



HAL
open science

Linéarisation des polynômes quadratiques selon Jean-Christophe Yoccoz

Arnaud Chéritat

► **To cite this version:**

Arnaud Chéritat. Linéarisation des polynômes quadratiques selon Jean-Christophe Yoccoz. Conference on dynamical systems in memory of Jean-Christophe Yoccoz, Collège de France, Paris, France., 2018. ⟨hal-03133800⟩

HAL Id: hal-03133800

<https://hal.science/hal-03133800v1>

Submitted on 7 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Jean-Christophe Yoccoz

• A. CHÉRITAT

1. Témoignage

Quand Yoccoz reçut sa médaille Fields en 1994, j'étais en classe préparatoire. Deux français et un belge dans la cuvée... Ça a peut-être influencé mes choix professionnels ultérieurs. Les systèmes dynamiques holomorphes, j'en avais entendu parler, ça avait l'air d'un sujet intéressant. En particulier dans "The beauty of Fractals" de Peitgen et Richter [10], qui contient beaucoup d'images et quelques explications parfois difficiles à suivre, un passage avait attiré mon attention. Il mentionnait le problème de la linéarisabilité des points fixes en dimension complexe 1 dans le cas d'un centre, c'est à dire d'une valeur propre $\lambda = e^{i\theta\tau}$ de module 1 et qui n'est pas racine de l'unité, où je note $\tau = 2\pi$ par commodité.¹ Un lien avec le développement en fraction continue de θ était mentionné. C'était un très beau pont entre l'arithmétique et l'analyse. On donnait une condition suffisante de linéarisabilité et il était précisé que la question n'était pas close (figure 1 page ci-contre).

Il se trouve que le livre de Peitgen et Richter a été publié en 1986 et qu'un des résultats majeurs de Jean-Christophe Yoccoz résout cette question pour les polynômes de degré 2, mais je ne le savais pas à l'époque de ma prépa. Son manuscrit contenant la preuve date de 1987-1988 soit peu de temps après le livre de Peitgen et Richter [10], mais il ne sera publié qu'en 1995 dans un volume de la série Astérisque de la SMF, [14]. Le livre de Peitgen et Richter, toujours lui, mentionnait Adrien Douady, avec une photo. Il deviendrait plus tard mon directeur de thèse.

Je fis connaissance avec Jean-Christophe à l'été 1995, le jour où je passai les oraux d'une des ÉNS. Il en était... l'examineur! Dans ces circonstances, je n'ai pas vraiment pu échanger, mais j'avais noté son accessibilité et sa bienveillance. Je me sou-

viens encore de la colle : un IFS² qui crée une portion d'une courbe fractale, le flocon de Von Koch, comme point fixe d'un opérateur sur les fonctions continues de $[0, 1]$ dans le plan. À un moment j'avais composé les fonctions à l'envers : $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$. En fait j'avais bien pris soin de faire attention à l'inversion importune — $f \circ g$ c'est g puis f —donc si on veut enchaîner une suite d'applications, il faut les noter comme j'avais fait... sauf que pour les IFS, justement, on veut les composer dans l'ordre inhabituel. Croyant avoir miné mes chances je me désolai mais il me rassura, je ne sais plus exactement en quels termes.

Cet ordre inverse, je l'ai rencontré à nouveau bien plus tard, au milieu des années 2000. On m'avait demandé une recension sur un article concernant des IFS non autonomes et écrit par un dynamiqueur sérieux et établi. Il améliorerait un résultat connu. Sauf que... il avait composé dans le mauvais sens. Cela rendait son résultat plus facile. Un peu anxieux, j'ai contacté l'auteur pour lui faire part de l'erreur. Il a très bien réagi. Il m'a même invité à son université pour qu'on discute de maths.

Jean-Christophe et moi avons réellement fait connaissance quand j'ai commencé à suivre les cours de Douady à l'université d'Orsay en 1997. Il venait au séminaire de l'équipe "topologie et dynamique". On m'a en particulier expliqué que les deux contributions majeures de Yoccoz en dynamique holomorphe étaient la résolution de la conjecture que j'ai mentionnée plus haut sur la non linéarisabilité, ainsi qu'un théorème de locale connexité de l'ensemble de Mandelbrot en certains points. Il avait d'autres contributions majeures mais je l'ignorais alors. Je suis allé le voir plusieurs fois dans son bureau au Collège de France près du Panthéon à Paris, comme mon directeur me l'avait demandé. Là, j'ai appris en peu de temps des techniques puissantes qu'il avait inventées, comme la renormalisation sectorielle, et qui m'ont énormément servi

1. Ce n'est pas une notation employée par Yoccoz.

2. Iterated Function Scheme : système d'applications, usuellement affine du plan dans le plan et en nombre fini, dont on regarde le monoïde engendré puis certains compacts invariants, qui ont automatiquement une certaine forme d'autosimilarité. L'exemple typique est la fougère de Barnsley.

FIGURE 1 – Extrait de la page 32 de [10] (Peitgen et Richter)

exact condition on α for which Schröder's series converges is an open and apparently very deep problem. Consequently, one cannot as of yet always determine if a given irrationally indifferent fixed point is in either the Julia set or the Fatou set.

dans ma carrière. En particulier il m'a raconté la preuve de son théorème de non linéarisabilité. C'est ce que j'appelais souvent "l'une des deux faces de sa médaille Fields", l'autre étant censée être son résultat de locale connexité. Je dis "censée" car en réalité, il y aurait bien d'autres faces à ajouter! De façon intéressante, j'ai trouvé pendant ma thèse une preuve indépendante de son théorème de non linéarisabilité. À un moment j'utilise une inégalité due à... Yoccoz!, dans un registre totalement différent. Alors si je dis que l'optimalité, c'est la moitié de sa médaille, ne le cachons pas, c'est aussi pour gonfler l'importance de mon travail.

En 1998 ou 1999 est venu le moment de choisir un sujet de thèse. Je suis allé voir en particulier Douady et Yoccoz. Le premier m'a proposé une piste basée sur des idées géométriques inspirées par des images calculées sur ordinateur de suites particulières d'ensembles de Julia, pour résoudre une conjecture célèbre en dynamique holomorphe, sans garantie que ça marche. Le second m'a montré un article plein de calculs où un certain auteur adaptait la renormalisation sectorielle à la classe \mathbb{R} -analytique en dimension 2 au lieu de la classe holomorphe. Il m'a dit "je ne crois pas au résultat" et m'a demandé de trouver la faute, comme première étape de la thèse et en fonction du résultat on verrait... J'ai décidé de tenter ma chance avec la grosse conjecture.

Nonobstant, j'ai souvent revu Jean-Christophe à des conférences, en particulier à Pise où travaille son collaborateur et ami Stefano Marmi. J'ai étudié leur conjecture dite de Marmi-Moussa-Yoccoz. J'ai rencontré son ancien élève Ricardo Pérez-Marco et j'ai étudié ses travaux. J'ai aussi appliqué avec succès leurs techniques en collaboration avec Xavier Buff à Toulouse, et nous avons montré des résultats sur les disques de Siegel dont je suis fier.

Je n'ai pas été étudiant de thèse de Yoccoz, mais c'est tout comme.

3. Si on veut généraliser tout en restant en dimension 1, on peut itérer une fonction analytique f définie sur un ouvert d'une surface de Riemann et à valeur dans cette dernière.

4. Qu'on appelait avant maths pures et qu'on appellera sûrement différemment dans l'avenir.

2. Questions de linéarisation

Dynamique holomorphe en dimension 1. On parle ici de système dynamique à temps discret dont l'évolution est donné par l'itération d'une fonction holomorphe. En termes moins savants, on étudie les suites définies par récurrence

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

avec z_n un nombre complexe et f une fonction holomorphe³ sur un certain ouvert de \mathbb{C} . Comme ça ne modélise rien en pratique, c'est un domaine qui fait partie des mathématiques fondamentales.⁴ Cependant, il y a des liens avec certains systèmes dynamiques issus des sciences physiques, en particulier avec l'astronomie, et ces domaines se fécondent mutuellement.

Linéarisation. Si on a un point fixe $f(a) = a$, on définit le *multiplieur* comme étant la quantité $\lambda = f'(a)$. Un point périodique étant un point fixe de $f^p = f \circ \dots \circ f$, on se ramène à un point fixe en remplaçant f par f^p . Si $|\lambda|$ ne vaut ni 0 ni 1 alors un changement de variable *holomorphe* conjugue f près de a à sa partie linéaire $z \mapsto \lambda z$ (théorème de Schröder, plutôt facile). On dit que f est *linéarisable* au point a . Si $\lambda = 0$ alors on peut conjuguer f à son premier terme non constant dans son développement en série entière au point a (théorème de Böttcher), donc à $z \mapsto z^d$ pour un certain entier $d \geq 2$. Le cas $|\lambda| = 1$ est bien plus difficile. L'histoire de la linéarisabilité est très bien racontée dans [10] et [8] aussi ne vais-je en mentionner que la partie utile pour aborder des travaux de Yoccoz. C'est une longue histoire qui implique de nombreux mathématiciens et des astronomes. Il est peut-être utile de savoir ceci :

Théorème (Siegel et Moser). *Supposons $|\lambda| = 1$. Alors l'application holomorphe f est linéarisable au point fixe a ssi elle est stable au point a , au sens où il existe une paire de voisinages bornés U, U' de a pour lesquels tout point de départ $z_0 \in U$ a une*

orbite z_n qui est d'une part définie pour tout n et d'autre part reste dans U' .

C'est un des nombreux miracles des fonctions holomorphes. En particulier on a la conséquence suivante : les linéarisabilités topologique⁵ et analytique sont équivalentes en dimension complexe 1.

Série de Brjuno. Pour un nombre irrationnel, $\theta \in \mathbb{R}$, de développement en fraction continue $\theta = a_0 + 1/(a_1 + 1/\dots) = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ on pose

$$B(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$$

où p_n/q_n est la suite des réduites, c'est à dire l'écriture en fraction irréductible de $[a_0; \dots, a_n]$. C'est une série à termes strictement positifs,⁶ qui peut être convergente ou divergente. Pour $\theta \in \mathbb{Q}$ on pose $B(\theta) = +\infty$. Un *nombre de Brjuno* est un réel θ tel que $B(\theta) < +\infty$. Notons \mathcal{B} l'ensemble de ces nombres. Alors \mathcal{B} contient tous les nombres diophantiens mais aussi certains nombres de Liouville comme par exemple le fameux $\theta = \sum_{k>0} 10^{-k!}$. L'ensemble complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathcal{B}$ est de mesure nulle mais reste résiduel au sens de Baire : il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Théorème (Brjuno, 1965).⁷ Soit f une fonction holomorphe de D.S.E.

$$f(z) = 0 + e^{i\theta\tau}z + \mathcal{O}(z^2).$$

Si $B(\theta) < +\infty$ alors f est linéarisable.

Ce théorème améliorait un théorème de Siegel, le grand théoricien des nombres, qui supposait θ diophantien.

Qu'en est-il de la réciproque ? Bien sûr, il y a pour tout θ une fonction linéarisable $f(z) = e^{i\theta\tau}z + \dots$, ne serait-ce que l'application linéaire $z \mapsto e^{i\theta\tau}z$, ou ses conjuguées (par définition). La question réciproque naturelle est donc la suivante : pour quels θ existe-t-il un exemple non linéarisable ?

Théorème (Yoccoz). Si $B(\theta) = +\infty$ alors il existe un exemple non linéarisable.

En fait Yoccoz a également réussi à transférer la non linéarisabilité depuis un germe f quelconque vers le polynôme $\lambda z + z^2$.

5. (via un changement de variable continu d'inverse continu)

6. ... sauf pour le premier terme qui est parfois nul.

7. Indépendamment démontré par Rübmann en 1967.

8. C'est une restriction de l'action du groupe linéaire sur l'espace projectif, c.-à-d. sur l'ensemble des droites de \mathbb{R}^2 , exprimée dans la carte 1/pente.

9. En utilisant par exemple la relation de récurrence $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ avec les notations utilisées plus haut. Une autre façon est d'utiliser la variante de Yoccoz de la somme de Brjuno, traitée dans un autre article de la présente Gazette.

Théorème (Yoccoz). Si $B(\theta) = +\infty$ alors le polynôme $f(z) = e^{i\theta\tau}z + z^2$ est non linéarisable au point 0.

Cela avait été conjecturé par Cherry [4]. En un certain sens, le polynôme $\lambda z + z^2$ est l'exemple non linéaire le plus simple. Il est donc intéressant de voir qu'il est optimal pour la condition de Brjuno.

3. Techniques

La *renormalisation sectorielle* est l'outil principal. Sa définition peut surprendre, aussi vais-je commencer par un résultat qui la motive.

3.1 – La construction de Douady-Ghys

Rappelons qu'on peut faire agir $GL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ comme suit :⁸

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Le noyau de l'action est la paire de matrices $\{I_2, -I_2\}$. Il y a un lien étroit entre cette action et le développement en fraction continue. Le groupe $GL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ qui correspondent respectivement à $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto 1/x$. Deux réels irrationnels sont dans la même orbite ssi leur développement sont identiques à troncature et décalage près. On peut en déduire⁹ que l'ensemble \mathcal{B} des nombres de Brjuno est invariant par l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$.

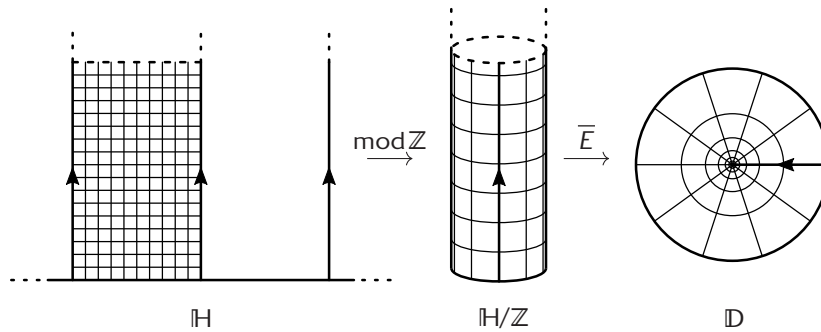
Définition. Notons \mathcal{L} l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que tout germe holomorphe $f(z) = e^{i\theta\tau}z + \mathcal{O}(z^2)$ est linéarisable.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, Yoccoz a prouvé que $\mathcal{L} = \mathcal{B}$. Au moment où le théorème ci-dessus a été démontré, on savait seulement que $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ (théorème de Brjuno).

Théorème (Douady et Ghys, [5]). L'ensemble \mathcal{L} est invariant par l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$.

Autrement dit l'appartenance $\theta \in \mathcal{L}$ ne dépend que de la queue de la fraction continue de θ .

FIGURE 2 – L'application $E(z) = e^{i\tau z}$ se factorise en la composée du passage au quotient $\text{mod } \mathbb{Z}$ et d'un isomorphisme \bar{E} du cylindre \mathbb{C}/\mathbb{Z} vers \mathbb{C}^* . Si on note \mathbb{H} le demi-plan supérieur et \mathbb{D} le disque unité alors $E(\mathbb{H}) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$



Preuve (Esquisse). Rappelons que l'action est engendrée par la paire d'applications $\theta \mapsto \theta + 1$ et $\theta \mapsto 1/\theta$. La condition $\theta \in \mathcal{L}$ ne dépend que de $e^{i\theta\tau}$ donc l'égalité d'ensembles $\mathcal{L} = \mathcal{L} + 1$ est immédiate. Démontrons maintenant que $1/\mathcal{L} = \mathcal{L}$. Notons que $0 \notin \mathcal{L}$: en effet, $z + z^2$ n'est pas linéarisable. D'autre part dans la définition de \mathcal{L} on a exclu ∞ . On suppose dans la suite que $\theta \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$.

On va relever f par $E : z \mapsto e^{i\tau z}$. La fonction E est un revêtement universel de \mathbb{C}^* vers $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dont le groupe d'automorphismes est donné par les translations $z \mapsto z + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Elle permet d'identifier le cylindre \mathbb{C}/\mathbb{Z} à \mathbb{C}^* , et "envoie" le bout supérieur sur 0 et le bout inférieur sur ∞ , voir la figure 2. Le relevé est une fonction holomorphe F définie sur un domaine contenant un demi plan $\text{Im } z > C$ et vérifiant dessus la relation de semi-conjugaison

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{F} & \bullet \\ E \downarrow & & \downarrow E \\ \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \end{array}$$

Le relevé est unique à l'ajout près d'un entier, et pour le bon choix on a

$$F(z) = z + \theta + o(1)$$

où le reste $o(1) = r(z)$ est une fonction périodique : $r(z+1) = r(z)$, qui tend vers 0 quand $\text{Im } z \rightarrow +\infty$. Soit

$$T(z) = z + 1.$$

L'application f est linéarisable si et seulement s'il

existe une fonction H holomorphe injective qui commute à T et conjugue F à $z \mapsto z + \theta$ pour $\text{Im } z$ assez grand. Notons que H conjugue T à T . On a ainsi changé de point de vue : on cherche une fonction H qui "linéarise" simultanément T et F .

La construction ci-dessous échange le rôle de T et F par une utilisation ingénieuse du théorème de Poincaré-Koebe d'uniformisation des surfaces de Riemann. Cet échange aura pour effet de transformer θ en $1/\theta$.

Le cylindre \mathbb{C}/\mathbb{Z} est le quotient de \mathbb{C} par l'identification $z \sim T(z)$. On voudrait de même regarder la surface de Riemann obtenue en identifiant z à $F(z)$ dans un demi-plan $\text{Im } z > C$.¹⁰ La variété quotient est alors homéomorphe au demi-cylindre \mathbb{H}/\mathbb{Z} . En utilisant l'uniformisation on démontre¹¹ qu'elle est bien isomorphe à \mathbb{H}/\mathbb{Z} en tant que surface de Riemann.

L'isomorphisme se relève en une application holomorphe injective J qui conjugue F à T . Comme F est proche de $z \mapsto z + \theta$ pour $\text{Im } z$ grand, on démontre que J est proche de $z \mapsto z/\theta$ en un certain sens.

Comme T et F commutent, $G_0 := JTJ^{-1}$ commute à $JFJ^{-1} = T$ sur un certain domaine. On peut donc étendre G_0 en une application holomorphe G définie sur un domaine contenant un demi-plan, et elle vérifie :

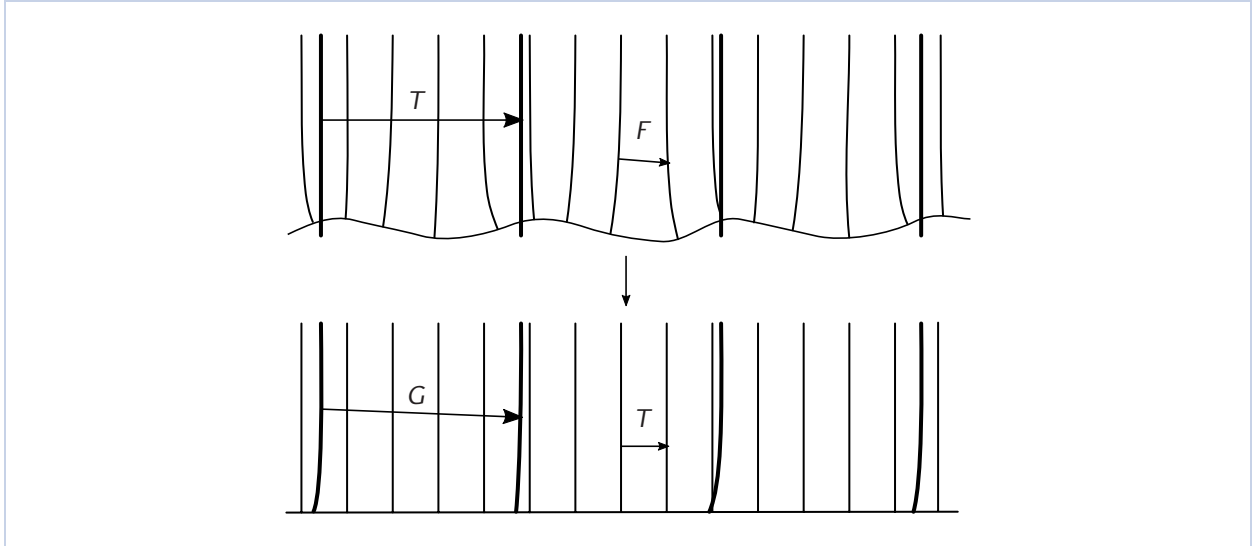
$$G(z) = z + 1/\theta + o(1).$$

Pour conclure, on vérifie que l'existence d'un chan-

10. En réalité, et ce pour obtenir un quotient Hausdorff-séparé, on se restreint à un sous-ensemble adéquat du demi-plan, par exemple à un secteur S de la forme $\text{Im } z > A + B|\text{Re } z|$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B > 0$ adaptés.

11. Par Poincaré-Koebe on obtient qu'une surface de Riemann homéomorphe au cylindre est isomorphe à l'un des modèles non isomorphes suivants : \mathbb{C}/\mathbb{Z} , \mathbb{H}/\mathbb{Z} , U_h/\mathbb{Z} avec $U_h : 0 < \text{Im } z < h$. Dans notre cas un peu de travail supplémentaire est nécessaire pour voir que c'est le 2^e modèle qui est le bon. Notez que ce n'est pas une triviale, car par exemple recoller la bande $1 < \text{Re}(z) < 2$ le long d'un voisinage de son bord par l'identification $z \sim 2z$ donne une surface de Riemann isomorphe à $U_{\pi/\ln 2}$.

FIGURE 3 – Construction de Douady-Ghys. On a dessiné un domaine fondamental pour G et ses images successives. La flèche verticale conjugue F à T et T à G , c'est le relevé de l'isomorphisme du quotient par F vers \mathbb{H}/\mathbb{Z} . Esquisse faite à la main : en effet l'uniformisation des surfaces de Riemann est un problème numériquement difficile.



gement de variable qui conjugue simultanément T et F à des translations équivaut à l'existence d'un changement de variable qui conjugue simultanément G et T à des translations.

Ainsi $\theta \in \mathcal{L} \iff 1/\theta \in \mathcal{L}$. \square

3.2 – La renormalisation sectorielle

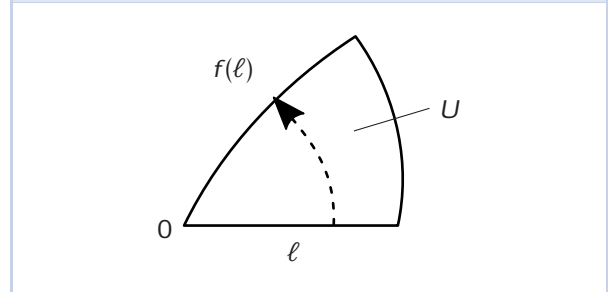
C'est une réinterprétation de la construction précédente. Yoccoz y ajoutera des estimations et saura s'en servir de façon très fertile.

On considère une fonction holomorphe f fixant 0 et telle que $f'(0) = \lambda = e^{i\theta\tau}$ avec $\tau = 2\pi$ et θ un réel irrationnel. Une telle fonction est injective près de 0 mais on fait l'hypothèse que f est définie et injective sur tout le disque unité $|z| < 1$. Cette hypothèse a l'avantage de nous restreindre à une classe compacte¹² pour la topologie de la convergence uniforme locale, et on peut toujours ramener un germe à cette classe par une conjugaison linéaire. La compacité servira plus loin à l'obtention de bornes.

Traçons maintenant le segment¹³ $\ell = [0, \varepsilon]$ et son image $f(\ell)$. Si ε est suffisamment petit alors $f(\ell)$ ne dévie pas trop du segment $\lambda\ell$ et en particulier $\ell \cap f(\ell) = \{0\}$. Refermons la figure en traçant une courbe proche d'un arc de cercle. On obtient ainsi

une courbe fermée simple qui délimite une sorte de domaine fondamental imparfait U pour le système dynamique, qu'on appellera secteur, voir la figure 4. On considère alors l'application de (premier) retour : à $z_0 \in U \cup \ell$ on associe le premier z_n qui appartienne à nouveau à $U \cup \ell$, avec $n \geq 1$.

FIGURE 4 – Construction d'un secteur U



Il se peut que z_n ne revienne jamais, auquel cas z_0 n'est pas dans le domaine de définition de l'application de retour. On considère ensuite l'adhérence \bar{U} et on recolle ℓ et $f(\ell)$ via f . C'est à dire : on introduit le quotient, en tant qu'espace topologique, de \bar{U} par l'identification $z \sim f(z)$ pour $z \in \ell$. Ce quotient—pensez-y comme une sorte de cône—est homéomorphe à un disque fermé.

En fait un relevé \tilde{U} de U par $E : z \mapsto e^{i\tau z}$ est un

12. On aurait pu à la place supposer f bornée mais il faudrait choisir la borne.

13. On pourrait prendre une courbe, pourvu qu'elle ne soit pas trop tordue.

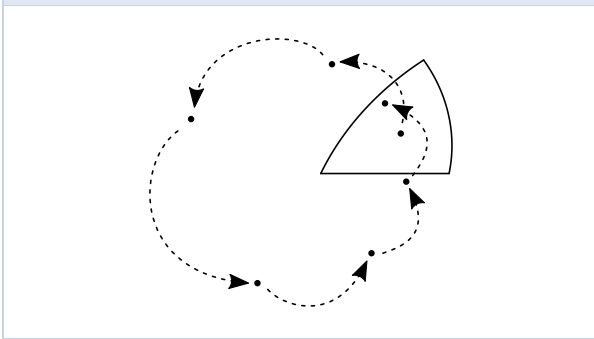
14. Celui tel que $\tilde{\theta} := \lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} F(z) - z$ soit le représentant entre $-1/2$ et $1/2$ de $\theta \bmod \mathbb{Z}$.

domaine fondamental pour un certain¹⁴ relevé F de f par $E : z \mapsto e^{i\tau z}$ et on est en train de regarder le quotient de son adhérence par $z \sim F(z)$ (plus un point à l'infini). Quitte à la restreindre à un ouvert qui nous sera suffisant, l'application de retour s'interprète comme suit : prendre $z \in \tilde{U}$ et regarder le premier $F^n(z) \in T(\tilde{U})$ où $T(z) = z + 1$. Il s'en suit (voir la construction de Douady-Ghys) qu'il y a une structure de surface de Riemann sur le disque U/\sim , isomorphe au disque unité \mathbb{D} , et que l'application de retour y est holomorphe. En particulier elle est continue, ce qui n'avait rien d'évident a priori. La renormalisée sectorielle $\mathcal{R}f$ de f est la conjuguée de cette application par un isomorphisme de surface de Riemann de U/\sim vers le disque unité \mathbb{D} . En réalité on veut une application définie sur \mathbb{D} (et à valeurs dans \mathbb{C}). Il suffit de conjuguer une fois de plus, par une homothétie de rapport C et Yoccoz a montré qu'on peut prendre C indépendant de f et de θ . C'est cette conjuguée qu'on appelle $\mathcal{R}f$. On a

$$\mathcal{R}f'(0) = e^{i\theta'\tau} \text{ avec }^{15} \theta' = -1/\theta.$$

La fonction $\mathcal{R}f$ ne dépend pas que de f mais également de certains choix, le plus notable étant le morceau de ∂U qui referme $\ell \cup f(\ell)$. Cependant sa classe de conjugaison près de 0 est unique.

FIGURE 5 – Un exemple de premier retour



Là où la renormalisation sectorielle trouve son utilité est dans des estimations dues à Yoccoz : par exemple sur la longueur de ℓ , qui détermine la longueur du secteur. En fait l'application $e^{i\theta\tau}z + z^2/2$ est injective sur \mathbb{D} et possède un point fixe en $z = 2(1 - e^{i\theta\tau}) \sim -2i\theta\tau$ quand $\theta \rightarrow 0$. Ce point fixe est une obstruction à la construction aussi le secteur ne peut pas être pris plus long qu'une quantité de l'ordre de $|\theta|$ sur cet exemple. Yoccoz montre que dans le cas général, une longueur de l'ordre de $|\theta|$ convient, où l'on suppose $-1/2 < \theta < 1/2$. Il montre également que le changement de variable de la re-

normalisation se comporte comme $z \mapsto (z/\theta)^{1/|\theta|}$, ce qui se comprend mieux si on réalise que dans le cas d'une vraie rotation $f(z) = e^{i\theta\tau}z$, le changement de variable est exactement $z \mapsto (z/r)^{1/\theta}$ si on prend pour U un secteur circulaire de rayon r . Pour l'énoncé ci-dessous je reste volontairement vague. Dorénavant, c_0, c_1 , etc. désignent des constantes universelles.

Proposition 1. *Supposons $|\theta| < 1/2$. Si un point z de départ vérifie $|z| < c_0|\theta|$, alors un itéré de z par f tombe dans $U \cup \ell$ et le changement de variable $U \cup \ell \rightarrow \mathbb{D}$ l'envoie sur un point z' avec $|z'| < c_1|z/c_0\theta|^{1/|\theta|}$.*

À partir de cela, on voudrait itérer cette procédure à partir du point z' et de $\mathcal{R}f$. Soit θ_n la suite de nombres obtenues par l'algorithme suivant :¹⁶ θ_0 est la valeur absolue du représentant dans $] -1/2, 1/2[$ de $\theta \bmod \mathbb{Z}$, et θ_{n+1} est la valeur absolue du représentant dans $] -1/2, 1/2[$ de $1/\theta_n \bmod \mathbb{Z}$. Une condition suffisante pour pouvoir itérer n fois la procédure est¹⁷ $|z| < c_0\theta_0(\frac{c_0}{c_1}\theta_1)^{\theta_0}(\frac{c_0}{c_1}\theta_2)^{\theta_0\theta_1}\dots(\frac{c_0}{c_1}\theta_{n-1})^{\theta_0\dots\theta_{n-2}}$, borne qui est inférieure à

$$c_2\theta_0\theta_1^{\theta_0}\theta_2^{\theta_0\theta_1}\dots\theta_{n-1}^{\theta_0\theta_1\dots\theta_{n-2}}.$$

Il se trouve que cette borne est proche de $\exp(-B(\theta))$ où $B(\theta)$ est la somme de Brjuno : le quotient est compris entre deux constantes universelles.

Maintenant, si z peut passer beaucoup d'étages de la renormalisation, on a la garantie que l'orbite de z sous f reste longtemps dans \mathbb{D} . Si le produit infini ci-dessus converge vers une valeur > 0 , alors il y a un domaine stable, et par le théorème de Moser et Siegel cité dans la section précédente, le point est linéarisable. Yoccoz a ainsi redémontré le théorème de Brjuno par une méthode géométrique. Brjuno l'avait démontré par des méthodes plus classiques de majoration des coefficients de la série linéarisante (voir plus bas) et Rübmann par une méthode de Newton (approche de type Nash-Moser). De façon intéressante, la preuve de Yoccoz donne une meilleure borne inférieure à la taille du domaine où l'on est conjugué à la rotation (disque de Siegel) :

Théorème (Yoccoz). *Le disque de Siegel contient $B(0, r)$ avec $r = c_3 \exp(-B(\theta))$ où $B(\theta)$ désigne la somme de Brjuno de θ .*

Brjuno avait seulement $r = c_4 \exp(-2B(\theta))$, or $B(\theta)$ peut prendre des valeurs arbitrairement

16. (modification de l'algorithme de Gauss des fractions continues)

17. Quitte à augmenter c_1 on suppose $c_1 > c_0$.

grandes. Carletti et Marmi réussiront plus tard à obtenir la même borne que Yoccoz en améliorant l'approche de Brjuno [3].

La borne de Yoccoz est en fait optimale au sens suivant :

Théorème (Yoccoz). *Pour tout θ il existe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe injective avec $f(z) = e^{i\theta\tau}z + \dots$ et telle que*

1. si $B(\theta) = +\infty$, f est non linéarisable en 0 ;
2. si $B(\theta) < +\infty$, la distance de 0 à la frontière du disque de Siegel est $< c_5 \exp(-B(\theta))$.

L'outil principal de la preuve de ce théorème est une inversion de la procédure de renormalisation. Il faut bien la choisir, de sorte à gêner le plus possible l'extension du domaine de linéarisation. Étant donné un $f(z) = e^{i\theta\tau}z + \dots$ injectif sur \mathbb{D} et un entier $a \in \mathbb{Z}$, Yoccoz arrive à construire g injective sur \mathbb{D} telle que

1. $\mathcal{R}g = f$
2. $g(z) = e^{i\alpha\tau}z + \dots$ avec $\alpha = a + 1/\theta$ et
3. g a un point fixe à distance $\approx |\alpha|$ de 0

Cette construction utilise également l'uniformisation des surfaces de Riemann. La place manque dans la Gazette pour la décrire. Mentionnons simplement qu'elle est extrêmement versatile. Elle permet de placer à peu près n'importe quelle dynamique près du point fixe supplémentaire. Quand on enchaîne les renormalisation inverses, ces points fixes deviennent des cycles périodiques, de plus en plus proches de 0.

Mentionnons également que Pérez-Marco a étendu les méthodes de Yoccoz au cas sans petit cycles [11], pour lequel un autre genre de "non-linéarité" intervient.

3.3 – Transfert aux polynômes quadratiques

Théorème (Yoccoz). *S'il existe un germe holomorphe non linéarisable $f(z) = e^{i\theta\tau}z + \dots$ alors le polynôme $Q(z) = e^{i\theta\tau}z + z^2$ est non linéarisable au point 0.*

(Rappelons que je note $\tau = 2\pi$.) Il est intéressant de noter que la conjecture suivante est encore ouverte, même pour les polynômes de degré 3 :

Conjecture. *Soit une fraction rationnelle de degré ≥ 2 possédant un point fixe de multiplicateur $e^{i\theta\tau}$.*

18. quasiconforme

Si ce point est linéarisable, alors θ est un nombre de Brjuno.

La preuve du théorème de Yoccoz est basée sur l'étude de la série linéarisante. Étant donné un germe holomorphe $f(z) = e^{i\theta\tau}z + \dots$ quelconque avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la série linéarisante est l'unique série formelle

$$\varphi(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

solution de

$$f \circ \varphi(z) = \varphi(\lambda z), \quad \lambda = e^{i\theta\tau}.$$

Le germe f est linéarisable ssi le rayon de convergence de φ est non nul, c'est à dire ssi $|a_n|$ est majoré par une suite exponentielle. L'équation se résout par récurrence sur les a_n , et si on note $f(z) = \lambda z + \sum_{n \geq 2} b_n z^n$, l'on trouve

$$(\lambda^n - \lambda)a_n = P_n(b_2, \dots, b_n, a_2, \dots, a_{n-1})$$

pour un certain polynôme P_n indépendant de λ et de f . C'est là que l'on voit apparaître le phénomène des *petits diviseurs* : pour certains n , $\lambda^n - \lambda$ est proche de 0 et menace de faire exploser la valeur de a_n . Or cela se répète pour une infinité de n . Brjuno a réussi à majorer $|a_n|$ dans le cas où $B(\theta) < +\infty$, ce qui donne le théorème de Brjuno.

Maintenant, on introduit une méthode que Yoccoz attribue en partie à l'Yashenko. Soit

$$f_t(z) = f(z) + tz^2,$$

famille à un paramètre $t \in \mathbb{C}$. Alors on a toujours $f_t = e^{i\theta\tau}z + \mathcal{O}(z^2)$ et les coefficients $a_n(t)$ de la série linéarisante de f_t sont polynomiaux en t . En particulier, holomorphes, donc ils vérifient le principe du maximum.

Maintenant si on prend $|t|$ grand, f est proche du polynôme quadratique quitte à zoomer. Plus précisément :

$$t^{-1}f_t(tz) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} Q(z) = e^{i\theta\tau}z + z^2$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{C} . En particulier, la théorie des applications à allure polynomiale de Douady et Hubbard permet de démontrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour $|t| \geq R$, f_t est conjuguée par un homéomorphisme¹⁸ à un polynôme de degré 2 au voisinage de son ensemble de Julia. Ce dernier aura un point fixe neutre, et θ est un invariant de conjugaison topologique : c'est le théorème

de Naishul [9, 6]. *Or il y a essentiellement un seul polynôme de degré deux avec un point fixe de multiplicateur fixé.* Donc f_t est conjugué à Q .

Supposons Q linéarisable à l'origine. De tout cela on peut déduire que la série linéarisante de f_t possède un rayon de convergence minoré quand t parcourt le cercle $|t| = R$. Celle-ci est nécessairement injective sur son disque de convergence, et des théorèmes de Koebe on déduit une majoration du type $\exists C, r > 0$ tel que

$$|t| = R \implies |a_n(t)| \leq C/r^n.$$

Par principe du maximum $|a_n(0)| \leq C/r^n$, donc f est linéarisable à l'origine. Nous venons de démontrer

la contraposée du théorème de Yoccoz.

Ricardo Pérez-Marco [12] et Lukas Geyer [7] ont étendu le théorème transfert de Yoccoz à de nombreux autres cas. Cependant le cas général résiste, même en degré 3. On sait juste que les exceptions sont... exceptionnelles [13].

Yoccoz a également transféré la majoration de la distance de 0 au bord du disque de Siegel, obtenant une borne pas tout à fait optimale pour le polynôme quadratique : ce sujet nous a tellement intéressé, Buff et moi-même, que nous avons réussi à obtenir la borne optimale $c_6 \exp(-B(\theta))$... par deux méthodes différentes [2, 1].

Références

- [1] X. BUFF et A. CHÉRITAT. « A new proof of a conjecture of Yoccoz ». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **61**, n° 1 (2011), p. 319–350. ISSN : 0373-0956. DOI : 10.5802/aif.2603. URL : <http://dx.doi.org/10.5802/aif.2603>.
- [2] X. BUFF et A. CHÉRITAT. « Upper bound for the size of quadratic Siegel disks ». *Invent. Math.* **156**, n° 1 (2004), p. 1–24. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/s00222-003-0331-6. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-003-0331-6>.
- [3] T. CARLETTI et S. MARMI. « Linearization of analytic and non-analytic germs of diffeomorphisms of $(C, 0)$ ». *Bull. Soc. Math. France* **128**, n° 1 (2000), p. 69–85. ISSN : 0037-9484. URL : http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_1_69_0.
- [4] T. M. CHERRY. « A singular case of iteration of analytic functions : A contribution to the small-divisor problem ». In : *Nonlinear Problems of Engineering*. Academic Press, New York, 1964, p. 29–50.
- [5] A. DOUADY. « Disques de Siegel et anneaux de Herman ». *Astérisque*, n° 152-153 (1987). Séminaire Bourbaki, Vol. 1986/87, 4, 151–172 (1988). ISSN : 0303-1179.
- [6] J.-M. GAMBAUDO, P. LE CALVEZ et É. PÉCOU. « Une généralisation d'un théorème de Naishul. » *French. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* **323**, n° 4 (1996), p. 397–402. ISSN : 0764-4442.
- [7] L. GEYER. « Linearization of structurally stable polynomials ». In : *Progress in holomorphic dynamics*. Vol. 387. Pitman Res. Notes Math. Ser. Longman, Harlow, 1998, p. 27–30.
- [8] J. MILNOR. *Dynamics in one complex variable. Introductory lectures. 2nd ed.* English. 2nd ed. Wiesbaden : Vieweg, 2000, p. vii + 257. ISBN : 3-528-13130-6/pbk.
- [9] V. A. NAIŠUL'. « Topological invariants of germs of analytic mappings and area preserving mappings, and their application to analytic differential equations in CP^2 ». *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **14**, n° 1 (1980), p. 73–74. ISSN : 0374-1990.
- [10] H.-O. PEITGEN et P. RICHTER. *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*. English. Berlin etc. : Springer-Verlag, xii, 199 pp., 184 illustrations in 211 parts, 88 in color DM 78.00 (1986). 1986.
- [11] R. PÉREZ MARCO. « Sur la structure des germes holomorphes non linéarisables ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312**, n° 7 (1991), p. 533–536. ISSN : 0764-4442.
- [12] R. PÉREZ MARCO. « Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V. I. Arnol'd ». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **26**, n° 5 (1993), p. 565–644. ISSN : 0012-9593. URL : http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_5_565_0.
- [13] R. PÉREZ-MARCO. « Total convergence or general divergence in small divisors ». *Comm. Math. Phys.* **223**, n° 3 (2001), p. 451–464. ISSN : 0010-3616. DOI : 10.1007/s002200100457. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s002200100457>.
- [14] J.-C. YOCOZ. *Petits diviseurs en dimension 1*. French. Paris : Société Math. de France, 1995, p. 242.

Arnaud CHÉRITAT

CNRS/Institut de Mathématiques de Toulouse