\ell(n)$ est ici compté sans multiplicité). De même, on prouve aussi que π_ℓ est générique pour une mesure de probabilité ρ_ℓ, invariante par le décalage sur $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$. Il s'en suit, comme en 3.1, que ν_ℓ est la mesure image d'un couplage γ_ℓ de ν_M et ρ_ℓ par l'application produit terme à terme. Or, d'après [4, théorème 6.4], on a la convergence de ρ_ℓ vers β quand $\ell \to \infty$. Ainsi, toute

mesure de la forme $\lim_{k\to\infty} \nu_{\ell_k}$ pour une suite d'entiers ℓ_k tendant vers l'infini doit provenir d' un couplage de ν_M et de β. Mais par disjonction, un tel couplage ne peut être que la mesure produit, d'où l'on conclut que la suite de mesures de probabilités (ν_ℓ) converge vers la mesure de Sarnak.

3.3 Couplages de puissances de T et conjecture de Sarnak

On présente enfin une autre application de la théorie des couplages, utile pour prouver la validité de la conjecture de Sarnak dans certains systèmes dynamiques. Cette méthode fut initiée par Bourgain, Sarnak et Ziegler [6], et reprise dans de multiples autres travaux sur la conjecture de Sarnak. Le point de départ est un critère d'orthogonalité à toutes les fonctions multiplicatives bornées [6, Théorème 2], dont une version avait déjà été obtenue par Kátai en 1986 [14]. On en donne ici une reformulation.

Critère de Kátai-Bourgain-Sarnak-Ziegler. *Si ξ est une suite bornée de nombres complexes qui satisfait*

$$\limsup_{\substack{p_1,p_2\to\infty \\ p_1,p_2\in\mathscr{P},\ p_1\neq p_2}} \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} \xi(p_1 n)\, \overline{\xi(p_2 n)} \right| = 0, \tag{13}$$

et si $\boldsymbol{m}$ est une fonction multiplicative bornée, alors ξ et $\boldsymbol{m}$ sont orthogonales, i.e. on a

$$\frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} \xi(n)\, \boldsymbol{m}(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Si l'on veut appliquer ce critère pour prouver la conjecture de Sarnak dans un système donné (X,T), donc pour une suite ξ de la forme $\xi(n) = f(T^n x)$, on est amené à contrôler

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} f(T^{p_1 n}x)\, \overline{f}(T^{p_2 n}x) \right|$$

pour deux nombres premiers distincts et assez grands p_1 et p_2.

Par compacité, il suffit de voir ce qui se passe pour une suite (N_k) tendant vers l'infini, le long de laquelle le couple (x,x) est quasi-générique sous l'action de $T^{p_1} \times T^{p_2}$ pour une mesure de probabilité γ sur $X \times X$. On a alors

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{1\leq n\leq N_k} f(T^{p_1 n}x)\, \overline{f}(T^{p_2 n}x) = \int_{X\times X} f \otimes \overline{f}\, d\gamma. \tag{14}$$

Maintenant, supposons par exemple que le système (X, T) est uniquement ergodique, et soit ν l'unique mesure de probabilité invariante par T. Alors x est automatiquement générique pour ν sous l'action de T. Si de plus on sait que le système dynamique mesuré (X, T, ν) est *totalement ergodique* (ce qui en gros signifie que l'on n'observe aucun phénomène périodique dans ce système), on peut en déduire que pour chaque $k \neq 0$, ν est aussi la seule mesure de probabilité invariante par T^k. Alors x est aussi générique pour ν sous l'action de chaque T^k, $k \neq 0$, et donc γ est un couplage de (X, T^{p_1}, ν) et (X, T^{p_2}, ν).

À ce stade, si l'on arrive à montrer que ces deux systèmes sont disjoints, alors γ est la mesure produit et la limite dans (14) est $\left|\int_X f\, d\nu\right|^2$. Or, en ce qui concerne l'orthogonalité à la fonction de Möbius, on peut toujours grâce à (1) retirer une constante à la fonction f, donc remplacer f par $f - \left(\int_X f\, d\nu\right)$. Cela revient à supposer que $\int_X f\, d\nu = 0$, et grâce au critère de Bourgain-Sarnak-Ziegler on obtient (4). C'est par exemple la méthode appliquée dans [2] pour montrer la conjecture de Sarnak dans une classe de systèmes symboliques dits *de rang un*, où la disjonction des puissances de T s'obtient de manière spectrale.

Mais la méthode peut aussi fonctionner quand les puissances de T ne sont pas disjointes, et même dans certains cas où elles sont toutes isomorphes ! En effet, il arrive que l'on connaisse suffisamment les façons de coupler les puissances T^{p_1} et T^{p_2} pour pouvoir contrôler l'intégrale $\int_{X\times X} f \otimes \overline{f}\, d\gamma$. C'est ce qui est fait dans [3], pour la classe des sytèmes dits *à spectre quasi-discret* (généralisation des systèmes à spectre discret).

L'utilisation du critère de Bourgain-Sarnak-Ziegler connaît toutefois une limitation inhérente à la puissance du résultat qu'il permet de démontrer : si la méthode s'applique à un système donné, elle permet d'obtenir l'orthogonalité d'une suite produite par le système non seulement à la fonction de Möbius, mais également à toute fonction multiplicative $\boldsymbol{m}$ pour laquelle

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \boldsymbol{m}(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Or, pour tout entier $\ell \geq 2$ il existe une fonction multiplicative non nulle, de période ℓ, et qui satisfait la propriété ci-dessus : pour $\ell = 2$, on peut prendre $\boldsymbol{m}(n) := (-1)^{n+1}$, et pour $\ell > 2$ on peut prendre pour $\boldsymbol{m}$ un caractère de Dirichlet non principal. Le système auquel on applique le critère ne peut donc pas produire une telle suite. On en déduit alors que la condition demandée par le critère n'est jamais satisfaite pour un système capable de produire une suite périodique non constante.

Remerciements

L'auteur tient à remercier El Houcein el Abdalaoui, Élise Janvresse, Mariusz Lemańczyk, Christian Mauduit et un relecteur anonyme pour leurs conseils dans la rédaction de cet article.

Références

[1] H. el Abdalaoui, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk et T. de la Rue – « The Chowla and the Sarnak conjectures from ergodic theory point of view », hal-01070531, 2015.

[2] H. el Abdalaoui, M. Lemańczyk et T. de la Rue – « On spectral disjointness of powers for rank-one transformations and Möbius orthogonality », *J. Funct. Anal.* **266** (2014), no. 1, p. 284–317.

[3] — , « Automorphisms with quasi-discrete spectrum, multiplicative functions and average orthogonality along short intervals », hal-01176039, 2015.

[4] — , « A dynamical point of view on the set of $\mathcal{B}$-free integers », *International Mathematics Research Notices* **2015** (2015), no. 16, p. 7258–7286.

[5] P. Billingsley – *Ergodic theory and information*, Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1978, Reprint of the 1965 original.

[6] J. Bourgain, P. Sarnak et T. Ziegler – « Disjointness of Möbius from horocycle flows », From Fourier analysis and number theory to Radon transforms and geometry (Springer, éd.), vol. 28, New-York, 2013, p. 67–83.

[7] F. Cellarosi et Y. G. Sinai – « Ergodic properties of square-free numbers », *J. Eur. Math. Soc.* **15** (2013), p. 1343–1374.

[8] H. Davenport – « On some infinite series involving arithmetical functions (ii) », *Q. J. Math* **8** (1937), p. 313–320.

[9] H. Furstenberg – « Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation », *Math. Systems Theory* **1** (1967), p. 1–49.

[10] E. Glasner – *Ergodic theory via joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 101, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[11] B. Green et T. Tao – « The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences », *Ann. of Math. (2)* **175** (2012), no. 2, p. 541–566.

[12] P. R. Halmos et J. von Neumann – « Operator methods in classical mechanics. II », *Ann. of Math. (2)* **43** (1942), p. 332–350.

[13] H. Iwaniec et E. Kowalski – *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[14] I. Kátai – « A remark on a theorem of H. Daboussi », *Acta Math. Hungar.* **47** (1986), no. 1-2, p. 223–225.

[15] D. Lind et B. Marcus – *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[16] L. Mirsky – « Arithmetical pattern problems relating to divisibility by rth powers », *Proc. London Math. Soc. (2)* **50** (1949), p. 497–508.

[17] D. J. Newman – « Simple analytic proof of the prime number theorem », *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), no. 9, p. 693–696.

[18] K. Petersen – *Ergodic theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[19] P. Sarnak – « Three lectures on the Möbius function, randomness and dynamics », `http://publications.ias.edu/sarnak/`, 2010.

[20] — , « Mobius randomness and dynamics », *Not. S. Afr. Math. Soc.* **43** (2012), no. 2, p. 89–97.

[21] E. C. Titchmarsh – *The theory of the Riemann zeta-function*, second éd., The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[22] P. Walters – *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, New York, 1982.