

# HAMPATH – Suivi de chemin différentiel et conditions du second ordre en contrôle optimal

Olivier COTS



INP-ENSEEIH  
Équipe APO



Mardi 6 juin 2017, Congrès SMAI 2017, La Tremblade.

Le code **HAMPATH** (<http://hampath.org>) est un logiciel open-source développé depuis 2009 à l'IRIT (Toulouse), l'Univ. de Bourgogne et INRIA Sophia, et qui est dédié à la résolution de problèmes de contrôle optimal.

- Mots-Clés

- Méthode indirecte, *i.e.* basée sur le Principe du Maximum de Pontryagin ;
- Méthode homotopique ;
- Conditions du second ordre (calcul de temps conjugués).

- Principe général



---

[–] J.-B. Caillaud, O. Cots & J. Gergaud, *Differential continuation for regular optimal control problems*, *Optim. Methods Softw.*, **27** (2012), no 2, 177–196. [PDF](#).

# FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

$$(\text{OCP}_{\text{general}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(x_0, u(\cdot), t_0, t_f) := g(t_0, x_0, t_f, x(t_f), \Lambda) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t), \Lambda) dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \Lambda), \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(t_0) = x_0, \\ (t_0, x_0, t_f, x(t_f)) \in X_l, \\ x(t) \in X_c \subset X, \quad t \in [t_0, t_f], \end{array} \right.$$

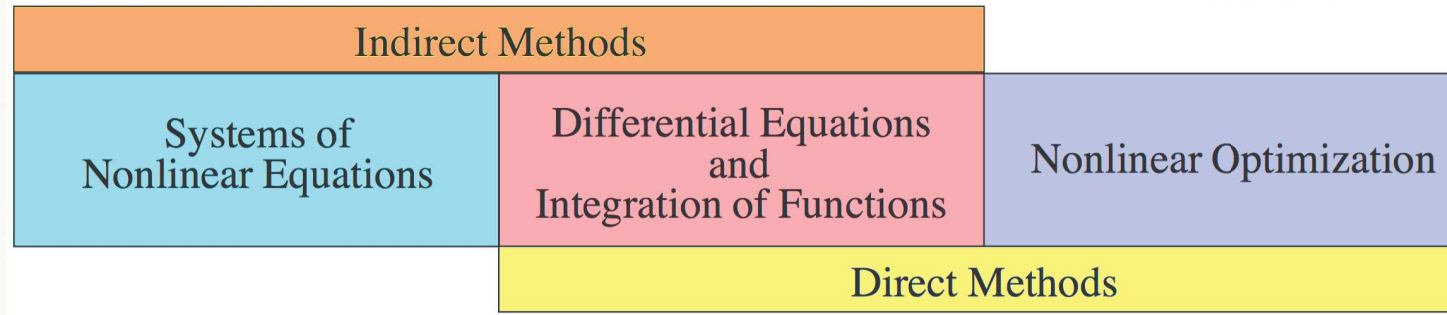
où

- $\Lambda \in \mathbb{R}^k$  est un ensemble de paramètres,
- $X \subset \mathbb{R}^n$  est l'espace d'état,
- $U \subset \mathbb{R}^m$  est le domaine de contrôle,
- $X_l$  est un ensemble décrivant les conditions aux limites et
- $X_c$  est un sous-ensemble de  $X$  ayant un bord et qui définit les contraintes d'état.

*Remarque 1.* À noter que les ensembles  $X$ ,  $U$ ,  $X_b$  et  $X_c$  peuvent dépendre de  $\Lambda$  et on suppose que les fonctions  $f$ ,  $f^0$  et  $g$  sont au moins  $C^1$ . De plus, le problème ( $\text{OCP}_{\text{general}}$ ) pourrait avoir des contraintes mixtes, mélangeant contrôle et état.

# MÉTHODES NUMÉRIQUES

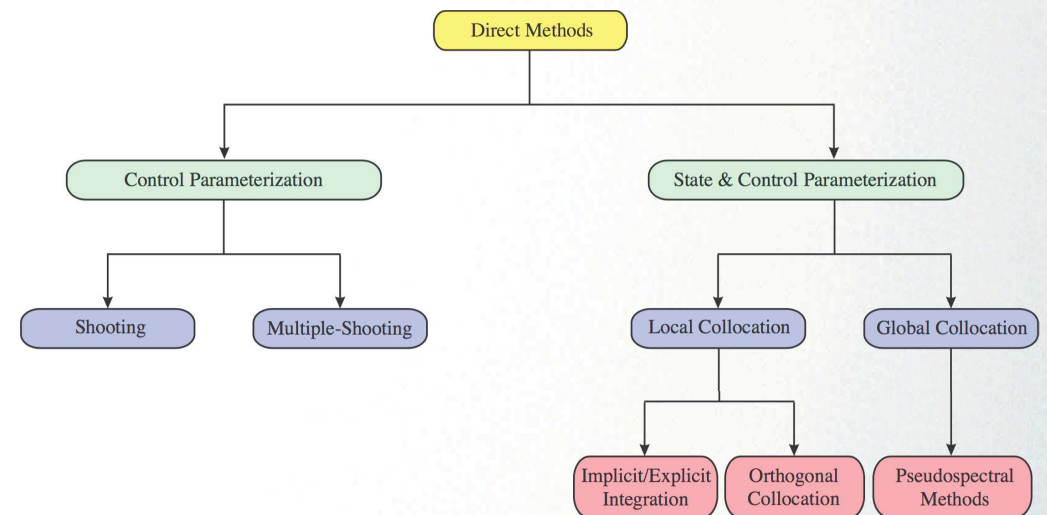
Les deux principales méthodes numériques (directe et indirecte) et leurs trois composantes majeures :



On peut y ajouter les méthodes :

- Homotopiques ;
- LMI ;
- HJB...

Détails sur les méthodes directes :



Les figures sont extraites de : [-] A.V. Rao. *A survey of numerical methods for optimal control*. 2009, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, AAS Paper 09-334, Pittsburgh, PA, August 10-13, 2009.

# MÉTHODES INDIRECTES : CONDITIONS NÉCESSAIRES D'OPTIMALITÉ

Considérons le problème de contrôle optimal (simplifié pour l'exemple) suivant :

$$(OCP) \quad \begin{cases} J(u(\cdot)) := \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \text{ quelconque, } t \in [0, t_f] \text{ p.p., } x(0) = x_0, \\ x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où  $x_0, x_f$  et  $t_f > 0$  sont fixés et on cherche  $u(\cdot)$  dans  $L^\infty([0, t_f], U)$ .

---

D'après le **Principe du Maximum de Pontryagin**, si  $u(\cdot)$ , avec  $x(\cdot)$  la trajectoire associée, est solution de (OCP), alors il existe  $p(\cdot) \in AC([0, t_f], (\mathbb{R}^n)^*)$ , un réel  $p^0 \leq 0$ , tels que  $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$  et tels que pour  $t \in [0, t_f]$  p.p. :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

où  $H(x, p, p^0, u) := p f(x, u) + p^0 f^0(x, u)$  est le pseudo-hamiltonien associé à (OCP), et on a la condition de maximisation du hamiltonien suivante pour  $t \in [0, t_f]$  p.p. :

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{w \in U} H(x(t), p(t), p^0, w). \tag{2}$$

**Définition 1.** On introduit les définitions suivantes.

- Une **extrémale** est un quadruplet  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  solution des *équations hamiltoniennes* (1) et de la *condition de maximisation* (2).
- On parle de **BC–extrémale** (BC vient de “Boundary Conditions”) si l’extrémale vérifie en plus les *conditions aux limites*  $x(0) = x_0$  et  $x(t_f) = x_f$ .
- Une extrémale  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  est dite **anormale** si  $p^0 = 0$  et **normale** dans le cas contraire. Dans le cas normal on peut fixer  $p^0$  à  $-1$  par exemple, par homogénéité.

*Remarque 2.* On se place par exemple dans le cas normal (*i.e.*  $p^0 = -1$ ). On note  $z := (x, p)$  et on définit

$$\vec{H}(z, u) := \left( \frac{\partial H}{\partial p}(z, p^0, u), -\frac{\partial H}{\partial x}(z, p^0, u) \right).$$

On peut alors écrire les équations (1) sous la forme :

$$\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t), u(t)).$$

# MÉTHODES INDIRECTES : PROBLÈME AUX DEUX BOUTS (TPBVP)

Supposons que  $U = \mathbb{R}^m$  et que la condition de Legendre stricte est vérifiée, *i.e.*

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0.$$

D'après le TFI, pour toute extrémale  $(z(\cdot), p^0, u(\cdot))$ , on peut écrire :

$$u(t) = \bar{u}(z(t)),$$

où  $\bar{u}$  vérifie  $\frac{\partial H}{\partial u}(z, p^0, \bar{u}(z)) = 0$ .

En injectant  $\bar{u}$  dans  $\vec{H}$ , trouver une BC-extrémale revient à résoudre le problème aux deux bouts suivant :

$$\text{(TPBVP)} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) &= \vec{H}(z(t), \bar{u}(z(t))), \\ 0_{\mathbb{R}^{2n}} &= b(z(0), z(t_f)) = (x(0) - x_0, x(t_f) - x_f). \end{cases}$$

*Remarque 3.* Dans le cas où l'on a des contraintes sur  $u$  ou sur  $x$ , la démarche est identique. De manière générale, on est amené à résoudre un "Multi-Point Boundary Value Problem" (MPBVP).

# MÉTHODES INDIRECTES : MÉTHODE DE TIR SIMPLE

On peut écrire le problème aux deux bouts précédent

$$\text{(TPBVP)} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = \overrightarrow{H}(z(t), \bar{u}(z(t))), \\ 0_{\mathbb{R}^{2n}} = b(z(0), z(t_f)) = (x(0) - x_0, x(t_f) - x_f). \end{cases}$$

sous la forme d'un système d'équations non linéaires :

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y} &\longmapsto S(\mathbf{y}) := \Pi_x(z(t_f, x_0, \mathbf{y})) - x_f, \end{aligned} \quad (3)$$

où  $\Pi_x(x, p) = x$  et où  $z(\cdot, x_0, \mathbf{p}_0)$  est solution de  $\dot{z}(t) = \overrightarrow{H}(z(t), \bar{u}(z(t)))$ ,  $z(0, x_0, \mathbf{p}_0) = (x_0, \mathbf{p}_0)$ . Résoudre le problème aux deux bouts (TPBVP) revient à résoudre  $S(\mathbf{y}) = 0$ .

*Remarque 4.* On pourrait également définir  $z(\cdot, x_0, \mathbf{p}_0)$  comme la solution de

$$\dot{z}(t) = \overrightarrow{\mathcal{H}}(z(t)), \quad z(0, x_0, \mathbf{p}_0) = (x_0, \mathbf{p}_0),$$

où

$$\mathcal{H}(z) := H(z, \mathbf{p}^0, \bar{u}(z)).$$

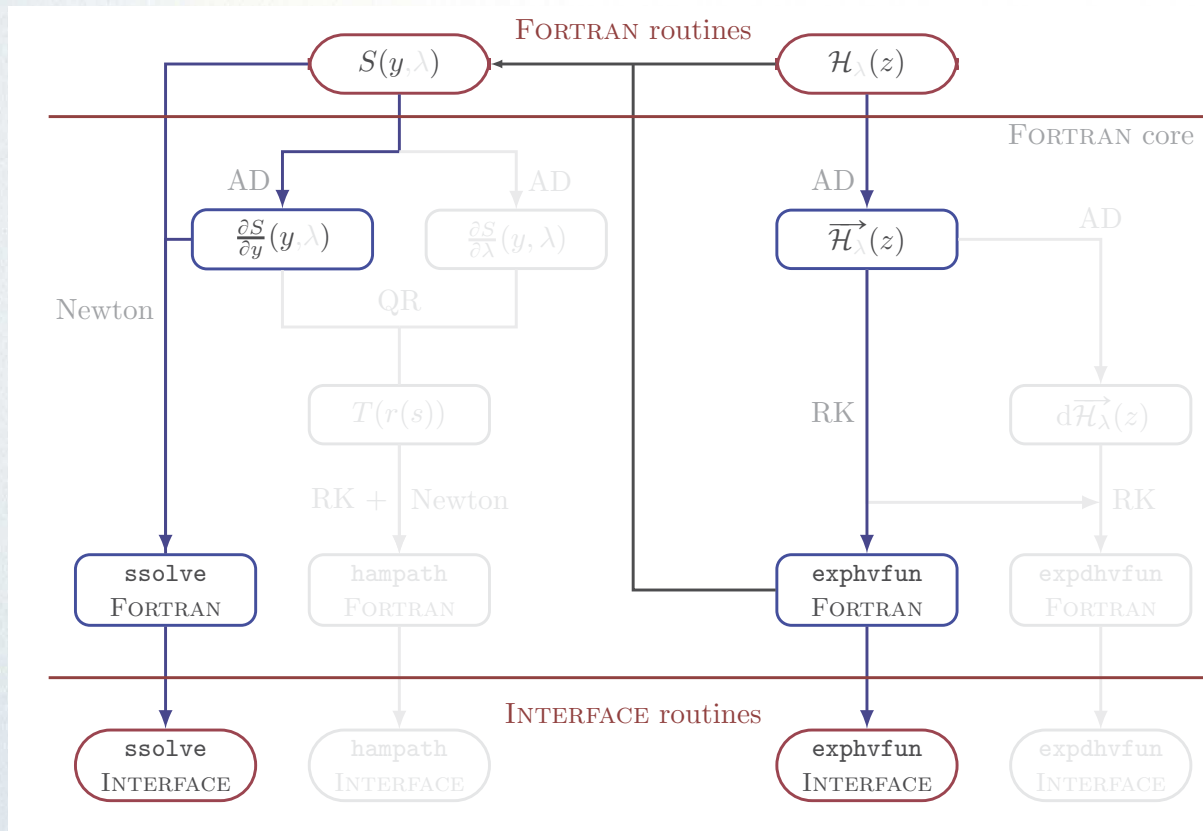
C'est vrai de manière générale et c'est pourquoi on fournit à HAMPATH, la fonction de tir  $S$  et le hamiltonien  $\mathcal{H}$ .



# MÉTHODES INDIRECTES ET HAMPATH: VUE D'ENSEMBLE

HAMPATH :

- Deux entrées<sup>1</sup> en FORTRAN 90 :  $S$  et  $\mathcal{H}$  ;
- Une dizaine de sorties MATLAB, OCTAVE, PYTHON ou FORTRAN.



- AD (Automatic Differentiation) : code TAPENADE ;
- Newton : routine `hybrj` de la librairie MINPACK avec contrôle du pas pour le calcul de dérivée par Eq. Var., IND de Bock ou différences finies ;
- RK : méthodes de Runge-Kutta à pas fixe (explicites et implicites) et à pas variable telles que `dopri5`, `dop853`, `radau5` (9, 13) ;
- BLAS pour les opérations matrice-matrice et matrice-vecteur ;
- LAPACK pour les factorisations de matrices...

<sup>1</sup> Toute entrée supplémentaire donne une sortie supplémentaire, e.g. pour le contrôle.

# MÉTHODES INDIRECTES ET HAMPATH: QUELQUES REMARQUES GÉNÉRALES

- On peut coder toutes sortes de systèmes d'équations non linéaires  $S(y)$  ! On peut faire du tir simple, du tir multiple (on peut inclure les instants de commutations, les sauts sur le vecteur adjoint...) ou encore d'autres choses.
- On peut fournir  $\vec{\mathcal{H}}$  à HAMPATH à la place de  $\mathcal{H}$ .
- La version à jour est développée pour les systèmes UNIX mais il est possible de l'installer sous WINDOWS.
- ...

# MÉTHODES HOMOTOPIQUES : UNE FAMILLE DE PROBLÈMES

Considérons la famille ( $\lambda \in [0, 1]$ ) de problèmes de contrôle optimal suivante :

$$(OCP_\lambda) \quad \begin{cases} J(u(\cdot)) := \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t), \lambda) dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \lambda), \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(0) = x_0, \\ x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où  $x_0$ ,  $x_f$  et  $t_f > 0$  sont fixés. Notons  $S_\lambda(y) := \Pi_x(z(t_f, x_0, y, \lambda)) - x_f$  la fonction de tir et  $S(y, \lambda) := S_\lambda(y)$  la fonction homotopique associées.

**But.** Résoudre  $S(y, \lambda) = 0$  pour  $\lambda \in [0, 1]$ .

*Remarque 5.* Exemples d'utilisation des méthodes homotopiques :

- Globalisation :  $S(y, \lambda) := S(y) - (1 - \lambda)S(\bar{y})$ ,  $\bar{y}$  donné.
- Régularisation :  $J_\lambda(u(\cdot)) := \int_0^{t_f} (\|u(t)\| - (1 - \lambda)(\ln(\|u(t)\|) + \ln(1 - \|u(t)\|))) dt$ ,  $\|u(t)\| \leq 1$ .
- Synthèse d'extrémales (ou optimale) en fonction de paramètres du modèle, e.g. les bornes des contraintes, le point initial...

# MÉTHODES HOMOTOPIQUES DIFFÉRENTIELLES : LE PRINCIPE GÉNÉRAL

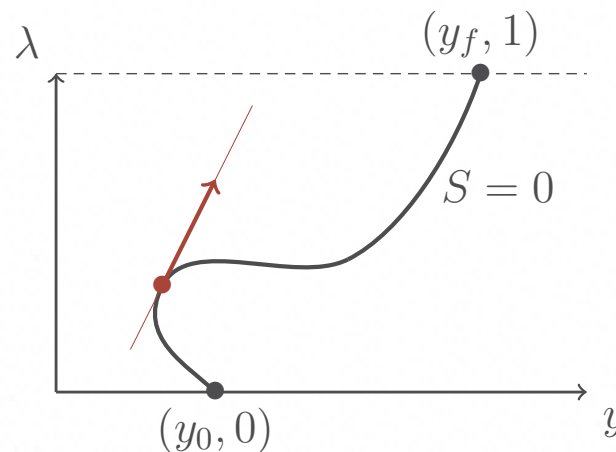
On définit donc la fonction homotopique non linéaire et lisse  $S$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^{N+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (y, \lambda) &\longmapsto S(y, \lambda) := S_\lambda(y), \end{aligned} \tag{4}$$

On considère que 0 est une valeur régulière de  $S$ , *i.e.* pour tout  $r := (y, \lambda) \in S^{-1}(0)$ ,  $r$  est un point régulier :

$$\text{rang}(S'(r)) = N.$$

Dans ce cas régulier, une courbe continûment différentiable partant de  $r_0 := (y_0, 0) \in S^{-1}(0)$  existe et est soit difféomorphe à  $\mathbb{R}$  ou à un cercle.



*Remarque 6.* Notons que dans le cas régulier, les courbes de  $S^{-1}(0)$  sont disjointes et on appelle chaque branche de  $S^{-1}(0)$  un *chemin de zéros*.

# MÉTHODES HOMOTOPIQUES DIFFÉRENTIELLES : PRÉDICTION-CORRECTION

On paramètre le chemin de zéro par l'abscisse curviligne  $s$  et on note  $r(s) := (y(s), \lambda(s))$ .

**Calcul du vecteur tangent.** Pour tout  $s$ ,  $S(r(s)) = 0$ , donc

$$S'(r(s)) \dot{r}(s) = 0$$

et puisque  $r(s)$  est un point régulier,  $\dim \ker S'(r(s)) = 1$ . On définit  $r \mapsto T(r)$  l'application qui à  $r$  associe l'unique vecteur tangent unitaire (bien orienté) dans  $\ker S'(r)$ .

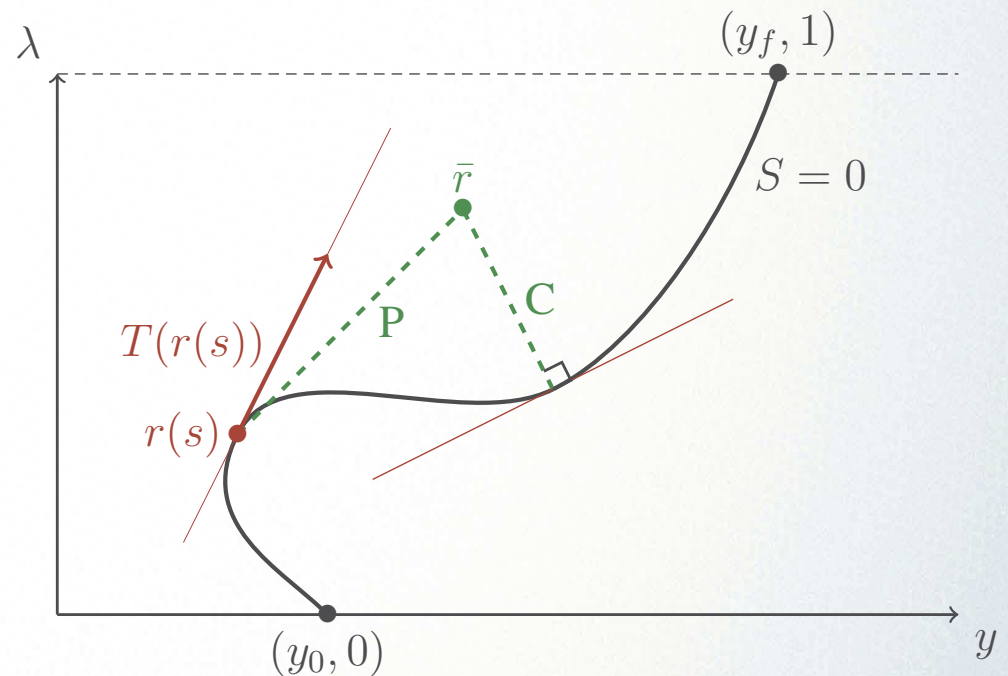
**Prédiction (P).** Intégrateur à pas variable d'ordre élevé pour la résolution de :

$$\begin{cases} \dot{r}(s) = T(r(s)) \\ r(0) = (y_0, 0) \in S^{-1}(0). \end{cases}$$

**Correction (C).** Après chaque pas d'intégration, on peut revenir sur le chemin :

$$\begin{cases} \min_r \|r - \bar{r}\|^2 \\ S(r) = 0, \end{cases}$$

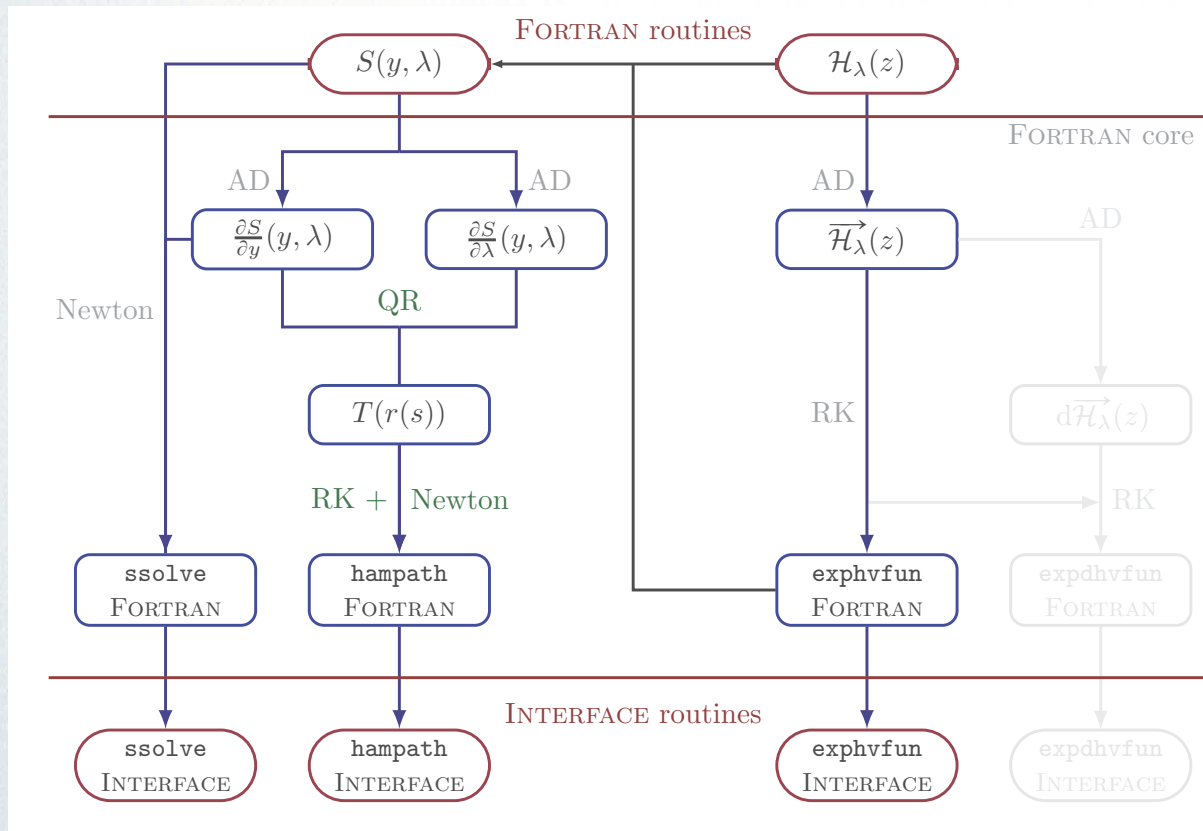
où  $\bar{r}$  est le point issu de la prédiction.



# MÉTHODES HOMOTOPIQUES ET HAMPATH: VUE D'ENSEMBLE

HAMPATH :

- Deux entrées<sup>2</sup> en FORTRAN 90 :  $S(y, \lambda)$  et  $\mathcal{H}_\lambda(z)$  ;
- Une dizaine de sorties MATLAB, OCTAVE, PYTHON ou FORTRAN.



- **QR** : factorisation QR de LAPACK pour le calcul du vecteur tangent ;
- **RK** : schémas de Runge-Kutta à pas variable – dopri5, dop853, radau5 (9, 13) – pour la **Prédiction** ;
- **Newton** : méthode de Newton modifiée (un calcul de la jacobienne) pour la **Correction** ;
- Utilisation de la sortie dense pour détecter  $\lambda(s_f) = 1$  ;
- Détection d'évènements au cours du suivi de chemin différentiel...

<sup>1</sup> Toute entrée supplémentaire donne une sortie supplémentaire, e.g. pour le contrôle.

# MÉTHODES HOMOTOPIQUES ET HAMPATH: EXEMPLE D'APPLICATION



# MÉTHODES HOMOTOPIQUES ET HAMPATH: EXEMPLE D'APPLICATION

$$\begin{aligned}
 \frac{di}{dt}(t) &= \frac{1}{L_m} (-R_m i(t) - K_m \omega(t) + V_{\text{alim}} u(t)) \\
 \frac{d\alpha}{dt}(t) &= \frac{r}{K_r} \omega(t) \\
 \frac{d\omega}{dt}(t) &= -\frac{K_r}{r} g K_f + \frac{K_r^2 K_m}{r^2 M} i(t) - \frac{1}{2} \rho S C_x \frac{r}{K_r M} \omega(t)^2.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

State	Description	Unit
$i$	current	ampere
$\alpha$	position	meter
$\omega$	angular velocity	radian per second

Control	Description
$u$	acceleration (energy consumption) or breaking (recharging of the battery)

Parameter	Description	Unit
$L_m$	Inductance of the rotor	henry
$R_m$	Inductor resistance	ohms
$K_m$	Motor torque coefficient	
$V_{\text{alim}}$	Battery voltage	volt
$r$	Radius of the wheels	m
$K_r$	Reduction coefficient	
$g$	Gravity constant	m.s <sup>-2</sup>
$K_f$	Friction coefficient (wheels on the road)	
$M$	Total mass	kg
$\rho$	Density of air	kg/m <sup>3</sup>
$S$	Area in front of the vehicle	m <sup>2</sup>
$C_x$	Aerodynamic coefficient	
$R_{\text{bat}}$	Resistance of the battery	ohms



# MÉTHODES HOMOTOPIQUES ET HAMPATH: EXEMPLE D'APPLICATION

On considère le problème temps minimal sous la forme suivante :

$$(P_{\text{tmin}}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u, t_f} t_f, \\ \dot{x}(t) = F_0(x(t)) + u(t) F_1(x(t)), \quad u(t) \in U := [-1, 1], \quad t \in [0, t_f] \text{ a.e.}, \quad t_f > 0, \\ x(0) = (0, 0, 0) =: x_0, \\ x(t) \in [-i_{\max}, i_{\max}] \times \mathbb{R} \times [-v_{\max}, v_{\max}], \quad t \in [0, t_f], \\ x_2(t_f) = \alpha_f. \end{array} \right.$$

*Remarque 7.* On a remplacé la vitesse angulaire  $\omega$  par la vitesse linéaire  $v$ , ainsi  $x := (i, \alpha, v)$ .

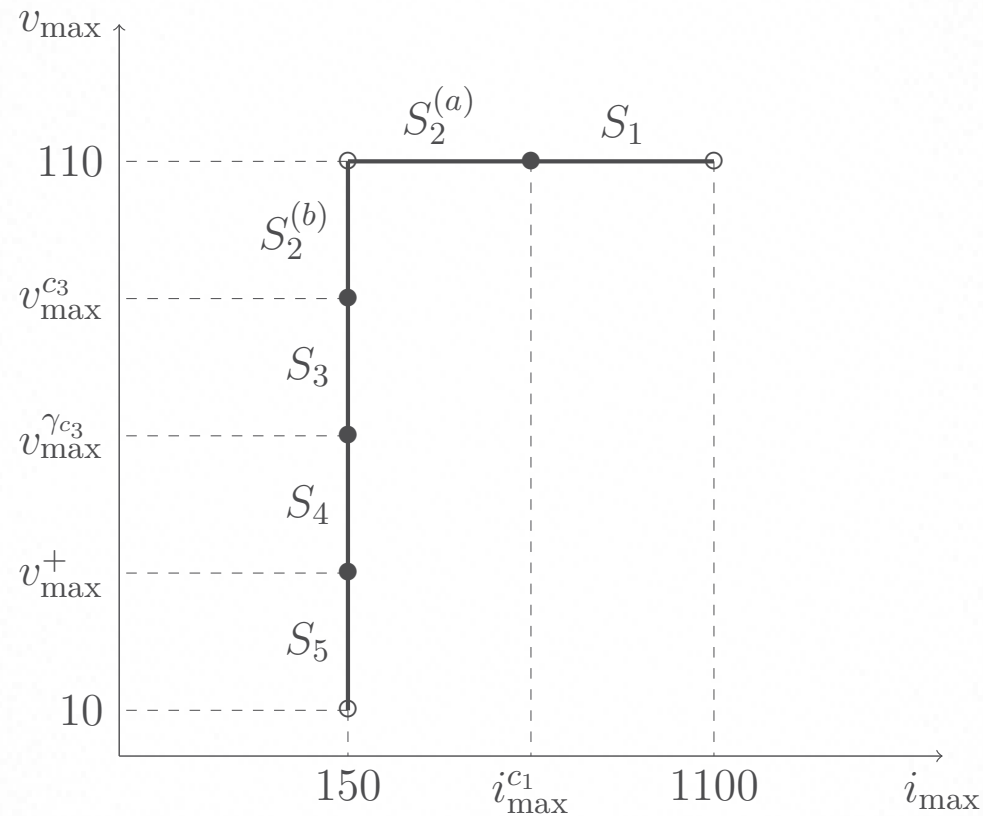
*Remarque 8.*  $i_{\max}$  et  $v_{\max}$  sont les bornes sur les contraintes d'état respectivement sur l'intensité et la vitesse.

---

[–] O. Cots, *Geometric and numerical methods for a state constrained minimum time control problem of an electric vehicle*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., (2016), to appear. [PDF](#).

# MÉTHODES HOMOTOPIQUES ET HAMPATH: EXEMPLE D'APPLICATION

Influence du courant maximal et de la vitesse maximale.

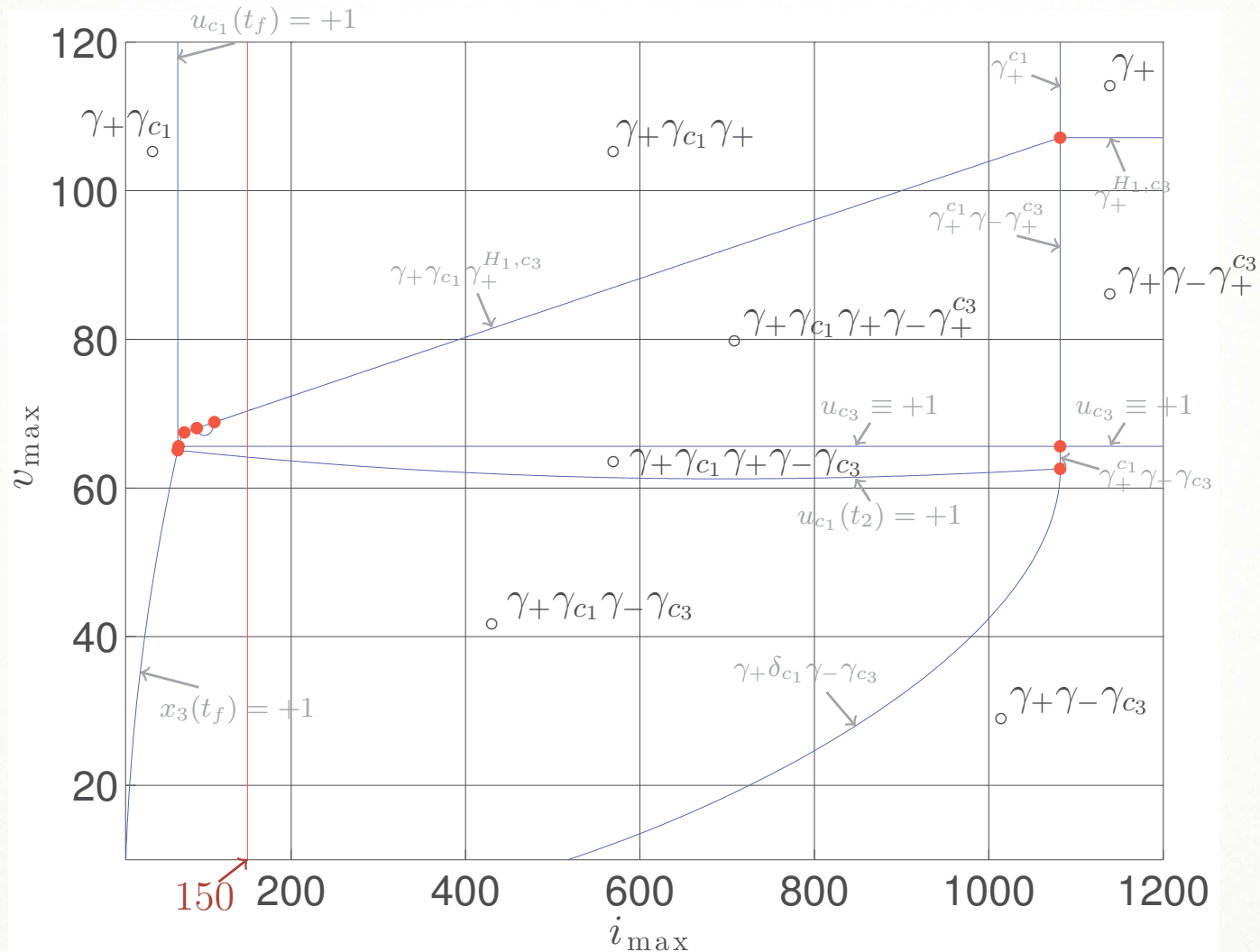


Vue schématique de la méthode pour construire une synthèse de BC-extrémales pour  $\alpha_f = 100$ ,  $i_{\max} = 150$  et  $v_{\max} \in [10, 110]$ , en partant de  $(i_{\max}, v_{\max}) = (1100, 110)$ .

Le symbole  $\bullet$  représente un changement de structure tandis que  $\circ$  signifie un choix de départ ou de fin d'homotopie.

# MÉTHODES HOMOTOPIQUES ET HAMPATH: EXEMPLE D'APPLICATION

Influence du courant maximal et de la vitesse maximale.  $c_1(x) = x_1 - i_{\max}$  et  $c_3(x) = x_3 - v_{\max}$ .



# CONDITIONS DU DEUXIÈME ORDRE DANS LE CAS RÉGULIER

Reprenons le problème de contrôle optimal de départ avec  $U = \mathbb{R}^m$  :

$$\text{(OCP)} \quad \begin{cases} J(u(\cdot)) := \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.}, \quad x(0) = x_0, \\ x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

où  $x_0$ ,  $x_f$  et  $t_f > 0$  sont fixés. Supposons que la condition de Legendre stricte est vérifiée, *i.e.*  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$  et considérons seulement les extrémales normales, *i.e.*  $p^0 = -1$ .

---

Notons  $z(\cdot, x_0, p_0) = (x(\cdot, x_0, p_0), p(\cdot, x_0, p_0))$  la solution de

$$\dot{z}(t) = \overrightarrow{\mathcal{H}}(z(t)), \quad z(0, x_0, p_0) = (x_0, p_0).$$

Alors, la trajectoire  $x(\cdot, x_0, p_0)$  cesse d'être optimale après le premier temps  $t_c$  (dit **conjugué**) pour lequel  $p_0$  est un point critique de l'application  $x(t_c, q_0, \cdot)$ , *i.e.*  $t_c$  est un temps conjugué si

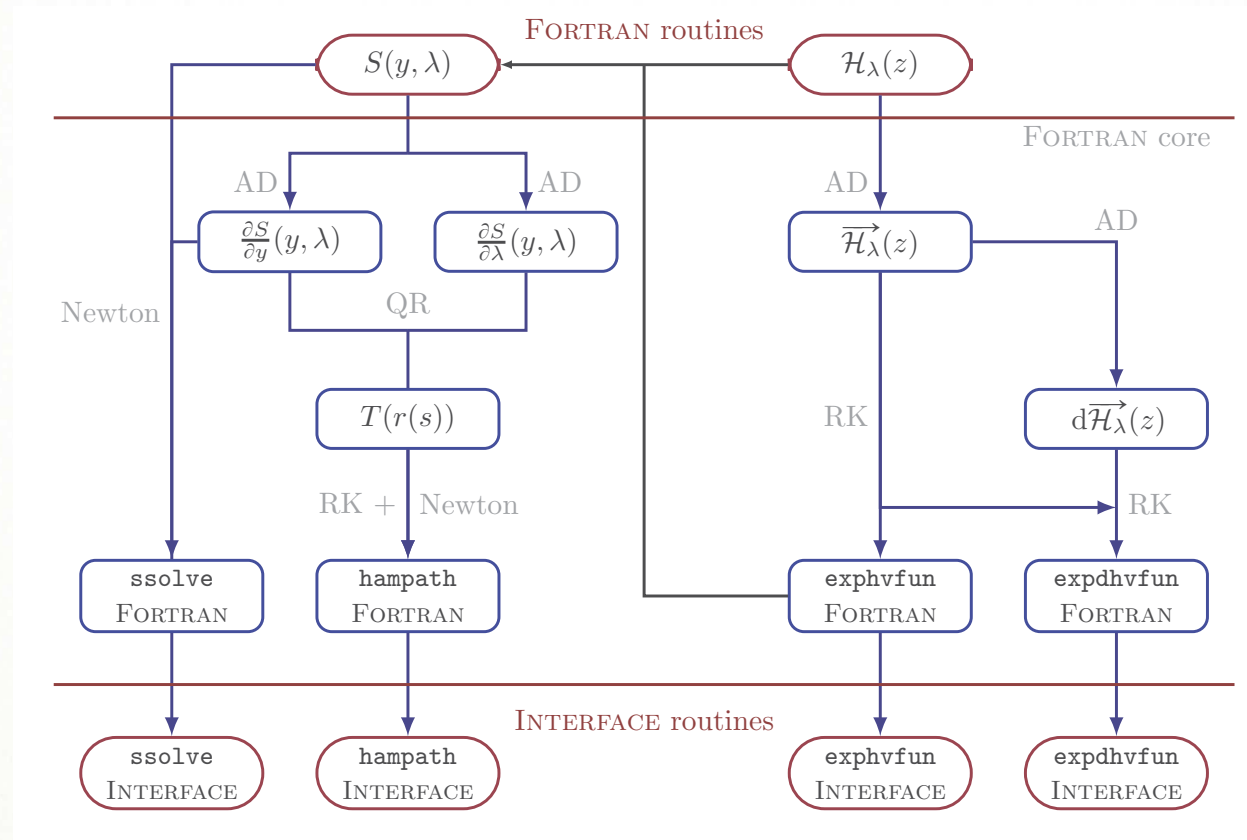
$$\frac{\partial x}{\partial p_0}(t_c, q_0, p_0)$$

n'est pas de rang plein.

# CONDITIONS DU DEUXIÈME ORDRE ET HAMPATH: VUE D'ENSEMBLE

HAMPATH :

- Deux entrées<sup>3</sup> en FORTRAN 90 :  $S(y, \lambda)$  et  $\mathcal{H}_\lambda(z)$  ;
- Une dizaine de sorties MATLAB, OCTAVE, PYTHON ou FORTRAN.



<sup>1</sup> Toute entrée supplémentaire donne une sortie supplémentaire, e.g. pour le contrôle.

# RÉFÉRENCES

---

HAMPATH (<http://hampath.org>).

[–] J.-B. Caillaud, O. Cots & J. Gergaud, *Differential continuation for regular optimal control problems*, *Optim. Methods Softw.*, **27** (2012), no 2, 177–196. [PDF](#).

[–] O. Cots, *Geometric and numerical methods for a state constrained minimum time control problem of an electric vehicle*, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, (2016), to appear. [PDF](#).

Contrôle optimal.

[–] Agrachev, A. A.; Sachkov, Y. L. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, *Encyclopædia of Mathematical Sciences* **87**, Springer, 2004.

Méthodes numériques.

[–] R. Bulirsch and J. Stoer, *Introduction to numerical analysis*, vol. **12** of *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2<sup>nd</sup> edition, 1993, xvi+744.

[–] E. Allgower and K. Georg, *Introduction to numerical continuation methods*, vol. **45** of *Classics in Applied Mathematics*, Soc. for Industrial and Applied Math., Philadelphia, PA, USA, (2003), xxvi+388.

[–] B. Bonnard, J.-B. Caillaud & E. Trélat, *Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **13** (2007), no 2, 207–236.

[–] Hairer, E.; Nørsett, S. P.; Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, Springer, 1993.

[–] Hascoët, L.; Pascual, V. TAPENADE 2.1 users's guide. INRIA Tech. Rep. (2004), no. 300, 1–78.