HAL open science

Méthodes numériques

Alexandre Munnier

To cite this version:

Alexandre Munnier. Méthodes numériques. Licence. France. 2020. hal-03135220

HAL Id: hal-03135220

https://hal.science/hal-03135220

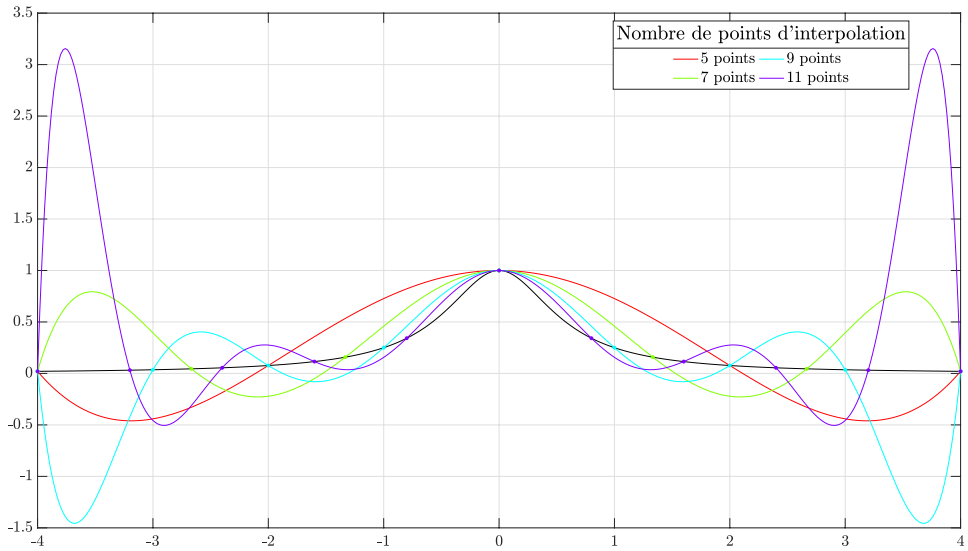
Submitted on 8 Feb 2021

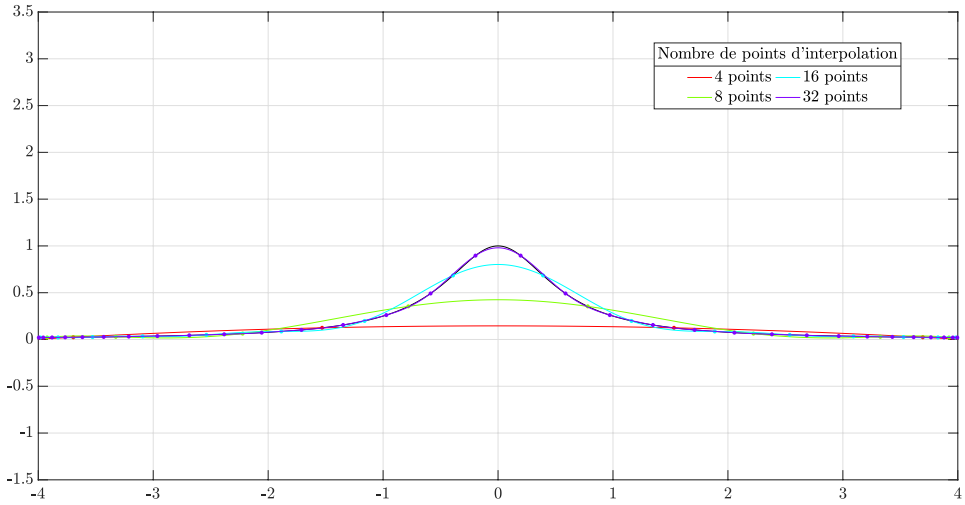
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes numériques

Alexandre Munnier
alexandre.munnier@univ-lorraine.fr





19 novembre 2020

Introduction

On rencontre souvent en mathématiques des problèmes pour lesquels la solution ne peut pas être obtenue à l'aide d'une "formule" explicite. Néanmoins, il est souvent possible de mettre en œuvre des **méthodes numériques** fournissant une **approximation** de la solution avec une précision aussi grande que l'on souhaite.

Ce cours est une première approche des méthodes numériques en considérant trois problèmes simples et classiques :

Problème 1 : Il consiste à déterminer les solutions (les racines) d'une équation :

$$f(\xi) = 0$$

c'est-à-dire à rechercher les valeurs ξ qui annulent la fonction f. Or, en dehors de cas particuliers simples (tels que les équations algébriques du premier et du second degré par exemple), il n'existe en général pas de formule permettant de calculer explicitement ces solutions. On est donc amené à mettre en oeuvre des méthodes qui permettent d'approcher une racine. Nous étudierons quelques unes de ces méthodes dans le chapitre 3. Elles consistent à générer des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \xi$. Ainsi, si on calcule les termes u_0, u_1, ... et on s'arrête à u_N, ce terme u_N sera une approximation de ξ assez précise, la précision dépendant du choix de N.

La performance d'une méthode sera fonction de la **rapidité de convergence** de la suite associée. On préférera l'utilisation d'une méthode performante car pour une précision donnée, nous aurons besoin de peu d'itérations. Ainsi l'étude théorique de ces méthodes numériques nécessite des outils d'analyse (suites, études de fonctions, ...). C'est pourquoi, nous commencerons le cours par quelques rappels et quelques compléments dans les chapitres 1 et 2.

Problème 2 : On cherche à reconstruire une fonction dont on ne connait les valeurs qu'en un certain nombre de points. Pour ce faire, on va déterminer le polynôme de plus petit degré qui passe par ces points. Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de la fonction. Nous chercherons également à évaluer l'erreur commise lorsque l'on remplace la fonction par son polynôme d'interpolation. Ce problème est l'objet du Chapitre 4.

Problème 3 : Considérons l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où f désigne une fonction continue dans l'intervalle (a,b) et F désigne une primitive de f. Lorsque la fonction F s'exprime à l'aide de fonctions usuelles le calcul numérique du nombre I se fera par l'évaluation de $F(a)$ et $F(b)$. Mais fréquemment, il est impossible d'exprimer F au moyen de fonctions connues (penser par exemple à $f(x) = e^{-x^2}$). Encore une fois l'utilisation de méthodes numériques, permettra d'obtenir une approximation du nombre I.

Table des matières

Introduction **i**

1 Suites définies par récurrence **3**
1.1 Rappels . . . 3
1.2 Théorèmes du point fixe . . . 5
1.3 Stabilité du point fixe . . . 6

2 Vitesse de convergence, ordre d'une méthode itérative **9**
2.1 Définitions . . . 9
2.2 Signification pratique . . . 10
2.3 Ordre de convergence pour une méthode de point fixe . . . 10

3 Résolution de l'équation $f(x) = 0$ **13**
3.1 Introduction . . . 13
3.2 Dichotomie . . . 13
3.3 Méthodes de points fixes . . . 15
3.3.1 Introduction . . . 15
3.3.2 La méthode de Newton . . . 15
3.4 Méthode de la sécante . . . 18
3.5 Méthode de Newton à pas variable . . . 19

4 Interpolation polynômiale **21**
4.1 Polynômes de Lagrange . . . 21
4.2 Méthode des différences divisées . . . 27
4.3 Convergence des polynômes d'interpolation . . . 29
4.4 Interpolation composée ou locale . . . 30
4.5 Polynômes d'Hermite . . . 32

5 Intégration numérique **35**
5.1 Formules de Newton-Cotes simples . . . 36
5.2 Formules de Newton-Cotes composées . . . 38
5.3 Formules de Gauss . . . 39

Chapitre 1

Suites définies par récurrence

1.1 Rappels

Théorème 1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et a un point de I. La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(a)$.*

Dans toute la suite, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que l'intervalle I est **stable par** f lorsque $f(I) \subset I$.

Soit I un intervalle stable par f. Il est possible qu'il existe un point $a \in I$ tel que $f(a) = a$. Un tel point est appelé **point fixe de** f **dans** I.

Théorème 2. *Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si I est stable par f et si a est un point de I, alors on peut définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de points de I par les relations*

$$u_0 = a, \tag{1.1a}$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \tag{1.1b}$$

Un exemple de représentation graphique des termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donné sur la figure 1.1.

La suite étant bien définie, on peut s'intéresser à son comportement asymptotique. Commençons par la remarque suivante

Théorème 3. *Soient I un intervalle stable par f, a un point de I et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par les relations $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*
Si on ajoute les hypothèses I fermé et f continue sur I, alors si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge sa limite est un point fixe de f dans I.

<u>Démonstration</u> :
Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ, puisque I est fermé alors $\ell \in I$ et comme f est continue sur I (donc en ℓ), la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(\ell)$ d'après le théorème 1. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Par unicité de la limite, nous obtenons que $\ell = f(\ell)$.

Théorème 4. *Soient I un intervalle stable par f, a un point de I et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par les relations $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*
Si f est **croissante sur** *I, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et le sens de variation dépend du signe de $u_1 - u_0$:*

- *Si $u_1 - u_0 \geqslant 0$ alors la suite est croissante;*
- *Si si $u_1 - u_0 \leqslant 0$ alors la suite est décroissante.*

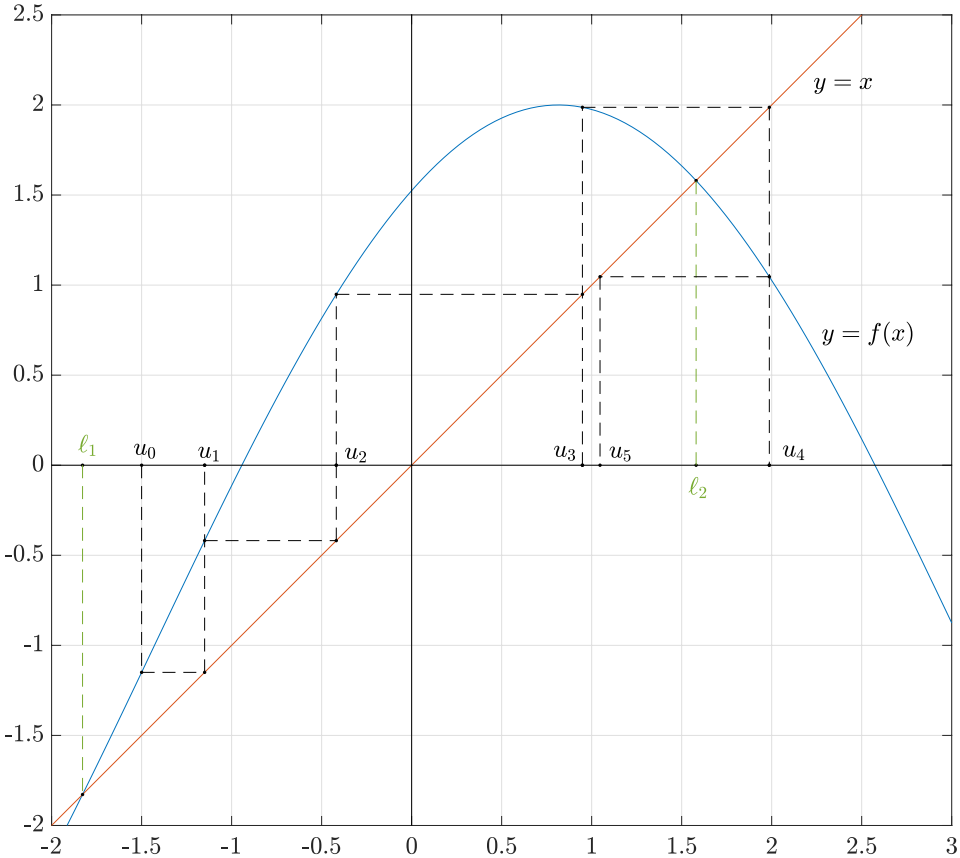


FIG. 1.1 – *Exemple de représentation graphique des termes de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par les relations* (1.1). *Les points fixes de la fonction* f *sont notés* ℓ_1 *et* ℓ_2.

<u>Démonstration</u> :
Supposons $u_1 - u_0 \geqslant 0$ et montrons que la suite est croissante. Pour cela montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété

$$\mathscr{P}_n = \text{“}u_{n+1} \geqslant u_n\text{”},$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie puisque nous avons supposé que $u_1 - u_0 \geqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, nous avons $u_{n+1} \geqslant u_n$ et puisque f est supposée croissante sur I, nous obtenons que $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$ c'est-à-dire $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$. Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Nous avons montré par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante.
Par une démonstration par récurrence similaire on montre que si $u_1 - u_0 \leqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Théorème 5. *Soient* I *un intervalle stable par* f, a *un point de* I *et* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *la suite définie par les relations* $u_0 = a$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f *est* **décroissante sur** I, *alors les suites extraites* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(y_n)_{n\geqslant 0}$ *définies par* $x_n = u_{2n}$ *et* $y_n = u_{2n+1}$ *sont monotones, de monotonies opposées et leur sens de variation dépend du signe* $u_2 - u_0$ *:*

- *Si* $u_2 - u_0 \geqslant 0$ *alors* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *est croissante et* $(y_n)_{n\geqslant 0}$ *est décroissante;*
- *Si* $u_2 - u_0 \leqslant 0$ *alors* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *est décroissante et* $(y_n)_{n\geqslant 0}$ *est croissante.*

Remarque : la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si les suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

Démonstration :
• Montrons que si f est décroissante sur I alors $f \circ f$ est croissante sur I :
Soient $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$. Comme f est décroissante sur I, nous avons $f(x) \geqslant f(y)$. Maintenant comme $f(x) \in I$ et $f(y) \in I$, nous avons aussi $f(f(x)) \leqslant f(f(y))$ i.e. $f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$.
Conclusion, pour tout $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$, $f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$.
• Comme les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sont définies par les relations $x_0 = u_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = f \circ f(x_n)$ et $y_0 = u_1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $y_{n+1} = f \circ f(y_n)$ et comme $f \circ f$ est croissante, d'après le théorème 4, ces deux suites sont monotones.
• Si $u_2 - u_0 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x_1 \geq x_0$ alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. De plus, comme f est décroissante, nous avons aussi $f(u_2) \leqslant f(u_0)$, c'est-à-dire $u_3 \leqslant u_1$ ou encore $y_1 \leqslant y_0$. La suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est donc décroissante.
• De même si $u_2 - u_0 \leqslant 0$, on obtient que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

1.2 Théorèmes du point fixe

Théorème 6. *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$ continue. Alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $f(\xi) = \xi$.*

Une application f de I dans $\mathbb{R}$ est dite **lipschitzienne sur** I si et seulement si il existe une constante $L \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall\ (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|\,.$$

Dans ce cas, on dit alors que f est lipschitzienne de rapport L.

Théorème 7. *Si une application f est lipschitzienne sur I alors elle est continue sur I.*

Remarque : Attention la réciproque est fausse. Par exemple $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Théorème 8. *Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur sur I. Supposons qu'il existe un nombre réel L tel que pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leqslant L$. Alors f est lipschitzienne sur I de rapport L.*

Remarque : attention la réciproque est fausse. Par exemple $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport 1, mais n'est pas dérivable en 0.

Démonstration :
Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. la fonction f est continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Or $c \in I$, donc nous avons $|f'(c)| \leq L$ et

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Une application f de I dans $\mathbb{R}$ est dite **contractante sur** I si et seulement si elle est lipschtzienne sur I de rapport $L < 1$.

Théorème 9 (Théorème du point fixe)**.** *Supposons I fermé, f contractante sur I de rapport k et I stable par f. Alors*
(i) f admet sur I un unique point fixe $a \in I$.

(ii) quelque soit la condition initiale $\alpha \in I$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $u_0 = \alpha$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers ce point fixe a.
(iii) nous avons les estimations suivantes :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$$
$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant \frac{k}{1-k}|u_n - u_{n-1}|$$

Démonstration : faite en TD.

1.3 Stabilité du point fixe

Soit f une application de I dans I admettant un point fixe $a \in I$. On dit que a est **un point fixe attractif ou stable** s'il existe $\eta > 0$ tel que toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a.

Soit f une application de I dans I admettant un point fixe $a \in I$. On dit que a est **un point fixe répulsif ou instable** lorsque pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et qui converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = a$.

Théorème 10. *Soit f une application de I dans I admettant un point fixe $a \in I$. On suppose f dérivable en a.*
(i) si $|f'(a)| < 1$, alors a est un point fixe attractif.
(ii) si $|f'(a)| > 1$, alors a est un point fixe répulsif.
(iii) si $|f'(a)| = 1$, alors les deux cas peuvent se produire

Démonstration :
(i) par définition de la dérivabilité de f en a, il existe $\delta > 0$ et une fonction ε définie sur $]-\delta,\delta[$ vérifiant $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et tel que

$$\forall\ h \in]-\delta,\delta[, \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h).$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, il existe $\tilde{\delta} \in]0,\delta]$ tel que

$$\forall\ h \in]-\tilde{\delta},\tilde{\delta}[, \quad |\varepsilon(h)| \leqslant \frac{1-|f'(a)|}{2}.$$

Soit $x \in]a-\tilde{\delta}, a+\tilde{\delta}[$. Nous avons

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$$

d'où

$$|f(x) - a| \leqslant \big(|f'(a)| + |\varepsilon(x-a)|\big)\,|x-a|$$

soit encore en posant $L = \dfrac{1+|f'(a)|}{2} < 1$ (puisque $|f'(a)| < 1$)

$$|f(x) - a| \leqslant L|x-a|$$

Par conséquent, il existe $\tilde{\delta} > 0$ et $L \in]0,1[$ tel que

$$\forall\ x \in]a-\tilde{\delta}, a+\tilde{\delta}[, \quad |f(x) - a| \leqslant L|x-a|. \tag{1.2}$$

Soit maintenant $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \in]a-\tilde{\delta},a+\tilde{\delta}[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre alors facilement par récurrence à l'aide de (1.2) que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \in]a-\tilde{\delta},a+\tilde{\delta}[\quad \text{et} \quad |u_n - a| \leqslant L^n |u_0 - a|.$$

Donc pour tout $u_0 \in]a-\tilde{\delta},a+\tilde{\delta}[$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers a i.e. a est un point fixe attractif.

(ii) il existe $\tilde{\delta} \in]0,\delta]$ tel que

$$\forall\ h \in]-\tilde{\delta},\tilde{\delta}[, \quad |\varepsilon(h)| \leqslant \frac{|f'(a)|-1}{2}.$$

Soit $x \in]a-\tilde{\delta},a+\tilde{\delta}[$. Nous avons

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$$

d'où

$$|f(x) - a| \geqslant \big||f'(a)| - |\varepsilon(x-a)|\big|\,|x-a|$$

soit encore en posant $M = \dfrac{|f'(a)|+1}{2} > 1$ (puisque $|f'(a)| > 1$)

$$|f(x) - a| \geqslant M|x-a|$$

Par conséquent, il existe $\tilde{\delta} > 0$ et $M > 1$ tel que

$$\forall\ x \in]a-\tilde{\delta},a+\tilde{\delta}[, \quad |f(x) - a| \geqslant M|x-a|. \tag{1.3}$$

Soit maintenant $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et qui converge vers a. Par définition de la convergence, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\ n \geqslant n_0, \quad u_n \in]a-\tilde{\delta},a+\tilde{\delta}[$$

On montre alors facilement par récurrence à l'aide de (1.3) que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\forall\ n \geqslant n_0 \quad |u_n - a| \geqslant M^{n-n_0}|u_{n_0} - a|.$$

Deux cas se présentent alors à nous : soit $u_{n_0} \neq a$ soit soit $u_{n_0} = a$. Le premier cas ne peut pas se produire. En effet, si $u_{n_0} \neq a$ alors d'après l'inégalité précédente la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers a. Ainsi nécessairement, $u_{n_0} = a$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire à partir du rang n_0. Le point a est un point fixe répulsif.

Remarque : en fait, on a montré dans la démonstration du point (ii) que si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et que l'un de ses termes "s'approche" de a alors le terme suivant s'en ecarte. D'où le terme de point fixe répulsif.
Remarque : dans le point (i), si on suppose de plus la continuité de f' dans un voisinage de a, alors on peut trouver un intervalle centré en a sur lequel f est une contraction. Dans ce cas on peut appliquer le théorème 9 du point fixe.

Chapitre 2

Vitesse de convergence, ordre d'une méthode itérative

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction générale, les méthodes numériques que nous allons décrire dans ce cours vont consister à générer une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, qui lorsqu'elle converge, converge vers le résultat souhaité ξ.

Ainsi, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge alors, pour une précision $\varepsilon > 0$ donnée, nous savons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_N - \xi| < \varepsilon$$

et par conséquent, le terme u_N sera une approximation de la limite à ε près.

Généralement, les suites utilisées seront des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Ainsi, pour calculer le terme u_N nous seront amenés à calculer tous les termes jusqu'au rang N : u_1, u_2,...,u_N.

Or d'un point de vue pratique, pour une précision $\varepsilon > 0$ donnée, nous souhaitons obtenir une approximation de ξ le plus rapidement possible. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et (v_n) sont deux suites toutes deux convergentes vers la même limite ξ telles que

$$|u_{N_1} - \xi| < \varepsilon, \quad \text{et} \quad |v_{N_2} - \xi| < \varepsilon \quad \text{avec} \quad N_1 < N_2$$

il sera préférable d'utiliser la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. En effet plus N_1 sera petit, moins de calculs nous aurons à faire ! Et nous verrons plus loin que la différence peut être très importante.

Il est donc important d'étudier aussi (lorsque cela est possible) la vitesse de convergence d'une suite.

2.1 Définitions

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers le nombre ℓ. On dit que cette suite **converge linéairement** vers ℓ ou que la vitesse de convergence de la suite est linéaire, s'il existe μ, $0 < \mu < 1$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|} = \mu. \tag{2.1}$$

Le nombre μ est appelé **vitesse de convergence**.

Lorsque (2.1) n'est vérifiée pour aucun $\mu < 1$, on dit que la vitesse de convergence de la suite est **sous-linéaire**.

Lorsque (2.1) est vérifiée pour $\mu = 0$, on dit alors que la convergence de la suite est **super-linéaire**. Dans ce cas, il est possible de préciser la vitesse de convergence :

On dit que la suite est **convergente d'ordre** q, pour $q > 1$, s'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^q} = \mu. \tag{2.2}$$

Une convergence d'ordre 2 est aussi dite **quadratique** et une convergence d'ordre 3 est aussi dite **cubique**.

2.2 Signification pratique

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = |u_n - \ell|$. Le nombre e_n représente l'erreur commise lorsqu'on approche le nombre ℓ par le nombre u_n.

- Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge **linéairement** vers ℓ alors il existe $0 < \mu < 1$ tel que $e_{n+1} \sim \mu e_n$ ce qui signifie qu'asymptotiquement (c'est-à-dire pour n assez grand) l'erreur est réduite d'un facteur μ à chaque itération.
- Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **convergente d'ordre** $q > 1$, alors il existe $0 < \mu$ tel que $e_{n+1} \sim \mu e_n^q$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons
$$\lambda_n = -\frac{\ln e_n}{\ln 10}.$$
Le nombre λ_n est une"mesure" du nombre de décimales exactes de u_n (cf. Fig 2.1). En effet si $e_n = 10^{-5}$ par exemple alors $\lambda_n = 5$, si $e_n = 10^{-10}$ alors $\lambda_n = 10$, etc...
Par définition, si $e_{n+1} \sim \mu e_n^q$ alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ qui tend vers 0 telle que :
$$e_{n+1} = \mu e_n^q (1 + \varepsilon_n),$$
c'est à dire :
$$-\frac{\ln e_{n+1}}{\ln 10} = -\frac{\ln \mu}{\ln 10} - q\frac{\ln e_n}{\ln 10} - \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\ln 10},$$
et comme $-\ln(e_n)$ et $-\ln e_{n+1}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ (car e_n tend vers 0), on en déduit que :
$$\lambda_{n+1} \sim q\lambda_n.$$
Ceci signifie qu'asymptotiquement, le nombre u_{n+1} possède q fois plus de "décimales exactes" que le nombre u_n.

2.3 Ordre de convergence pour une méthode de point fixe

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et soit ℓ un point fixe de f. Si f est une fonction "régulière" en ℓ (disons pour fixer les idées qu'elle admet une dérivée d'ordre 3 en ℓ) d'après la formule Taylor-Young, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \ell &= f(u_n) - f(\ell) \\ &= f'(\ell)(u_n - \ell) + \frac{f''(\ell)}{2}(u_n - \ell)^2 + \frac{f'''(\ell)}{6}(u_n - \ell)^3 + o((u_n - \ell)^3). \end{aligned}$$

Plusieurs cas se présentent à nous :

- Si $f'(\ell) \neq 0$ et $|f'(\ell)| < 1$, alors $e_{n+1} \sim \mu e_n$ avec $\mu = |f'(\ell)|$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge linéairement vers ℓ.

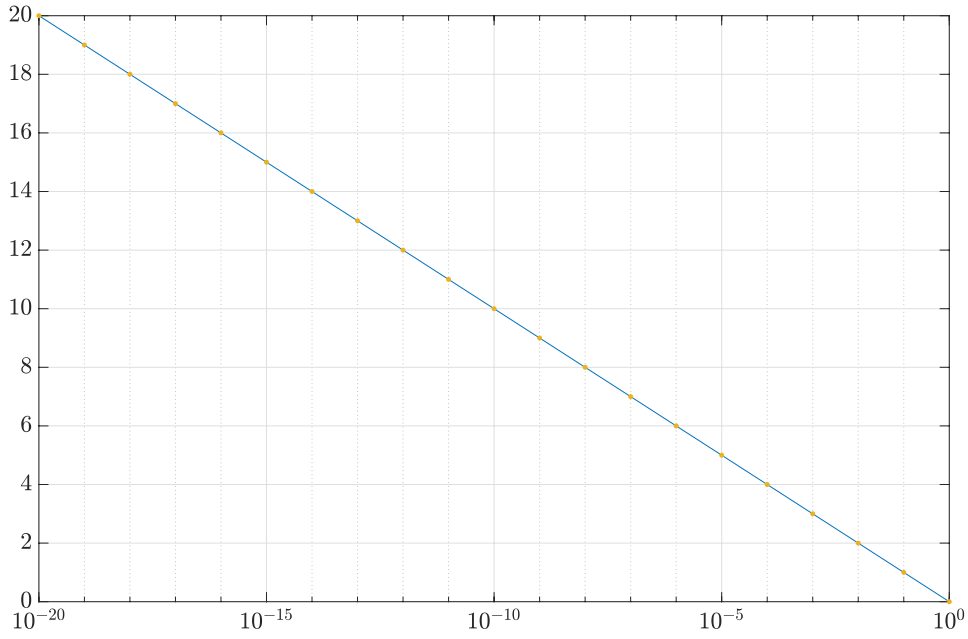


FIG. 2.1 – *Graphe de la fonction* $e \mapsto -\ln(e)/\ln(10)$ *avec une échelle logarithmique en abscisse.*

- Si $f'(\ell) = 0$ et $|f''(\ell)| \neq 0$, alors $e_{n+1} \sim \mu e_n^2$ avec $\mu = \frac{|f''(\ell)|}{2}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente d'ordre 2.
- Si $f'(\ell) = f''(\ell) = 0$ et $|f'''(\ell)| \neq 0$, alors $e_{n+1} \sim \mu e_n^3$ avec $\mu = \frac{|f'''(\ell)|}{6}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente d'ordre 3.

Et ainsi de suite, si on suppose plus de régularité sur f.

Chapitre 3

Résolution de l'équation $f(x) = 0$

3.1 Introduction

Nous allons étudier dans ce chapitre deux "familles" de méthodes numériques pour résoudre l'équation $f(x) = 0$:

1. la **dichotomie** basée uniquement sur la continuité de la fonction f et sur l'obtention d'un intervalle $[a,b]$ tel que $f(a)f(b) \leqslant 0$.
2. une famille assez vaste où l'idée de base est de substituer à f (localement), une approximation affine de f : $f(x) \simeq ax + b$ au voisinage de u_n. Ainsi, si $a \neq 0$, alors on construit u_{n+1} comme étant le zéro de l'approximation affine à savoir $u_{n+1} = -\frac{b}{a}$. Dans cette famille, la méthode la plus évidente est celle de Newton où l'on choisit pour approximation affine la droite tangente à f au point u_n.
   D'autre part, on arrive la plupart du temps à les formaliser comme des suites du type $u_{n+1} = g(u_n)$ et donc comme des problèmes de point fixe (ξ sera un zéro de f si et seulement si ξ est un point fixe de g).

3.2 Dichotomie

Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 11 (Théorème des Valeurs Intermédiaires)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$, continue sur I. S'il existe deux éléments a et b de I tels que $a < b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $f(\xi) = 0$.*

Une démonstration classique de ce théorème repose sur la méthode de dichotomie. Décrivons cette méthode :

<u>Méthode de dichotomie</u> :
Nous construisons de manière récurrente deux suites $(a_n)_{\geqslant 0}$ et $(b_n)_{\geqslant 0}$ par les relations suivantes :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b,$$

et pour $n \in \mathbb{N}$, si $f(\lambda_n)f(a_n) \leqslant 0$ où $\lambda_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ alors

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = \lambda_n, \quad \text{sinon} \quad a_{n+1} = \lambda_n, \quad b_{n+1} = b_n.$$

On montre alors que ces deux suites vérifient par construction:

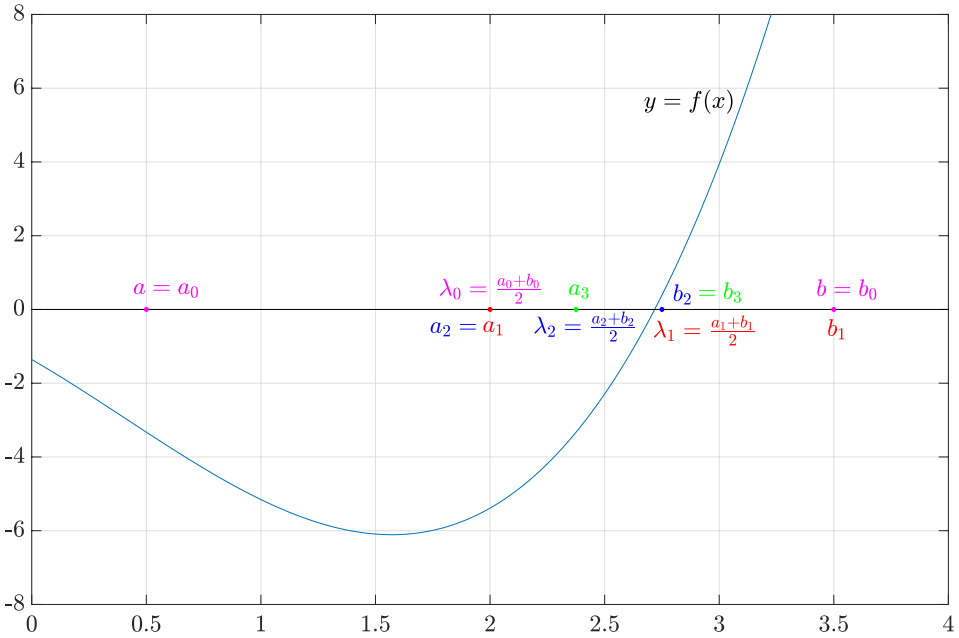


FIG. 3.1 – *Quelques termes consécutifs obtenus avec la méthode de dichotomie.*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n, \tag{3.1}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |a_n - b_n| = \frac{|a-b|}{2^n}, \tag{3.2}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(a_n)f(b_n) \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Les propriétés (3.1) et (3.2) nous disent que les deux suites $(a_n)_{\geqslant 0}$ et $(b_n)_{\geqslant 0}$ sont adjacentes et elles convergent donc vers une même limite $\xi \in [a,b]$. De plus, comme f est continue sur $[a,b]$, les suites $(f(a_n))_{n\geqslant 0}$ et $(f(b_n))_{n\geqslant 0}$ convergent vers $f(\xi)$. En passant à la limite dans la relation (3.3) on obtient que $f(\xi)^2 \leqslant 0$, c'est à dire $f(\xi) = 0$.

Cette démonstration nous indique donc une méthode itérative très simple pour obtenir une approximation du nombre ξ.

Vitesse de convergence : Comme $\xi \in [a_n,b_n]$, notons $e_n = (b_n - a_n)$ (l'erreur commise en choisissant a_n ou b_n comme valeur approchée de ξ est inférieure à e_n). On a alors :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{2} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui nous permet d'affirmer que la convergence est **linéaire**.

Remarque : Cette égalité nous permet aussi d'avoir une estimation a priori du nombre d'itérations à effectuer pour que a_n et b_n soient des approximations de ξ à 10^{-k} près. En effet, il suffit que $\frac{|a-b|}{2^n} \leq 10^{-k}$ c'est-à-dire

$$n \geqslant k\frac{\ln 10}{\ln 2} + \frac{\ln|a-b|}{\ln 2}.$$

Avantages de la méthode : La méthode de dichotomie est une méthode très simple à mettre en œuvre et elle nécessite des hypothèses minimales sur f. Elle est très robuste (elle converge toujours vers une racine de f).

Inconvénients de la méthode : Cette méthode est relativement lente et elle nécessite la connaissance de deux éléments a et b de I tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (on doit être en mesure d'encadrer la racine cherchée).

3.3 Méthodes de points fixes

3.3.1 Introduction

La recherche d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ peut être vue comme la recherche d'une solution de l'équation $g(x) = x$ en posant par exemple :

- $g(x) = x - f(x)$
- $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\alpha}$, avec $\alpha \neq 0$
- $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\alpha(x)}$, avec $\forall\ x \in I$, $\alpha(x) \neq 0$

Ainsi la recherche d'une racine de f se ramène à la recherche d'un point fixe de g. On peut alors "tenter" la méthode numérique

$$u_0 = \text{“estimation”},$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

En effet, nous avons vu que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi définie converge, alors elle converge vers un point fixe de g (en supposant g continue sur I).
Dans le chapitre 2, nous avons étudié ces suites et en particulier nous avons vu que :
∘ si g est une contraction sur I (fermé) alors pour tout u_0 dans I la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers l'unique point fixe de g sur I (théorème 9)
∘ si ξ est une racine de f c'est-à-dire un point fixe et g et si $|g'(\xi)| < 1$, alors, pourvu que u_0 soit "suffisamment près" de ξ, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge (théorème 10)
et dans les deux cas la convergence est au moins linéaire.

Nous allons maintenant étudier une méthode qui entre dans cette catégorie des "méthodes de point fixe" : la méthode de Newton.

3.3.2 La méthode de Newton

Description de la méthode :
Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, l'idée est de substituer à la fonction f une approximation affine et pour cela nous allons utiliser sa tangente :

Soit a un point de l'intervalle I, "proche" de la racine ξ. Alors si f est dérivable en a nous avons

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

soit encore

$$f(x) = f_a(x) + o(x - a), \quad \text{avec} \quad f_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

On cherche alors une racine de l'approximation affine f_a de f. Celle-ci est très facile à déterminer et on peut espérer qu'elle sera "plus proche" de la racine ξ de f que a.

L'équation $f_a = 0$ admet une racine b si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

On peut alors recommencer avec b à la place de a et ainsi de suite ... On obtient ainsi **la méthode de Newton** :

$$\boxed{\begin{array}{c} u_0 \text{ donné,} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{array}}$$

On vérifie que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi définie converge vers une limite ξ, alors $f(\xi) = 0$.

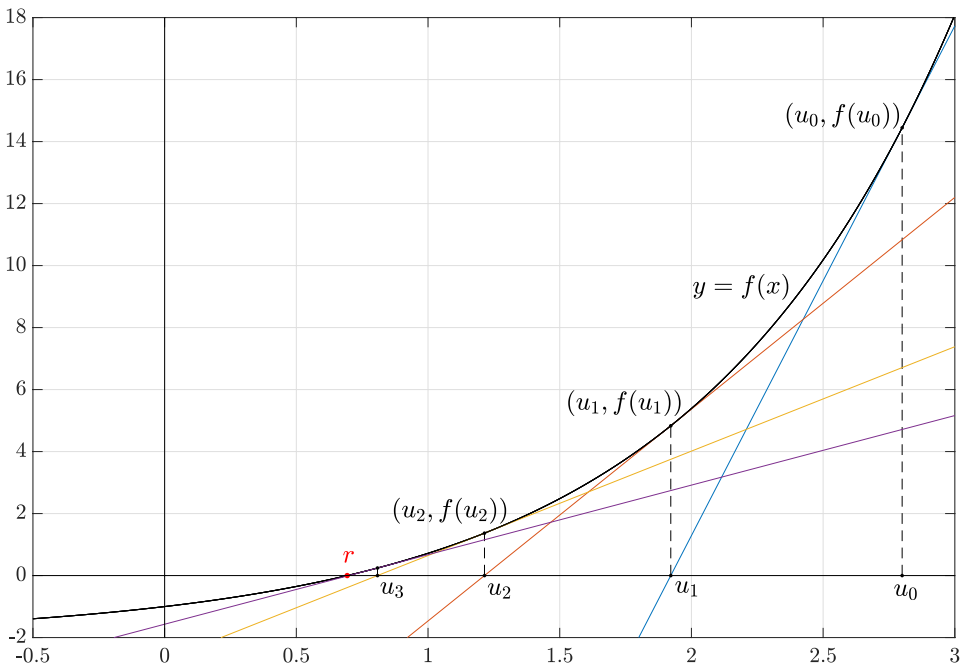


FIG. 3.2 – *Quelques termes consécutifs obtenus avec la méthode de Newton. On remplace la courbe par sa tangente dont on cherche le point d'intersection avec l'axe des abscisses.*

Remarque : Pour que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f'(u_n) \neq 0$.

Convergence et vitesse de convergence de la méthode :

Théorème 12. *Soient f une application de I dans I et $\xi \in I$ une racine de la fonction f. On suppose que f est deux fois dérivable sur un voisinage de ξ et que $f'(\xi) \neq 0$. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $u_0 \in]\xi - \eta\,, \xi + \eta[\cap I$ la méthode de Newton génère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui est bien définie, qui converge vers ξ et dont la vitesse de convergence est au moins quadratique.*

Démonstration :

La méthode de Newton est en fait une méthode de point fixe : en effet, nous avons

$$\boxed{\begin{array}{c} u_0 \text{ donné,} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{array}} \quad \text{avec} \quad \boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Ainsi ξ est une racine de f si et seulement si ξ est un point fixe de g.

Comme nous avons supposé $f'(\xi) \neq 0$, par continuité de f' (puisque f est deux fois dérivable sur un voisinage de ξ) il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de ξ sur lequel f' ne s'annule pas. Il en résulte

que la fonction g est bien définie sur ce voisinage $\mathscr{V}$, dérivable sur $\mathscr{V}$ et que

$$\forall\ x \in V, \quad g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Ainsi nous avons $g'(\xi) = 0$ donc $|g'(\xi)| < 1$ et d'après le théorème 10, ξ est un point fixe attractif de g. De plus d'après les calculs de la section 2.3, la vitesse de convergence est au moins quadratique.

Remarque : Ce résultat de convergence indique qu'il y a convergence si u_0 est choisi "assez proche" de la racine ξ. Si u_0 est trop "éloigné" de ξ alors la méthode de Newton peut ne pas converger comme le montre l'exemple de la Fig. 3.3.

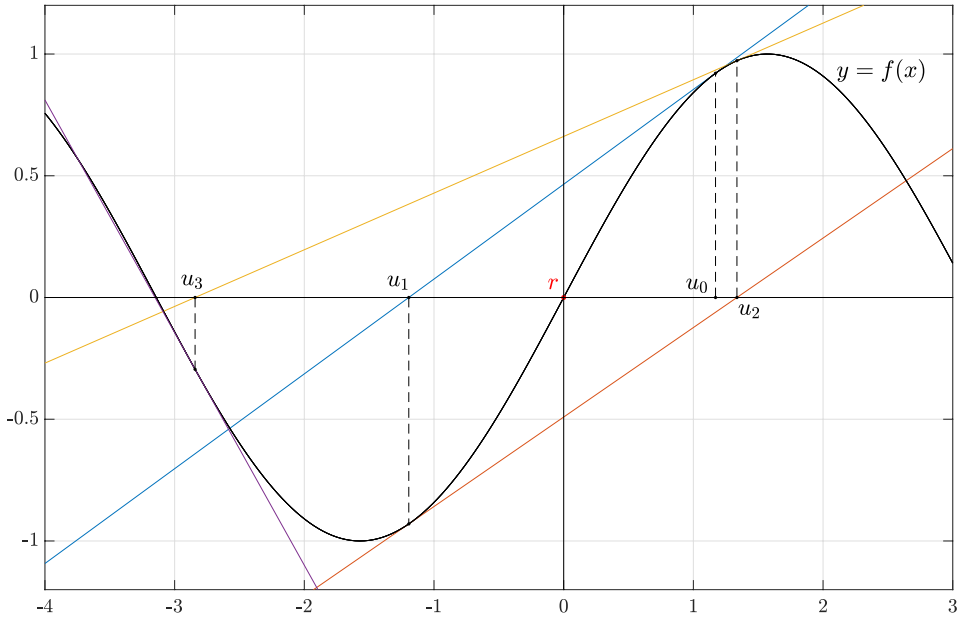


FIG. 3.3 – *Quelques termes consécutifs obtenus avec la méthode de Newton. Le point u_0 est trop loin de la racine r et la méthode ne converge pas vers r.*

Avantages de la méthodes :
• C'est une méthode qui converge très rapidement.
• Cette méthode se généralise aux fonctions à plusieurs variables.

Inconvénients de la méthodes :
• Pour que la méthode de Newton converge, il faut partir "suffisamment" près de la racine. Il faut donc localiser au préalable la racine.
• Il faut calculer la dérivée de f c'est-à-dire implémenter un algorithme de calcul. La fonction f peut être très compliquée et de plus l'algorithme de calcul de f peut être plus complexe qu'une expression mathématique.

Pour remédier à ce dernier inconvénient, nous pouvons remarquer que pour h petit :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ainsi, nous pouvons obtenir une méthode assez voisine qui évite le calcul de f' :

$$\boxed{\begin{array}{c} u_0 \text{ donné,} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)h_n}{f(u_n + h_n) - f(u_n)} \end{array}}$$

Cette méthode est bien définie si à chaque itération nous avons $f(u_n + h_n) - f(u_n) \neq 0$. Remarquons que le pas de calcul h_n peut être éventuellement différent à chaque itération (afin que l'on puisse "l'adapter" à chaque itération).

Dans le cas d'un pas constant $h_n = h$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g associée est

$$\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)h}{f(x+h) - f(x)}}$$

Remarque : nous avons remarqué précédemment que l'algorithme de calcul de f peut être très compliqué et dans cet algorithme, nous devons calculer à chaque itération non seulement $f(u_n)$, mais aussi $f(u_n+h)$. Pour éviter ce double calcul, on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = u_n - u_{n-1}$. En effet, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge alors la suite $(u_n - u_{n-1})$ converge vers 0. Ainsi, à chaque itération nous devrons calculer uniquement $f(u_n)$ puisque le calcul de $f(u_{n-1})$ aura déjà été effectué et "sauvegardé" à l'itération précédente. On obtient ainsi une nouvelle méthode : la méthode de la sécante.

3.4 Méthode de la sécante

Description de la méthode :

Dans cette méthode, nous substituons au voisinage de u_n la fonction f par la droite passant par $(u_n, f(u_n))$ et $(u_{n-1}, f(u_{n-1}))$:

$$f_{u_n}(x) = f(u_n) + \frac{f(u_n) - f(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}}(x - u_n).$$

Le nouvel itéré u_{n+1} sera encore une fois la racine de cette approximation affine f_{u_n} de f. Celui-ci est bien défini si $u_n \neq u_{n-1}$ et $f(u_n) \neq f(u_{n-1})$ et dans ce cas il vaut :

$$u_{n+1} = u_n - f(u_n)\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})}\right).$$

On obtient ainsi **la méthode de la sécante** :

$$\boxed{\begin{array}{c} u_0,\ u_1 \text{ donnés,} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - f(u_n)\left(\dfrac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})}\right) \end{array}}$$

Remarques :
• Cette méthode est la forme $u_{n+1} = g(u_n, u_{n-1})$. Elle ne rentre pas exactement dans le cadre des méthodes de point fixe.
• Pour "démarrer" la méthode, nous avons besoin des deux premiers termes u_0 et u_1. Pour déterminer u_1, il est possible de faire une première itération avec une autre méthode.

Vitesse de convergence de la méthode :
On montre que lorsque la méthode de la sécante converge, sa convergence est au moins d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$, le nombre d'or.

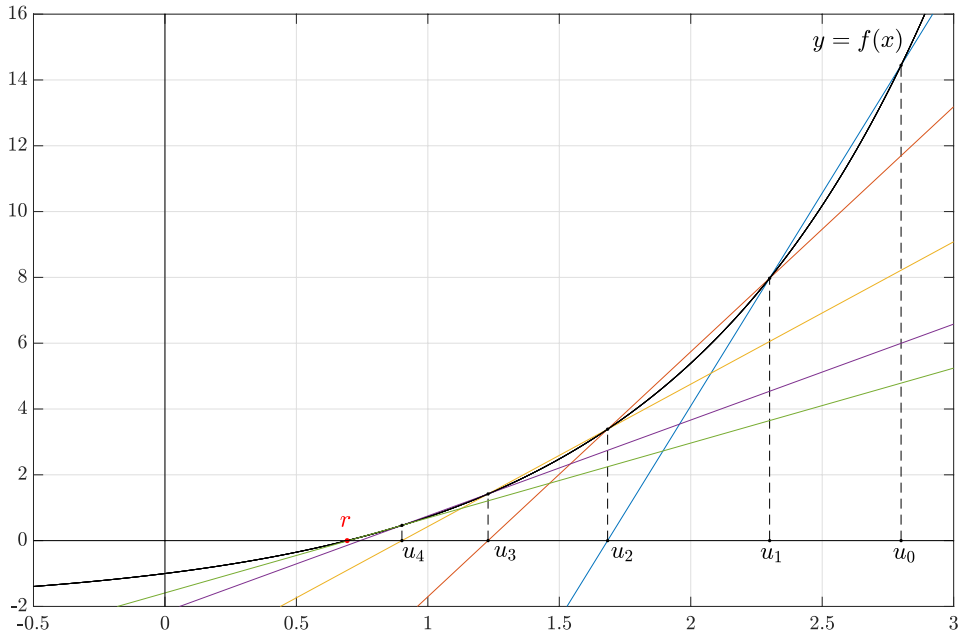


FIG. 3.4 – *Quelques termes consécutifs obtenus avec la méthode de la sécante. On remplace la courbe par sa corde.*

3.5 Méthode de Newton à pas variable

Nous avons vu la dichotomie, méthode robuste (convergence assurée) mais lente, puis les méthodes de Newton ou de la sécante, rapides mais qui en général ne convergent que si on part suffisamment près de la racine.

Pour obtenir une méthode qui allie robustesse et rapidité, on peut essayer de combiner dichotomie et Newton (ou sécante) : par exemple, on utilise la méthode de dichotomie au début sur quelques itérations, puis lorsqu'on est "assez proche" de la racine, on utilise la méthode de Newton (ou de la sécante). Il y a de nombreuses variantes possibles. Néanmoins cette approche conduit à des algorithmes compliqués qui, de plus, ne se généralisent pas aux fonctions de plusieurs variables.

Une autre méthode consiste à considérer la méthode de Newton sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c} u_0 \text{ donné,} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \tau_n \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)_{n\geqslant 0}}, \quad \tau_n \in]0,1] \end{array}}$$

Lorsque $\tau_n = 1$, on retrouve la méthode de Newton "pure" et lorsque $\tau_n \in]0,1[$, on a la méthode de Newton "corrigée".

Comment allons-nous déterminer à chaque itération le pas τ_n ? A chaque itération, on utilise d'abord $\tau_n = 1$. Deux cas se présentent alors
• Soit $|f(u_{n+1})| < |f(u_n)|$ et dans ce cas la méthode a "progressé". On conserve alors $\tau_n = 1$ et u_{n+1} déjà calculé, puis on passe à l'itération suivante.
• Soit $|f(u_{n+1})| \geqslant |f(u_n)|$, alors dans ce cas on réduit le pas τ_n. Par exemple, on peut prendre $\tau_n = \frac{1}{2}$ et on recommence avec ce nouveau pas.
On obtient l'algorithme suivant :

```
tant que ``non convergence''
d ← f(u_n)/f'(u_n)
τ ← 1
répéter
u_{n+1} = u_n - τ*d
τ ← τ/2
jusqu'à ce que |f(u_{n+1})|<|f(u_n)|
fin tant que
```

Le lemme suivant montre la convergence de cet algorithme :

Lemme 13. *Soit f une fonction dérivable en x, telle que $f(x) \neq 0$ et $f'(x) \neq 0$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$\left| f\left(x - \tau \frac{f(x)}{f'(x)}\right) \right| < |f(x)|, \quad \forall \tau \in]0,t[.$$

La démonstration de ce lemme sera faite en TD.

Chapitre 4

Interpolation polynômiale

Dans cette partie, on s'intéresse au problème suivant : Une fonction f définie sur un intervalle réel $[a,b]$ est connue en n points $x_1,\dots,x_n$. On cherche à construire un polynôme L de degré $n-1$ tel que $L(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k = 1,\dots,n$. C'est le problème de l'interpolation de Lagrange.

Commençons par faire quelques rappels :

1. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, on note $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de $|f|$ c'est à dire :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$
2. Pour tout entier positif n, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. C'est un espace vectoriel de dimension $n+1$ dont une base est $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$.
3. Un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes dans $\mathbb{R}$. En particulier, un polynôme de degré n admettant $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.
4. Soit P un polynôme de degré n et $x_1,\dots,x_n$ des racines distinctes. Alors :
$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k),$$
où a_n est le coefficient du monôme de plus haut degré de P.
5. Si P est un polynôme tel que $P(x_0) = P'(x_0) = 0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un polynôme R tel que $P(x) = (x - x_0)^2 R(x)$ (i.e. $P(x)$ est factorisable par $(x - x_0)^2$).

4.1 Polynômes de Lagrange

Soit $x_1,\dots,x_N$ des nombres réels **distincts** et $y_1,\dots,y_N$ des nombres réels quelconques. On cherche un polynôme P de degré minimal tel que :

$$P(x_i) = y_i \qquad \text{pour tout } i = 1,\dots,N. \tag{4.1}$$

Théorème 14. *Il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_{N-1}[x]$ vérifiant* (4.1).

Démonstration. Pour tout $k = 1,\dots,N$ on introduit les polynômes suivants :

$$\begin{aligned}\ell_k(x) &= \left(\frac{x-x_1}{x_k-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_k-x_2}\right)\dots\left(\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\dots\left(\frac{x-x_N}{x_k-x_N}\right)\\ &= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right),\end{aligned}$$

et on vérifie sans peine que $\ell_k \in \mathbb{R}_{N-1}[x]$ et, pour tout j et k dans $\{1,\ldots,N\}$:

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

(Des exemples de tels polynôme sont donnés sur la Fig. 4.1). Le polynôme :

$$P = \sum_{k=1}^{N} y_k \ell_k,$$

est dans $\mathbb{R}_{N-1}[x]$ et satisfait (4.1). Supposons qu'il existe un autre polynôme $\hat{P}$ dans $\mathbb{R}_{N-1}[x]$ qui vérifie (4.1). Alors $P - \hat{P}$ est encore un polynôme dans $\mathbb{R}_{N-1}[x]$ qui admet N racines distinctes, à savoir $x_1,\ldots,x_N$. C'est donc le polynôme nul. □

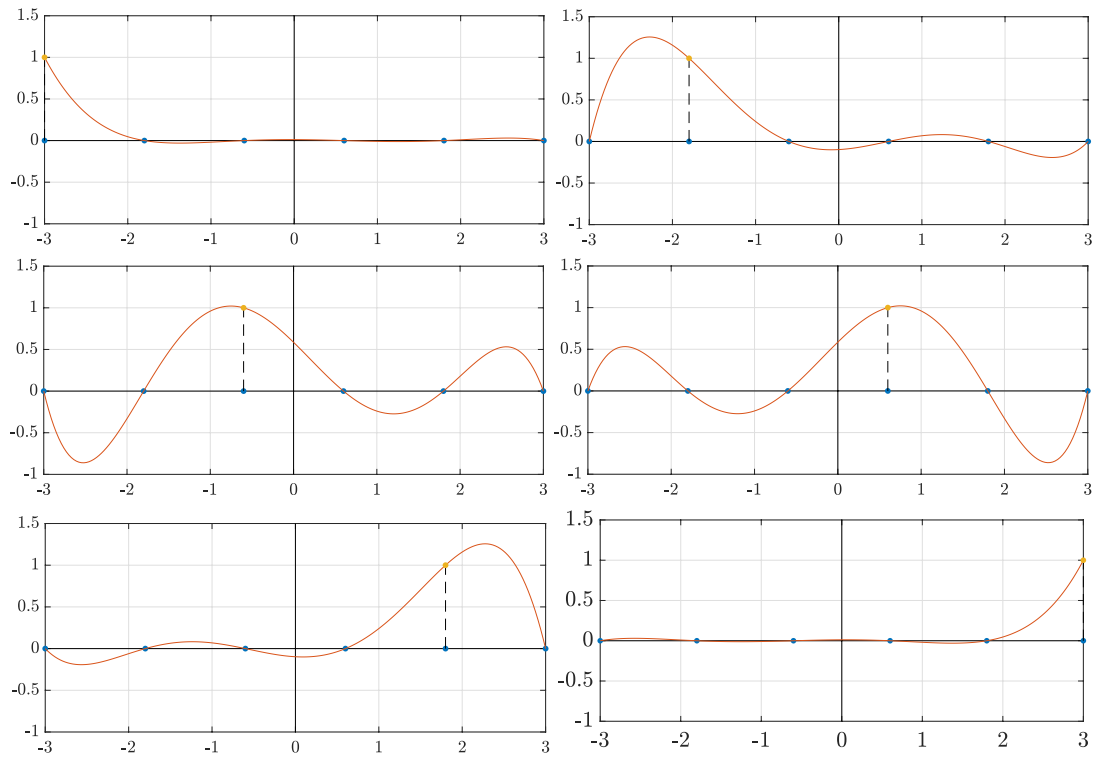


FIG. 4.1 – *Graphes des polynômes ℓ_k de la base de Lagrange pour $k = 1,\ldots,6$. Les 6 points d'interpolation (en bleu) sont uniformément répartis dans l'intervalle $[-3,3]$.*

Corollaire 15. *Soit $I = [a,b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$ et $x_1,\ldots,x_N$ des points distincts de I. Alors il existe un unique polynôme noté Lf dans $\mathbb{R}_{N-1}[x]$ tel que :*

$$Lf(x_k) = f(x_k) \qquad \text{pour tout } k = 1,\ldots,N.$$

Ce polynôme est donné par :

$$Lf(x) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\ell_k(x),$$

et s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_1,\ldots,x_N$.

Exercice 16. *Montrer que si $f \in \mathbb{R}_{N-1}[x]$, alors $Lf = f$. En déduire que $\{\ell_k, k = 1,\ldots,N\}$ est une base de $\mathbb{R}_{N-1}[x]$.*

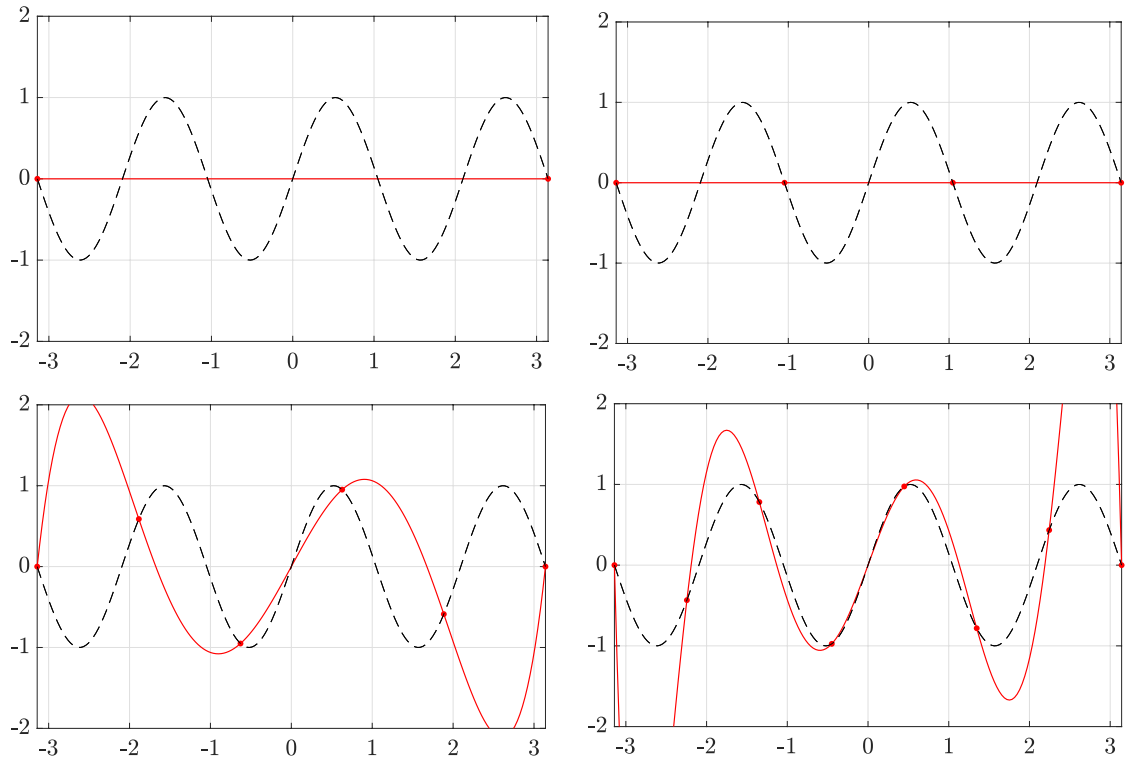


FIG. 4.2 – *Graphes des polynômes d'interpolation de Lagrange de la fonction* $x \mapsto \sin(3x)$ *sur* $[-\pi,\pi]$ *avec respectivement 2, 4, 6 et 8 points d'interpolation équirépartis dans l'intervalle.*

On cherche maintenant à déterminer si le polynôme d'interpolation de Lagrange est une bonne approximation de la fonction f. On mesure l'erreur d'approximation avec la norme infinie :

$$\|Lf - f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} |Lf(x) - f(x)|.$$

On va considérer des fonctions f assez régulières.

Théorème 17. *Soit* $f \in \mathcal{C}^N(I)$ *et* $x_1, \ldots, x_N$ *des points distincts dans* I*. Alors :*

$$\|Lf - f\|_{L^\infty(I)} \leqslant \frac{1}{N!} \|f^{(N)}\|_{L^\infty(I)} \|\omega\|_{L^\infty(I)}, \tag{4.2}$$

où $\omega(x)$ *est le polynôme défini par :*

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_N).$$

Démonstration. Soit $\bar{x}$ dans I tel que $\bar{x} \notin \{x_1, \ldots, x_N\}$. On définit la fonction :

$$g : x \in I \mapsto f(x) - Lf(x) - \left(\frac{f(\bar{x}) - Lf(\bar{x})}{\omega(\bar{x})} \right) \omega(x).$$

Alors $g \in \mathcal{C}^N(I)$. D'autre part $g(x_k) = 0$ (pour $k = 1, \ldots, N$) et $g(\bar{x}) = 0$. D'après le Théorème de Rolle, g' s'annule au moins une fois entre deux racines consécutives de g. Comme g a $N+1$ racines, on en déduit donc que g' s'annule au moins N fois sur I, puis que g'' s'annule au moins $N-1$ fois...etc... Finalement on montre que $g^{(N)}$ s'annule au moins une fois sur I et on note ξ cette racine.

On dérive maintenant N fois la relation :

$$g(x) = f(x) - Lf(x) - \left(\frac{f(\bar{x}) - Lf(\bar{x})}{\omega(\bar{x})} \right) \omega(x).$$

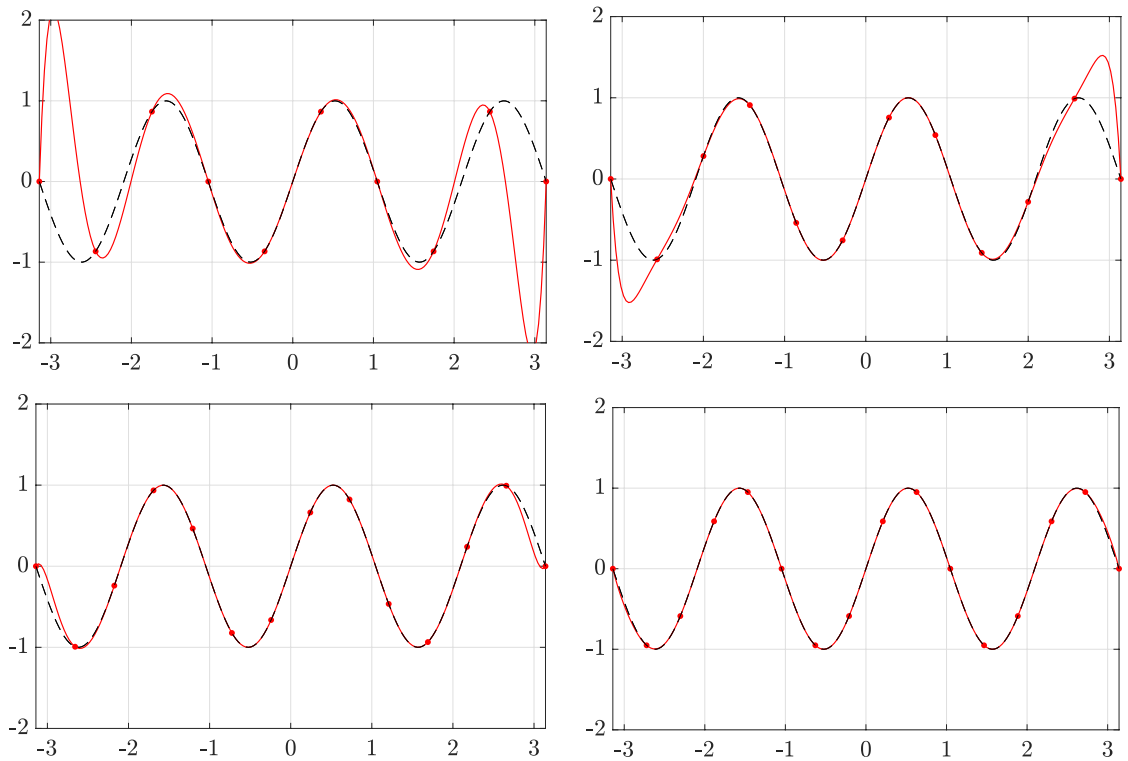


FIG. 4.3 – *Graphes des polynômes d'interpolation de Lagrange de la fonction* $x \mapsto \sin(3x)$ *sur* $[-\pi,\pi]$ *avec respectivement 10, 12, 14 et 16 points d'interpolation équirépartis dans l'intervalle.*

Comme $Lf(x) \in \mathbb{R}_{N-1}[x]$ alors $Lf^{(N)}(x) = 0$. D'autre part, $\omega^{(N)}(x) = N!$ On obtient donc que :

$$g^{(N)}(x) = f^{(N)}(x) - \left(\frac{f(\bar{x}) - Lf(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}\right) N! \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

En particulier pour $x = \xi$:

$$f(\bar{x}) - Lf(\bar{x}) = \frac{1}{N!} f^{(N)}(\xi)\omega(\bar{x}),$$

et donc, pour tout $\bar{x}$ dans I tel que $\bar{x} \neq x_1, \ldots, x_N$:

$$|f(\bar{x}) - Lf(\bar{x})| \leqslant \frac{1}{N!} \|f^{(N)}\|_{L^\infty(I)} |\omega(\bar{x})|.$$

On remarque que l'inégalité est encore vraie pour $\bar{x} = x_1, \ldots, x_N$. On peut donc prendre le sup sur les $\bar{x}$ dans I et on obtient la formule souhaitée. □

Remarque 18. *On a en fait démontré que pour tout x dans I il existait ξ dans I tel que:*

$$f(x) - Lf(x) = \frac{1}{N!} f^{(N)}(\xi)\omega(x).$$

Exercice 19. *En utilisant la remarque ci-dessus, vérifier que l'estimation donnée dans le théorème est optimale.*
Indication : Appliquer la remarque à la fonction f définie par $f(x) = x^N$.

Comme l'estimation d'erreur (4.5) est optimale, on se pose maintenant la question de trouver l'emplacement des points $x_1, \ldots, x_N$ dans I de telle sorte que la norme $\|\omega\|_{L^\infty(I)}$ soit minimale. On va se restreindre au cas $I = [-1,1]$, le cas général s'en déduisant par transformation affine.

Commençons par énoncer un lemme technique :

Lemme 20. *Pour tout $x \in [-1,1]$ et tout entier $n \geqslant 1$:*

$$\cos(n \arccos(x)) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) \right).$$

Démonstration. On commence par vérifier que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme P_{n-1} dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que :

$$\cos(nt) = 2^{n-1}(\cos(t))^n + P_{n-1}(\cos(t)), \tag{4.3}$$

c'est-à-dire que $\cos(nt)$ est un polynôme de degré n en $\cos(t)$ dont le coefficient dominant est 2^{n-1}. On fait une démonstration par récurrence.

- La relation (4.3) est vraie pour $n = 1$ avec $P_0 = 0$ et pour $n = 2$ avec $P_1 = -1$.
- Soit $m \geqslant 2$. On suppose que (4.3) est vraie pour tout $n \in \{1, \ldots, m\}$. De la relation :

  $$\cos((m+1)t) + \cos((m-1)t) = 2\cos(t)\cos(mt),$$

  on déduit que:

  $$\begin{aligned} \cos((m+1)t) &= 2\cos(t)\cos(mt) - \cos((m-1)t) \\ &= 2\cos(t)\left[2^{m-1}(\cos(t))^m + P_{m-1}(\cos(t))\right] - \left[2^{m-2}(\cos(t))^{m-1} + P_{m-2}(\cos(t))\right] \\ &= 2^m(\cos(t))^{m+1} + P_m(\cos(t)), \end{aligned}$$

  avec $P_m(x) = 2xP_{m-1}(x) - 2^{m-2}x^{m-1} - P_{m-2}(x)$. On a bien $P_m \in \mathbb{R}_m[x]$ et la relation (4.3) est ainsi démontrée pour tout $n \geqslant 1$.

On déduit que pour tout $x \in [-1,1]$:

$$\cos(n \arccos(x)) = 2^{n-1}x^n + P_{n-1}(x),$$

et donc $\cos(n \arccos(x))$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant 2^{n-1}. Comme de plus, il a les mêmes racines que le polynôme :

$$2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) \right),$$

ces deux polynômes sont bien égaux. □

Définition 21. *Pour tout $n \geqslant 0$, le polynôme en x :*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),$$

s'appelle n-ième polynôme de Tchebychev de première espèce. Le premiers polynômes de Tchebychev sont représentés sur les Fig. 4.4 et 4.5.

Théorème 22. *Pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_N$ distincts dans $I = [-1,1]$, on a :*

$$\|\omega\|_{L^\infty(I)} \geqslant \frac{1}{2^{N-1}},$$

avec égalité si $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$ pour $k = 1, \ldots, N$, c'est à dire si les x_k sont les racines du Nième polynôme de Tchebychev de première espèce.

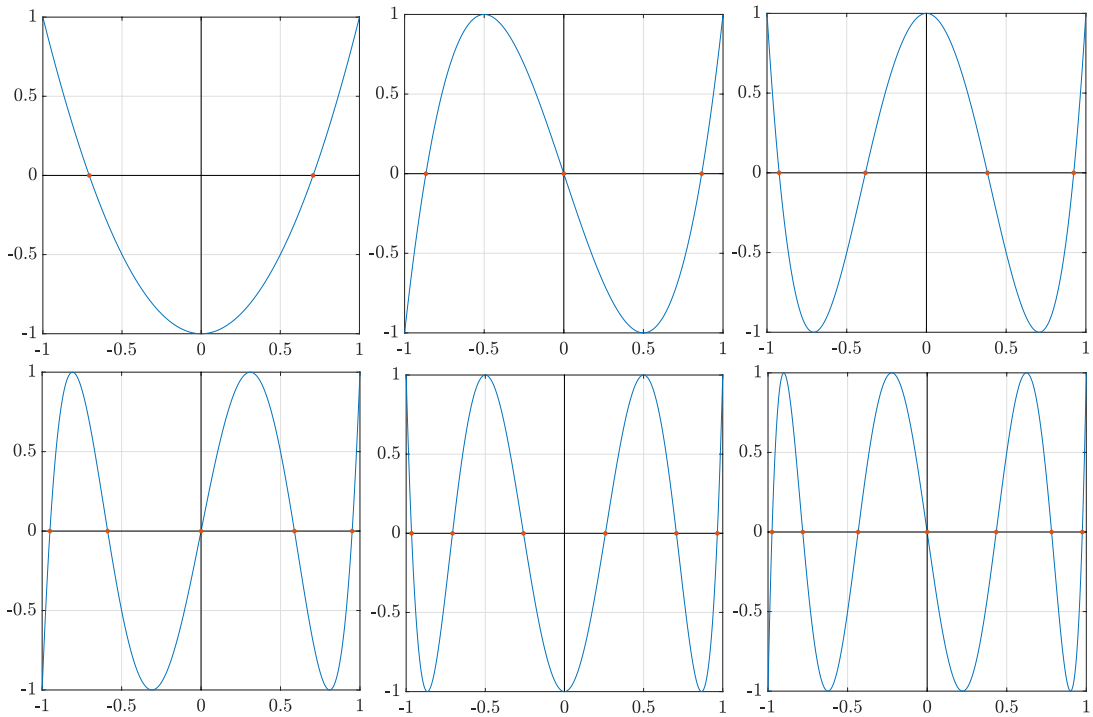


FIG. 4.4 – *Graphes des polynômes de Tchebychev T_n pour n entre 2 et 7.*

Démonstration. Posons :

$$P(x) = \prod_{k=1}^{N} \left(x - \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi \right) \right) = \frac{1}{2^{N-1}} \cos(N \arccos(x)).$$

On obtient facilement que :

$$\|P\|_{L^\infty(I)} = \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Supposons maintenant qu'il existe un choix de points $x_1, \ldots, x_N$ tel que

$$\|\omega\|_{L^\infty(I)} < \|P\|_{L^\infty(I)}. \tag{4.4}$$

Pour $k = 0, \ldots, N$, les points :

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{k}{N}\pi \right),$$

réalisent le max de $|P(x)|$ sur $[-1,1]$. Plus précisément :

$$P(\bar{x}_k) = (-1)^k \|P\|_{L^\infty(I)} \qquad \text{pour tout } k = 0,1,\ldots,N.$$

On en déduit que :

$$P(\bar{x}_k) - \omega(\bar{x}_k) = (-1)^k \|P\|_{L^\infty(I)} - \omega(x_k),$$

ce qui, avec (4.4), entraîne que le signe de $P(\bar{x}_k) - \omega(\bar{x}_k)$ est le même que celui de $(-1)^k$. Le polynôme $P - \omega$ est donc de degré au plus $N-1$ (car le terme principal de P et de ω est x^N) et s'annule au moins une fois dans chaque intervalle $]\bar{x}_k, \bar{x}_{k-1}[$ pour $k = 1, \ldots, N$. On a donc $P = \omega$ ce qui contredit l'hypothèse (4.4). □

En combinant le Théorème 17 et le Théorème 22, on obtient :

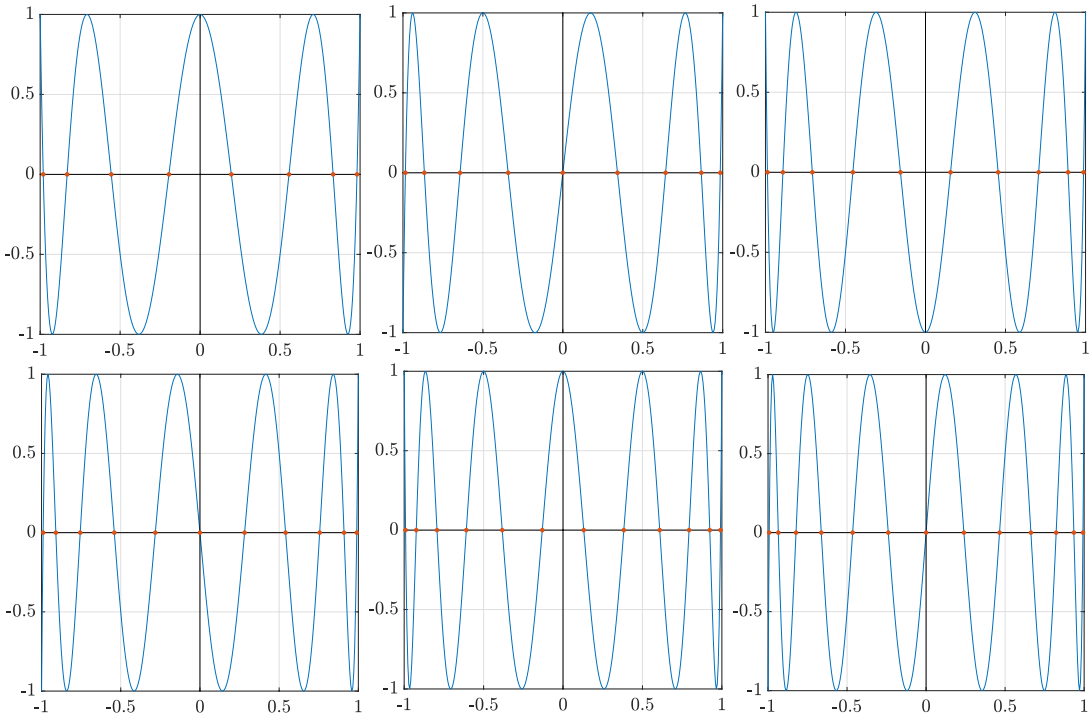


FIG. 4.5 – *Graphes des polynômes de Tchebychev T_n pour n entre* 8 *et* 13. *Observer que les racines ne sont pas équiréparties dans l'intervalle* $[-1,1]$.

Corollaire 23. *Soit $f \in \mathcal{C}^N(I)$ et $x_1,\ldots,x_N$ les racines dans I du Nième polynôme de Tchebychev de première espèce. Alors :*

$$\|Lf - f\|_{L^\infty(I)} \leqslant \frac{1}{2^{N-1}N!}\|f^{(N)}\|_{L^\infty(I)}. \tag{4.5}$$

Si l'on choisit comme points d'interpolation d'autres points que les racines des polynômes de Tchebychev, on peut voir apparaître ce qu'on appelle un phénomène de Runge c'est à dire une forte oscillation du polynôme d'interpolation entre les points d'interpolation (cf. Fig. 4.6).

4.2 Méthode des différences divisées

On fixe $x_1,\ldots,x_N$ des points d'interpolation distincts et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à interpoler. Comme nous l'avons vu, les polynômes de Lagrange $\{\ell_k(x), k = 1,\ldots,N\}$ forment une base de l'espace $\mathbb{R}_{N-1}[x]$. Cette base dépend très étroitement des points d'interpolation $x_1,\ldots,x_N$ choisis (toute modification ne serait-ce que d'un point entraîne une modification complète de tous les éléments de la base). Pour éviter cet inconvénient, on utilise plutôt la base de Newton $\{\omega_k(x), k = 1,\ldots,N\}$ définie par :

$$\omega_1(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \omega_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1}) \qquad \text{pour tout } k = 2,\ldots,N.$$

On cherche donc à déterminer les coefficients réels A_k $(k = 1,\ldots,N)$ permettant d'écrire Lf dans cette base :

$$Lf(x) = A_1\omega_1(x) + A_2\omega_2(x) + \ldots + A_N\omega_N(x). \tag{4.6}$$

L'intérêt de cette approche est que, pour tout $k \leqslant N$, le coefficient A_k ne dépend que des points $x_1,\ldots,x_k$ et pas des points suivants. En particulier, l'ajout d'un point d'interpolation x_{N+1} n'entraîne pas de modification de l'expression des premiers coefficients. Nous allons maintenant expliquer comment calculer les coefficients A_k.

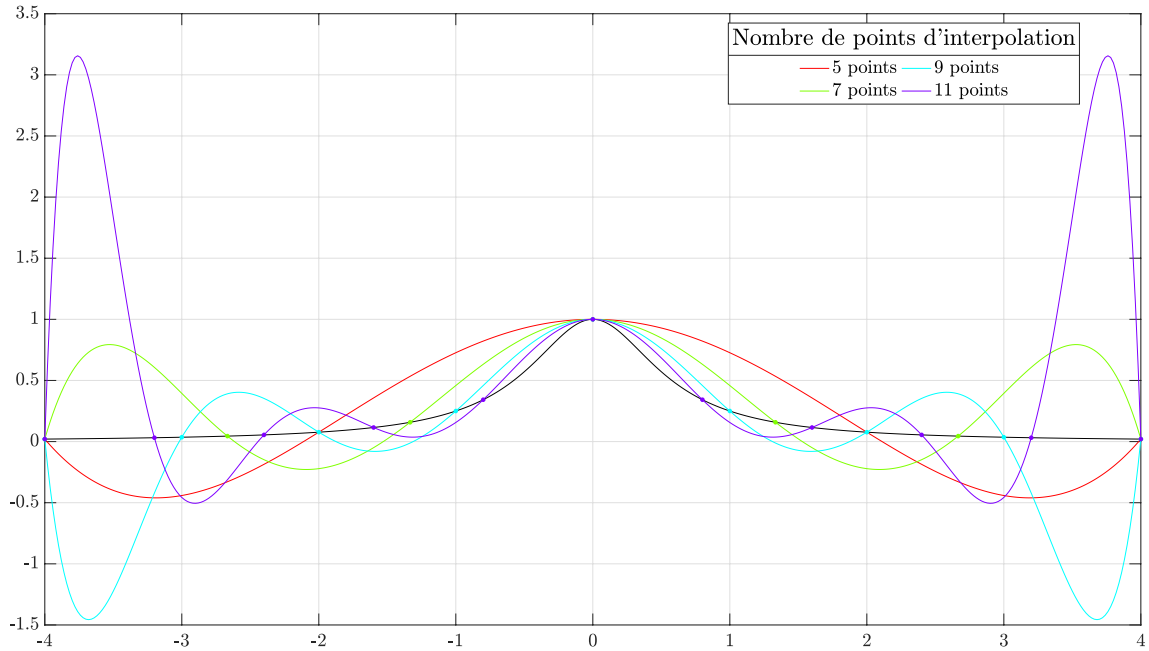


FIG. 4.6 – *Phénomène de Runge. La fonction à interpoler est en noir et on a tracé les polynômes d'interpolation de Lagrange pour* 5, 7, 9 *et* 11 *points d'interpolation équidistants. Observer que l'augmentation du nombre de points d'interpolation n'améliore pas du tout la qualité de l'approximation, bien au contraire.*

Pour tout $k = 1, \ldots, N$, on note L_k le polynôme d'interpolation de f aux points $x_1, \ldots, x_k$. On a en particulier $L_1(x) = f(x_1)$ et $L_N(x) = Lf(x)$ (le polynôme cherché).

Définition 24. *On note $f[x_1, \ldots, x_k]$ le coefficient devant x^{k-1} dans le polynôme $L_k(x)$.*

Le polynôme $L_{k+1}(x) - L_k(x)$ est au plus de degré k et admet les k racines distinctes $x_1, \ldots, x_k$. Il peut donc s'écrire :

$$L_{k+1}(x) - L_k(x) = a_k(x - x_1) \ldots (x - x_k) = a_k \omega_{k+1}(x), \tag{4.7}$$

avec :

$$a_k = f[x_1, \ldots, x_{k+1}] \qquad \text{pour tout } k = 1, \ldots, N-1.$$

D'autre part, on remarque que le polynôme $L_N(x)$ peut s'écrire:

$$\begin{aligned} L_N(x) &= [L_N(x) - L_{N-1}(x)] + [L_{N-1}(x) - L_{N-2}(x)] + \ldots + [L_2(x) - L_1(x)] + L_1(x) \\ &= a_{N-1}\omega_N(x) + a_{N-2}\omega_{N-1}(x) + \ldots + a_1\omega_2(x) + f(x_1)\omega_1(x). \end{aligned}$$

En comparant avec (4.6), on déduit que $A_1 = f(x_1)$ et $A_k = a_{k-1} = f[x_1, \ldots, x_k]$ pour tout $k = 2, \ldots, N$.

Théorème 25. *Les coefficients $f[x_1, \ldots, x_k]$ peuvent se calculer de façon récursive grâce aux formules suivantes : On pose $f[x_1] = f(x_1)$ et pour tout $k = 2, \ldots, N$:*

$$f[x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_2, \ldots, x_k] - f[x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_1}. \tag{4.8}$$

Démonstration. Fixons k parmi les entiers $2,\dots,N$. Par définition, $f[x_2,\dots,x_k]$ est le coefficient devant x^{k-2} du polynôme d'interpolation $\tilde{L}_{k-1}$ de f aux points $x_2,\dots,x_k$. Posons alors :

$$Q(x) = \frac{(x-x_1)\tilde{L}_{k-1}(x) - (x-x_k)L_{k-1}(x)}{x_k - x_1}. \tag{4.9}$$

Comme les polynômes $\tilde{L}_{k-1}(x)$ et $L_{k-1}(x)$ sont de degrés au plus $k-2$, Q est de degré au plus $k-1$. D'autre part :

$$Q(x_1) = L_{k-1}(x_1) = f(x_1) \quad \text{et} \quad Q(x_k) = \tilde{L}_{k-1}(x_k) = f(x_k).$$

Pour $j = 2,\dots,k-1$, on a $L_{k-1}(x_j) = \tilde{L}_{k-1}(x_j) = f(x_j)$ et donc aussi $Q(x_j) = f(x_j)$. Il s'en suit que Q est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_1,\dots,x_k$ et donc que $Q(x) = L_k(x)$. Si maintenant on regarde le coefficient devant x^{k-1} dans le polynôme $Q(x)$ donné par la formule (4.9), on trouve la formule (4.8). □

Le calcul effectif des coefficients est basé sur l'arbre suivant :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_1 & f[x_1] & & & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & & \\
 & & f[x_2,x_3] & & f[x_1,x_2,x_3,x_4] & \\
x_3 & f[x_3] & & \boxed{f[x_2,x_3,x_4]} & & f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] \\
 & & f[x_3,x_4] & & f[x_2,x_3,x_4,x_5] & \\
x_4 & f[x_4] & & f[x_3,x_4,x_5] & & \\
 & & f[x_4,x_5] & & & \\
x_5 & f[x_5] & & & &
\end{array}$$

Par exemple, pour calculer $f[x_2,x_3,x_4]$, on utilise les formules:

$$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4] - f[x_2,x_3]}{x_4 - x_2},$$

et

$$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} \quad \text{et} \quad f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}.$$

On voit que l'ajout d'un point d'interpolation supplémentaire x_6 n'entraîne que le calcul d'une ligne supplémentaire à l'arbre. D'autre part, grâce à la formule issue de (4.7) :

$$L_6(x) = f[x_1,\dots,x_6](x-x_1)\dots(x-x_5) + L_5(x),$$

où l'on dispose déjà du polynôme $L_5(x)$.

4.3 Convergence des polynômes d'interpolation

Le polynôme d'interpolation n'est en général pas le polynôme qui *approche* le mieux (au sens de la norme L^∞) la fonction sur un intervalle donné. Ce polynôme de meilleur approximation existe toujours comme l'affirme le résultat suivant que nous admettrons :

Théorème 26. *Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Alors pour tout entier $n \geqslant 0$ il existe un unique polynôme réalisant :*

$$\inf_{P \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - P\|_{L^\infty(I)}.$$

Le polynôme de meilleur approximation est en général difficile à déterminer explicitement. En revanche, on sait construire une suite de polynômes qui converge (toujours pour la norme L^∞) vers f. Rappelons le résultat classique suivant :

Théorème 27 (de Weierstrass)**.** *Soient a, b dans $\mathbb{R}$, $a < b$. Alors pour toute fonction continue f dans $\mathcal{C}([a,b])$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_{L^\infty([a,b])} = 0.$$

Remarque 28. *Attention : Le théorème n'affirme pas que les polynômes sont des polynômes d'interpolation et de fait, ils n'en sont pas. Ces polynômes sont construits explicitement dans la démonstration du Théorème.*

Nous allons voir que les choses ne se passent en général pas aussi bien avec les polynômes d'interpolation.

On se place sur $[-1,1]$ et on choisit comme points d'interpolation $x_1,\dots,x_N$ les N racines du Nième polynôme de Tchebychev de première espèce. Rappelons qu'alors pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^N$ sur $[-1,1]$, on a :

$$\|L_N f - f\|_{L^\infty(I)} \leqslant \frac{1}{2^{N-1}N!}\|f^{(N)}\|_{L^\infty(I)}.$$

Pour déduire de cette estimation la convergence uniforme de $L_N f$ vers f lorsque N tend vers $+\infty$, on a besoin a priori que la fonction f soit $\mathcal{C}^\infty$ et que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2^{N-1}N!}\|f^{(N)}\|_{L^\infty(I)} = 0.$$

On admettra les deux théorème suivants : Le premier affirme la non convergence uniforme des polynôme d'interpolation même avec le meilleur choix possible de points d'interpolation, lorsque la fonction est seulement continue :

Théorème 29. *Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$ telle que :*

$$\lim_{N\to+\infty} \|L_N f - f\|_{L^\infty(I)} \not\to 0,$$

où $L_N f$ est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_1,\dots,x_N$ racines du Nième polynôme de Tchebychev de première espèce.

Le deuxième résultat affirme cependant qu'en supposant un peu plus de régularité sur la fonction f, on a bien convergence uniforme avec les points des Tchebychev:

Théorème 30. *Pour toute fonction f lipschitzienne sur $[-1,1]$, on a :*

$$\lim_{N\to+\infty} \|L_N f - f\|_{L^\infty(I)} = 0,$$

où $L_N f$ est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_1,\dots,x_N$ racines du Nième polynôme de Tchebychev de première espèce.

Rappelons qu'une fonction f est lipschitzienne sur I s'il existe une constante $k \in [0,1[$ telle que :

$$\forall\, x,y \in I \quad \text{on a} \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

4.4 Interpolation composée ou locale

En pratique, on n'utilise l'interpolation de Lagrange qu'avec un petit nombre de points d'interpolation mais sur un grand nombre de petits intervalles. Naturellement, avec ce procédé,

les fonctions sont approchées non plus par une fonction polynomiale mais par une fonction polynomiale par morceaux.

On peut détailler cette démarche comme suit : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On découpe $J = [a,b]$ en m intervalles $J_k = [a_k,a_{k+1}]$ $(k = 0,\ldots,m-1)$ avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$. Pour tout $k = 0,\ldots,m-1$, on définit ensuite la fonction f_k sur $[-1,1]$ en posant :

$$f_k(x) = f\left(\frac{a_{k+1}+a_k}{2} + x\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right). \tag{4.10}$$

Sur $I = [-1,1]$, on introduit n points d'interpolation distincts $-1 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$ (attention, il faut prendre bien soin de choisir les extrémités de l'intervalle). On note ensuite $L_n f_k$ le polynôme de Lagrange qui interpole f_k aux points x_j sur $[-1,1]$ puis on pose, pour tout $x \in J$:

$$L_m^n f(x) = L_n f_k\left(\frac{2x}{a_{k+1}-a_k} - \frac{a_{k+1}+a_k}{a_{k+1}-a_k}\right) \qquad \text{si } x \in J_k.$$

La fonction $L_m^n f$ est continue et polynomiale par morceaux et vérifie :

Proposition 31. *Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ des entiers et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$. On découpe l'intervalle $J = [a,b]$ en sous intervalles J_k $(k = 0,\ldots,m-1)$ comme expliqué ci-dessus et on pose :*

$$\delta(m) = max\{|a_{k+1}-a_k|, k = 0,\ldots,m-1\}.$$

Alors on a l'estimation :

$$\|f - L_m^n f\|_{L^\infty(J)} \leqslant \frac{1}{n!}\delta(m)^n \|f^{(n)}\|_{L^\infty(J)}.$$

En particulier, pour tout n fixé, la suite de fonctions $(L_m^n f)_m$ converge uniformément vers f sur J lorsque $\delta(m)$ tend vers 0.

Démonstration. Par construction :

$$\|f - L_m^n f\|_{L^\infty(J)} \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant m-1} \|f_k - L_n f_k\|_{L^\infty(I)},$$

et selon the Théorème 17 :

$$\|f_k - L_n f_k\|_{L^\infty(I)} \leqslant \frac{1}{n!}\|f_k^{(n)}\|_{L^\infty(I)}\|\omega\|_{L^\infty(I)},$$

où l'on rappelle que $\omega(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Or d'après (4.10), on établit facilement que :

$$f_k^{(n)}(x) = \left[\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right]^n f^{(n)}\left(\frac{a_{k+1}+a_k}{2} + x\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right),$$

et donc :

$$\|f_k^{(n)}\|_{L^\infty(I)} \leqslant \frac{\delta(m)^n}{2^n}\|f^{(n)}\|_{L^\infty(J)}.$$

D'autre part :

$$\|\omega\|_{L^\infty(I)} \leqslant \prod_{k=0}^{n} \max_{x\in I}|x-x_k| \leqslant 2^n,$$

et le résultat du Théorème en découle. □

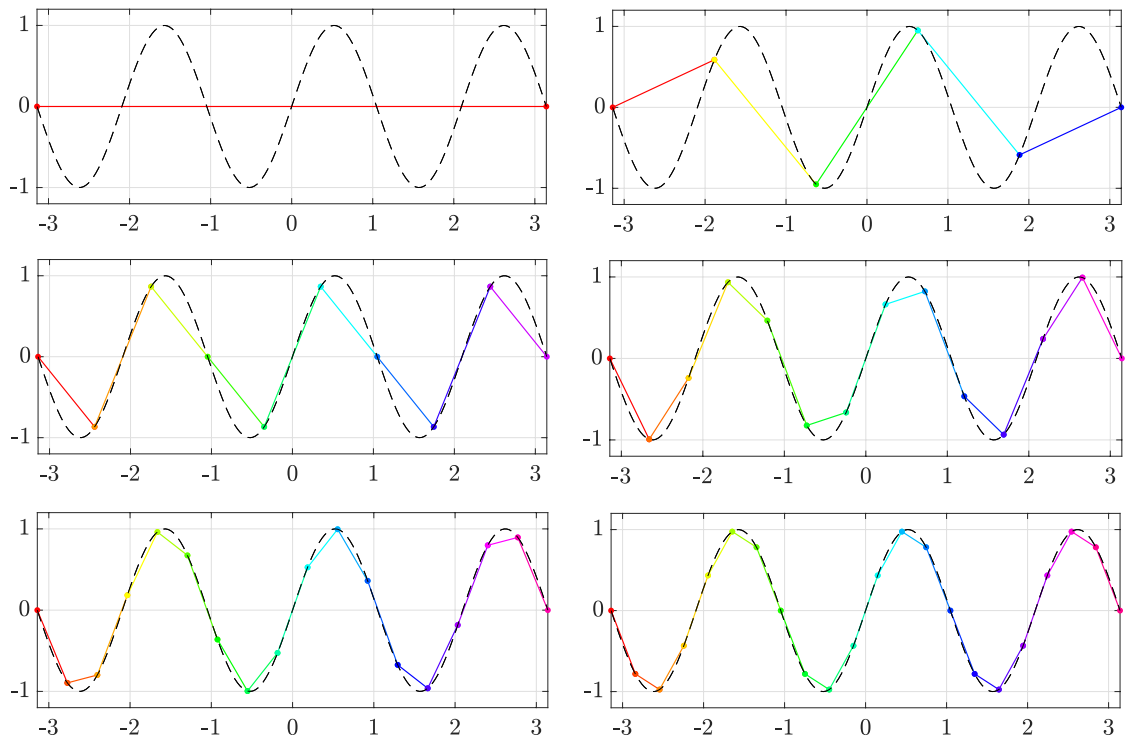


FIG. 4.7 – *Interpolation "composée" de Lagrange de la fonction* $f : x \mapsto \sin(3x)$ *sur* $[-\pi,\pi]$. *On choisit toujours 2 points d'interpolation* ($n = 2$) *et on divise l'intervalle en* m *sous-intervalles de même longueur avec respectivement* $m = 1,5,9,13,17$ *et 21. La fonction* $L_m^n f$ *est donc continue et affine par morceaux.*

4.5 Polynômes d'Hermite

Lorsque f est de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$, il est peut-être souhaitable de faire coïncider aux points d'interpolation non seulement les valeurs de f et d'un polynôme mais aussi leurs dérivées. Soit donc $x_1,x_2,\ldots,x_n$ des points distincts dans $[a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On cherche un polynôme P de degré minimal tel que :

$$P(x_k) = f(x_k) \qquad \text{et} \qquad P'(x_k) = f'(x_k) \qquad \forall\, k = 1,\ldots,n.$$

Comme on a $2n$ contraintes, on peut espérer trouver P dans $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$.

Définition 32. *Pour tout* $k = 1,\ldots,n$, *on définit les polynômes :*

$$\begin{aligned} h_k(x) &= \big[1 - 2\ell_k'(x_k)(x - x_k)\big]\ell_k^2(x) && \textit{de degré } 2n-1 \textit{ ou } 2n-2,\\ \tilde{h}_k(x) &= (x - x_k)\ell_k^2(x) && \textit{de degré } 2n-1. \end{aligned}$$

Lemme 33. *Les polynômes* h_k *et* $\tilde{h}_k$ *vérifient les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} &h_k(x_j) = \delta_{kj}, && h_k'(x_j) = 0 && \forall\, j,k = 1,\ldots,n\\ &\tilde{h}_k(x_j) = 0, && \tilde{h}_k'(x_j) = \delta_{kj} && \forall\, j,k = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Démonstration. Il est clair que $\tilde{h}_k(x_j) = 0$ pour tout $i,j = 1,\ldots,n$. De même $h_k(x_j) = \delta_{kj}$ est évident. D'autre part :

$$\begin{aligned} h_k'(x_j) &= -2\ell_k'(x_k)\ell_k^2(x_j) + 2\ell_k'(x_j)\ell_k(x_j)\big[1 - 2\ell_k'(x_k)(x_j - x_k)\big]\\ &= 2\ell_k(x_j)\ell_k'(x_k)\big[1 - \ell_k(x_j) - 2\ell_k'(x_k)(x_j - x_k)\big], \end{aligned}$$

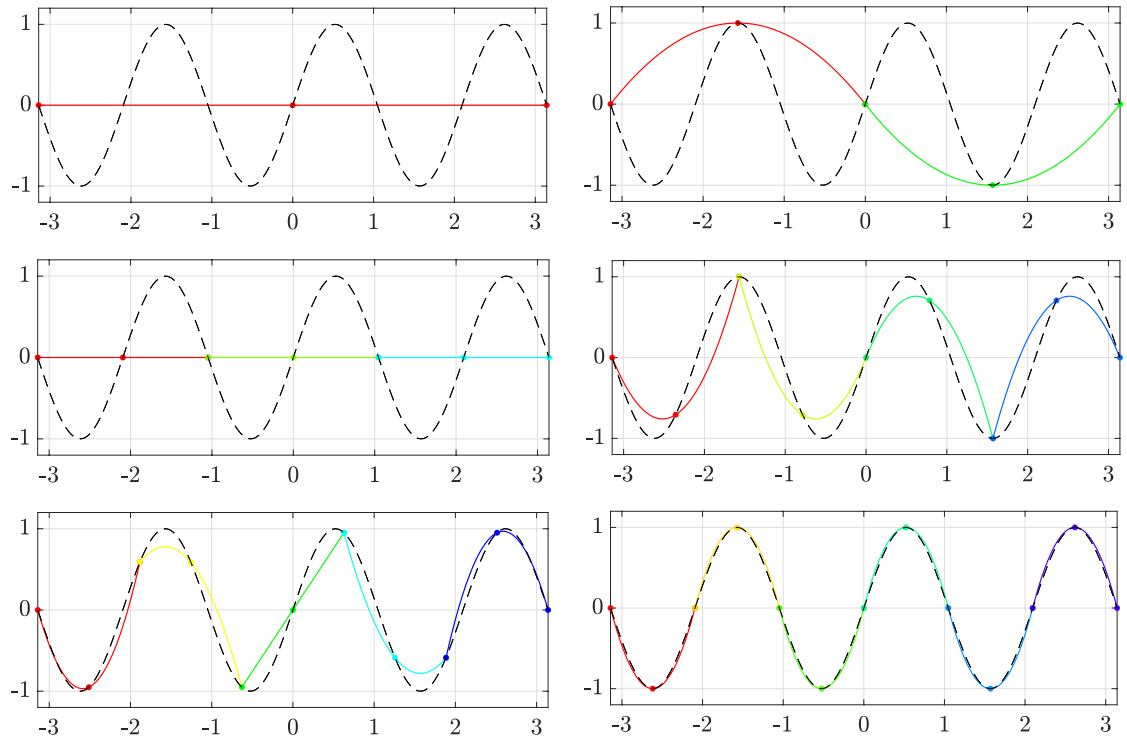


FIG. 4.8 – *Interpolation "composée" de Lagrange de la fonction* $f : x \mapsto \sin(3x)$ *sur* $[-\pi,\pi]$. *On choisit toujours 3 points d'interpolation* ($n = 3$) *et on divise l'intervalle en* m *sous-intervalles de même longueur avec respectivement* $m = 1,2,3,4,5$ *et 6. La fonction* $L_m^n f$ *est donc composée de morceaux de paraboles qui se recollent.*

ce qui entraîne bien que $h_k'(x_j) = 0$ pour tout $i,j = 1,\ldots,n$. Enfin :

$$\begin{aligned}\tilde{h}_k'(x_j) &= \ell_k^2(x_j) + 2(x_j - x_k)\ell_k'(x_j)\ell_k(x_j),\\ &= \ell_k(x_j)\big[\ell_k(x_j) + 2(x_j - x_k)\ell_k'(x_j)\big],\end{aligned}$$

ce qui entraîne bien les relations souhaitées pour $\tilde{h}_k$. □

Remarque 34. *La famille* $\{h_k(x), \tilde{h}_k(x), k = 1,\ldots,n\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$, *c'est donc une base.*

On peut maintenant énoncer :

Théorème 35. *Soient* $x_1,\ldots,x_n$ *distincts dans* $[a,b]$ *et* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *et* $\beta_1,\ldots,\beta_n$ *des réels, il existe un unique polynôme* H_n *dans* $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ *tel que :*

$$H_n(x_j) = \alpha_j \qquad \text{et} \qquad H_n'(x_j) = \beta_j \quad \forall\, j = 1,\ldots,n.$$

Ce polynôme est appelé le polynôme d'interpolation d'Hermite et est donné par :

$$H_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \tilde{h}_j(x).$$

Démonstration. L'existence est évidente puisque l'expression de H_n est donnée explicitement dans l'énoncé du théorème. Vérifions l'unicité en supposant l'existence d'un autre polynôme P dans $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ vérifiant les mêmes propriétés que H_n et posons $Q = P - H_n$ qui est aussi un polynôme dans $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$. Le polynômes Q vérifie :

$$Q(x_k) = Q'(x_k) = 0 \quad \forall\, k = 1,\ldots,n.$$

Si Q était non nul, il serait factorisable par $\omega^2(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2\dots(x-x_n)^2$ qui est de degré $2n$ ce qui est impossible. □

Corollaire 36. *Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $x_1,\dots,x_n$ des points distincts dans $[a,b]$, alors il existe un unique polynôme Hf dans $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ tel que :*

$$Hf(x_k) = f(x_k) \qquad \text{and} \qquad Hf'(x_k) = f'(x_k) \qquad \forall\, k = 1,\dots,n.$$

Le polynôme Hf est appelé polynôme d'interpolation d'Hermite de f aux points x_k ($k = 1,\dots,n$).

Comme pour les polynômes de Lagrange, on peut donner une estimation de l'erreur commise lorsque l'on remplace la fonction par son polynôme d'interpolation d'Hermite. Il faut pour cela supposer que la fonction est régulière.

Théorème 37. *Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{2n}, $x_1,\dots,x_n$ des points distincts dans $[a,b]$ et H_n le polynôme d'interpolation d'Hermite de f aux points x_k ($k = 1,\dots,n$). Alors on a l'estimation :*

$$\|f - Hf\|_\infty \leqslant \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!}\|\omega\|_\infty^2.$$

Démonstration. Soit $\bar{x} \in [a,b]$, $\bar{x} \neq x_k$ pour tout $k = 1,\dots,n$. Posons :

$$g(x) = f(x) - Hf(x) - \frac{f(\bar{x}) - Hf(\bar{x})}{\omega^2(\bar{x})}\omega^2(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4.11}$$

Alors $g(x_k) = 0$ pour tout $k = 1,\dots,n$ et $g(\bar{x}) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle, on en déduit que g' s'annule au moins une fois entre chaque racine de g, c'est à dire au moins n fois. Mais on a aussi $g'(x_k) = 0$ pour tout $k = 1,\dots,n$ donc g' s'annule au moins $2n$ fois en tout. On applique encore le théorème de Rolle avec g' pour en déduire que g'' s'annule $2n-1$ fois puis de proche en proche que $g^{(2n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a,b[$. Notons ξ ce point. On dérive l'égalité (4.11) $2n$ fois en remarquant que $Hf^{(2n)}(x) = 0$ et $(\omega^2)^{(2n)}(x) = (2n)!$ On évalue ensuite les fonctions en ξ et comme $g^{(2n)}(\xi) = 0$ on obtient :

$$f(\bar{x}) - Hf(\bar{x}) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\omega^2(\xi).$$

On remarque que cette égalité est encore valable pour $\bar{x} \in \{x_1,\dots,x_n\}$. On en déduit d'abord que pour tout $\bar{x}$ dans $[a,b]$:

$$|f(\bar{x}) - Hf(\bar{x})| \leqslant \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!}\|\omega\|_\infty^2,$$

puis en prenant le sup sur les $\bar{x}$ dans $[a,b]$, on obtient la formule du théorème. □

Corollaire 38. *L'erreur est minimale lorsque l'on choisit comme points d'interpolation les points de Tchebychev.*

Comme pour l'interpolation de Lagrange, pour obtenir une bonne approximation de la fonction, on préfèrera faire une interpolation composée plutôt que d'ajouter un grand nombre de points d'interpolation.

Chapitre 5

Intégration numérique

On cherche à déterminer une valeur approchée de la quantité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue que l'on ne sait pas intégrer explicitement. On introduit alors des points $x_1,\ldots,x_n$ (appelés points de collocation) dans $[a,b]$ et on remplace f par son interpolée de Lagrange Lf ou d'Hermite Hf. Ces deux fonctions étant des polynômes, on peut toujours les intégrer explicitement.

Une formule permettant le calcul approché d'une intégrale s'appelle une formule de quadrature. Lorsque l'on remplace f par son polynôme de Lagrange, on parle de quadrature de Lagrange.

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, nous noterons :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Cela nous permettra de mesurer la *distance* entre deux fonctions continues. Commençons par énoncer un premier résultat :

Théorème 39. *Soient $x_1,\ldots,x_n$ des points de collocation distincts dans $[a,b]$. Alors il existe des réels $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tels que :*

$$\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n \alpha_k P(x_k),$$

pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Les réels α_k sont uniques, donnés par les formules :

$$\alpha_k = \int_a^b \ell_k(x)\,\mathrm{d}x \qquad k = 1,\ldots,n,$$

où les $\ell_k(x)$ sont les polynômes de la base de Lagrange pour les points x_k ($k = 1,\ldots,n$). De plus, pour toute fonction f de classe C^n sur $[a,b]$, on a l'estimation d'erreur :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)\right| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\|\omega\|_1,$$

où l'on rappelle que $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Démonstration. On sait que $\{\ell_1(x),\ldots,\ell_n(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ on a :

$$P(x) = P(x_1)\ell_1(x) + P(x_2)\ell_2(x) + \ldots + P(x_n)\ell_n(x).$$

On en déduit que :

$$\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n P(x_k) \int_a^b \ell_k(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité des α_k. D'autre part, on a vu dans le chapitre précédent que pour toute fonction f de classe C^n sur $[a,b]$ on avait :

$$|f(x) - Lf(x)| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}|\omega(x)| \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)\right| &= \left|\int_a^b f(x) - Lf(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(x) - Lf(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\|\omega\|_1,\end{aligned}$$

ce qui est bien l'estimation du théorème. □

Exercice 40. *Vérifier que l'on a toujours :*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = b - a.$$

5.1 Formules de Newton-Cotes simples

Les formules de Newton-Cotes sont des formules de quadrature de Lagrange pour lesquelles la répartition des points de collocation est uniforme dans l'intervalle $[a,b]$. Commençons par traiter les cas $\mathbf{n = 1}$ (un seul point de collocation). Ce point peut être :

– $x_1 = a$. Dans ce cas on obtient la formule des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)f(a).$$

La formule d'erreur nous donne, pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a)\right| \leqslant \|f'\|_\infty \int_a^b |x-a|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|f'\|_\infty (b-a)^2.$$

– $x_1 = b$, qui correspond à la formule des rectangles à droite :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)f(b),$$

avec la même erreur que la formule des rectangles à gauche.

– $x_1 = (a+b)/2$. On obtient la formule du point milieu :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \text{avec une erreur inférieure à } \frac{1}{4}(b-a)^2\|f'\|_\infty.$$

Considérons maintenant que $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{2}$. Les points de collocation sont donnés par la formule :

$$x_k = a + (k-1)h \qquad \text{avec} \qquad h = \frac{b-a}{n-1} \qquad \text{et} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Dans ce cas, introduisons les points $y_1, \ldots, y_n$ dans [0,1] en posant :

$$y_k = \frac{k-1}{n-1}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

ainsi que les polynômes de Lagrange associés $\bar{\ell}_k(x)$ et les réels :

$$\beta_k = \int_0^1 \bar{\ell}_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

On déduit, en faisant un changement de variable dans l'intégrale, que :

$$\alpha_k = \int_a^b \ell_k(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 \ell_k((b-a)y + a)\,\mathrm{d}y = (b-a)\int_0^1 \bar{\ell}_k(y)\,\mathrm{d}y = (b-a)\beta_k.$$

Lorsque $\mathbf{n} = \mathbf{2}$, les points de collocation sont $x_1 = a$ et $x_2 = b$. Les polynômes de Lagrange sont :

$$\ell_1(x) = \frac{x-b}{a-b} \qquad \text{et} \qquad \ell_2(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Un calcul facile donne :

$$\alpha_1 = \int_a^b \ell_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2} = \alpha_2.$$

On aboutit alors à la formule des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\big[f(a) + f(b)\big],$$

avec l'estimation d'erreur pour toute fonction de classe C^2 sur $[a,b]$:

$$\frac{\|f''\|_\infty}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(b-a)^3\|f''\|_\infty.$$

Traitons encore le cas $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ pour lequel $x_1 = a$, $x_2 = (a+b)/2$ et $x_3 = b$. On obtient la méthode de Simpson :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

La formule d'estimation de l'erreur conduit, pour une fonction de classe C^3 sur $[a,b]$, à :

$$\frac{1}{6}\|f'''\|_\infty \int_a^b \left|(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right|\,\mathrm{d}x.$$

On fait le changement de variables $x = a + t(b-a)$ dans l'intégrale pour obtenir :

$$\frac{(b-a)^4}{6}\|f'''\|_\infty \int_0^1 \left|x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)\right|\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^4}{192}\|f'''\|_\infty.$$

5.2 Formules de Newton-Cotes composées

Comme pour les polynômes d'interpolation, on se limitera à un petit nombre de points de collocation dans les formules. Concrètement, on commence par diviser l'intervalle $J = [a,b]$ en un partition d'intervalles $J_k = [a_k,a_{k+1}]$ (pour $k = 0,\ldots,m-1$ avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$. Pour tout $k = 0,\ldots,m-1$, on définit ensuite la fonction f_k sur [0,1] en posant :

$$f_k(x) = f\left(a_k + x(a_{k+1} - a_k)\right). \tag{5.1}$$

D'autre part, sur l'intervalle [0,1], on introduit les points de collocation $x_1,\ldots,x_n$ (on va choisir ensuite n petit et m grand). Associée à ces points, on a une formule de quadrature (comme décrite dans la section précédente) :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g(x_j) \qquad \forall\, g \in C([0,1]).$$

On en déduit une formule de quadrature composée sur $[a,b]$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) \int_0^1 f(a_k + t(a_{k+1} - a_k))\,\mathrm{d}t, \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) \int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)\alpha_j f_k(x_j) \\
&\approx \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} I_{k,j} f(\xi_{k,j}),
\end{aligned}$$

où l'on a posé $I_{k,j} = \alpha_j(a_{k+1} - a_k)$ et $\xi_{k,j} = a_k + x_j(a_{k+1} - a_k)$ pour tout $j = 1,\ldots,n$ et $k = 0,\ldots,m-1$. Posons :

$$I_{m,n}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} I_{k,j} f(\xi_{k,j}).$$

Un estimation de l'erreur est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 41. *Soit f de classe C^n sur $[a,b]$ et $\omega(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Posons :*

$$\delta(m) = \max\{|a_{k+1} - a_k|, k = 0,\ldots,m-1\} \qquad \textit{et} \qquad A_n = \int_0^1 |\omega(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Alors, la méthode de quadrature composée décrite ci-dessus conduit à l'estimation d'erreur :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_{m,n}(f)\right| \leqslant \frac{A_n}{n!}\delta(m)^n(b-a)\|f^{(n)}\|_\infty.$$

En particulier, si $\delta(m) \to 0$ quand $m \to +\infty$ alors (pour tout $n \geqslant 1$):

$$\lim_{m\to+\infty} I_{m,n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_{m,n}(f)\right| = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) \left|\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_k(x_j)\right|.$$

La formule générale d'erreur pour une méthode de quadrature nous donne, pour tout $k = 0,\dots,m-1$:

$$\left|\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^n \alpha_j f_k(x_j)\right| \leqslant \frac{\|f_k^{(n)}\|_\infty}{n!} A_n,$$

et on obtient facilement que :

$$f_k^{(n)}(x) = (a_{k+1}-a_k)^n f^{(n)}(a_k + x(a_{k+1}-a_k)),$$

et donc que :

$$\|f_k^{(n)}\|_\infty \leqslant \delta(m)^n \|f^{(n)}\|_\infty.$$

La formule du théorème s'en déduit immédiatement. □

On peut montrer que la fonction n'a pas besoin d'être de classe C^n. Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème 42. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, si $\delta(m)$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, on a (pour tout $n \geqslant 1$):*

$$\lim_{m\to+\infty} I_{m,n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(On a pas d'estimation d'erreur dans ce cas).

5.3 Formules de Gauss

Comme dans le chapitre sur l'interpolation polynomiale, on peut se poser la question du "meilleur choix" possible des points de collocation, c'est à dire rechercher les points de collocation qui minimisent l'erreur entre la valeur exacte de l'intégrale et celle obtenue avec la formule de quadrature. On se place sur un intervalle $[a,b]$ et on commence par construire une base de $\mathbb{R}_n[x]$ particulière. Notons $p_0(x) = 1$ puis, par récurrence pour $k = 1,\dots,n$:

$$p_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\int_a^b p_j(y) y^k\,\mathrm{d}y}{\int_a^b p_j(y)^2\,\mathrm{d}y}\right) p_j(x). \tag{5.2}$$

Proposition 43. *Les polynômes $p_k(x)$ $(k = 0,\dots,n)$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *$p_k(x)$ est unitaire, de degré k;*
2. *$\int_a^b p_k(x)p_j(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si $k \neq j$ et plus généralement $\int_a^b p_k(x)q(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout polynôme $q(x)$ de degré strictement inférieur à k.*
3. *$\{p_0(x),\dots,p_n(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.*
4. *$p_k(x)$ admet exactement k racines distinctes dans $[a,b]$.*

Démonstration. On démontre les points 1 et 2 par récurrence. Suivant la formule (5.2), on a :

$$p_1(x) = x - \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,\mathrm{d}y,$$

et donc $p_0(x)$ est de degré 0, $p_1(x)$ est unitaire de degré 1 et $\int_a^b p_1(y)p_0(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b p_1(y)\,\mathrm{d}y = 0$. Soit maintenant $1 \leqslant m < n$. Supposons que pour tout $k \in \{0,\dots,m\}$, $p_k(x)$ est unitaire de degré

k et $\int_a^b p_i(x)p_j(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si $i \neq j$ avec $0 \leqslant i,j \leqslant m$. Alors $p_{m+1}(x)$ est bien unitaire de degré $m+1$ selon la formule (5.2) et l'hypothèse de récurrence. D'autre part, pour tout $0 \leqslant k \leqslant m$:

$$\begin{aligned}\int_a^b p_{m+1}(y)p_k(y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b y^{m+1}p_k(y)\,\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{\int_a^b p_j(y)y^{m+1}\,\mathrm{d}y}{\int_a^b p_j(y)^2\,\mathrm{d}y}\right)\int_a^b p_j(y)p_k(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b y^{m+1}p_k(y)\,\mathrm{d}y - \left(\frac{\int_a^b p_k(y)y^{m+1}\,\mathrm{d}y}{\int_a^b p_k(y)^2\,\mathrm{d}y}\right)\int_a^b p_k(y)^2\,\mathrm{d}y = 0,\end{aligned}$$

et les points 1 et 2 sont démontrés et le point 3 est maintenant évident. Pour le point 4, on sait que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\int_a^b p_k(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Le polynôme $p_k(x)$ n'a donc pas un signe constant sur $[a,b]$. Notons $x_1,\ldots,x_j$ les points où il change de signe (avec $j \leqslant k$). Ces points sont donc des racines de $p_k(x)$ d'ordre de multiplicité impair. Posons ensuite :

$$Q(x) = p_k(x)(x-x_1)\ldots(x-x_j).$$

Alors $Q(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$ (ses racines sur $[a,b]$ sont toutes d'ordre pair). Si $j < k$ alors, suivant le point 2 on aurait :

$$\int_a^b Q(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

ce qui contredirait le fait que $Q(x)$ ait un signe constant. On a donc $j = k$ puis, puisque $p_k(x)$ est unitaire :

$$p_k(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_k),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Remarque 44. *Si $[a,b] = [-1,1]$, les polynômes $p_k(x)$ sont appelés les polynômes de Legendre.*

Les racines des polynômes $p_k(x)$ sont les points que nous cherchons :

Théorème 45. *Soient $x_1,\ldots,x_n$ les racines du polynômes $p_n(x)$ dans $[a,b]$. Alors il existe des réels $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tels que :*

$$\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k P(x_k), \tag{5.3}$$

pour tout polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ (comparer avec le théorème 39). De plus, pour toute fonction f de classe C^{2n} sur $[a,b]$, on a l'estimation d'erreur :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(x_k)\right| \leqslant \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!}\|\omega^2\|_1, \tag{5.4}$$

où l'on rappelle que $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Remarquer qu'ici $p_n(x) = \omega(x)$.

Démonstration. Les points $x_1,\ldots,x_n$ étant fixés, on peut appliquer le théorème 39 qui nous assure de l'existence des réels $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tels que :

$$\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k P(x_k),$$

pour tout $P(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Vérifions que la formule est encore vraie pour des polynômes dans $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$. Soit donc $Q(x) \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ et $LQ(x)$ son polynôme d'interpolation de Lagrange aux

points x_k. Comme le polynômes $Q(x) - LQ(x)$ s'annule aux points $x_1, \ldots, x_n$, il existe un polynôme $q(x)$ tel que $Q(x) - LQ(x) = q(x)p_n(x)$. En considérant les degrés, on déduit que $q(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Il vient :

$$\int_a^b Q(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b LQ(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le polynôme $LQ(x)$ étant dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, on sait que :

$$\int_a^b LQ(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \alpha_k LQ(x_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k Q(x_k).$$

D'autre part, par construction du polynôme $p_n(x)$ et puisque $q(x)$ est dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$:

$$\int_a^b q(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

La formule (5.3) est donc bien exacte pour tout $P(x) \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$.
Reste à montrer la formule d'erreur. Soit donc f une fonction de classe C^{2n} sur $[a,b]$ et Hf son polynôme d'interpolation d'Hermite aux points $x_1, \ldots, x_n$. On a alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b Hf(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - Hf(x)|\,\mathrm{d}x,$$

et on a montré que :

$$|f(x) - Hf(x)| \leqslant \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!} |\omega^2(x)|.$$

L'estimation (5.4) s'en déduit en remarquant que $Hf(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2n-1$. $\square$