



HAL
open science

CHRONOLOGIES DANS L'UNIVERS

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. CHRONOLOGIES DANS L'UNIVERS. 2021. hal-03143321

HAL Id: hal-03143321

<https://hal.science/hal-03143321>

Preprint submitted on 16 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CHRONOLOGIES DANS L'UNIVERS

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. On propose une description locale de la notion de temps dans l'univers. Un observateur O , en chaque temps t ne peut observer qu'une partie d'un espace de dimension 3. Pour décrire cet espace, on définit la notion d'horloge locale à l'aide des champs chronologiques. L'univers à l'instant t est muni d'une métrique riemannienne, l'évolution de cette métrique riemannienne est décrite à l'origine par un flot de Ricci dont on connaît pour chaque temps t le tenseur de Ricci associé déduit de l'équation relativiste d'Einstein. On peut en déduire, sous certaines hypothèses, la conservation de l'énergie le long du flot temporel.

A local description of the notion of time in the universe is proposed. An observer O , in each time t can observe only part of a space of dimension 3. To describe this space, we define the notion of local clock using the chronological fields. The universe at the moment t is equipped with a Riemannian metric, the evolution of this Riemannian metric is originally described by a flow of Ricci which is known for each time t , the associated Ricci tensor is deduced from the relativistic equation. Under certain hypothesis, we can deduce the conservation of energy along the temporal flow.

1. MULTIVERS ET CHAMPS STABLES

Un univers \mathcal{W} est une variété connexe de dimension 4. Un événement de cet univers est un point et un événement générique est une particule. On supposera que le sous-ensemble de l'univers, formé de tous les événements atteints par cette particule est une courbe, de classe au moins C^1 par morceaux, appelée ligne d'univers.

Definition 1. *Soit X un champ réel de \mathcal{W} et \mathcal{V} une sous-variété, on dit que X est stable sur \mathcal{V} si*

$$X(w) \in \tau_w \mathcal{V}, \forall w \in \mathcal{V}$$

où

$$\tau_w \mathcal{V} = T_w \text{ in } (T_w \mathcal{V}), \forall w \in \mathcal{V}$$

et in est l'inclusion de \mathcal{V} dans \mathcal{W} .

Les particules qui suivent le flot de X sont les particules pour lesquelles X est stable sur les parties de classe C^1 des lignes d'univers.

Definition 2. *Un multivers \mathcal{W} est une variété de dimension 4 munie d'une famille \mathcal{F} de sous-variétés fermées deux à deux disjointes, de dimension ≤ 3 . Les sous-variétés de \mathcal{F} sont les singularités du multivers \mathcal{W} .*

Date: 16/02/2021.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 83C40, 53C20, 53C21, 53C22, 83C05.

Key words and phrases. Champ chronologique, gradient, flot temporel, flot de Ricci, multivers, transversalité de Thom, métrique Lorentzienne, métrique Riemannienne.

Chaque composante connexe de

$$\mathcal{W} \setminus \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{F}} \mathcal{V}$$

est une sous-variété ouverte de dimension 4 qui représente un univers du multivers \mathcal{W} . Les sous-variétés de \mathcal{F} de dimension ≤ 2 , contenues dans un univers donné, sont les singularités de cet univers. Dans ce qui suit, on munit \mathcal{W} d'une métrique lorentzienne g .

Definition 3. *Les champs locaux X sur $W \subset \mathcal{W}$ tels que*

$$g(X, X) = 0$$

définissent les champs isotropes de la métrique lorentzienne g ou cône de lumière associé, les champs espaces vérifient $g(X, X) > 0$ et les champs chronologiques $g(X, X) < 0$.

2. CHRONOLOGIE LE LONG D'UN CHAMP GRADIENT

Un champ gradient local T est un champ réel défini sur un ouvert connexe W de \mathcal{W} pour lequel il existe une C^∞ -application

$$\tau : W \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifiant } d\tau(X) = g(T, X)$$

pour tout champ local X défini sur $W \subset \mathcal{W}$. L'application

$$\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$$

est une chronologie locale associée au champ T et T est le champ gradient associé à la chronologie τ ,

$$T = \text{grad } \tau.$$

Remark 1. *Pour deux chronologies locales σ et τ associées au champ T on a*

$$\sigma = \tau + K$$

où K est une constante.

Si $t \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de τ

$$W_t = \{w \in W, \tau(w) = t\} = \tau^{-1}(\{t\})$$

est une sous-variété de dimension 3 de W qui est une représentation locale de l'univers \mathcal{W} au temps t le long du champ gradient T . Si W_t est une variété fermée, elle est décrite par les 8 géométries de Thurston [8]. Une chronologie sur un multivers le long d'un champ gradient T est une chronologie sur \mathcal{W} associée au champ T qui a la propriété de transversalité de Thom [7] sur ses singularités, à savoir

$$\mathcal{W}_t \pitchfork V \tag{2.1}$$

pour toutes les valeurs régulières t de la chronologie et toutes les singularités V du multivers \mathcal{W} . Une compactification d'un univers \mathcal{W} est la donnée d'une variété fermée \mathfrak{W} de dimension 4 contenant \mathcal{W} pour laquelle

$$\mathcal{W} = \mathfrak{W} \setminus \sum_{V \in \mathcal{F}} V$$

où \mathcal{F} est une famille de variétés de dimension ≤ 2 deux à deux disjointes qui sont les singularités de l'univers \mathcal{W} . Une chronologie sur le multivers le long d'un champ gradient T est une chronologie sur \mathcal{W} associée au champ T qui a la propriété de transversalité de Thom définie en 2.1 sur ses singularités.

Theorem 1. *Si un multivers \mathcal{W} est muni d'une chronologie alors les singularités de l'univers au temps régulier t sont des sous-variétés de \mathcal{W}_t de dimension ≤ 2 . Les singularités d'un univers au temps t sont des lignes d'univers ou des événements de cet univers \mathcal{W}_t .*

Proof. C'est le théorème de transversalité de Thom. \square

Les singularités de dimension 3 sont appelés, par abus de langage, les bords des univers ou recollement entre deux univers. Au temps régulier t les bords d'un univers sont représentés par des sous-variétés de dimension 2 de \mathcal{W}_t dites singularités sphériques ou toriques de genre \mathfrak{g} . En particulier, si au temps régulier t il existe une singularité sphérique ou torique \mathfrak{T} , la représentation dans chaque composante connexe $\mathcal{W}_t \setminus \mathfrak{T}$ est une représentation au temps régulier t de deux univers distincts.

Definition 4. *Une horloge sur un multivers \mathcal{W} est une chronologie*

$$\tau : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$$

pour laquelle le champ gradient T associé est un champ chronologique [2].

Lemma 1. *Si τ est une horloge pour la métrique lorentzienne g alors au temps t la métrique induite par g sur \mathcal{W}_t est riemannienne.*

Pour une horloge, toutes les valeurs de t prises par la chronologie associée sont des valeurs régulières. Pour toutes les valeurs de t appartenant à l'image de la chronologie, \mathcal{W}_t est une sous-variété de dimension 3 de \mathcal{W} .

Definition 5. *Deux horloges sur un multivers \mathcal{W} , de chronologies τ et σ , sont synchronisées au temps t si les sous-variétés $\tau^{-1}(t)$ et $\sigma^{-1}(t)$ sont en position générale*

$$\tau^{-1}(t) \pitchfork \sigma^{-1}(t),$$

les horloges sont synchronisées si elles sont synchronisées pour tous les temps t .

Une particule ponctuelle au temps t pour 2 horloges synchronisées est localisable sur une surface d'univers qui est une composante connexe de $\bigcap_{i=1}^2 \tau_i^{-1}(t)$, pour 3 horloges synchronisées elle est localisable sur un ligne d'univers qui est une composante connexe de $\bigcap_{i=1}^3 \tau_i^{-1}(t)$, pour 4 horloges synchronisées elle est localisable en un événement qui est une composante connexe de la suite d'événements $\bigcap_{i=1}^4 \tau_i^{-1}(t)$ de l'univers \mathcal{W} où $\{\tau_i : i = 1, 2, 3, 4\}$ sont les chronologies associées aux horloges.

3. EQUATION D'ÉVOLUTION LOCALE DÉFINIE PAR UNE HORLOGE

On rappelle les résultats sur la transversalité aux bords et le flot défini par une horloge.

Lemma 2. *Si l'univers \mathcal{W} est un univers à bord formé de l'union disjointe de deux variétés $\partial_0 \mathcal{W}$ et $\partial_1 \mathcal{W}$*

$$\partial \mathcal{W} = \partial_0 \mathcal{W} \cup \partial_1 \mathcal{W}$$

pour lequel il existe un champ C^∞ , noté X , qui entre transversalement en $\partial_0\mathcal{W}$ et sort en $\partial_1\mathcal{W}$ transversalement en temps fini,

$$X \pitchfork \partial_0\mathcal{W}, X \pitchfork \partial_1\mathcal{W}$$

et

$$\sup_{w \in \mathcal{W}} \left\{ |t| : \phi_t(w) \in \text{Int } \mathcal{W} = \overset{\circ}{\mathcal{W}} \right\} < +\infty$$

où ϕ_t est le flot local associé au champ X alors

$$\mathcal{W} \text{ est difféomorphe à } \partial_0\mathcal{W} \times [0, 1]. \quad (3.1)$$

Theorem 2. Pour tout univers fermé \mathcal{W} muni d'une horloge, de chronologie τ , si $[a, b] \subset \text{Im } \tau$ alors

$$\tau^{-1}([a, b]) \text{ est difféomorphe à } \mathcal{W}_a \times [a, b], \mathcal{W}_a = \tau^{-1}(\{a\}).$$

Proof. La preuve est donnée par 3.1, c'est le théorème de Milnor-Morse-Smale. \square

Le théorème d'analyse suivant donne l'existence d'un groupe local de difféomorphismes en chaque événement w de l'univers \mathcal{W} .

Theorem 3. Soit X un champ sur \mathcal{W} alors pour tout événement $w_0 \in \mathcal{W}$ il existe un groupe local de difféomorphismes en w_0 ,

$$\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times W \rightarrow \mathcal{W}, w_0 \in W$$

tel que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t, w) |_{t=0} &= X(w), \forall w \in W \\ \phi &\text{ est unique,} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ϕ est le flot associé au champ X .

Notation 1. L'application

$$t \rightarrow \phi_t(w) = \phi(t, w)$$

est la courbe intégrale de X en w .

Remark 2. Pour un ouvert V d'adhérence compacte, il existe un recouvrement $\{W_\alpha\}$ et une famille de groupes locaux de difféomorphismes

$$\phi_\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\times W_\alpha \rightarrow \mathcal{W}, \quad (3.3)$$

où ε est indépendant du choix de α .

Une particule ponctuelle en w_0 est dans \mathcal{W}_0 avec $\tau(w_0) = 0$ où τ est une chronologie associée à une horloge d'un univers fermé \mathcal{W} . On peut toujours supposer que l'origine des temps est 0 en w_0 , en remplaçant τ par $\tau - \tau(w_0)$. Si la particule ponctuelle suit le flot du champ T associé, du point de vue de la particule l'espace \mathcal{W}_0 est l'espace référent, seule la métrique riemannienne sur cet espace va évoluer. Comment évolue cette métrique, le champ T est chronologique sur un voisinage ouvert de w_0 ,

$$\sigma(w) = g(w)(T(w), T(w)) < 0$$

pour tous les événements w appartenant à ce voisinage, on pose

$$\mathcal{T}(w) = \frac{1}{\sigma(w)} T(w) \quad (3.4)$$

alors

$$g(w)(T(w), \mathcal{T}(w)) = 1$$

si l'univers \mathcal{W} est fermé, il existe un unique groupe local de difféomorphismes 3.2

$$\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times W \rightarrow \mathcal{W}, w \in W$$

tel que

$$\frac{d\phi}{dt}(t, w) |_{t=0} = \mathcal{T}(w), \forall w \in W.$$

On peut écrire que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tau(\phi(t, w)) &= \frac{d}{ds} \tau(\phi(t+s, w)) |_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \tau(\phi(s, w_t)) |_{s=0}, w_t = \phi(t, w) \\ &= d\tau(w) \left(\frac{d\phi}{ds}(s, w_t) |_{s=0} \right) = g(w_t)(T(w_t), \mathcal{T}(w_t)) = 1 \end{aligned}$$

et

$$\tau(\phi(t, w)) = t + \tau(w). \quad (3.5)$$

Remark 3. 1) Une autre écriture de

$$\frac{d\phi}{ds}(t+s, w) |_{s=0} = \mathcal{T}(\phi(t, w)), \forall w \in W \quad (3.6)$$

est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\phi(t, w)) &= \frac{d\phi_t}{ds}(w_s) |_{s=0} = T_{w_s} \phi_t \left(\frac{d}{ds} w_s \right) |_{s=0} \\ &= T_{w_s} \phi_t \left(\frac{d}{ds} \phi(s, w) \right) |_{s=0} = T_w \phi_t (\mathcal{T}(\phi(0, w))) \end{aligned}$$

et de façon plus générale,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\phi(t, w_s)) &= \mathcal{T}(\phi(t+s, w)) = T_w \phi_{t+s} (\mathcal{T}(\phi(0, w))) \\ &= T_{w_s} \phi_s (T_w \phi_t (\mathcal{T}(\phi(0, w)))) \\ &= T_{w_s} \phi_s (\mathcal{T}(\phi(t, w))). \end{aligned} \quad (3.7)$$

2) Si

$$g(w)(T(w), T(w)) = -1, \forall w$$

on dit que le champ chronologique est normé, pour un champ chronologique normé, les champs T et \mathcal{T} sont opposés

$$\mathcal{T}(w) = -T(w), \forall w.$$

Soit $W_t = \mathcal{W}_t \cap W$ alors en utilisant 3.5

$$\phi_t(W_0) \subset W_t, \phi_t(w) = \phi(t, w) \in W_t, \forall w \in W_0$$

la métrique riemannienne g_t sur W_t induit une métrique riemannienne sur W_0 qui est le "pullback de g_t par ϕ_t ", notée

$$\mathbf{g}(t) = \phi_t^* g_t,$$

vérifiant

$$\mathbf{g}(t)(w)(Y(w), Z(w)) = g_t(\phi_t(w))(T_w \phi_t Y(w), T_w \phi_t Z(w))$$

où Y et Z sont des champs locaux au voisinage de l'événement w_0 dans W_0 . Avec cette notation, l'évolution de la métrique s'écrit

$$t \rightarrow \mathbf{g}(t) \text{ avec } \mathbf{g}(0) = g|_{W_0} \text{ et } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[. \quad (3.8)$$

Localement, toute particule ponctuelle suivant le flot du champ chronologique $T = \text{grad}(\tau)$ est décrite par son espace référent à l'origine \mathcal{W}_0 et l'évolution de la métrique riemannienne $\mathbf{g}(t)$ sur \mathcal{W}_0 est donnée par l'image réciproque par ϕ_t , c'est-à-dire ϕ_{-t} , de la métrique g_t qui est la trace sur \mathcal{W}_t de la métrique lorentzienne g . L'évolution peut être décrite de la façon suivante, on se fixe un repère local dans un voisinage de w_0 dans la variété W_0 , noté $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$. Ce repère se transporte par le flot ϕ_t sur W_t

$$\partial_i(w_t) = T_w \phi_t \partial_i(w)$$

ou encore

$$\partial_i(w) = T_{\phi_{-t}(w)} \phi_t \partial_i(\phi_{-t}(w)) \text{ avec } \tau(w) = t$$

et on pose $\partial_0 = \mathcal{T}$ où \mathcal{T} est le champ défini en 3.4, $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ est un repère dans un voisinage de $w_0 \in \mathcal{W}$. Dans ce repère local, on a les résultats suivants,

Lemma 3.

$$\mathbf{g}'_{ij}(t) = \mathcal{L}_{\partial_0} \mathbf{g}_{ij}(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \mathcal{L}_T \mathbf{g}_{ij}(t)$$

où \mathcal{L}_{∂_0} , \mathcal{L}_T sont les dérivées de Lie le long des champs ∂_0 et T avec

$$\sigma(t)(w) = \sigma(w_t)$$

pour tout $w \in W_0$.

Proof. On a, pour tout $w \in W_0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ij}(t)(w) &= g_t(w_t)(\partial_i(w_t), \partial_j(w_t)) \\ &= g(w_t)(\partial_i(w_t), \partial_j(w_t)) = g_{ij}(w_t) \text{ avec } w_t = \phi_t(w), \end{aligned}$$

en utilisant 4.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'_{ij}(t)(w) &= \mathcal{L}_{\partial_0} g_{ij}(w_t) = \frac{d\mathbf{g}_{ij}(t)(T(w_t))}{\sigma(w_t)} \\ \mathbf{g}'_{ij}(t) &= \mathcal{L}_{\partial_0} \mathbf{g}_{ij}(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \mathcal{L}_T \mathbf{g}_{ij}(t) \end{aligned}$$

où

$$\sigma(t)(w) = \sigma(w_t), w \in W_0.$$

□

Si ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g on a

$$\mathcal{L}_{\partial_0} \mathbf{g}_{ij}(t) = g(\partial_i, \nabla_{\partial_0} \partial_j) + g(\nabla_{\partial_0} \partial_i, \partial_j)$$

et si

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_0} \partial_i &= \Gamma_{0i}^k \partial_k \text{ et } \nabla_{\partial_0} \partial_j = \Gamma_{0j}^l \partial_l, \\ \mathbf{g}'_{ij}(t) &= g(\partial_i, \Gamma_{0j}^l \partial_l) + g(\Gamma_{0i}^k \partial_k, \partial_j) = \Gamma_{0j}^l g_{il} + \Gamma_{0i}^k g_{kj} \\ \mathbf{g}'_{ij}(t)(w) &= (\Gamma_{0j}^l g_{il} + \Gamma_{0i}^k g_{lj})(w_t), w_t = \phi(t, w) \\ &= \Gamma_{0j}^l(w_t) \mathbf{g}_{il}(t)(w) + \Gamma_{0i}^l(w_t) \mathbf{g}_{lj}(t)(w), \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}'_{ij}(t)(w) &= \Gamma_{0j}^l(t)(w) \mathfrak{g}_{il}(t)(w) + \Gamma_{0i}^l(t)(w) \mathfrak{g}_{lj}(t)(w), \\ \forall w \in W_0 \text{ avec } \Gamma_{0j}^l(t)(w) &= \Gamma_{0j}^l(\phi(t, w)) \end{aligned}$$

et $g_{i0} = g(\partial_i, \partial_0) = 0$, $\forall i = 1, 2, 3$. Si g est une métrique d'Einstein sur l'univers \mathcal{W} ,

$$g = \lambda R + \mu T$$

où R est le tenseur de Ricci et T est le tenseur énergie-impulsion alors

$$\mathfrak{g}'_{ij}(t) = \lambda(w_t) (\Gamma_{0j}^l R_{il} + \Gamma_{0i}^l R_{lj})(w_t) + \mu(w_t) (\Gamma_{0j}^l T_{il} + \Gamma_{0i}^l T_{lj})(w_t)$$

avec $w_t = \phi(t, w)$, R_{il} est le tenseur de Ricci et Γ_{ij}^l sont les symboles de Christoffel de la connexion ∇ . Le tenseur de Ricci associé à la particule ponctuelle est

$$\mathfrak{R}_{ij}(t)(w) = (\Gamma_{0j}^l R_{il} + \Gamma_{0i}^l R_{lj})(w_t) \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

et le tenseur énergie-impulsion pour cette particule est définie par

$$\mathfrak{T}_{ij}(t)(w) = (\Gamma_{0j}^l T_{il} + \Gamma_{0i}^l T_{lj})(w_t) \quad (3.10)$$

Remark 4. Pour la métrique relativiste d'Einstein, les fonctions λ et μ sont

$$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{2}R - \Lambda} \text{ et } \mu = -\frac{\kappa}{\frac{1}{2}R - \Lambda},$$

$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, R est la courbure scalaire et Λ est la constante cosmologique.

Theorem 4. L'équation d'évolution de la métrique pour une particule ponctuelle qui suit le flot associé à une horloge chronologique est donnée par le flot de Ricci

$$\mathfrak{g}'_{ij}(t) = \lambda(t) \mathfrak{R}_{ij}(t) + \mu(t) \mathfrak{T}_{ij}(t) \quad (3.11)$$

avec $\lambda(t)(w) = \lambda(w_t)$, $\mu(t)(w) = \mu(w_t)$ et $\mathfrak{g}_{ij}(t)$ est le tenseur de la métrique riemannienne associée au tenseur de Ricci $\lambda(t) \mathfrak{R}_{ij}(t) + \mu(t) \mathfrak{T}_{ij}(t)$.

Si le tenseur T est nul alors l'équation d'évolution s'écrit

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \lambda \mathfrak{R} \quad (3.12)$$

si \mathfrak{R} est défini dans le repère local $\{\partial_j\}$, pour déterminer \mathfrak{g} on est amené à résoudre l'équation 3.12 qui est donné par un flot de Ricci [1]. Peut-on reconstruire la métrique de l'univers à partir de l'équation d'évolution 3.12? Si oui, on peut étudier le flot de Ricci pour une variété fermée \mathcal{V} de dimension 3 à partir la métrique construite sur le compactifié de l'univers $\mathbb{R}^1 \times \mathcal{V}$ ou sur l'univers compact $\mathbb{S}^1 \times \mathcal{V}$.

Quand on étudie l'univers à partir du temps défini par une horloge, on a aucune information sur la métrique lorentzienne g , mais on peut regarder l'évolution de la métrique induite au temps à l'origine de l'observation, c'est un moyen pour décrire cette métrique par un observateur temporel O .

Definition 6. Un observateur temporel, au temps t , est une réunion finie ou infinie O de particules qui suivent le flot associé à T pour lesquelles $\tau(O) = \{t\}$. Si O est réduit à une particule, on dit que O est une particule temporelle.

Theorem 5. *Si τ est une horloge chronologique sur un univers muni d'une métrique d'Einstein l'équation locale d'évolution, dans l'espace référent de chaque particule temporelle, s'écrit*

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \lambda\mathfrak{R} + \kappa\mathfrak{T}$$

avec \mathfrak{R} et \mathfrak{T} sont les tenseurs définis en 3.9 et 3.10.

La notion de temps est une notion locale, non linéaire si les courbes intégrales sont fermées. Les boucles temporelles pour une horloge τ sont les courbes intégrales fermées définies par $\text{grad } \tau$. Localement, pour un observateur O , on peut donner une représentation linéaire de la notion d'horloge.

4. ESPACES RÉFÉRENTS ATTACHÉS À UNE HORLOGE

Soit O une particule de l'univers \mathcal{W} muni d'une horloge locale de chronologie τ , l'espace référent de O au temps t est la variété riemannienne (\mathcal{W}_t, g_t) où $g_t = g|_{\mathcal{W}_t}$ et $\tau(O) = t$. La métrique riemannienne g_t est la métrique associée à l'observateur O . Cette métrique est notée g_O et l'espace référent est noté \mathcal{W}_O .

En général, l'observateur O ne suit pas nécessairement le flot temporel attaché à la chronologie τ . Si la ligne d'univers de O est de classe C^1 par morceaux, en dehors des événements où la courbe n'est pas de classe C^1 , la particule O peut changer de flot chronologique. Sur la ligne d'univers, de la particule, les chronologies associées sont $\{\tau_i\}$. Cette famille peut être finie ou infinie. La notion de graphe quantique peut être décrite à partir des singularités des lignes d'univers des particules [2].

Definition 7. *Une particule P associée au champ X est dite "observable" au temps t si*

$$\tau(P) = t \text{ et } g(X(P), X(P)) \leq 0,$$

et non-observable en t si

$$\tau(P) = t \text{ et } g(X(P), X(P)) > 0,$$

l'horizon d'observabilité au temps t est formé des particules P telles que

$$\tau(P) = t \text{ et } g(X(P), X(P)) = 0.$$

Remark 5. *Dans un espace référent associé à O au temps t , l'espace observable par O est formé des particules observables.*

On a le lemme fondamental suivant,

Lemma 4. *Si ψ est le flot associé à un champ X sur W et τ une chronologie locale sur W alors pour toute particule P suivant le flot de X on a*

$$\tau(P_t) = \int_0^t \frac{g(X, T)}{g(T, T)} ds, \quad (4.1)$$

où g est la métrique lorentzienne sur \mathcal{W} ,

$$t \rightarrow P_t$$

est la courbe intégrale du flot ψ contenant P_0 pour lequel $\tau(P_0) = 0$. En particulier, si P suit le flot de T

$$\tau(P_t) = t.$$

Proof. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\tau(P_s) &= \frac{d}{du}\tau(P_{s+u})|_{u=0} = \frac{d}{du}\tau(\psi(u, P_s))|_{u=0} \\
&= d\tau(\psi(u, P_s))\left(\frac{d}{du}\psi(u, P_s)\right)|_{u=0} \\
&= d\tau(P_s)(X(P_s)) = g(X(P_s), T(P_s)) \\
&= \frac{g(X(P_s), T(P_s))}{g(T(P_s), T(P_s))}, \\
\tau(P_t) &= \int_0^t \frac{d}{ds}\tau(P_s) ds = \int_0^t \frac{g(X(P_s), T(P_s))}{g(T(P_s), T(P_s))} ds.
\end{aligned}$$

Si P suit le flot de T alors

$$X(P_s) = T(P_s)$$

et

$$\tau(P_t) = t.$$

□

Remark 6. Une particule P est un champ local X pour lequel si P est en l'événement w , la ligne d'univers de P est contenue dans la courbe intégrale du flot de X contenant w . On identifie, dorénavant, une particule P à un champ local X de l'univers.

Soit O une particule temporelle en $t = 0$ et P une particule pour laquelle en $t = 0$ on a $P = O$, par 4.1

$$\tau(O_t) = t$$

et

$$\tau(P_t) = \int_0^t \frac{g(X, T)}{g(T, T)} ds = \int_0^t \lambda(s) ds,$$

la fonction λ est définie par

$$X = Z + \lambda T, \quad g(Z, T) = 0.$$

Definition 8. Le temps relatif de la particule P en t pour la chronologie τ est

$$\tau(P_t) = \int_0^t \frac{g(X, T)}{g(T, T)} ds.$$

L'application exponentielle en O est notée

$$\exp_O : T_O\mathcal{W}_O \rightarrow \mathcal{W}_O,$$

cette application permet de définir un système local de coordonnées de l'espace référent dans un voisinage de O . La particule P suit une courbe intégrale paramétrée par t ,

$$t \rightarrow P_t,$$

dans l'espace référent en t , la trajectoire de la particule P est donnée par

$$s \rightarrow \phi_{t-\tau(P_s)}(P_s) = \phi(t - \tau(P_s), P_s)$$

et

$$\frac{d}{ds}\phi_{t-\tau(P_s)}(P_s) = \frac{d}{du}\phi_{t-\tau(P_{s+u})}(P_{s+u})|_{u=0} = \frac{d}{du}\phi(t - \tau(P_{s+u}), P_{s+u})|_{u=0}$$

en remarquant que

$$\frac{d}{dv}\phi(x, Q) = \frac{dx}{dv} \times \frac{d\phi(x, Q)}{dx} + T_Q\phi_x \left(\frac{dQ}{dv} \right)$$

et

$$\frac{d\phi(x, Q)}{dx} = \mathcal{T}(\phi(x, Q))$$

ou en utilisant 3.7 et 3.6, on a

$$\frac{d}{ds}\phi_{t-\tau(P_s)}(P_s) = T_{P_s}\phi_{t-\tau(P_s)}(Y(P_s)).$$

Pour l'observateur O dans son espace référent \mathcal{W}_O au temps t , la trajectoire de la particule P est donnée par

$$s \rightarrow \phi_{t-\tau(P_s)}(P_s) \quad (4.2)$$

et son vecteur vitesse

$$T_{P_s}\phi_{t-\tau(P_s)}(Y(P_s)),$$

si la trajectoire de P définie en 4.2 est dans un voisinage de O en t sur lequel l'application \exp_O^{-1} est définie, on peut définir les coordonnées de la particule P dans le référentiel associé à O par (t, x_1, x_2, x_3) où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées du point $\exp_O^{-1}(P_t)$ dans le repère

$$(O_t, \partial_1(O_t), \partial_2(O_t), \partial_3(O_t)),$$

où O_t est la particule O au temps t .

Si la particule P est une particule temporelle de chronologie σ , la particule O a pour coordonnées (s, y_1, y_2, y_3) dans le référentiel attaché à P . Une particule Q au temps \mathfrak{t} appartient à l'espace référent O correspondant au temps t tel que $\tau(t) = \mathfrak{t}$ et à l'espace référent P au temps s tel que $\sigma(s) = \mathfrak{t}$, les coordonnées Q dans le référentiel de O sont (t, x_1, x_2, x_3) et dans le référentiel de P sont (s, y_1, y_2, y_3) , la transformation

$$(t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (s, y_1, y_2, y_3)$$

est le changement de coordonnées de O à P associé Q , de temps propre de $\mathfrak{t} = \tau(t) = \sigma(s)$, dans le repère local $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$.

5. LES HORLOGES DE MORSE

Localement, on peut construire des horloges chronologiques. Si l'univers \mathcal{W} est un univers compact sur lequel on puisse définir une horloge chronologique globale, l'univers est dit "chronologique". Pour cela, il faut que cet univers soit muni d'un champ chronologique. Si il n'existe pas d'horloge chronologique globale, on remplace les chronologies par des fonctions de Morse, ces fonctions mesurent des caractéristiques de l'univers comme l'entropie par exemple. On peut ainsi définir la notion de temps local avec les champs chronologiques et la notion d'entropie globale avec les horloges de Morse.

Definition 9. *Les horloges de Morse sont les horloges dont la chronologie τ est une fonction de Morse.*

On rappelle que les fonctions de Morse, sur un univers \mathcal{W} , sont des applications de classe C^∞ ,

$$\tau : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que tous les événements critiques de τ sont des événements non dégénérés. L'existence de telles horloges est due au théorème de densité de Milnor.

Theorem 6. *L'ensemble des fonctions de Morse est un ouvert partout dense de $C^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ pour la C^k -topologie fine de Whitney pour tout entier $k \geq 2$.*

Proof. On peut consulter [5] et [6]. \square

Le théorème de chirurgie de Morse avec singularité d'indice λ est donné par

Theorem 7. *Si pour un événement singulier w d'indice λ il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\tau^{-1}]-\infty, \tau(w) + \varepsilon[\setminus \tau^{-1}]-\infty, \tau(w) - \varepsilon[$$

ne contient que w comme événement singulier alors l'univers à bord

$$\tau^{-1}]-\infty, \tau(w) + \varepsilon[$$

est obtenu par chirurgie de type $(\lambda, 4 - \lambda)$ à partir de l'univers

$$\tau^{-1}]-\infty, \tau(w) - \varepsilon[.$$

On rappelle la construction des chirurgies de type $(\lambda, n - \lambda)$. Si N est une variété de dimension n , de bord non vide $\partial N \neq \emptyset$ et φ est un plongement de $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ dans ∂N , on pose

$$\chi(N, \varphi) = \frac{N \cup D_\lambda^n}{\sim}, \quad D_\lambda^n = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$$

\cup est l'union disjointe de N et D_λ^n et \sim représente la relation d'équivalence

$$x \in \partial N \sim y \in \partial D_\lambda^n = S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \cup D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$$

si et seulement si $\varphi(x) = y$. L'espace $\chi(N, \varphi)$ est une C^∞ -variété, en la lissant si nécessaire, obtenue par chirurgie de type $(\lambda, n - \lambda)$ à partir de la variété à bord N .

Theorem 8. *Il existe une horloge de Morse qui permet de décrire l'entropie globale d'un univers compact par une suite finie de chirurgies de type $(\lambda, 4 - \lambda)$ [3].*

Proof. C'est un théorème Milnor-Morse. \square

6. REPRÉSENTATION EN CORDE LE LONG D'UN FLOT TEMPOREL

On se fixe une particule qui n'est pas nécessairement une particule temporelle pour l'horloge τ . En chaque événement w atteint par cette particule, on associe une corde fermée, sans self-intersection, $\gamma \subset W_{\tau(w)}$ où $W_{\tau(w)} = \mathcal{W}_{\tau(w)} \cap W$. Une variation de γ est la donnée d'une C^∞ -application

$$H : [0, 1] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{W}, \quad (s, t) \rightarrow H(s, t) \in \mathcal{W}$$

telle que

$$s \in [0, 1] \rightarrow \gamma_t(s) = H(s, t), \quad \forall s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

est une corde fermée (sans self-intersection) vérifiant

$$\gamma_t \subset W_{\tau(w(t))}, \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \text{et} \quad w(0) = w$$

et

$$t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow H(0, t) = H(1, t) = w(t)$$

est la ligne d'univers de la particule. Comme précédemment, l'origine des temps est en l'événement $w = w(0)$, en remplaçant τ par $\tau - \tau(w)$. Si ϕ est le flot de \mathcal{T} défini en 3.3

$$\mathcal{H} : [0, 1] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow W_0, (s, t) \rightarrow \phi(-\tau(w(t)), \gamma_t(s)) \in W_0$$

est une variation de la corde γ dans la variété riemannienne W_0 car si

$$(\tau(w(t)), \gamma_t(s)) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times W \quad (6.1)$$

alors

$$\delta_t(s) = \phi(-\tau(w(t)), \gamma_t(s)) \subset \phi_{-\tau(w(t))} W_{\tau(\gamma_t(s))} = \phi_{-\tau(w(t))} W_{\tau(w(t))} = W_0. \quad (6.2)$$

On définit l'énergie, pour un corde fermée γ de W_0 , le long du flot temporel par

$$E_\gamma(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{g}(\delta_t(s)) \left(\delta_t(s), \dot{\delta}_t(s) \right) ds, \quad (6.3)$$

l'énergie en $w \in W_0$ est l'énergie de la corde géodésique γ qui minimise $E_\gamma(t)$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Si

$$Y(s) = T_{(s,0)} \mathcal{H} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

la formule de la variation première s'écrit

$$\frac{d}{dt} E_\gamma(t) |_{t=0} = \left[\mathbf{g}(Y(s), \dot{\gamma}(s)) \right]_0^1 - \int_0^1 \mathbf{g}(Y(s), \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(s)) ds$$

où $\mathbf{g} = \mathbf{g}(0)$ est la métrique riemannienne induite par g sur W_0 , $\nabla^{\mathbf{g}}$ est la connexion de Levi-Civita associée à \mathbf{g} . Si la corde γ est géodésique pour la métrique \mathbf{g} alors

$$\frac{d}{dt} E_\gamma(t) |_{t=0} = \left[\mathbf{g}(Y(s), \dot{\gamma}(s)) \right]_0^1$$

et si la particule en w suit le flot de \mathcal{T} alors

$$\frac{d}{dt} E_\gamma(t) |_{t=0} = 0 \quad (6.4)$$

car la variation première de \mathcal{H} est un point fixe en $w(0)$. On en déduit le lemme suivant,

Lemma 5. *Si γ est un lacet géodésique de W_0 et*

$$t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow w(t) = H(0, t) = H(1, t)$$

est une courbe intégrale du champ \mathcal{T} alors l'équation 6.4 est vérifiée.

Theorem 9. *Pour toute variation*

$$H : [0, 1] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{W}, (s, t) \rightarrow H(s, t) \in \mathcal{W}$$

telle que

$$\gamma_t(s) = H(s, t)$$

est une corde géodésique de $\mathcal{W}_{\tau(w(t))}$ muni de la métrique riemannienne

$$g_t = g |_{\mathcal{W}_{\tau(w(t))}}$$

où

$$w(t) = \gamma_t(0) = \gamma_t(1)$$

est une courbe intégrale du flot de \mathcal{T} alors l'énergie

$$E_w(t) = E(\gamma_t), w = w(0)$$

est constante.

Proof. On a

$$\dot{E}_w(t) = \frac{d}{ds} E_w(t+s) |_{s=0} = \frac{d}{ds} E(\gamma_{t+s}) |_{s=0} = 0$$

car γ_t vérifie les hypothèses du lemme. \square

Pour un observateur O , la représentation de l'univers au temps t est \mathcal{W}_t , si le paramétrage de la courbe

$$t \rightarrow \gamma_t(0) = \gamma_t(1)$$

se fait par rapport au temps t , la partie observable de cette trajectoire est donnée pour les valeurs du temps t qui vérifient

$$\tau(\gamma_t(0)) = \tau(\gamma_t(1)) = t.$$

Remark 7. On rappelle qu'un observateur temporel O au temps t vérifie

$$\tau(O) = \{t\},$$

on notera simplement

$$\tau(O) = t.$$

On se place dans l'hypothèse 6.1, on peut comparer $\tau(\gamma(\tau(O)))$ avec $\tau(O)$. Si

$$\tau(\gamma(\tau(O))) - \tau(O) > 0$$

la particule ponctuelle définie par cette courbe est dans le futur de l'observateur temporel O , si

$$\tau(\gamma(\tau(O))) - \tau(O) < 0$$

la particule est dans le passé de O et si

$$\tau(\gamma(\tau(O))) - \tau(O) = 0$$

la particule est dans le présent de l'observateur O . Lorsque la particule est dans le présent de l'observateur O , cette particule est observable par O si elle est dans le cône d'isotropie en l'événement w défini par

$$\mathfrak{C}(w) = \{u \in T_w \mathcal{W} : g(w)(u, u) \leq 0\}. \quad (6.5)$$

On peut donner une autre formule de la variation de l'énergie en utilisant l'équation d'évolution de la métrique sur l'espace référent W_0 ,

$$\frac{d}{dt} E_\gamma(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dt} \mathfrak{g}(t)(\gamma(s)) \left(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right) ds,$$

dans le repère local $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ au voisinage de $w_0 \in \mathcal{W}_0$

$$\frac{d}{dt} E_\gamma(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathfrak{g}'_{ij}(t)(\gamma(s)) \gamma^i(s) \gamma^j(s) ds, \quad \dot{\gamma}(s) = \gamma^i(s) \partial_i(\gamma(s))$$

en utilisant 3.11

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_\gamma(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathfrak{g}'_{ij}(t)(\gamma(s)) \gamma^i(s) \gamma^j(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda(t)(\gamma(s)) \mathfrak{R}_{ij}(t)(\gamma(s)) \gamma^i(s) \gamma^j(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \mu(t)(\gamma(s)) \mathfrak{R}_{ij}(t)(\gamma(s)) \gamma^i(s) \gamma^j(s) ds, \end{aligned}$$

on peut ainsi calculer la variation d'énergie en fonction du tenseur énergie-impulsion \mathcal{T} et du tenseur de Ricci \mathfrak{R} sur \mathcal{W}_0 .

7. HORLOGE PRESQUE GÉODÉSIQUE

Definition 10. Une horloge est presque géodésique si le champ chronologique T est un champ propre de l'opérateur ∇_T . La fonction propre associée au champ chronologique est notée λ ,

$$\nabla_T T = \lambda T,$$

si la fonction $\lambda = 0$, on dit que l'horloge est géodésique.

Lemma 6. Une horloge est presque géodésique si et seulement si pour tout champ local X vérifiant

$$g(X, T) = 0$$

on a

$$g(\nabla_T X, T) = 0.$$

Proof. Si

$$\nabla_T T = \lambda T$$

$$g(X, T) = 0 \implies \mathcal{L}_T g(X, T) = g(\nabla_T X, T) + g(\nabla_T T, X) = 0,$$

$$g(\nabla_T T, X) = g(\lambda T, X) = \lambda g(T, X) = 0$$

et

$$g(\nabla_T X, T) = 0.$$

Inversement, si

$$\nabla_T T = \lambda T + X \text{ avec } g(X, T) = 0,$$

$$g(\nabla_T T, X) = \lambda g(T, X) + g(X, X)$$

la condition $g(T, X) = 0$ implique la condition $g(\nabla_T T, X) = 0$ par hypothèse, donc $g(X, X) = 0$. Le champ X est un champ espace, donc $X = o$ et

$$\nabla_T T = \lambda T.$$

□

On définit au temps t de l'opérateur $\nabla_T(t)$ par

$$\nabla_T(t) : X \rightarrow \nabla_T(t) X = T\phi_{-t}\nabla_T T\phi_t X,$$

cette définition a un sens car si $X(w) \in T_w\mathcal{W}_{\tau(w)}$ alors $(\nabla_T X)(w) \in T_w\mathcal{W}_{\tau(w)}$, on en déduit le théorème suivant.

Theorem 10. Pour une horloge presque géodésique

$$\frac{d}{dt} E_\gamma(t) = \frac{d}{dt} E_\gamma(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \int_\gamma \mathfrak{g}(t) \left(\nabla_T(t) \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right) \quad (7.1)$$

et

$$\frac{d}{dt} L_\gamma(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \int_\gamma \frac{\mathfrak{g}(t) \left(\nabla_T(t) \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right)}{\sqrt{\mathfrak{g}(t) \left(\dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \right)}}.$$

Proof. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_\gamma(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dt} \mathbf{g}(t)(\gamma(s)) \left(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right) ds \\ \mathbf{g}(t)(w)(Y(w), Z(w)) &= g_t(\phi_t(w))(T_w \phi_t Y(w), T_w \phi_t Z(w)) \\ \frac{d}{dt}E_\gamma(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{L}_{\partial_0} \mathbf{g}(t)(\gamma(s)) \left(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{\sigma(t)} \int_0^1 g(\gamma_t(s)) \left(\nabla_T T_{\gamma(s)} \phi_t \left(\dot{\gamma}(s) \right), T_{\gamma(s)} \phi \left(\dot{\gamma}(s) \right) \right) ds \\ &= \frac{1}{\sigma(t)} \int_0^1 \mathbf{g}(t)(\gamma(s)) \left(\nabla_T(t) \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right) ds, \end{aligned}$$

on écrit cette relation sous la forme réduite

$$\frac{d}{dt}E_\gamma(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \int_\gamma \mathbf{g}(t) \left(\nabla_T(t) \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right).$$

De façon identique,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L_\gamma(t) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \sqrt{\mathbf{g}(t)(\gamma(s)) \left(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right)} ds \\ \frac{d}{dt}L_\gamma(t) &= \frac{1}{\sigma(t)} \int_0^1 \frac{\mathbf{g}(t)(\gamma(s)) \left(\nabla_T(t) \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right)}{\sqrt{\mathbf{g}(t)(\gamma(s)) \left(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \right)}} ds, \end{aligned}$$

on a un résultat analogue à 7.1 sous une forme réduite

$$\frac{d}{dt}L_\gamma(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \int_\gamma \frac{\mathbf{g}(t) \left(\nabla_T(t) \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right)}{\sqrt{\mathbf{g}(t) \left(\dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u) \right)}}.$$

□

8. CHAMP DE JACOBI LE LONG D'UN FLOT TEMPOREL

Sur la variété riemannienne (W_0, \mathbf{g})

$$\mathcal{H} : [0, L] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow W_0, (s, t) \rightarrow \phi(-\tau(w(t)), \gamma_t(s)) \in W_0,$$

est un paramétrage d'une sous-variété de W_0 . Si X est un champ de vecteur sur $[0, L] \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ et Y un champ de vecteur le long de \mathcal{H}

$$Y : [0, L] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow TW_0, Y(s, t) \in T_{\mathcal{H}(s,t)}W_0,$$

il existe un unique champ de vecteur, noté $\bar{\nabla}_X Y$ vérifiant

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y : [0, L] \times]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow W_0, \bar{\nabla}_X Y(s, t) \in T_{\mathcal{H}(s,t)}W_0, \\ (X, Y) &\rightarrow \bar{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

est bilinéaire, pour toute C^∞ -fonction φ sur $[0, L] \times]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$\bar{\nabla}_{\varphi X} Y = \varphi \bar{\nabla}_X Y \text{ et } \bar{\nabla}_X(\varphi Y) = (\mathcal{L}_X \varphi) Y + \varphi \bar{\nabla}_X Y,$$

si dans un voisinage de $\mathcal{H}(s_0, t_0)$ dans W_0 il existe un champ Z tel que

$$Z(\mathcal{H}(s, t)) = Y(s, t)$$

alors

$$\bar{\nabla}_X Y(s_0, t_0) = \left(\nabla_{T_{(s_0, t_0)} \mathcal{H}(X(s_0, t_0))} Z \right) (\mathcal{H}(s_0, t_0)).$$

Notation 2. Si X est un champ de vecteur sur $[0, L] \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, le champ

$$\bar{X}(s, t) = T_{(s, t)} \mathcal{H}(X(s_0, t_0)) \in T_{\mathcal{H}(s, t)}(W_0)$$

est un champ de vecteur le long de \mathcal{H} .

Dans ce qui suit, on fait l'hypothèse que $\gamma = \gamma_0$ est paramétré par longueur d'arc. La formule de la variation seconde donne, avec les notations précédentes et si on pose

$$Y'(s) = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(s) \text{ où } Y(s) = T_{(s, 0)} \mathcal{H} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} E(\gamma_t) |_{t=0} &= \left[\mathfrak{g} \left(Y'(s), \dot{\gamma}(s) \right) \right]_0^1 \\ &+ \int_0^L \left(|Y'(s)|_{\mathfrak{g}}^2 - \mathfrak{R}_{\gamma(s)} \left(Y'(s), \dot{\gamma}(s), Y'(s), \dot{\gamma}(s) \right) \right) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} L(\gamma_t) |_{t=0} &= \left[\mathfrak{g} \left(Y'(s), \dot{\gamma}(s) \right) \right]_0^1 \\ &+ \int_0^L \left(|Y'(s)|_{\mathfrak{g}}^2 - \mathfrak{R}_{\gamma(s)} \left(Y(s), \dot{\gamma}(s), Y(s), \dot{\gamma}(s) \right) - \mathfrak{g} \left(\dot{\gamma}(s), Y'(s) \right)^2 \right) ds \end{aligned}$$

avec

$$\mathfrak{R}_{\gamma(s)} \left(Y'(s), \dot{\gamma}(s), Y'(s), \dot{\gamma}(s) \right) = \mathfrak{g}(\gamma(s)) \left(\mathfrak{R}_{\gamma(s)} \left(Y'(s), \dot{\gamma}(s) \right) Y'(s), \dot{\gamma}(s) \right)$$

où \mathfrak{R} est le tenseur de courbure associé à la connection de Levi-Civita $\nabla^{\mathfrak{g}}$. Le champ

$$\tilde{Y} = Y - \mathfrak{g}(\dot{\gamma}, Y) \dot{\gamma}$$

vérifie

$$\mathfrak{g}(\dot{\gamma}, \tilde{Y}) = 0,$$

puisque la corde γ est paramétrée par longueur d'arc, on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} L(\gamma_t) |_{t=0} &= \left[\mathfrak{g} \left(Y'(s), \dot{\gamma}(s) \right) \right]_0^1 \\ &+ \int_0^L \left(|Y'(s)|_{\mathfrak{g}}^2 - \mathfrak{R}_{\gamma(s)} \left(\tilde{Y}(s), \dot{\gamma}(s), \tilde{Y}(s), \dot{\gamma}(s) \right) \right) ds, \end{aligned}$$

on peut consulter [4] pour une preuve de ce résultat.

Notation 3. Les champs

$$Y'(s) = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(s, 0)$$

et

$$Y''(s) = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(s)$$

sont des champs le long de \mathcal{H} .

On rappelle la définition d'un champ de Jacobi,

Definition 11. *Un champ de Jacobi J le long d'une géodésique γ est un champ qui vérifie*

$$J'' + \mathfrak{R}(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0,$$

où \mathfrak{R} est le tenseur de courbure de la métrique riemannienne $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0)$.

On fait l'hypothèse sur \mathcal{H} que toutes les cordes δ_t définies en 6.2 sont géodésiques pour la métrique \mathfrak{g} . Sous cette hypothèse, il existe un unique champ de Jacobi J le long γ .

Definition 12. *J est le champ de Jacobi le long de γ , associé au flot temporel \mathcal{T} , au temps $t = 0$.*

Un flot temporel ϕ est isométrique si ϕ_{t+s} est une isométrie pour les métriques $g_t = g|_{\mathcal{W}_t}$ et $g_{t+s} = g|_{\mathcal{W}_{t+s}}$ pour tout $s, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tels que $s + t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Definition 13. *Une variation temporelle isométrique est une variation temporelle à flot isométrique.*

Theorem 11. *Pour une variation temporelle isométrique, il existe un unique champ \mathcal{J} sur W tel que, en chaque temps t , $\mathcal{J}|_{\mathcal{W}_t}$ est un champ de Jacobi le long de γ_t pour la métrique $g_t = g|_{\mathcal{W}_t}$.*

9. CONCLUSION

La notion de temps, proposée dans ce article, est une représentation non linéaire. Localement, on définit un flot temporel dont les courbes intégrales peuvent être ouvertes ou fermées. Pour une origine fixée, l'évolution le long du flot temporel, est décrite par un flot de Ricci avec tenseur de Ricci donné par 3.11. Si une particule se déplace le long d'une courbe intégrale du flot temporel, il y a conservation de l'énergie où l'énergie est définie en 6.3. Pour donner une description globale de l'univers, on est amené à définir les horloges de Morse. Ces horloges existent par le théorème de densité de Milnor. Ces horloges ne mesurent plus le temps mais permettent de donner une évolution de la notion d'ordre dans l'univers avec des singularités d'indice λ qui apparaissent en un nombre fini d'événements pour les univers fermés. La description d'un multivers est plus complexe, en chaque instant t , chaque composante connexe de bord les singularités sphériques ou toriques est la représentation au temps t d'un univers du multivers. L'avantage de cette description de l'univers est que contrairement à [2], elle n'augmente pas la dimension de l'espace et permet d'expliquer que certaines particules temporelles restent confiner à l'univers dans lequel elles évoluent et d'autres peuvent passer d'un univers à un autre si la chronologie est transversale au sens de Thom. Dans le cadre de la non-transversalité, la notion de multivers n'a plus de sens physique car toute particule, qui suit le flot associé à cette chronologie, ne peut passer d'un univers à l'autre.

REFERENCES

- [1] Anderson M.T., "Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci", Publications Gazette 2005, smf gazette 103, page 24-40
- [2] Jonot J.L., "Modélisation géométrique et quantique en physique". [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015, hal-01159709 v5
- [3] Jonot J.L., "Sur l'espace-temps d'Einstein", hal.archives-ouvertes.fr, hal-01063803v4.
- [4] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., "Riemannian Geometry". Universitex, Springer-Verlag (Second Edition)

- [5] Milnor J., "Morse Theory", Princeton University Press, 1963.
- [6] Spring D., "The Golden Age of Immersion Theory in Topology: 1959-1973", Bull. Amer. Math. Soc. 42 (2005).
- [7] Thom R., "Quelques propriétés globales des variétés différentiables". Comm. Math. Helv. 28 (1): 17-86.
- [8] Thurston W., The geometry and topology of three-manifolds, Princeton lecture notes (1978-1981).

Email address: `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr` ou `j.jonot@gmail.com`