



HAL
open science

Des mathématiciens découvrent les volumes finis

Isabelle Faille, Thierry Gallouët, Raphaele Herbin

► **To cite this version:**

Isabelle Faille, Thierry Gallouët, Raphaele Herbin. Des mathématiciens découvrent les volumes finis. Matapli, 1991, 28, pp.37-48. hal-03140480

HAL Id: hal-03140480

<https://hal.science/hal-03140480>

Submitted on 28 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

les Volumes Finis

Avertissement au lecteur Dans un souci de clarté, les termes spécifiques au domaine des mathématiques appliquées que nous serons amenés à utiliser seront expliqués en notes de bas de page. Les auteurs remercient à ce propos les "néophytes" D. Barsky (théorie des nombres), et G. Lopez (théorie des relations) pour leurs remarques.

1 Introduction

La littérature usuelle des mathématiciens sur les méthodes de discrétisation d'équations aux dérivées partielles s'attache généralement à l'étude des méthodes d'éléments finis et des méthodes de différences finies. On y rencontre peu de choses sur la méthode des volumes finis. Si, par contre, on s'aventure à explorer la littérature touchant la mécanique des fluides, on la rencontre souvent. Nous essayons ici de dégager l'intérêt de cette méthode et ses propriétés essentielles, en proposant pour cela un cadre mathématique adéquat.

1.1 Principe de la méthode

La méthode des volumes finis est utilisée pour la discrétisation spatiale des lois de conservation. Le domaine géométrique considéré est divisé en mailles, souvent dénommées "volumes de contrôle". L'inconnue à déterminer est approchée par une fonction constante par maille. Cette inconnue peut être un vecteur, et, dans ce cas, il peut exister un maillage pour chacune des composantes du vecteur. L'écriture du schéma numérique¹ peut également utiliser des inconnues auxiliaires (par exemple le gradient de l'inconnue par maille). La loi de conservation est intégrée maille par maille ; ainsi, au moyen d'intégration par parties, on est ramené à la détermination des flux sur les bords des mailles. La manière dont on approche les flux en fonction de l'inconnue discrète détermine alors le schéma numérique.

1.2 Exemples

Considérons d'abord l'exemple simple de l'opérateur de Laplace. Soient Ω , un ouvert de \mathbb{R}^2 , et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; on cherche $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ + \text{ conditions limites sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

On se donne un maillage \mathcal{T} de Ω en quadrangles. Soit K un élément de \mathcal{T} ; l'équation associée à la maille K et à l'inconnue associée à cette maille est obtenue en intégrant l'équation (1) sur K ; par intégration par parties, on obtient $-\int_{\partial K} \text{grad} u \cdot \mathbf{n} = \int_K f$, où \mathbf{n} est la normale extérieure à ∂K . Il reste alors à discrétiser $\text{grad} u \cdot \mathbf{n}$ en utilisant les inconnues discrètes (une inconnue par maille).

¹On appelle schéma numérique une technique de calcul de solutions approchées du problème considéré. Voir paragraphe 2.1 pour une illustration simple.

Considérons maintenant les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement (stationnaire) d'un fluide incompressible dans un domaine Ω bidimensionnel. Soient f_1 et f_2 (forces agissant sur le mouvement du fluide) des fonctions données de Ω dans \mathbb{R} ; on cherche u_1 et u_2 (les composantes du vecteur vitesse), et p (la pression) définies de Ω dans \mathbb{R} , telles que :

$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \Delta u_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + f_1, & (i) \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \Delta u_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + f_2, & (ii) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, & (iii) \\ + \text{conditions limites sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Une méthode célèbre, *cf.* [P] consiste à utiliser trois maillages entrelacés, associés aux trois inconnues u_1 , u_2 et p . L'équation (2)(i) (resp. (2)(ii), (2)(iii)) est associée à l'inconnue u_1 (resp. u_2 , p) et intégrée par partie sur le volume de contrôle associé à u_1 (resp. u_2 , p). Les termes de bord obtenus sont ensuite discrétisés en utilisant les inconnues discrètes, *i.e.* les valeurs de u_1 , u_2 et p sur les mailles de leurs maillages respectifs associés. Grâce à ces maillages, la discrétisation de tous les termes s'effectue de manière assez naturelle ; la seule difficulté est la discrétisation du terme de convection².

Nous pourrions citer de nombreux autres exemples ; ces exemples concernent essentiellement des problèmes de la mécanique des fluides. Dans le milieu mathématique français, on peut citer les problèmes de simulation de réservoir, en ingénierie pétrolière, qui ont été étudiés par l'équipe de Chavent à l'INRIA *cf.* [CJ].

1.3 Motivation

La méthode des volumes finis est utilisée depuis longtemps par les ingénieurs et les mécaniciens des fluides. Elle est implantée dans de nombreux codes industriels, et il semble donc souhaitable d'en étudier les propriétés mathématiques. En particulier, en ce qui concerne les équations hyperboliques, il semble que ce soit actuellement la méthode la plus performante. Elle est aussi intéressante pour les opérateurs de type elliptique (pour lesquels la méthode des éléments finis est très performante), parce qu'elle permet un couplage simple avec d'autres équations (de type hyperbolique, par exemple).

Essayons maintenant de découvrir les propriétés mathématiques de cette méthode sur des exemples simples, *c.à.d.* en particulier pas sur l'équation d'Euler... Notons toutefois que d'excellents résultats numériques ont été obtenus avec cette méthode pour le traitement de ladite équation (voir l'article "La modélisation des disjoncteurs. Un exemple de relations Université-Industrie" par P. Chevrier, J.M. Talbot et J.P. Vila, paru dans *Matapli* 19, p. 23-36, et [Che]).

2 Equations elliptiques

2.1 Le cas unidimensionnel

Attaquons d'emblée le problème le plus académique qui soit : on se donne une fonction $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, régulière, *c.à.d.* pour simplifier la restriction à $]0, 1[$ d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

²*c.à.d.* les deux premiers termes des deux premières équations.

de classe C^∞ , et on cherche $u :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0 , \\ u(1) = 0 . \end{cases} \quad (3)$$

On discrétise l'intervalle $]0, 1[$ en N intervalles, les mailles, de longueur h_1, \dots, h_N . On note

$$H = \sup_{1 \leq i \leq N} h_i \quad \text{et} \quad h = \inf_{1 \leq i \leq N} h_i .$$

Soit u la solution exacte de (3). On note u_i^a la valeur approchée recherchée de la moyenne de u dans la i -ème maille, et u^a la solution approchée (constante par mailles), *i.e.* $u^a(x) = u_i^a$ dans la i -ème maille. Soient x_i le centre de la i -ème maille et $x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}$ ses extrémités. Le principe des volumes finis consiste donc à écrire :

$$u'(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N . \quad (4)$$

Il reste maintenant à exprimer $u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ en fonction des inconnues discrètes u_j^a , $j = 1, \dots, N$. Puisque la valeur de u en x_i approche la valeur moyenne de u sur la i -ème maille avec une erreur en H^2 , l'approximation la plus naturelle de ce terme est :

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u_{i+1}^a - u_i^a}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N , \quad (5)$$

où $h_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$. On pose $f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx$. Le schéma numérique s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{u_i^a - u_{i-1}^a}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i+1}^a - u_i^a}{h_{i+\frac{1}{2}}} = h_i f_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N , \\ u_0^a = -u_1^a , \\ u_{N+1}^a = -u_N^a , \end{cases} \quad (6)$$

où on a défini $h_0 = h_1$, $h_{N+1} = h_N$, et introduit u_0^a et u_{N+1}^a afin de traiter les conditions aux limites.

Pour les non-spécialistes, il est instructif de voir sur cet exemple simple ce que donne le schéma aux différences finies (identique dans ce cas unidimensionnel au schéma éléments finis IP_1 ³ obtenu sur le maillage dont les x_i sont les sommets). Le schéma aux différences finies est obtenu en écrivant $-u''(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 1, \dots, N$, et en remplaçant $u''(x_i)$ par le quotient différentiel consistant le plus simple possible⁴.

³le schéma éléments finis IP_1 consiste à utiliser une formulation variationnelle du problème et à approcher l'espace fonctionnel $H_0^1(]0, 1[)$ dans lequel on recherche la solution du problème par l'espace de dimension finie des fonctions continues et linéaires par maille.

⁴*i.e.* on considère que u_i^a est la valeur approchée recherchée de u au point x_i , et on remplace $-u''(x_i)$ par l'expression faisant intervenir $u_{i-1}^a, u_i^a, u_{i+1}^a$ qui approche $-u''(x_i)$ avec une erreur qui tend vers 0 lorsque H tend vers 0, lorsqu'on remplace les u_j^a par $u(x_j)$.

On obtient alors le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\frac{h_{i-1} + h_{i+1} + 2h_i}{4}} \left(\frac{u_i^a - u_{i-1}^a}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i+1}^a - u_i^a}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) = f(x_i), \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \\ u_0^a = -u_1^a, \\ u_{N+1}^a = -u_N^a. \end{array} \right. \quad (7)$$

Il est bien connu que le schéma aux différences finies (7) converge (plus précisément, (8) est vérifiée). Nous nous posons naturellement la question de la convergence du schéma volumes finis (6). A-t-on, par exemple :

$$\sup_{1 \leq i \leq N} |u_i^a - u_i| \rightarrow 0 \text{ quand } H \rightarrow 0, \quad (8)$$

où u_i est la valeur moyenne de la solution exacte dans la i ème maille, ou encore, (ce qui revient au même pour prouver (8)) la valeur de la solution exacte au centre de la i ème maille ?

La démonstration d'un tel résultat nécessite des propriétés de consistance⁵ et de stabilité⁶. Pour obtenir ces propriétés, essayons d'écrire le schéma (6) comme un schéma aux différences finies⁷. En divisant les deux membres de la première équation de (6) par h_i , ce schéma peut s'écrire sous forme matricielle : $Au^a = \mathbf{b}$, où $\mathbf{u}^a = (u_1^a, \dots, u_N^a)^T$, $\mathbf{b} = (f_1, \dots, f_N)^T$, et A est une matrice carrée d'ordre N . La stabilité du schéma se démontre facilement en remarquant que $\|A^{-1}\|_\infty \leq C$, où C est une constante indépendante des h_i . Notons que le schéma aux différences finies (7) est, lui aussi, stable.

Le problème de la consistance est beaucoup plus délicat. On remarque que l'erreur de consistance $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$ avec :

$$r_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) - f_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad (9)$$

ne tend pas vers 0, à moins de supposer que

$$\sup_{1 \leq i \leq N} \frac{h_{i+1}}{h_i} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \inf_{1 \leq i \leq N} \frac{h_{i+1}}{h_i} \rightarrow 1, \quad \text{lorsque } H \rightarrow 0.$$

Vu comme un schéma aux différences finies, le schéma (6) apparaît donc comme inconsistant. Prenons par exemple $f = 1$, $h_i = h$ si i est pair et $h_i = 2h$ si i est impair. Dans ce cas, $r_i = \frac{1}{2}$ si i est pair et $r_i = -\frac{1}{4}$ si i est impair. Donc r_i ne tend pas vers 0 avec H ! Remarquons, par contre, que le schéma aux différences finies (7) est consistant pour tout f .

⁵Pour un schéma aux différences finies, l'erreur de consistance est obtenue en remplaçant u_i^a par $u(x_i)$, valeur de la solution exacte au centre de i ème maille, dans le schéma numérique (cf. eq. (9)). Un schéma est dit consistant si l'erreur de consistance tend vers 0 lorsque H tend vers 0.

⁶La notion de stabilité dépend des auteurs. Nous dirons ici que le schéma est stable si on a une estimation sur la solution approchée indépendamment du maillage. Le type de stabilité dépend du type de l'estimation obtenue. On s'intéresse ici à une L^∞ stabilité.

⁷c.à.d. en considérant que u_i^a est une valeur approchée de u au point x_i ; notons aussi que f_i est une valeur approchée de f au point x_i avec une erreur en H^2 .

Cependant, pour le schéma volumes finis (6), l'erreur de consistance tend vers 0 dans un sens faible. Plus précisément, en notant r_H la fonction constante par maille et égale à r_i sur la i -ème maille, on remarque que r_H tend vers 0 dans $L^\infty(]0, 1[)$ pour la topologie faible * (i.e. $\int_0^1 r_H \varphi \rightarrow 0 \forall \varphi \in L^1(]0, 1[)$). C'est ce que nous appellerons la consistance faible. Cette propriété peut être démontrée dans le cas général, sous la seule hypothèse de la "consistance des flux", c.à.d. le choix d'un quotient différentiel consistant pour l'approximation de $u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ ⁸.

Les propriétés de consistance et de stabilité entraînent la convergence du schéma aux différences finies (7). En ce qui concerne le schéma volumes finis (6), on remarque que $r_i = (Av)_i + \varepsilon(H)$, avec $\varepsilon(H) \rightarrow 0$ quand $H \rightarrow 0$, et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)^T$, où $v_i = \frac{h_i^2 u''(x_i)}{8}$ (cf. [FS] ou [F]). On obtient alors

$$A(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) = A\mathbf{v} + \varepsilon(H), \quad (10)$$

où $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$. On en déduit que $\sup(|u_i - u_i^a|, i = 1, \dots, N) \rightarrow 0$ quand $H \rightarrow 0$ et donc que le schéma (6) converge. De manière plus générale, si on suppose que le schéma est stable en un sens convenable, on peut montrer que la consistance des flux entraîne la convergence du schéma (cf. [F]), la démonstration de cette convergence faisant appel au caractère conservatif (cf. paragraphe 2.2), naturel dans les schémas de type volumes finis.

2.2 Le cas bidimensionnel

Continuons sur le même problème académique, en lui ajoutant une dimension d'espace :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[, \\ u(x) = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (11)$$

Le schéma naturel décrit dans le paragraphe précédent se généralise très facilement en dimension supérieure.

Dans le cas d'un maillage formé de rectangles (régulier ou non) on obtient les mêmes propriétés de consistance des flux et de conservativité qu'en dimension 1. Le schéma est bien sûr inconsistant au sens des différences finies, mais par un raisonnement semblable à celui de la dimension 1 (cf. [FS] ou [F]), on évalue l'erreur de consistance comme en (10) et on obtient ainsi la convergence.

Il est évidemment intéressant de généraliser la méthode au cas d'un maillage formé de quadrangles, voire même de triangles. Prenons ici l'exemple d'un maillage formé de quadrangles quelconques. Notons K une maille de ce maillage. Selon le principe de la méthode des volumes finis, nous avons une inconnue discrète par maille, notée u_K , et l'équation associée à cette maille est, en notant \mathbf{n}_K la normale à ∂K extérieure à K :

$$-\int_{\partial K} \text{grad} u \cdot \mathbf{n}_K = \int_K f.$$

Il faut maintenant discrétiser $\text{grad} u \cdot \mathbf{n}_K$ en utilisant une valeur de l'inconnue par maille. L'étude de la dimension 1 nous a montré que les propriétés importantes de la méthode semblent être :

- la conservativité (c.à.d. que, si K et K' sont deux mailles adjacentes, sur $K \cap K'$, l'approximation de $\text{grad} u \cdot \mathbf{n}_K$, utilisée dans l'équation associée à la maille K est égale à l'approximation de

⁸Ici, le quotient différentiel choisi pour approcher $u'(x_i)$ est donné en (5). Il est consistant car u_i^a est une valeur approchée de la valeur moyenne de la solution exacte sur la i -ème maille. En remplaçant u_i^a et u_{i+1}^a par les valeurs moyennes correspondantes de la solution exacte, l'expression de droite de (5) approche $u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ avec une erreur qui tend vers 0 lorsque H tend vers 0, au moins linéairement par rapport à H .

– $\text{grad}u.n_{K'}$, utilisée dans l'équation associée à la maille de K'). Cette propriété découle naturellement du principe de la méthode des volumes finis.

- la consistance des flux (c.à.d. en prenant pour u_K la valeur moyenne de u dans la maille K , où u est une fonction régulière, la différence entre $\text{grad}u.n_K$ et l'approximation choisie de $\text{grad}u.n_K$ est d'ordre inférieur ou égal à celui du pas du maillage).

On trouve dans certains codes industriels l'approximation suivante de $\text{grad}u.n_K$ sur $K \cap K'$:

$$\text{grad}u.n_K = \frac{u_{K'} - u_K}{d(K, K')},$$

où $d(K, K')$ est la distance entre les centres des mailles K et K' . Ce choix, bien que simple, n'est pas satisfaisant, car les flux ainsi obtenus ne sont pas consistants, ce qui entraîne des erreurs importantes, surtout lorsque les mailles ont toutes la même inclinaison (cf. [F]). Ce problème peut être évité en modifiant l'approximation de $\text{grad}u.n_K$ de manière à la rendre consistante. Il faut toutefois prendre garde à ne pas perdre le caractère conservatif, c.à.d. à conserver la même approximation pour $\text{grad}u.n_K$ que pour $-\text{grad}u.n_{K'}$. Pour cela, nous avons introduit un schéma que nous avons baptisé VF9, car l'équation associée à la maille K fait intervenir au plus 9 valeurs de l'inconnue discrète.

Décrivons maintenant, pour ce schéma VF9, la manière dont on approche le flux $\text{grad}u.n_K$. Nous supposons ici, pour simplifier, que le maillage \mathcal{T} est structuré, i.e. constitué d'un ensemble de mailles quadrangulaires $\{K_{i,j}, i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M\}$. Soient $C_{i,j}$ le centre de la maille $K_{i,j}$, $\delta_{i,j-1/2}$, $\delta_{i+1/2,j}$, $\delta_{i,j+1/2}$, $\delta_{i-1/2,j}$ les quatre arêtes formant la maille $K_{i,j}$ et $\eta_{i,j-1/2}$, $\eta_{i+1/2,j}$, $\eta_{i,j+1/2}$, $\eta_{i-1/2,j}$ leurs médiatrices respectives. On note encore $\zeta_{i,j-1/2}$, (resp. $\zeta_{i+1/2,j}$, $\zeta_{i,j+1/2}$, $\zeta_{i-1/2,j}$) la droite joignant les points $C_{i,j}$ et $C_{i,j-1}$ (resp. $C_{i,j}$ et $C_{i+1,j}$, $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$, $C_{i,j}$ et $C_{i-1,j}$).

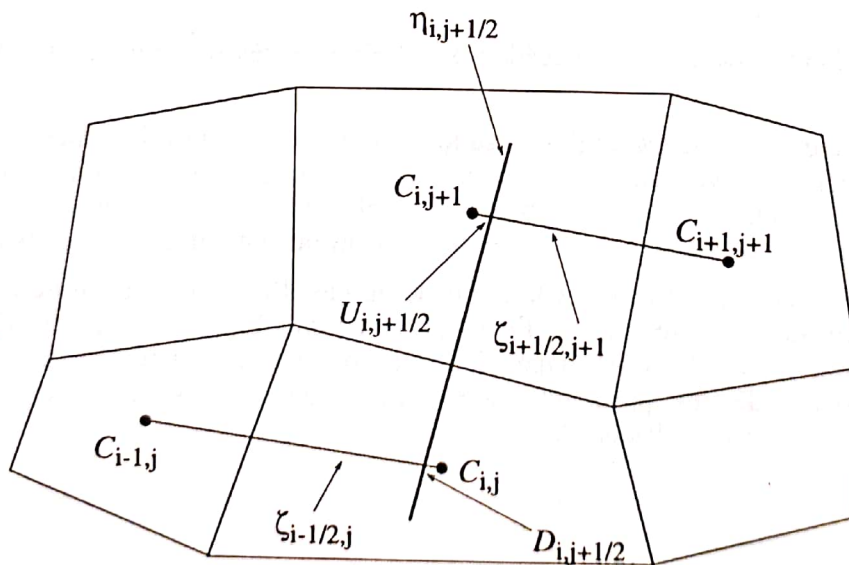


Figure 1

Considérons par exemple l'arête $\delta_{i,j+1/2}$ séparant les mailles $K_{i,j}$ et $K_{i,j+1}$ (cf. Figure 1). Pour approcher $\text{grad}u.n_K$ au milieu de cette arête, nous allons trouver une approximation de u en deux points $U_{i,j+1/2}$ et $D_{i,j+1/2}$ situés sur la médiatrice $\eta_{i,j+1/2}$ de l'arête $\delta_{i,j+1/2}$, de part et d'autre de celle-ci. On note $\phi_{i,j+1/2}$ l'approximation de $\text{grad}u.n_K$ au centre de l'arête $\delta_{i,j+1/2}$. Le choix naturel de $\phi_{i,j+1/2}$ consiste à prendre :

$$\phi_{i,j+1/2} = \frac{u_{i,j+1/2}^U - u_{i,j+1/2}^D}{d(U_{i,j+1/2}, D_{i,j+1/2})}, \quad (12)$$

où $u_{i,j+1/2}^U$ et $u_{i,j+1/2}^D$ sont des approximations de u en $U_{i,j+1/2}$ et $D_{i,j+1/2}$, et $d(U_{i,j+1/2}, D_{i,j+1/2})$ est la distance entre les points $U_{i,j+1/2}$ et $D_{i,j+1/2}$. On choisit les points $U_{i,j+1/2}$ et $D_{i,j+1/2}$ sur les droites ζ joignant les centres de mailles adjacentes. Les points $U_{i,j+1/2}$ et $D_{i,j+1/2}$ sont donc situés à l'intersection de la médiatrice $\eta_{i,j+1/2}$ avec les droites ζ adéquates, choisies selon la géométrie du maillage. Plus précisément :

$$\begin{aligned} U_{i,j+1/2} &= \eta_{i,j+1/2} \cap \zeta_{i-1/2,j+1} && \text{si } \eta_{i,j+1/2} \text{ passe à gauche de } C_{i,j+1}, \\ &= \eta_{i,j+1/2} \cap \zeta_{i+1/2,j+1} && \text{sinon,} \\ D_{i,j+1/2} &= \eta_{i,j+1/2} \cap \zeta_{i-1/2,j} && \text{si } \eta_{i,j+1/2} \text{ passe à gauche de } C_{i,j}, \\ &= \eta_{i,j+1/2} \cap \zeta_{i+1/2,j} && \text{sinon.} \end{aligned} \quad (13)$$

La propriété de consistance des flux requiert une approximation au deuxième ordre de u aux points $U_{i,j+1/2}$ et $D_{i,j+1/2}$. Dans le cas de la géométrie décrite dans la Figure 1, on peut utiliser dans (12) les approximations linéaires suivantes de $u_{i,j+1/2}^U$ et $u_{i,j+1/2}^D$:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1/2}^U &= \alpha u_{i+1,j+1}^a + (1 - \alpha) u_{i,j+1}^a && \text{où } \alpha = \frac{d(C_{i,j+1}, U_{i,j+1/2})}{d(C_{i,j+1}, C_{i+1,j+1})}, \\ u_{i,j+1/2}^D &= \beta u_{i-1,j}^a + (1 - \beta) u_{i,j}^a && \text{où } \beta = \frac{d(C_{i,j}, D_{i,j+1/2})}{d(C_{i-1,j}, C_{i,j})}. \end{aligned}$$

L'approximation de $\text{grad} u \cdot n_K$ au centre d'une arête verticale $\delta_{i+1/2,j}$, se fait de manière similaire, en introduisant des points $R_{i+1/2,j}$ intersection de la médiatrice $\eta_{i+1/2,j}$ et, (selon la géométrie), de la droite $\zeta_{i,j-1/2}$ (ou $\zeta_{i,j+1/2}$), et $L_{i+1/2,j}$ intersection de $\eta_{i+1/2,j}$ et $\zeta_{i+1,j-1/2}$ (ou $\zeta_{i+1,j+1/2}$).

Notons que les mailles du bord demandent un traitement particulier (cf. [F]).

Le schéma décrit ci-dessus est stable sous une condition géométrique sur les maillages considérés. Comme les flux sont consistants et que le schéma est conservatif, il vérifie aussi la propriété de consistance faible, c.à.d que l'erreur de consistance définie comme au paragraphe 2.1 tend vers 0 dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie faible *. Sous des hypothèses restrictives convenables, on en déduit la convergence (cf. [F]).

Des tests ont été effectués, sur le Laplacien et sur des équations de type $-\text{div}(\kappa \text{grad} u)$, où κ est variable (cf. [F]). Des comparaisons avec des solutions obtenues par la méthode des éléments finis, de type Q1 (bilinéaires), connaissant les solutions exactes, ont fourni des résultats qui sont souvent en faveur de VF9.

2.3 Autres types de Volumes Finis

D'autres possibilités existent pour définir des discrétisations par des volumes finis. On peut, par exemple, partir d'un maillage d'éléments finis. Les inconnues discrètes sont alors associées aux noeuds du maillage, et à chaque inconnue discrète, on associe un volume de contrôle, ce qui définit en fait un maillage dual. Plusieurs moyens sont envisageables pour le choix du volume

de contrôle, pour chaque type de maillage. Ce peut être, par exemple, en prenant les médiatrices des côtés des mailles. Le principe de la discrétisation est d'intégrer l'équation sur chaque volume de contrôle, et le calcul de $\text{grad}u.n_K$ s'effectue alors en utilisant les valeurs de u au sommet des mailles initiales. Cette méthode a été employée avec succès cf. [FLLO] (y compris pour des problèmes assez complexes tels que les équations de Navier-Stokes ou d'Euler). Elle a été couplée avec la méthode multigrille dans le cas de raffinement de maillages cf. [MC]. Pour le Laplacien, on peut dans certains cas démontrer la convergence cf. [CMMC].

3 Equations hyperboliques

3.1 Cas d'une équation unidimensionnelle

On s'intéresse maintenant au problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (14)$$

où f est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Il est bien connu que ce problème admet une et une seule solution faible entropique⁹. On considère le maillage défini par des mailles de centre x_i , $i \in \mathbb{Z}$, d'extrémités $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$. Soit

$$H = \sup_{i \in \mathbb{Z}} h_i \quad \text{et} \quad h = \inf_{i \in \mathbb{Z}} h_i .$$

La technique des volumes finis donne une discrétisation spatiale, c.à.d. ici une discrétisation de $\frac{\partial}{\partial x}(f(u))$; pour la discrétisation en temps, nous prendrons la discrétisation "Euler explicite". En notant k le pas de temps, un schéma de volumes finis s'écrira donc :

$$\begin{cases} \frac{h_i}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) + f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n = 0, & n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}, \\ u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x) dx, & i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (15)$$

où u_i^n est la valeur approchée de u à l'instant $t = nk$ et dans la maille i . Dans la terminologie usuelle des équations hyperboliques, $f_{i+1/2}^n$ s'appelle le flux numérique au point $x_{i+1/2}$ à l'instant $t = nk$ (c'est une approximation de $f(u)$ au point $x_{i+1/2}$ à l'instant $t = nk$). Dans le cas d'un schéma à $2p + 1$ points ($p \in \mathbb{N}^*$), le flux numérique peut s'écrire :

$$f_{i+1/2}^n = g(u_{i-p+1}^n, \dots, u_{i+p}^n) . \quad (16)$$

g est la fonction flux numérique, c'est donc elle qui détermine le schéma.

Consistance. La consistance du schéma est obtenue en écrivant la condition :

$$g(u, \dots, u) = f(u) .$$

⁹Pour la définition de "solution faible entropique", voir la note de bas de page numéro 10 au paragraphe 3.2.

Il s'agit bien de la consistance des flux comme pour le cas elliptique (cf. paragraphe 2). Remarquons que les schémas de type volumes finis sont souvent présentés dans la littérature comme des schémas aux différences finies. En fait lorsque $h_i = H$, pour tout i , la consistance des flux définie ci-dessus donne effectivement la consistance classique au sens des différences finies c.à.d. que l'erreur de consistance est de la forme $\varepsilon(H)$, telle que $\varepsilon(H) \rightarrow 0$ lorsque $H \rightarrow 0$. Le calcul de l'erreur de consistance se fait alors évidemment sur le schéma mis sous la forme suivante :

$$\frac{1}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{h_i}(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) = 0 .$$

Par contre, lorsque h_i dépend de i , le schéma n'est pas consistant au sens des différences finies, ce qu'on peut voir très simplement comme dans le cas elliptique décrit au paragraphe 2. Il est donc assez dangereux de présenter ces schémas comme des schémas aux différences finies. Du point de vue de la convergence, l'important est le caractère conservatif, c.à.d. le fait que l'approximation de $f(u)$ au point $i + 1/2$ pour l'équation associée à la maille i est la même que l'approximation de $f(u)$ au point $i + 1/2$ pour l'équation associée à la maille $i + 1$, ce qui est naturel dans la formulation des volumes finis, mais n'est pas forcément vérifié dans une formulation de type différences finies.

Stabilité. La plupart des auteurs utilise une stabilité BV (variation bornée) et une stabilité L^∞ pour montrer (en utilisant la consistance des flux) la convergence des schémas. Les stabilités BV et L^∞ ne sont pas automatiques, mais sont obtenues pour des choix convenables de la fonction g , et sous une condition de stabilité dite "CFL" (Courant-Friedrichs-Levy) pour les schémas explicites en temps (que nous considérerons ici). On peut citer par exemple le schéma décentré amont si f' est de signe constant, ou, plus généralement, le schéma de Godunov si f' change de signe. Le schéma de Godunov, en particulier, est peu précis (il est d'ordre 1 sur un maillage régulier), et diffuse beaucoup. Une assez vaste littérature traite des schémas plus précis (quasi ordre 2 sur un maillage régulier) conservant les stabilités BV et L^∞ . Citons, par exemple, le schéma de Van Leer. Sur les maillages irréguliers, les schémas d'ordre 2 deviennent d'ordre 1. Notons que dans la plupart des articles, seuls des maillages uniformes sont considérés, ce qui ne permet pas forcément de juger la performance exacte des schémas pour des cas réels.

3.2 Cas de la dimension 2

La littérature mathématique sur les équations hyperboliques en dimension 2 d'espace est assez réduite. Quelques travaux portent sur des maillages rectangulaires réguliers cf. [CM] ou irréguliers cf. [S], pour lesquels les méthodes de la dimension 1 sont adaptées afin de montrer la convergence des schémas classiques comme celui de Godunov.

Deux types de problèmes peuvent être abordés :

- l'étude de schémas plus précis que Godunov sur des maillages rectangles, réguliers ou non (schéma de Van Leer par exemple) ;
- l'étude de maillages formés de quadrangles ou de triangles.

Pour ces deux types de problèmes, on est confronté aux mêmes difficultés que dans le cas elliptique. En plus des difficultés liées à la consistance, on rencontre des difficultés liées à la stabilité. La notion de schéma "TVD" (variation totale décroissante), ou plus généralement de BV-stabilité, fort utilisée en dimension 1, ne semble pas adaptée à la dimension 2.

On voudrait généraliser les méthodes de la dimension 1 au cas de la dimension 2 pour un maillage quelconque, par exemple triangulaire. On considère ici l'équation avec condition initiale

suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\mathbf{v}f(u(x, t))) = 0 & x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (17)$$

où \mathbf{v} est un vecteur donné de \mathbb{R}^2 , f est une fonction (donnée) continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f' \geq 0$; et u_0 une fonction (donnée) bornée, à support compact, de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Soient α, β deux réels strictement positifs, $\alpha \leq \beta$. Soit \mathcal{T} un maillage triangulaire, on note $S(K)$ l'aire d'un triangle K du maillage, $c_i(K)$, $i = 1, 2, 3$ ses trois côtés et $l(c_i(K))$ la longueur du côté $c_i(K)$. L'hypothèse de non-dégénérescence du maillage (classique pour la méthode des éléments finis) peut s'écrire :

$$\exists h > 0 ; \begin{cases} \alpha h^2 \leq S(K) \leq \beta h^2, \\ \alpha h \leq l(c_i(K)) \leq \beta h \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad \forall K \in \mathcal{T} \quad (18)$$

On note k le pas de discrétisation en temps, et u_K^n l'inconnue discrète correspondant à la valeur de u dans la maille K au temps $t_n = nk$. Soit u^n la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $u^n(x) = u_K^n$ si $x \in K$; la solution approchée en temps et en espace est $u_{\tau, k}(t, x) = u^n(x)$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

On note $\mathbf{n}_{K, c_i(K)}$ la normale à $c_i(K)$ orientée vers l'extérieur de K . Puisque $f' \geq 0$, le schéma numérique considéré ici utilise une discrétisation en espace avec décentrement amont :

$$S(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{i=1}^3 l(c_i(K)) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K, c_i(K)} f(u_{c_i(K)}^n) = 0, \quad (19)$$

où $u_{c_i(K)}^n$ est la valeur de u "amont" sur l'arête $c_i(K)$ définie comme suit. Notons \mathcal{A} l'ensemble des arêtes du maillage; alors, pour $a \in \mathcal{A}$, on définit \mathbf{n}_a une normale à l'arête a telle que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_a \geq 0$. On définit alors K_a^+ (resp. K_a^-) le triangle amont (resp. aval) de a , i.e. tel que $\mathbf{n}_{K_a^+, a} \equiv \mathbf{n}_a$ (resp. $\mathbf{n}_{K_a^-, a} = -\mathbf{n}_a$); la valeur de u sur a est alors définie par : $u_a^n = u_{K_a^+}^n$.

On veut démontrer que $u_{\tau, k}$ converge, en un sens convenable, vers u , solution faible entropique¹⁰ (unique) du problème (17), quand $h \rightarrow 0$ et $k \rightarrow 0$, (avec condition éventuelle de stabilité). Tout d'abord, en écrivant u_K^{n+1} comme combinaison convexe de u_K^n et des $u_{c_i(K)}^n$, on montre la stabilité L^∞ (c.à.d. que $u_{\tau, k}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$, indépendamment de h et k) sous la condition de CFL :

$$\exists \gamma > 0 ; \quad k \leq \frac{\alpha h}{2\beta M_f \|\mathbf{v}\|_2} (1 - \gamma). \quad (20)$$

Par un argument classique, pour montrer que $u_{\tau, k}$ converge (par exemple dans $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ pour la topologie faible *), lorsque $k \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, en respectant la condition de CFL (20), vers la solution faible entropique du problème (17), il suffit de montrer que la limite éventuelle de $u_{\tau, k}$ est solution du problème (17). Pour montrer ceci, l'estimation L^∞ est insuffisante, même dans le cas linéaire ($f(u) = u$). La stabilité BV, suffisante (avec la stabilité L^∞) pour prouver la convergence en dimension 1 et en dimension 2 pour des maillages rectangles, ne semble pas vérifiée dans le cas général. Elle n'est toutefois pas nécessaire. Une stabilité plus faible, que nous appellerons "BV faible", permet d'obtenir la convergence du schéma dans le cas général. Cette condition de stabilité BV faible cf. [CGH] peut s'écrire :

$$\exists C > 0 ; \quad k \sum_n \sum_{a \in \mathcal{A}} l(a) |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_a| |f(u_{K_a^+}^n) - f(u_{K_a^-}^n)|^2 \leq C, \quad (21)$$

¹⁰ On appelle solution faible entropique du problème (17) la fonction u (on démontre effectivement l'existence et l'unicité d'une telle solution) vérifiant les équations (décrites plus loin) (22) avec $\mu_f = f(u)$ et (23) avec $\mu_\eta = \eta(u)$ et $\mu_F = F(u)$.

où C dépend de $\alpha, \beta, \gamma, u_0$ et f , mais pas de h ni de k . Cette estimation est vérifiée sous la condition de CFL (20) cf. [CGH] (c'est pour (21) que $\gamma > 0$ est nécessaire).

Dans le cas linéaire, on utilise l'estimation (21) pour majorer l'erreur due au schéma numérique et montrer la convergence.

Dans le cas non-linéaire, la difficulté supplémentaire tient au fait que, si $u_{\tau,K}$ converge vers u , et $f(u_{\tau,K})$ vers μ_f , les convergences étant dans $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ pour la topologie faible $*$, il reste à montrer que $\mu_f = f(u)$, et que u est la solution faible entropique du problème (17). La démonstration se fait en deux étapes :

1) on commence par montrer, grâce à l'estimation BV faible (21), que :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^2} (u\varphi_t(x,t) + \mu_f(x,t)\mathbf{v}\cdot\text{grad}\varphi(x,t))dxdt + \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\varphi(0,x)dx = 0 \\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+) , \end{cases} \quad (22)$$

(c.à.d. $u_t(x,t) + \text{div}(\mathbf{v}\mu_f(x,t)) = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}_+$, et $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, en un sens "faible") ;

2) on montre ensuite que, pour toute fonction η "entropie", c.à.d. convexe de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de flux associé F , c.à.d. F telle que $F' = f'\eta'$, l'inégalité d'entropie suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^2} (\mu_\eta(x,t)\varphi_t(x,t) + \mu_F(x,t)\mathbf{v}\cdot\text{grad}\varphi(x,t))dxdt + \int_{\mathbb{R}^2} \eta(u_0(x))\varphi(0,x)dx \geq 0 , \\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+), \varphi \geq 0 , \end{cases} \quad (23)$$

où μ_η (resp. μ_F) est la limite de $\eta(u_{\tau,K})$ (resp. $F(u_{\tau,K})$) dans $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ pour la topologie faible $*$ (on peut effectivement supposer que ces limites existent).

On déduit de (22) et (23) que $u_{\tau,K}$ converge vers u dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$, et que u est solution faible entropique du problème (17). Ce point utilise un résultat sur les solutions à valeurs "mesures" de DiPerna (cf. [DP]).

Notons qu'un résultat de convergence sur la méthode des volumes finis est donné dans [CCLS] sous des hypothèses plus restrictives sur le maillage, pour une équation plus générale.

3.3 Autres types de volumes finis

Comme dans le cas des équations elliptiques, on peut également partir d'un maillage éléments finis, et à chaque noeud du maillage, associer une inconnue discrète et un volume de contrôle. Ces volumes de contrôle peuvent même être "fictifs" ; l'important est que le schéma global obtenu soit conservatif. Dans [EG], on discrétise l'équation (17) avec $\mathbf{v} = \text{grad } p$; à chaque noeud du maillage formé par les triangles (ou par les tétraèdres en 3D), et à chaque instant, on associe une valeur de p et une valeur de u . La valeur de p peut être donnée par exemple par la résolution avec éléments finis IP_1 d'une équation de type elliptique en p . Les échanges se font entre les noeuds du maillage, avec un principe de décentrement amont comme dans le paragraphe précédent, et la convergence du schéma se démontre de manière semblable.

4 Références

- [CJ] P. Chavent, A. Jaffré, *Mathematical Models and Finite Element for Reservoir Simulation, Studies in Mathematics and its Applications, North Holland, 1980.*
- [CMMC] Z. Cai, J. Mandel and S. Mc Cormick, *The Finite Volume Element Method for Diffusion Equations on General Triangulations, to appear in SIAM J. Numer. Anal.*
- [CGH] S. Champier, T. Gallouët, R. Herbin, *Convergence of an Upstream Finite Volume Scheme on a Triangular Mesh for a Nonlinear Hyperbolic Equation, soumis à publication.*
- [Che] P. Chevrier, *Simulation Numérique de l'Interaction Arc Electrique - Ecoulement Gazeux dans les Disjoncteurs Moyenne et Haute Tension, Thèse de l'INPG, 1990.*
- [CCLS] B. Cockburn, F. Coquel, P. Le Floch, C.W. Shu, *Convergence of Finite Volume Methods, soumis à publication.*
- [CM] M.G. Crandall, A. Majda, *Monotone Difference Approximations for Scalar Conservation Laws, Math. Comp., 34, 149, 1-21, 1980.*
- [DP] R. Di Perna, *Measure-valued Solutions to Conservation Laws, Arch. Rat. Mech. Anal. 88, 223-270, 1985.*
- [EG] R. Eymard, T. Gallouët, *en préparation.*
- [FLLO] L. Fezoui, S. Lanteri, B. Larrouturou, C. Olivier, *Résolution Numérique des Equations de Navier-Stokes pour un Fluide Compressible en Maillage Triangulaire, Rapport INRIA.*
- [F] I. Faille, *Modélisation Bidimensionnelle de la Genèse et la Migration des Hydrocarbures dans un Bassin Sédimentaire, Thèse, en préparation.*
- [FS] P.A. Forsyth and P.H. Sammon, *Quadratic Convergence for Cell-Centered Grids, Appl. Num. Math. 4, 377-394, 1988.*
- [MC] S. Mc Cormick, *Multilevel Adaptive Methods for Partial Differential Equations, SIAM Publications, 1990.*
- [P] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Minkowycz and Sparrow Eds., Mc Graw Hill.*
- [S] R. Sanders, *On Convergence of Monotone Finite Difference Schemes with Variable Spatial Differencing, Math. Comp., 40, 161, 91-106, 1983.*

I. Faille

Institut Français du Pétrole Géologie-Géochimie

BP 311, 92506 Rueil-Malmaison Cedex

T. Gallouët, R. Herbin

Université de Savoie, Département de Mathématiques

BP 1104

73011 Chambéry Cedex