



HAL
open science

Tributación en Colombia: Una aproximación teórica y empírica de la Curva de Laffer

Juan Camilo Villar Otalora, Juan Pablo Herrera Saavedra, Jacobo Alberto Campo Robledo

► **To cite this version:**

Juan Camilo Villar Otalora, Juan Pablo Herrera Saavedra, Jacobo Alberto Campo Robledo. Tributación en Colombia: Una aproximación teórica y empírica de la Curva de Laffer. 2021. hal-03114284

HAL Id: hal-03114284

<https://hal.science/hal-03114284v1>

Preprint submitted on 18 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Industria y Comercio
SUPERINTENDENCIA

Documentos de Trabajo

Tributación en Colombia: Una aproximación teórica y empírica de la Curva de Laffer

Juan Pablo Herrera Saavedra
Juan Camilo Villar Otálora
Jacobó Campo Robledo

No. 25
2020

Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 2.5 Colombia](#).

Usted es libre de:

Compartir - copiar, distribuir, ejecutar y comunicar públicamente la obra

Bajo las condiciones siguientes:

- **Atribución** – Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciante. Si utiliza parte o la totalidad de esta investigación tiene que especificar la fuente.
- **No Comercial** – No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Sin Obras Derivadas** – No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.

Los derechos derivados de usos legítimos u otras limitaciones reconocidas por la ley no se ven afectados por lo anterior.



La serie Documentos de Trabajo es una publicación de la Superintendencia de Industria y Comercio (SIC). Los documentos son elaborados por los miembros del Grupo de Estudios Económicos (GEE) o funcionarios de la entidad, y son de carácter provisional. Los análisis, opiniones y posibles errores son de responsabilidad exclusiva de los autores y no representa la posición de la SIC en la materia.

Para cualquier duda, sugerencia, corrección o comentario, escribir a: estudioeconomicos@sic.gov.co

Tributación en Colombia: Una aproximación teórica y empírica de la Curva de Laffer

Juan Pablo Herrera Saavedra*

Juan Camilo Villar Otálora[^]

Jacobo Campo Robledo[♥]

Resumen

El documento presenta una estimación de la Curva de Laffer para la economía colombiana mediante la realización de un análisis de estática comparativa y un análisis de tipo econométrico. Respecto al primer análisis, partiendo de un modelo microeconómico se analiza el nivel de distorsión que se generaría al establecer un impuesto indirecto y las implicaciones que en materia de bienestar se originarían al maximizar el recaudo tributario en el mercado. Para el segundo análisis, utilizando datos del ingreso tributario real per cápita y la tasa impositiva, se estima un modelo econométrico con el fin de calcular la tasa impositiva de tributación óptima en Colombia. Los resultados muestran el cumplimiento de los postulados de Laffer, con una tasa impositiva óptima del 37% aproximadamente, y sugieren un espacio fiscal del Gobierno de aproximadamente 12 puntos porcentuales.

Palabras Clave: Curva de Laffer; Ingreso Fiscal; Impuesto Óptimo; Incidencia Fiscal en Mercados; Tasa Impositiva de Tributación.

Clasificación JEL: C23, D72, E13, E62, H20, H30.

* Las ideas consignadas en el documento son de entera responsabilidad de los autores y no representan la posición institucional de ninguna de las entidades en las que los mismos se encuentran vinculados.

* Magíster en Ciencias Económicas con énfasis en Teoría y Política Económica y Economista, Universidad Nacional de Colombia. Profesor de Economía de la Universidad Nacional de Colombia y de la Universidad Externado de Colombia. Superintendente Delegado para la Protección de la Competencia – Superintendencia de Industria y Comercio. Correo electrónico: jpherreras@unal.edu.co, juan.herrera@uexternado.edu.co

[^] Magíster en Economía, Universidad Externado de Colombia. Economista. Universidad Militar Nueva Granada. Profesor de Economía de la Universidad Central. Economista del Grupo de Estudios Económicos – Superintendencia de Industria y Comercio. Correo electrónico: c.villar@sic.gov.co, camilovillar.o@gmail.com

[♥] Magíster en Economía, Universidad del Rosario. Economista y Negociador Internacional, Universidad ICESI. Profesor de Economía de la Universidad Católica de Colombia, Universidad Sergio Arboleda y la Universidad Externado de Colombia. Coordinador del Grupo de Estudios Económicos – Superintendencia de Industria y Comercio. Correo electrónico: jcampo@sic.gov.co, jacobo.campo@gmail.com

Taxes in Colombia: A theoretical and empirical approach to the Laffer Curve

Abstract

The document presents an estimate of the Laffer Curve for the Colombian economy by performing a comparative statics analysis and an econometric analysis. Regarding the first analysis, starting from a microeconomic model, the level of distortion that would be generated by establishing an indirect tax and the welfare implications that would arise from maximizing tax collection in the market is analyzed. For the second analysis, using data from the Real Tax Income per capita and the tax rate, an econometric model is estimated in order to calculate the optimal tax rate for taxation in Colombia. The results show compliance with Laffer's postulates, with an optimal tax rate of approximately 37%, and suggest a government fiscal space of approximately 12 percentage points.

Keywords: Laffer Curve; Tax Income; Optimal Tax; Tax Incidence in Markets; Taxation Tax Rate

Les impôts en Colombie: une approche théorique et empirique de la courbe de Laffer

Résumé

Ce document présente une estimation de la courbe de Laffer pour le cas colombien en effectuant une analyse de statique comparative et une analyse économétrique. D'une part, à partir d'un modèle microéconomique, on analyse le niveau de distorsion qui serait généré par la mise en place d'un impôt indirect et les conséquences sur le bien-être qui résulteraient de la maximisation des revenus. De l'autre, en utilisant les données de revenu fiscal réel par habitant et du taux d'imposition, on estime un modèle économétrique afin de calculer le taux d'imposition optimal en Colombie. Les résultats montrent la conformité avec les postulats de Laffer, avec un taux d'imposition optimal d'environ 37%, et suggèrent un espace budgétaire gouvernemental d'environ 12 points de pourcentage.

Mots clés: Courbe de Laffer; Impôt sur le Revenu; Taxe Optimale; Incidence Fiscale; Taux d'imposition fiscal.

1 INTRODUCCIÓN

Arthur Laffer se hizo muy famoso en el mundo de los economistas cuando en 1974 formalizó las ya existentes aproximaciones teóricas acerca de la relación entre tasas impositivas e ingresos fiscales a través de la tributación. Con el fin de explicar dicha relación, Laffer mostró a través de una curva en forma de *U-invertida* que, para una economía de mercado el momento en que la tasa impositiva fijada es de 0% o 100%, el ingreso fiscal recaudado por el Gobierno es igual a cero. En otros términos, existe un nivel de impuesto (punto de inflexión) a partir del cual por encima de dicho umbral el ingreso fiscal tiende a disminuir.

Más allá de la existencia de “*dos tasas impositivas que producen los mismos ingresos*”, tal y como lo señaló Wanniski (1978); el objetivo fundamental, en materia de política fiscal, radica en determinar la tasa óptima de tributación, entendida esta última como aquella tasa que maximiza el ingreso fiscal recaudado por el Gobierno. De no ser así, en el momento en que la carga fiscal se encuentra en un punto inferior a la tasa óptima de tributación, un aumento de las tasas impositivas generará mayores ingresos fiscales, a pesar de que dichos aumentos pueden ser cada vez menores. Por el contrario, en el momento en que dicha carga se encuentra en un punto igual o superior a la tasa óptima de tributación, el aumento de las tasas traerá consigo una disminución en el recaudo, que tenderá a cero entre mayor sea el monto de impuesto establecido por lo que el efecto sobre las decisiones de participación en el mercado laboral y en la inversión será negativo.

Es de resaltar que, los ingresos tributarios se constituyen en la mayor fuente de los ingresos fiscales por lo que, es de suma importancia estimar la Curva de Laffer ya que su resultado tiene implicaciones directas en las decisiones de política económica, toda vez que, permite a los *policymakers* comparar las tasas impositivas efectivas con las tasas maximizadoras del recaudo tributario. En este sentido, las estimaciones de la Curva de Laffer, son importantes debido a que, en primera instancia, proporcionan evidencia sobre el margen de maniobra¹ que tiene el Gobierno para determinar la carga tributaria que deben asumir los agentes y, en segunda, representan una relación directa con la meta de la regla fiscal que, en Colombia para el año 2019, fue de 2,7% del PIB.

Si bien, la literatura existente sobre el tema es bastante amplia, para el desarrollo de este artículo se tomaron en cuenta varios documentos de investigación, especialmente los desarrollados por Trabandt y Uhlig (2011, 2012), quienes partiendo de un modelo de crecimiento neoclásico caracterizado por preferencias de “*elasticidad constante de Frisch*”, muestran cómo cambia la Curva de Laffer mediante la fijación de impuestos al trabajo, al capital y al consumo, la variación en el gasto público y en los niveles de deuda soberana para Estados Unidos y 14 países de la Unión Europea. En la misma dirección, los trabajos de Lozano y Arias (2018) y Lozano *et al* (2019) basados en el análisis realizado por Trabandt y

¹ Hace referencia a la diferencia existente entre la tasa óptima y la tasa efectiva de tributación.

Uhlig (2011, 2012), estiman las variaciones en el recaudo del ingreso fiscal y la cuantificación del espacio fiscal para la economía colombiana por el lado de los impuestos.

El trabajo aporta a la literatura en dos dimensiones. Primero, a través de un análisis de estática comparativa, donde se realiza un ejercicio que da cuenta de los efectos que se generan en el momento en que se define un impuesto indirecto en el mercado y las implicaciones en materia de bienestar económico. Aunque la pregunta pareciera ser extremadamente amplia y general, el documento propone seguir un orden específico de modelación para describir los mencionados efectos. Para cumplir con lo anterior, partiendo de un mercado cuyo comportamiento puede describirse a través de un sistema de ecuaciones lineales de oferta y demanda, se expone el problema de elección racional que una institución recaudadora de impuestos tendría que enfrentar al momento de determinar el monto óptimo de tributación, y a su vez establecer el límite máximo de impuesto admisible.

Segundo, desde la dimensión empírica aplicada, mediante la especificación y estimación de un modelo econométrico basado en la teoría planteada por Laffer para Colombia, utilizando datos de ingreso tributario real per cápita, la tasa impositiva y el Índice de Producción Industrial (IPI), con el fin de calcular la tasa impositiva de tributación óptima, empleando datos anuales durante el periodo comprendido entre 1980 y 2019. Siguiendo una metodología de análisis de series de tiempo no estacionarias cointegradas se estima un modelo *log-lin* cuadrático con tres métodos diferentes, Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS), Mínimos Cuadrados Completamente Modificados (FMOLS) y Mínimos Cuadrados Dinámicos (DOLS), para calcular la tasa impositiva que maximiza el recaudo tributario fiscal.

El presente documento se divide en cinco secciones, siendo esta introducción la primera de ellas. A través de una juiciosa revisión de literatura, la segunda sección resume algunos de los trabajos más relevantes sobre el tema. En la tercera sección, se presenta un análisis de estática comparativa que tiene como insumo un modelo lineal de mercado, para el cual se especifican e interpretan cada uno de los parámetros, a efectos de cuantificar el nivel de distorsión del mercado ante el establecimiento de un impuesto indirecto. En la cuarta sección, se presenta un análisis econométrico para estimar la Curva de Laffer y determinar el nivel óptimo de la tasa de tributación. Por último, en la quinta sección se presentan algunas reflexiones y conclusiones derivadas de los ejercicios en cuestión.²

² Es de mencionar que, los resultados con respecto al impuesto máximo que se obtienen en el análisis realizado en términos de bienestar presentado en la tercera sección y la tasa óptima que maximiza el ingreso tributario presentado en la cuarta sección no necesariamente deben coincidir.

2 LA CURVA DE LAFFER EN LA LITERATURA EMPÍRICA

Posteriormente a la formalización realizada por el profesor Arthur Laffer sobre la relación existente entre tasas impositivas e ingresos fiscales, uno de los desafíos más importantes para la teoría económica ha sido proveer evidencia empírica para mostrar la validez de dichas afirmaciones. Para el caso, Laffer (1978) argumenta que cambios en las tasas impositivas tienen dos efectos sobre los ingresos fiscales. El primer efecto es que debido a la reducción de la tasa impositiva se produce una reducción de los ingresos de una base imponible determinada. El segundo efecto, posiblemente opuesto al primero, plantea que la reducción de la tasa impositiva puede alentar a las personas a trabajar e invertir más. Por lo tanto, los ingresos fiscales pueden aumentar ya que se crea una base impositiva más grande debido a la reducción de la tasa impositiva.

Por otra parte, Canto, Douglas y Laffer (1979) construyen un modelo de equilibrio simple con un producto, dos factores y una elección de trabajo y ocio por parte de los consumidores encontrando que, si las transferencias se otorgan a personas distintas de las que pagan impuestos, y si las personas tienen preferencias diferentes, los efectos sobre el ingreso no necesariamente se cancelan. Además, si el Gobierno no hace nada más que colocar una brecha distorsionadora en la elección de trabajo y ocio con una rebaja global de los ingresos, entonces el bienestar de los agentes que tributan, disminuye.

Fullerton (1980), estimando un modelo de equilibrio general con datos para la economía de Estados Unidos, encontró que a una tasa impositiva promedio de 78,8% se maximizaban los ingresos fiscales con una elasticidad de la curva de empleo del 0,15. Stuart (1981) utilizando un modelo bisectorial parametrizado para la economía sueca, muestra que los ingresos fiscales para el periodo 1950 – 1980 alcanzaron su punto máximo cuando la tasa impositiva rondaba el 70%.

Por otra parte, Lindsey (1986) partiendo de un modelo simple que representa el sistema tributario estima que la tasa impositiva maximizadora del ingreso fiscal para la economía de Estados Unidos durante el periodo 1980 – 1984 es cercana a 40%. Finalmente, Van Ravestein y Vijlbrief (1988) utilizando un modelo simple de equilibrio general para la economía de los Países Bajos durante el periodo 1970 – 1985 encontraron que la tasa impositiva promedio que maximiza los ingresos fiscales para el periodo en cuestión fue de 67%.

Si bien, la literatura existente respecto al tema es abundante, en la actualidad los artículos realizados por Trabandt y Uhlig (2011, 2012) se constituyen en insumo principal para el análisis de la variación de la Curva de Laffer y el recaudo fiscal mediante un modelo de crecimiento neoclásico con preferencias de “*elasticidad constante de Frisch*” para Estados Unidos y 14 países de la Unión Europea.

El modelo propuesto por Trabandt y Uhlig (2011) parte de un problema de maximización para un hogar representativo de la forma:

$$Max_{ct;nt;kt;xt;bt} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(c_t; n_t) + v(g_t)] \quad (1)$$

Sujeto a una restricción presupuestaria intertemporal y una ecuación de flujo de capital, tal y como se expresan en las ecuaciones (2) y (3):

$$(1 + \tau_t^c)c_t + x_t + b_t = (1 - \tau_t^n)w_t n_t + (1 - \tau_t^k)(d_t - \delta)k_{t-1} + \delta k_{t-1} + R_t^b k_{t-1} + s_t + \Pi_t + m_t \quad (2)$$

$$k_t = (1 - \delta)k_{t-1} + x_t \quad (3)$$

Donde $ct; nt; kt; xt; bt; m_t$ denotan el consumo, las horas trabajadas, el capital, la inversión, los bonos del Gobierno y un flujo exógeno de pagos. El hogar representativo toma el consumo gubernamental g_t , que le proporciona utilidad. Además, recibe salarios w_t , dividendos d_t , beneficios de la firma Π_t y pagos de activos m_t .

Por último, el hogar obtiene ganancias de intereses R_t^b y transferencias de suma global por parte del Gobierno s_t . Asimismo, el hogar debe pagar impuestos al consumo τ_t^c , impuestos sobre la renta del trabajo τ_t^n e impuestos sobre la renta del capital τ_t^k . Las preferencias de los individuos vienen dadas por la ecuación (4), donde η es el inverso de la elasticidad intertemporal de sustitución, k es el parámetro de la *desutilidad* del trabajo y φ representa la “*elasticidad constante de Frisch*”, la cual mide la sensibilidad de la oferta de trabajo ante cambios en el ingreso laboral disponible. Esto es:

$$u(c_t; n_t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\eta} \left\{ c_t^{1-\eta} \left[1 - k(1-\eta)n_t^{1+\frac{1}{\varphi}} \right]^\eta - 1 \right\} \\ \log(c_t) - kn_t^{1+\frac{1}{\varphi}} \end{cases} \quad (4)$$

El problema de elección racional de la firma representativa, la cual actúa en un escenario de competencia perfecta viene dado por:

$$Max_{k_{t-1}; n_t} y_t - d_t k_{t-1} - w_t n_t \quad (5)$$

Sujeto a una función de producción de la forma Cobb-Douglas tal y como sigue en la ecuación (6), esto es:

$$y_t = \xi^t k_{t-1}^\theta z_t^{1-\theta} \quad (6)$$

Donde y_t denota el producto y ξ^t representa la productividad total de los factores. Finalmente, la restricción presupuestaria del Gobierno implica que la suma del gasto público, las transferencias realizadas a los hogares y el servicio de la deuda deben ser iguales, para cada periodo, a los ingresos producto de la nueva emisión de deuda. La ecuación (7) resume lo especificado con anterioridad:

$$g_t + s_t + R_t^b b_{t-1} = b_t - T_t \quad (7)$$

Donde el recaudo del Gobierno está dado por:

$$T_t = \tau_t^c c_t + \tau_t^n w_t n_t + \tau_t^k (d_t - \delta) k_{t-1} \quad (8)$$

En equilibrio, el hogar elige maximizadores de utilidad, la firma resuelve su problema de elección racional y el Gobierno establece políticas que satisfacen su restricción presupuestaria. A continuación, se resumen las relaciones clave de crecimiento equilibrado del modelo que son necesarias para calcular la Curva de Laffer.

Sea \bar{k}/\bar{y} el valor que denota la senda de crecimiento en equilibrio de la relación k_{t-1}/y_t :

$$\bar{k}/\bar{y} = \left(\frac{\bar{R} - 1}{\theta(1 - \tau^k)} + \frac{\delta}{\theta} \right)^{-1} \quad (9)$$

Y sea $y_t/\bar{n} = \psi^t \bar{k}/\bar{y}^{\theta(1-\theta)}$ la productividad laboral y $w_t = (1 - \theta)y_t/\bar{n}$, el nivel salarial antes de impuestos, y teniendo en cuenta las preferencias de “*elasticidad constante de Frisch*”, las condiciones de primer orden para el hogar y la firma implican que:

$$\left(\eta k \bar{n}^{1+\frac{1}{\varphi}} \right)^{-1} + 1 - \frac{1}{\eta} = \alpha \bar{k}/\bar{y} \quad (10)$$

Donde $\alpha = (1 + \tau^c / 1 - \tau^n)(1 + \frac{1}{\varphi} / 1 - \theta)$ depende de las tasas impositivas, la participación laboral y “*elasticidad de Frisch*” para la oferta laboral, entonces la Curva de Laffer, teniendo en cuenta las restricciones a las transferencias y al gasto, viene dada por:

$$L(x) = (\tau^c + \tau^n) \frac{1 - \tau^n}{1 + \tau^c} w \quad (11)$$

En la misma dirección, Trabandt y Uhlig (2012), partiendo de los resultados obtenidos con anterioridad, estima la Curva de Laffer asumiendo la existencia de, una firma que compite bajo un escenario de competencia monopolística y, la acumulación de capital humano. A efectos de ilustrar lo anterior, el problema de maximización de la firma representado mediante la ecuación (5) viene ahora dado por:

$$\text{Max}_{k_{t-1}; n_t} y_t - d_t k_{t-1} - p_t z_t \quad (12)$$

Donde p_t y z_t denotan el precio de un insumo homogéneo y el precio de un insumo intermedio el cual es heterogéneo. Simplificando (12) se obtiene que:

$$\text{Max}_{p_{t;i}} p_{t;i} z_{t;i} - w_t n_{t;i} \quad (12a)$$

El anterior problema de maximización de la firma está sujeto sus propias funciones de demanda y producción tecnológica. Esto es $z_{t;i} = (p_t/p_{t;i})^{\omega-1} z_t$ y $z_{t;i} = n_{t;i}$, respectivamente. En equilibrio, las firmas establecen un mismo precio el cual actúa como *mark up* sobre los costos marginales lo cual genera que a nivel agregado, los beneficios estén dados por $\Pi_t = (\omega - 1)w_t n_t$. Por lo anterior, el recaudo del Gobierno expresado en la ecuación (8) será:

$$T_t = \tau_t^c c_t + \tau_t^n w_t n_t + \tau_t^k (d_t - \delta) k_{t-1} + \emptyset \Pi_t \quad (13)$$

Y el stock de capital humano en la senda de crecimiento balanceado, definido como una fracción del tiempo de trabajo que los hogares ofertan en el mercado es:

$$h_t = (A_{qt} n_t + B(1 - q_t) n_t)^v h_{t-1}^{1-v} + (1 - \delta_h) h_{t-1} \quad (14)$$

Donde $A \geq 0$ y $B > A$ parametrizan la efectividad del “*learning-by-doing*” y la tasa de escolarización, respectivamente, y donde $0 < \delta_h \leq 1$ es la tasa de depreciación del capital humano. Por lo anterior, los ingresos fiscales totales y las transferencias a lo largo de una senda de crecimiento balanceado son:

$$\bar{\tau} = \left[\tau^c + \frac{\bar{c}}{y} + \tau^n \frac{(1 - \theta)}{\omega} + \tau^k \left(\theta - \delta \frac{\bar{k}}{y} + \phi(1 - \theta) \frac{\omega - 1}{\omega} \right) \right] \bar{y} \quad (15)$$

$$\bar{s} = (\psi - R^b)\bar{b} - \bar{g} + \bar{\tau} \quad (16)$$

Los resultados obtenidos por Trabandt y Uhlig (2011), asumiendo un nivel de recaudo normalizado, suponiendo un escenario perfectamente competitivo y sin la inclusión del capital humano, dan cuenta que para Estados Unidos el valor promedio de la tarifa tributaria sobre el impuesto al trabajo es de 27%, mientras que sobre el impuesto al capital es de 35% y sobre la participación laboral es de 50%. Para los 14 países de la Unión Europea, los valores son 41%, 32% y 48%, respectivamente. Por otro lado, la evidencia proporcionada por Trabandt y Uhlig (2012) al incorporar un escenario de competencia monopolística y la acumulación de capital humano, los autores encuentran que los valores promedio de la tarifa tributaria sobre el impuesto al trabajo, el impuesto al capital y sobre la participación laboral para Estados Unidos son de 22%, 41% y 64%, mientras que para los 14 países de la Unión Europea son de 34%, 37% y 58%, respectivamente.

Nutahara (2015), partiendo del ejercicio propuesto por Trabandt y Uhlig (2011, 2012), encuentra que para Japón la Curva de Laffer para los impuestos sobre el trabajo y el capital tiene picos únicos; sin embargo, el impuesto al consumo y los ingresos aumenta monótonamente con respecto a la tasa impositiva. Así las cosas, el promedio de la tasa tributaria efectiva del ingreso laboral es de 29,1%, mientras que la tasa efectiva de las rentas de capital y del consumo fueron en promedio de 51,5% y 10,0%, respectivamente.

Diversos trabajos han estudiado la relación de forma empírica para países específicos. En línea con lo anterior, Tatu (2014) estudia la Curva de Laffer para el caso de Rumania con el fin de saber si el país poseía un nivel de deuda elevado. Es de resaltar que, debido a la crisis financiera el Gobierno tomó prestado más de lo que producía toda la economía. Se halló que Rumania se encontraba en el lado derecho de la curva de acuerdo a los análisis econométricos, por lo que, se puede decir que el país no tenía un nivel de deuda elevado, sin embargo, tuvo que ir reduciendo el monto de la deuda para no encontrarse en sobreendeudamiento en algunos años futuros, dado a la utilización desmedida de la deuda a fin de salir de la crisis.

Por otro lado, Karas (2012) estimó la Curva de Laffer para Republica Checa con el fin de encontrar una tasa impositiva que maximice los ingresos tributarios del país con el objetivo de que el endeudamiento no se convierta en una problemática en el sistema tributario. Brill y Hassett (2007) en un estudio para los países pertenecientes a la OCDE durante el periodo comprendido entre 1980 – 2005, y utilizando impuestos corporativos, encontraron que la tasa que maximiza los impuestos disminuyó a través del tiempo, pasando de 34% en los años 80's

a 26% en los primeros años del siglo XXI y la forma de la curva también cambio con los años haciéndose más empinada.

Guedes de Oliveira y Costa (2015) utilizan el recaudo del Impuesto al Valor Agregado (IVA) para estimar Curva de Laffer en 27 países de la Unión Europea, para el periodo 1995 – 2011, encontrando un efecto de ciclo económico en la curva, en los años de recesión, los ingresos por IVA suelen ser más bajos con una curva más pronunciada y la tasa de IVA que maximiza los ingresos fiscales es ligeramente menor que antes. En donde la composición del consumo y la base de recaudo son la explicación de este efecto, dado que en épocas de recesión la tasa se eleva y las personas evaden o eluden el impuesto al IVA.

Kalmarzi y Mousavi (2014) estimaron una Curva de Laffer no Lineal para la economía iraní, para el periodo 1970 – 2009, sus resultados muestran la presencia de una relación no lineal entre la tasa impositiva y los ingresos fiscales con un valor umbral de 8% aproximadamente. Por su parte, Chakraborty (2015) estima un modelo de corrección de errores para la Curva de Laffer teniendo como referencia el señoreaje fiscal en India, analiza las políticas monetarias y fiscales para encontrar una tasa de inflación que maximice el señoreaje y así localizar el punto óptimo de ingresos que se debe utilizar para el financiamiento del déficit fiscal.

Para el caso colombiano, Bejarano (2008, 2013) verifica la existencia de la Curva de Laffer en Colombia y estima la tasa óptima que maximiza el recaudo tributario, respectivamente. Para el primer caso, Bejarano (2008) utilizando un modelo de regresión polinómica de segundo grado con datos para el periodo 1980 – 2005 encontró que el nivel óptimo del ingreso real per cápita corresponde a un ingreso tributario como porcentaje del PIB del 14,2%. A partir de este nivel la contribución marginal de los ingresos disminuye progresivamente hasta ser negativa, al nivel de una la tasa impositiva aproximadamente del 28,5%. Mientras que, a nivel agregado, el recaudo tributario real se hace máximo con un ingreso tributario real como porcentaje del PIB igual a 12,81%, a partir de este nivel, la contribución marginal de los ingresos tributarios reales disminuye progresivamente hasta tornarse negativa con una tasa impositiva aproximadamente del 25,6%. Por último, replicando el ejercicio anterior con datos para el periodo 1980 – 2010, Bejarano (2013) encuentra que el ingreso fiscal aumenta de forma creciente hasta un punto máximo donde la tasa impositiva es de 25,6%, a partir del cual el ingreso fiscal empieza a decrecer hasta el punto en que, una tasa impositiva superior al 68% genera que el Gobierno no perciba ingresos fiscales debido a que el impacto marginal al recaudo tributario per cápita es negativo.

Finalmente, Lozano y Arias (2018) replican el ejercicio realizado por Trabandt y Uhlig (2011, 2012) encontrando que el valor promedio de la tarifa tributaria sobre el impuesto al trabajo es de 22,5%, lo cual sugiere que el Gobierno cuenta con espacio fiscal para realizar incrementos en dicha tarifa, esto es, por cada punto porcentual de aumento en la tarifa efectiva, el recaudo por impuestos sobre las rentas laborales se incrementaría en 0,6 en

promedio. Respecto al valor promedio de la tarifa tributaria sobre el impuesto al capital, los autores encontraron que fue de 18,4%, y al igual que en el caso anterior, existe un amplio espacio para realizar ajustes en los impuestos al capital, esto es, por cada punto porcentual de aumento en la tarifa efectiva, el Gobierno incrementaría el recaudo por impuestos sobre las rentas del capital en 0,3, en promedio. Por ultimo, frente al impuesto sobre el consumo, a diferencia de los dos casos anteriores, Lozano y Arias (2018) encuentran que la Curva de Laffer no tiene un punto máximo razonable, lo cual va en línea con lo encontrado por Trabandt y Uhlig (2011).³

3 ANÁLISIS DE ESTÁTICA COMPARATIVA

Esta sección corresponde al primer análisis, el análisis de estática comparativa. Inicialmente se presenta un modelo microeconómico, seguido de un ejercicio de simulación de estática comparativa de los resultados del modelo teórico. Una vez realizado el mencionado ejercicio, se propone una reflexión sobre el efecto provocado por la inclusión del señalado impuesto en términos de bienestar y algunas consideraciones a propósito del dilema entre ingresos fiscales y distorsión en el mercado producto del instrumento tributario aplicado.

3.1 UN MODELO DE CORTE MICROECONÓMICO

A efectos de entender, el funcionamiento de un mercado, a continuación, se asume dentro de la modelación un sistema de ecuaciones de tipo lineal para representar el comportamiento de los agentes económicos, tanto oferentes como demandantes, que en cualquier caso asumen como dado el precio, esto es, se reconoce que los agentes son tomadores de precios, o lo que es equivalente se garantiza la hipótesis de competencia perfecta en tal mercado.

Así las cosas, el par de ecuaciones de oferta y de demanda anunciadas serán:

$$Q^S(P) = \alpha + \beta P \quad ; \quad \alpha < 0 \ ; \ \beta > 0 \quad (17)$$

$$Q^D(P) = \theta - \sigma P \quad ; \quad \theta, \sigma > 0 \quad (18)$$

Nótese que de las ecuaciones (17) y (18) es importante imponer una serie de condiciones que le dan sentido al problema económico a modelar. En particular, asumir que $\alpha < 0$, equivale a reconocer que existe un precio mínimo, equivalente $-\alpha/\beta$, a partir del cual los oferentes estarían en disposición de ofrecer su producto. Por su parte, reconocer que $\beta > 0$, implica

³ En Lozano *et al* (2019), la sección tres corresponde a una versión ajustada de Lozano y Arias (2018).

asumir que existe un parámetro de sensibilidad en el que por cada unidad monetaria que se incrementa el precio, la oferta aumentará en β unidades.

En cuanto a la curva de demanda, $\theta > 0$ corresponde a la cantidad máxima que se está dispuesto a demandar por parte del bloque de consumidores en dicho mercado donde θ/σ denota el precio máximo al que los consumidores estarán dispuestos a participar en dicho mercado. De lo anterior, obsérvese que se infiere una restricción adicional de los parámetros anteriormente mencionados:

$$\frac{\theta}{\sigma} > -\frac{\alpha}{\beta}$$

La situación de equilibrio inicial viene determinada por la igualación de las ecuaciones (17) y (18). Esto es:

$$Q^S(P) = \alpha + \beta P = Q^D(P) = \theta - \sigma P \quad (19)$$

De donde fácilmente se puede determinar el precio y las cantidades de equilibrio. Lo anterior viene dado como:

$$P_1^* = \frac{\theta - \alpha}{\beta + \sigma} \quad (20)$$

$$Q_1^* = \frac{\alpha\sigma + \beta\theta}{\beta + \sigma} \quad (21)$$

Por ende, la situación inicial de equilibrio puede ser definida como aquel nivel de precios que permite compatibilizar las decisiones de oferta y de demanda, esto es aquel par ordenado de precios y cantidades $E_1 = (Q_1^*; P_1^*)$. La ecuación (22) describe lo anterior.

$$E_1 = \left(\frac{\alpha\sigma + \beta\theta}{\beta + \sigma}; \frac{\theta - \alpha}{\beta + \sigma} \right) \quad (22)$$

Suponga que, en la situación anteriormente descrita, el Gobierno decide establecer un impuesto indirecto cuyo monto, expresado en términos monetarios corresponde a Tx , y que la responsabilidad del recaudo inicialmente recae en el bloque de productores. A efectos de ilustrar la manera como se podría modelar la inclusión del señalado impuesto, a continuación, se establecerá la función inversa de oferta, la cual tiene la siguiente especificación:

$$P = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}Q^S \quad (23)$$

Al incluir Tx en (23) se tiene que:

$$P + Tx = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}Q^S \quad (23a)$$

Factorizando (23a):

$$\beta(P + Tx) = -\alpha + Q^S \quad (23b)$$

De tal manera que la función de oferta hipotética, con la inclusión de un impuesto por unidad vendida, viene dada de la forma:

$$Q^{SH} = \alpha + \beta(P + Tx) \quad (24)$$

A efectos de determinar el precio que pagaría el bloque de consumidores ante la distorsión anteriormente señalada, esto es la inclusión de Tx en el mercado, bastaría con igualar las ecuaciones (24) y (18). De tal manera que la nueva función de oferta hipotética viene dada por:

$$Q^{SH} = \alpha + \beta(P + Tx) = Q^D(P) = \theta - \sigma P \quad (25)$$

De donde se infiere que el precio percibido por el consumidor después de la inclusión de Tx es:

$$P_2^* = \frac{\theta - \beta(Tx) - \alpha}{\beta + \sigma} \quad (26)$$

Obsérvese que la ecuación (26) puede reescribirse en función del precio de equilibrio inicialmente establecido. Esto es:

$$P_2^* = P_1^* + \frac{\beta}{\beta + \sigma}Tx \quad (26a)$$

En otras palabras, $P_2^* > P_1^*$, con lo cual queda claro que el precio percibido por el bloque de consumidores después de la inclusión de Tx superará el precio de equilibrio. A partir del precio que percibe el consumidor, es posible calcular las cantidades transadas en dicho mercado, una vez establecido el monto de Tx . Lo anterior se puede expresar como:

$$Q_2^* = \frac{\theta\beta + \alpha\sigma - \sigma\theta(Tx)}{\beta + \sigma} \quad (27)$$

La anterior expresión, al igual que el precio que percibe el consumidor después de la inclusión de Tx , puede expresarse también en términos de la cantidad de equilibrio inicialmente establecida. Esto es:

$$Q_2^* = Q_1^* - \frac{\sigma\beta}{\beta + \sigma}Tx \quad (27a)$$

Obsérvese que, $Q_2^* < Q_1^*$, con lo cual la cantidad transada en dicho mercado, después de la inclusión de Tx , será estrictamente menor que la cantidad de equilibrio.

A partir de los cálculos anteriormente expuestos, es factible determinar el precio que percibe el productor. Para hacerlo, basta evaluar la cantidad transada después de impuestos en la función inversa de oferta, tal como se propone a continuación:

$$P_2' = P_2^*(Q_2^*) = \frac{1}{\beta} \left(Q_1^* - \frac{\sigma\beta(Tx)}{\beta + \sigma} \right) - \frac{\alpha}{\beta} \quad (28)$$

Esto es:

$$P_2' = \frac{\theta - \sigma(Tx) - \alpha}{\beta + \sigma} \quad (28a)$$

De donde se infiere que, el precio percibido por el productor en función del precio de equilibrio es:

$$P_2' = P_1^* - \frac{\sigma}{\beta + \sigma}Tx \quad (28b)$$

Como es de esperarse, el precio que percibe el productor después de impuestos, no solamente es estrictamente menor al precio percibido por el consumidor en dicho mercado, sino que se

encuentra por debajo del precio de equilibrio. De hecho, obsérvese que la diferencia entre ambos precios anteriormente mencionados después de la inclusión de Tx , es igual a:

$$P_2^* - P_2' = Tx \left(\frac{\beta + \sigma}{\beta + \sigma} \right) = Tx \quad (29)$$

Pese a que dicha diferencia corresponde al monto de Tx establecido, resulta importante reconocer que tal diferencia no se encuentra centrada en el precio de equilibrio. Por tal razón, no existe simetría entre la magnitud de la diferencia existente de cada uno de los precios mencionados y el precio de equilibrio, tal y como se muestra a continuación:

$$P_2^* - P_1^* = \frac{\beta}{\beta + \sigma} Tx \quad (29a)$$

$$P_1^* - P_2' = \frac{\sigma}{\beta + \sigma} Tx \quad (29b)$$

Obsérvese que $\beta/\beta + \sigma$ y $\sigma/\beta + \sigma \in (0,1)$.

De lo anterior, el grado de asimetría en la diferencia de precios anteriormente señalada, dependerá de los valores de los parámetros de sensibilidad de la oferta y la demanda, en términos relativos a su suma. Este ultimo resultado será clave a efectos de determinar la incidencia fiscal sobre cada uno de los agentes de mercado, tal como se verá más adelante.

Ahora bien, reconociendo que de la inclusión de Tx , ya anteriormente señalado, es posible sustraer recursos del mercado para apalancar el Ingreso Fiscal cuyo monto, expresado en términos monetarios corresponde a IF , se determina por el producto resultante entre la diferencia de los precios percibidos por el consumidor y el productor, y la cantidad transada después de impuestos. Esto es:

$$IF = (P_2^* - P_2')Q_2^* \quad (30)$$

En otros términos:

$$IF = \left(\frac{\theta\beta + \alpha\sigma}{\beta + \sigma} \right) Tx - \left(\frac{\sigma\beta}{\beta + \sigma} \right) Tx^2 \quad (30a)$$

Obsérvese que IF corresponde a una función dos veces diferenciable y cóncava estricta frente a Tx , que en la literatura económica es ampliamente conocida como la Curva de Laffer. Dicha

curva permite relacionar el nivel de Tx a establecer en el mercado con el IF que el recaudador de impuestos pudiera percibir. Queda claro que por las condiciones del IF , anteriormente mencionadas, el comportamiento de U -invertida de tal relación. A efectos de determinar el monto del impuesto óptimo asociado a la Curva de Laffer denotado como Tx^* , se propone el siguiente problema de maximización.

Partiendo de la ecuación (30a) que representa el IF , el problema de elección racional de quien diseña el mecanismo impositivo en este mercado, puede modelarse como:

$$Max_{t \in [0, \infty)} IF(Tx) = Max_{t \in [0, \infty)} \left(\frac{\theta\beta + \alpha\sigma}{\beta + \sigma} \right) Tx - \left(\frac{\sigma\beta}{\beta + \sigma} \right) Tx^2 \quad (31)$$

Obsérvese que la ecuación (31) representa una función dos veces diferenciable y estrictamente cóncava frente a Tx , de tal manera que las herramientas de cálculo diferencial podrían ser utilizadas a efectos de determinar una solución a dicho problema. Así, la Condición de Primer Orden (CPO) igualada a cero permitirá encontrar el monto de Tx^* , tal y como se ilustra a continuación:

$$Tx^* = \frac{\theta\beta + \alpha\sigma}{2\sigma\beta} \quad (32)$$

Lo cual se puede reescribir como:

$$Tx^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\sigma} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (32a)$$

Obsérvese que de la ecuación (32a) puede leerse que, el monto de Tx^* corresponderá al 50% de la diferencia existente entre el precio percibido por el bloque de consumidores y el precio percibido por los productores. Dado lo anterior, si la política fiscal pretende establecer un impuesto indirecto cuya fracción, expresada en términos porcentuales corresponde a t , y si dicho impuesto resulta ser mayor que t^* , no solamente el recaudador estará percibiendo un nivel de impuestos subóptimo, sino que la distorsión en el mercado tenderá a ser absolutamente perjudicial para los agentes que en él participan. Formalmente, lo anterior puede expresarse como:

$$t^* = \left(\frac{(\theta\beta + \alpha\sigma)(\beta + \sigma)}{2\sigma\beta(\theta - \alpha)} \right) < t \quad (32b)$$

Una vez calculado el monto de Tx^* , es posible encontrar el nivel de Ingreso Fiscal Máximo que la entidad recaudadora de impuestos podría alcanzar, esto es:

$$IF^{Max} = \left(\frac{(\theta\beta + \alpha\sigma)^2}{(\beta + \sigma)4\sigma\beta} \right) \quad (32c)$$

Paralelamente de la ecuación (30a) se puede determinar el monto del Impuesto Máximo, entendido como aquel impuesto límite hasta el cual IF es estrictamente positivo. Lo anterior se muestra en la siguiente expresión:

$$Tx^{Max} = \left(\frac{\theta}{\sigma} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (32d)$$

Es de resaltar que el monto de Tx^{Max} , corresponde a la diferencia existente entre el precio percibido por el bloque de consumidores y el precio percibido por el bloque de productores. En otros términos:

$$Tx^{Max} = 2Tx^* \quad (32e)$$

De donde se concluye la simetría existente en la Curva de Laffer.

Con lo anteriormente descrito, resulta importante avanzar en el análisis relacionado con la Incidencia Fiscal que recae tanto a consumidores como productores. En otras palabras, que proporción del IF deberá ser asumida por consumidores y productores. Con el propósito de describir en detalle las medidas de incidencia referidas, a continuación, se avanza en el cálculo de la Incidencia Fiscal del bloque de los consumidores en dicho mercado expresado como \mathcal{S}_1 :

$$\mathcal{S}_1 = \left(\frac{A}{IF} \right) \quad (33)$$

Donde A es:

$$A = \left(\frac{\theta\beta + \alpha\sigma - \sigma\beta Tx}{\beta + \sigma} \right) \left(\frac{\beta}{\beta + \sigma} \right) Tx \quad (33a)$$

La ecuación (33a), no es nada diferente al volumen transado después de impuestos multiplicado por la diferencia entre el precio percibido por el bloque de consumidores

después de la inclusión del impuesto y el precio de equilibrio. De tal manera que la Incidencia Fiscal que Tx tiene sobre la participación de los consumidores en el mercado es:

$$\mathcal{S}_1 = \left(\frac{\beta}{\beta + \sigma} \right) \quad (33b)$$

Por su parte, y siguiendo el mismo razonamiento realizado sobre los consumidores, el cálculo de la Incidencia Fiscal sobre la participación de los productores en dicho mercado denotado como \mathcal{S}_2 , viene dado por:

$$\mathcal{S}_2 = \left(\frac{B}{IF} \right) \quad (34)$$

Donde B es:

$$B = \left(\frac{\theta\beta + \alpha\sigma - \sigma\beta Tx}{\beta + \sigma} \right) \left(\frac{\sigma}{\beta + \sigma} \right) Tx \quad (34a)$$

La ecuación (34a), no es más que el volumen de la cantidad transada después de impuestos multiplicado por la diferencia entre el precio de equilibrio y el precio percibido por el bloque de productores después de la inclusión del impuesto. De tal manera que la Incidencia Fiscal que Tx tiene sobre la participación de los productores en el mercado es:

$$\mathcal{S}_2 = \left(\frac{\sigma}{\beta + \sigma} \right) \quad (34b)$$

Nuevamente, se obtiene un resultado coincidente con las proporciones que explicaban la asimetría entre cada uno de los precios que perciben los agentes económicos en dicho mercado y el precio de equilibrio. Llama la atención que dichos factores de asimetría son justamente los porcentajes de Incidencia Fiscal calculados con anterioridad.

Por otra parte, es importante cuantificar la Pérdida Irrecuperable de Eficiencia (PIE), con el fin de dimensionar el nivel de distorsión que la inclusión del monto establecido de Tx genera en el mercado. Para simplificar el análisis, se reconoce que la PIE está conformada por dos componentes:

$$PIE = C + D \quad (35)$$

De donde C es:

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma \beta T x}{\beta + \sigma} \right) \left(\frac{\beta}{\beta + \sigma} \right) T x \quad (35a)$$

La ecuación (35a) resulta de definir el área del triángulo rectángulo, cuya base corresponde a la diferencia entre la cantidad de equilibrio y la cantidad transada después de impuestos y la altura, definida por la diferencia entre el precio que percibe el consumidor después de la inclusión del impuesto y el precio de equilibrio. Esto es:

$$C = \frac{\sigma \beta^2}{2(\beta + \sigma)^2} T x^2 \quad (35b)$$

De donde D es:

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma \beta T x}{\beta + \sigma} \right) \left(\frac{\sigma}{\beta + \sigma} \right) T x \quad (35c)$$

La ecuación (35c) resulta de definir el área del triángulo rectángulo, cuya base corresponde a la diferencia entre la cantidad de equilibrio y la cantidad transada después de impuestos y la altura, definida por la diferencia entre el precio de equilibrio y el precio que percibe el productor después de la inclusión del impuesto. Esto es:

$$D = \frac{\sigma^2 \beta}{2(\beta + \sigma)^2} T x^2 \quad (35d)$$

Por ende, la PIE es:

$$PIE = \frac{\sigma \beta}{2(\beta + \sigma)} T x^2 \quad (36)$$

Obsérvese que de la ecuación (36), la PIE solo depende de los parámetros de sensibilidad que identifican la oferta y la demanda, esto es, el impacto sobre el bienestar es independiente de los valores autónomos en el mercado. Ahora bien, si en la ecuación (36) se evalúa el monto de $T x^*$ anteriormente encontrado, se tiene que:

$$PIE^* = \frac{\sigma\beta}{2(\beta + \sigma)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\sigma} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \right)^2 \quad (36a)$$

Lo cual puede reescribirse como:

$$PIE^* = \frac{\sigma(\beta + \sigma)}{8} \frac{1}{\beta} \quad (36b)$$

La anterior conclusión es generalizable para cualquier monto de impuesto estrictamente positivo, de tal manera que existirá una disyuntiva entre el monto de recaudo que pretenda extraer el Gobierno con Tx y el efecto de pérdida de bienestar que se genere en dicho mercado. De tal manera que la ecuación (30a), que representa el IF se puede reescribir para ilustrar la disyuntiva anteriormente señalada como:

$$Tx = \left(\frac{\beta + \sigma}{\theta\beta + \alpha\sigma} \right) (IF + 2PIE) \quad (37)$$

3.2 EJERCICIOS DE ESTÁTICA COMPARATIVA

Para ilustrar los resultados anteriormente descritos, a continuación, se presentan una serie de ejercicios de estática comparativa los cuales sugieren resultados que servirán de insumo para la elaboración de las recomendaciones que se derivan del modelo teórico propuesto anteriormente.

Para avanzar en el ejercicio descrito, se consideró un mercado perfectamente competitivo en el cual se asume que el precio máximo admitido por el bloque de consumidores es de \$100 y el precio mínimo que garantiza la participación del bloque de productores es de \$20⁴. El ejercicio se divide en dos partes. En la primera de ellas, se simuló choques sobre la oferta de tal manera que, afectarían simultáneamente los parámetros α y β sin que tales choques modificarían el precio mínimo aceptado por el bloque de productores $-\alpha/\beta$. En la segunda parte, manteniendo constante la oferta, se simuló choques sobre los parámetros θ y σ que afectan a la demanda, de forma tal que se mantuviera constante el precio máximo a pagar por el bloque de consumidores θ/σ . Específicamente, los parámetros β y σ fueron sometidos a variaciones de 5 unidades entre cada escenario. Por su parte, a los parámetros α y θ se modificaron en 100 unidades en el caso del primer parámetro y en 500 unidades en el caso

⁴ Para efectos de facilitar la lectura del modelo propuesto, se asume que los precios están expresados en miles de pesos.

del segundo de ellos, al momento de contrastar los respectivos escenarios. Para facilitar al lector la interpretación de resultados se advierte que el escenario 1 corresponde al escenario base del ejercicio y los escenarios 2 y 3, a aquellos resultantes de aplicar los mencionados choques en direcciones opuestas frente al referido escenario base.

Con los parámetros anteriormente descritos, se procedió a calcular los equilibrios de mercado respectivos, y sobre ellos se indagó cómo cambiaría el *IF* y la *PIE* ante diferentes tasas impositivas, materializadas en este caso, en valores monetarios. En otros términos, se simuló variaciones exógenas de Tx en el intervalo $[0;80]$ reconociendo que el límite superior del intervalo anteriormente señalado corresponde a Tx^{Max} . Por la simetría del cambio de los parámetros, ya mencionada, el efecto sobre la Curva de Laffer y la *PIE* resultó independiente del tipo de simulación aplicada, esto es desde la oferta o desde la demanda. Las siguientes gráficas ilustran lo descrito con anterioridad.

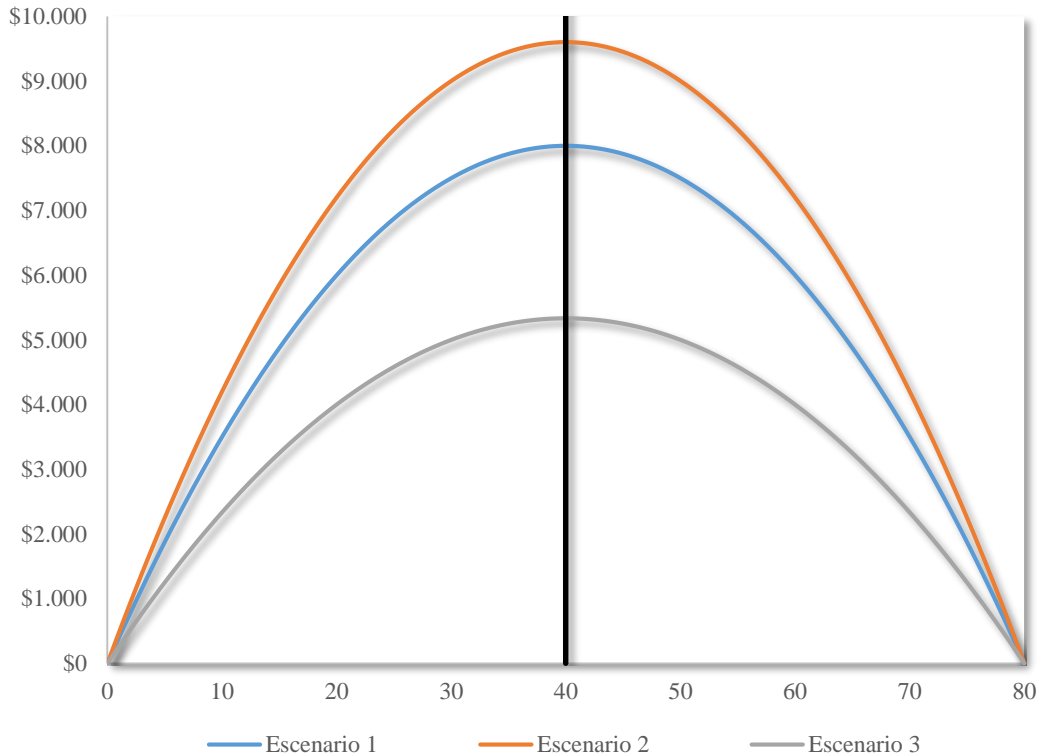
En la *Gráfica 1* se presenta la Curva de Laffer asociada a los escenarios ya descritos. A lo largo de dichas curvas, se simula el comportamiento del *IF* ante cambios en Tx ; y tal como lo sugiere la teoría, las curvas aquí presentadas siguen una forma de *U-invertida* donde se evidencia la existencia de un punto de inflexión correspondiente a Tx^* que maximiza el recaudo del *IF*, a partir del cual el incremento en el monto de impuesto trae consigo una contracción en este último.

La diferencia existente en el grado de convexidad de cada una de las tres curvas, resulta llamativa en cuanto a los efectos asimétricos asociados. Obsérvese que, si bien fueron aplicados choques simétricos sobre cada uno de los parámetros, se encuentran efectos totalmente diferentes en materia de recaudo fiscal. Es así como en el paso del escenario 1 al escenario 2 existió un incremento del *IF* del orden del 20% al pasar de \$8.000 a \$9.600, mientras que la contracción observada al pasar del escenario 1 al escenario 3 fue de 33%, pasando de \$8.000 a \$5.333.

Este resultado es particularmente especial a efectos de ilustrar cuán sensible resulta ser el IF^{Max} que una entidad recaudadora de impuestos podría obtener dependiendo de los parámetros fundamentales de un mercado. Así pues, obsérvese que a medida en que los parámetros α y β son menores, o lo que sería equivalente para efectos de la simulación desde la demanda que los parámetros θ y σ son menores, producto de cambios exógenos, el nivel de recaudo máximo se reduce más que proporcionalmente.

En el ejercicio propuesto en los tres escenarios el monto de Tx^* , corresponde a \$40, pese a las diferencias en el recaudo fiscal ya comentado. Lo más importante de este nivel de impuesto es el reconocimiento expreso de que, a partir de dicho umbral, el recaudo del *IF* empieza a ser cada vez menor, recreando perfectamente la idea expuesta en su momento por Laffer.

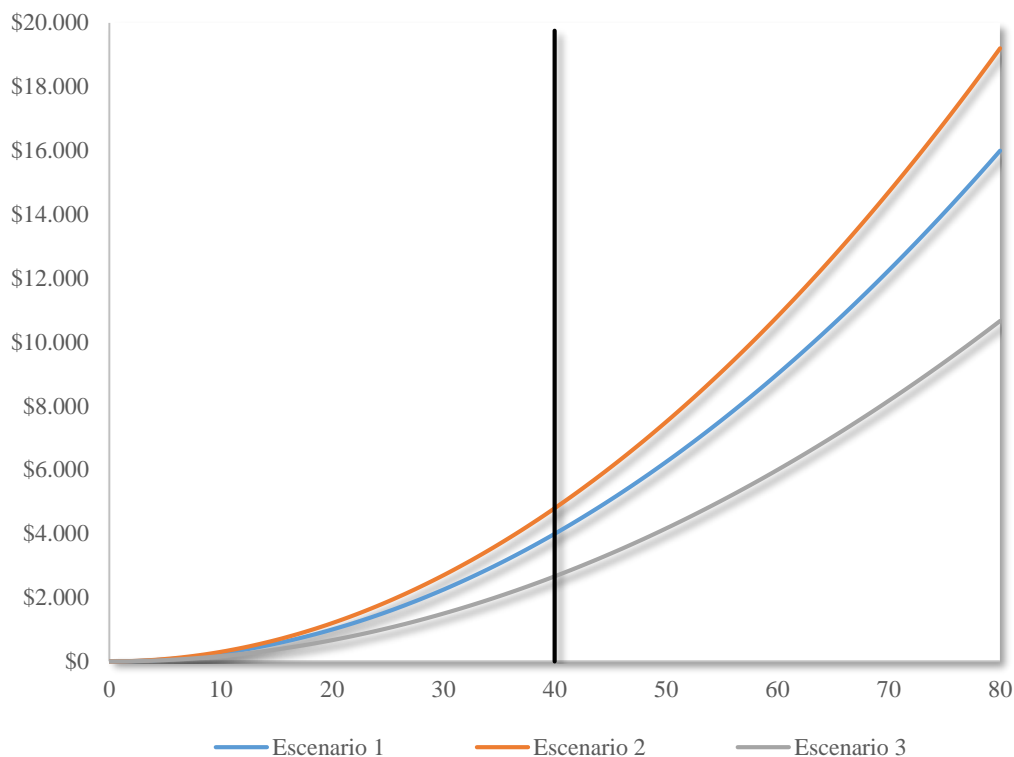
Gráfica 1: Curva de Laffer ante distintas configuraciones de mercado



Fuente: Cálculos realizados por los autores.

Ahora bien, en lo que tiene que ver con la *PIE*, es de anotar que en la medida en que la decisión de política fiscal busque establecer un monto más alto de impuestos, la distorsión que se genera en el mercado resulta ser siempre mayor, distorsión precisamente medida como la *PIE* calculada. La *Gráfica 2* ilustra ese resultado y permite establecer la existencia de una relación no lineal estrictamente convexa, lo cual significa que por cada peso adicional en que se incremente Tx , la distorsión generada sobre el mercado se incrementa más que proporcionalmente. Así pues, para la simulación propuesta, cuando Tx es de \$40, la *PIE* calculada es de \$4.000 en el escenario base, en el escenario 2 es \$4.800, y en el escenario 3 es de \$2.666. En todos los casos la *PIE* corresponde al 50% del *IF*.

Gráfica 2: PIE ante distintas configuraciones de mercado



Fuente: Cálculos realizados por los autores.

Incidencia Fiscal e Ingreso Fiscal Máximo

Respecto al cálculo de la Incidencia Fiscal derivada de la simulación propuesta, y entendida como el efecto que tiene la implementación de un impuesto indirecto sobre el bloque de consumidores y de productores dada por las ecuaciones (33b) y (34b) para cada uno de los tres escenarios descritos con anterioridad. En la misma dirección, el cálculo del IF^{Max} se realizó teniendo en cuenta la ecuación (35b). En la *Tabla 1* se presentan los resultados del ejercicio realizado.

Tabla 1: Incidencia Fiscal e Ingreso Fiscal Máximo ante distintas configuraciones de mercado

<i>Incidencia Fiscal – Consumidor y Productor</i>		
<i>Escenario 1</i>	<i>Escenario 2</i>	<i>Escenario 3</i>
50% - 50%	60% - 40%	33% - 67%
<i>Incidencia Fiscal – Productor y Consumidor</i>		
<i>Escenario 1</i>	<i>Escenario 2</i>	<i>Escenario 3</i>
50% - 50%	60% - 40%	33% - 67%
<i>Ingreso Fiscal Máximo</i>		
<i>Escenario 1</i>	<i>Escenario 2</i>	<i>Escenario 3</i>
\$8.000	\$9.600	\$5.333

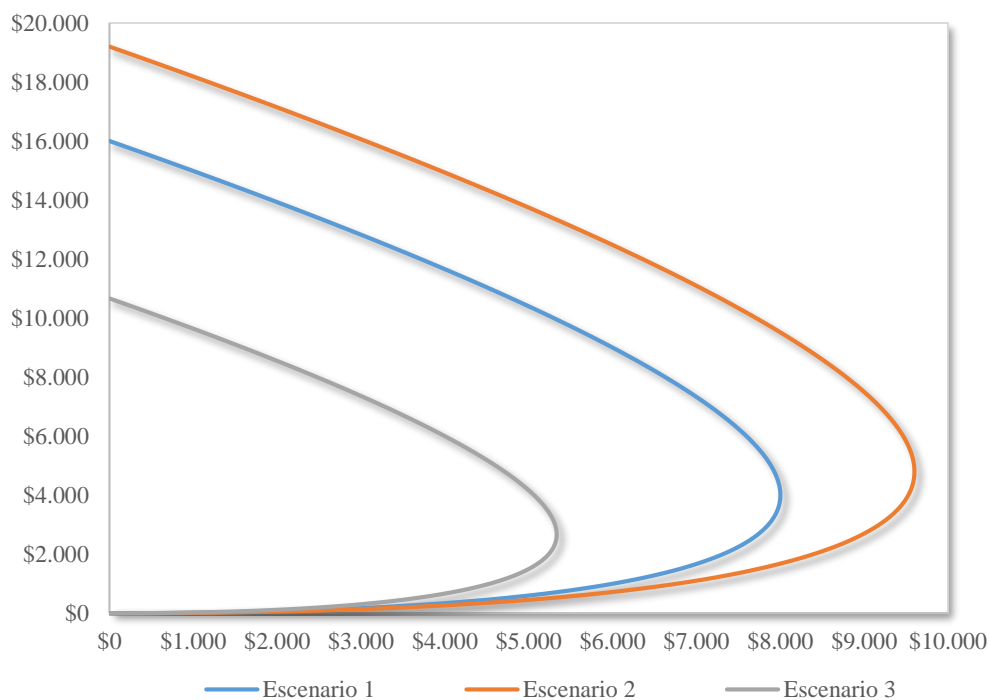
Fuente: Cálculos realizados por los autores.

Obsérvese que, ante los choques en cada uno de los parámetros mencionados con anterioridad y la simetría existente entre el sistema de ecuaciones lineales de oferta y demanda, el cálculo del efecto del impuesto indirecto que recae sobre el bloque de consumidores y productores tiende a ser mayor en el escenario 2 y menor en el escenario 3.

Comparativamente, la incidencia calculada para el escenario 1 o base, es de 50%, mientras que para los escenarios 2 y 3 es de 60% y 33%, respectivamente. En otras palabras, los resultados representan la proporción del IF que deberá ser asumida por el bloque de consumidores y productores. Por otra parte, el monto del IF^{Max} calculado para los escenarios 1, 2 y 3 corresponde a \$8.000, \$9.600 y \$5.333, respectivamente. Lo anterior sugiere la existencia de una relación directa entre el efecto del impuesto y el monto del mismo.

Por último, y a efectos de sintetizar los resultados anteriormente propuestos, se procedió a establecer la relación existente entre el IF y la PIE a cada nivel de impuesto posible en el mercado para cada uno de los tres escenarios presentados con anterioridad. En el eje horizontal se presenta el monto del IF y en el eje vertical se representa la PIE . Como puede observarse, en los tres casos existe en un primer tramo de la curva, una relación creciente entre las variables en mención, pero a partir del máximo del IF , y en la medida en que se genera contracción del IF , la PIE tiende a incrementarse de manera más que proporcional. La *Gráfica 3* ilustra lo anterior.

Gráfica 3: Relación entre IF y PIE en un mercado perfectamente competitivo



Fuente: Cálculos realizados por los autores.

Así las cosas, un exceso de distorsión de un mercado no solamente reduce el *IF* tal como lo sugiere Laffer, sino que además genera que la *PIE* tienda a ser cada vez más grande tal y como se aprecia. En particular, a medida en que los parámetros hacen más flexibles los comportamientos de la oferta y la demanda del mercado ante cambios en el precio, una excesiva carga fiscal establecida en el mercado trae como resultado una distorsión notoria en materia de eficiencia. Como puede apreciarse, el escenario 3 muestra la notoria asimetría resultante de un exceso de tributación en el mercado.

4 ANÁLISIS ECONÓMÉTRICO

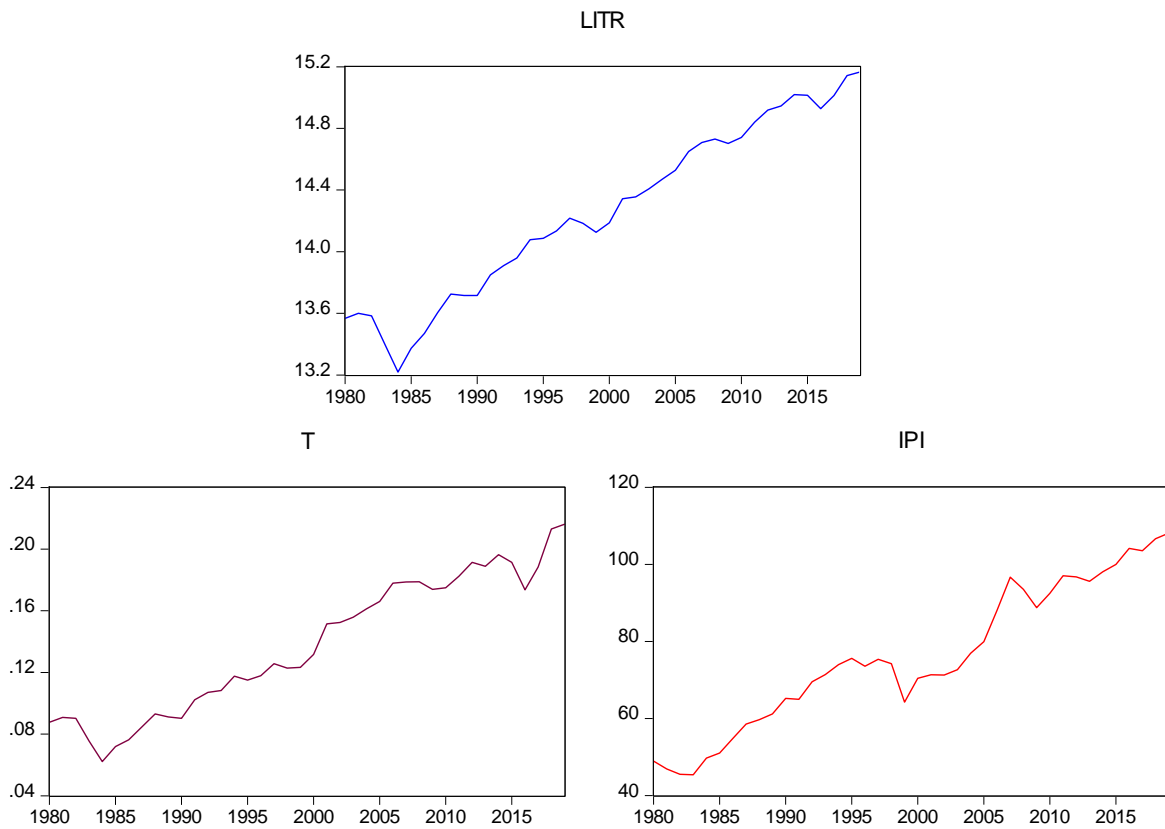
Esta sección corresponde al segundo análisis, el análisis econométrico. Inicialmente se presenta el planteamiento y la metodología del ejercicio econométrico, seguido de los resultados y análisis de las estimaciones. El objetivo de esta sección es constatar si existe evidencia empírica que corroboren parte de los resultados encontrados en la sección anterior, esto es si existe evidencia de la presencia de U invertida sugerida por Laffer para la economía colombiana.

4.1 PLANTEAMIENTO Y METODOLOGÍA

En esta sección se plantea, especifica y estima un modelo econométrico basado en la teoría planteada por Laffer para Colombia, con el fin de calcular la tasa impositiva de tributación óptima, empleando datos anuales durante el periodo comprendido entre 1980 y 2019. Se usan datos de ingreso tributario real per cápita, la tasa impositiva y el Índice de Producción Industrial (IPI). Esta última como proxy de la actividad productiva de las ramas industriales de la economía. Las series del ingreso tributario real per cápita se construyen a partir de la serie de ingresos tributarios del Ministerio de Hacienda y Crédito Público (MHCP) retropolada hasta 1980 con las estadísticas históricas del Departamento Nacional de Planeación (DNP), la serie retropolada del Producto Interno Bruto nominal (PIB) metodología 2015 y las proyecciones de población del Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE).

En la *Gráfica 4* se observa el comportamiento de cada una de las series entre 1980 y 2019. Se observa un comportamiento creciente

Gráfica 4. Series de Tiempo, 1980 – 2019.



Fuente: elaboración de los autores.

Para este modelo se suponen varias cuestiones. En primer lugar, los impuestos se cobran a los ingresos del factor trabajo, el capital y el patrimonio, se emplean tanto impuestos directos como indirectos. En segundo lugar, se especifica una función cuadrática del recaudo en función de la tasa impositiva. En tercer lugar, la función cuadrática se plantea con una forma funcional *log-lin*, siguiendo a Bejarano (2008).

Modelo a estimar:

$$\text{Log}(ITRp_t) = \beta_0 + \beta_1 t_t + \beta_2 t_t^2 + \beta_3 IPI_t + \varepsilon_t \quad (38)$$

Donde,

ITRp: Es el ingreso tributario real per cápita. Calculado como el cociente entre los ingresos tributarios, deflactados con el deflactor del PIB (base 2015=100), y divididos por la población. *t*: Es la tasa de tributación efectiva, tomando como *proxy* el cociente entre los ingresos tributarios y el PIB. *IPI*: Es el Índice de Producción Industrial.

Dado que estas series de tiempo presentan un comportamiento no estacionario es necesario identificar su orden de integración para determinar si es necesario aplicar una prueba de cointegración y con el fin de evitar posibles resultados espurios (Newbold y Granger (1974), Phillips (1986)). Para determinar el orden de integración se aplican las pruebas de raíz unitaria ADF (Dickey-Fuller (1979, 1981)) y ERS (Elliot *et al* (1996)) a cada serie de tiempo. En ambos casos, estas pruebas tienen como hipótesis nula la presencia de raíz unitaria en la serie.

Si las series son integradas de orden 1, debemos aplicar una prueba de cointegración, aquí aplicamos la prueba de Engle y Granger (1987) y la prueba de Phillips y Ouliaris (1990). Ambas pruebas tienen como hipótesis nula la No existencia de cointegración entre las series del modelo, y sus estadísticos se contrastan con los valores críticos tabulados por Phillips y Ouliaris (1990).

Una vez determinada la existencia de cointegración se emplean tres estimadores para obtener el valor de la tasa de tributación óptima. Se emplea el estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS), el estimador de Mínimos Cuadrados Completamente Modificados (FMOLS)⁵ y el estimador de Mínimos Cuadrados Dinámicos (DOLS)⁶. Estos últimos se emplean dado que esta estimación puede presentar problemas de autocorrelación y

⁵ Este estimador propuesto por Phillips y Hansen (1990).

⁶ Este estimador propuesto por Phillips y Loretan (1991), Saikkonen (1991), y generalizado por Stock y Watson (1993).

endogeneidad.⁷ En este sentido, estas dos metodologías producen estimadores completamente eficientes, cada método desde una óptica distinta. En el caso de los DOLS, se usa una metodología paramétrica al incluir rezagos y adelantos de las diferencias de las variables independientes, y en el caso de FMOLS, se usa una metodología semi-paramétrica. En ambos casos, se utilizan estimadores de la matriz de varianzas y covarianzas de largo plazo consistentes con heteroscedasticidad y autocorrelación.

Una vez obtenida la estimación de los parámetros, es posible calcular la tasa óptima que maximiza el recaudo fiscal. Dichos parámetros deben ser significativos, β_1 debe ser positivo y β_2 negativo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Log}(ITRp_t)}{\partial t} &= 0 \\ \beta_1 + 2\beta_2 t &= 0 \\ t_{\text{optimo}} &= -\frac{\beta_1}{2\beta_2} \end{aligned} \quad (39)$$

4.2 RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados de las estimaciones siguiendo la metodología expuesta en la sección anterior.

En la *Tabla 2* se presenta el resultado de las pruebas de raíces unitarias ADF y ERS sobre las 3 variables bajo análisis. Estos resultados muestran que el ingreso tributario real per cápita, la tasa impositiva y el índice de producción industrial son series no estacionarias en nivel, y estacionarias en primera diferencia, lo que indica que en nivel tienen raíz unitaria y en primera diferencia no tienen raíz unitaria, es decir, las series son integradas de orden uno, $I(1)$.

En las dos pruebas se emplearon rezagos de la variable dependiente para corregir posibles problemas de autocorrelación, estos rezagos se determinaron empleando el criterio de información Schwarz (1978). Adicionalmente, en la regresión auxiliar de cada prueba se incluyó constante como término determinístico.

⁷ Si bien las estimaciones por OLS son superconsistentes, el estadístico t obtenido con términos no estacionarios ($I(1)$) son solo aproximadamente normales, y su convergencia puede ser baja en muestras finitas. Los estimadores FMOLS y DOLS controlan la endogeneidad y emplean estimadores de la matriz de varianzas y covarianzas consistentes con correlación serial y heteroscedasticidad.

Tabla 2. Pruebas de Raíces Unitarias

SERIE	ADF	VC 5%	ERS	VC 5%
<i>LITRp</i>	0.06	-2.94	-0.06	-1.95
<i>D(LITRp)</i>	-5.17	-2.94	-5.22	-1.95
<i>T</i>	0.28	-2.94	0.83	-1.95
<i>D(T)</i>	-5.73	-2.94	-5.82	-1.95
<i>IPI</i>	-0.18	-2.94	0.79	-1.95
<i>D(IPI)</i>	-5.87	-2.94	-5.12	-1.95

Fuente: elaboración de los autores.

Como se mencionó en la subsección anterior, dado de que las series de tiempo son no estacionarias, se debe probar si estas series comparten una tendencia común de equilibrio de largo plazo, es decir, si las series están cointegradas. Esto con el fin de evitar obtener resultados espurios en la estimación del modelo planteado.

La *Tabla 3* presenta el resultado de las pruebas de cointegración de Engle-Granger y Phillips-Ouliaris, en ambos casos el estadístico de prueba permite rechazar la hipótesis nula de no cointegración a favor de que existe cointegración entre las variables.

Tabla 3. Prueba de Cointegración

Prueba	Estadístico	VC 5%*	Resultado
Engle - Granger	-4.42	-4.11	Cointegración
Phillips - Ouliaris	-38.27	-32.06	Cointegración

Nota: Los valores críticos para ambas pruebas fueron tomados del Anexo B de Phillips y Ouliaris (1990).

Fuente: elaboración de los autores.

Al existir relación de equilibrio de largo plazo, se estima la relación planteada en el modelo utilizando los tres estimadores mencionados en la metodología. La *Tabla 4* presenta el resultado de los 3 modelos estimados y se observa que en todos los casos hay evidencia de la presencia de una relación de *U-invertida*, los coeficientes son significativos a nivel individual y conjunto. También se observa que los errores en cada modelo siguen una distribución normal, según la probabilidad del estadístico Jarque-Bera (1980).

Tabla 4. Resultados Modelos Estimados

	<i>Variable Dependiente: Log(ITRp)</i> <i>Errores Estándar entre ()</i>		
	<i>OLS</i>	<i>FMOLS</i>	<i>DOLS</i>
<i>C</i>	8.58 (0.71)***	11.99 (0.07)***	12.00 (0.12)***
<i>T</i>	14.05 (1.22)***	13.35 (1.10)***	13.08 (1.84)***
<i>T²</i>	-19.65 (3.59)***	-18.00 (3.84)***	-17.04 (6.70)***
<i>IPI</i>	0.01 (0.00)***	0.01 (0.00)***	0.01 (0.00)***
<i>F</i>	2473	2725	2756
<i>Prob (F)</i>	0.0000	0.0000	0.0000
<i>Obs</i>	39	39	37
<i>Varianza de LP</i>	--	0.0015	0.0028
<i>Estadístico JB</i>	3.9338	0.8190	0.8451
<i>Prob (JB)</i>	0.1398	0.6639	0.6553

Nota: Para la estimación DOLS y FMOLS se usa el método de Andrews (1991) para determinar el parámetro de truncamiento en la estimación no paramétrica. El número de rezagos y adelantos en el DOLS se determina por medio del criterio de información Akaike (1974). (***) Indica significancia al 1%.

Fuente: elaboración de los autores.

Adicionalmente, la *Tabla 5* presenta la tasa óptima que maximiza el recaudo fiscal (*ecuación 39*) en cada una de las estimaciones, comparándola con la tasa óptima de 2015 para calcular el espacio fiscal del Gobierno. Los resultados empíricos muestran que se cumple el postulado de Laffer, cuando la tasa impositiva es baja, menos del 37% en promedio, la relación entre la tasa impositiva y el recaudo tributario real per cápita es positiva, pero cuando la tasa impositiva es mayor al 37% en promedio, la tasa impositiva y el recaudo tributario real per cápita tienen una relación negativa. Lo anterior indica que un nivel de la tasa impositiva por

encima del 37%, en promedio, provocaría una reducción en el recaudo fiscal, ya que los ingresos tributarios reales per cápita comenzarían a disminuir.

Según estos resultados, la tasa impositiva fiscal de Colombia en promedio no se ha encontrado en su nivel óptimo que maximiza el recaudo tributario, lo cual brinda al Gobierno un margen de maniobra relativamente amplio para incrementar dicho recaudo fiscal. Como lo muestran Lozano *et al* (2019), la tasa efectiva del año 2015 se ubica en 25,3% para el trabajo y en 24,5% para el capital (24.9% en promedio), lo cual indica que el Gobierno todavía tiene cierto margen de maniobra para incrementar las tasas impositivas promedio, tanto del trabajo como del capital, aproximadamente en 12 puntos porcentuales. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, un aumento de la tasa podría conducir a incrementos menos que proporcionales en el recaudo tributario fiscal, vía desincentivos, elusión y evasión.

Tabla 5. Tasa Óptima y espacio fiscal en cada Estimación

Estimación	t maximizador	t efectiva en 2015*	Espacio fiscal
<i>OLS</i>	0.36	0.249	0.11
<i>FMOLS</i>	0.37	0.249	0.12
<i>DOLS</i>	0.38	0.249	0.13

* La tasa efectiva es el promedio del impuesto a las rentas laborales y de capital, que para el año 2015 fue del 25.3% y 24.5%, respectivamente. (Lozano *et al* (2019)).

Fuente: elaboración de los autores.

5 CONCLUSIONES

En este artículo se llevan a cabo dos aportes, uno a través de un análisis de estática comparativa y otro mediante un análisis empírico. Así las cosas, a partir de la modelación de un sistema de ecuaciones lineales que representa el funcionamiento de un mercado de oferta y demanda se microfundamenta la Curva de Laffer. Dicha curva, en forma de *U-invertida*, corrobora la proposición realizada por Arthur Laffer, la cual sugiere la existencia de dos tasas impositivas que producen la misma cantidad de ingresos fiscales, los cuales aumentan debido a incrementos en dichas tasas hasta alcanzar un punto máximo, a partir del cual, disminuyen debido al exceso de presión tributaria sobre los contribuyentes.

Posterior a la microfundamentación de la Curva de Laffer, se determinó el monto óptimo de tributación que una institución recaudadora debe fijar a efectos de maximizar el ingreso fiscal, y se estableció el dilema existente entre el nivel de recaudo tributario y el grado de

distorsión que se genera en un mercado. El ejercicio realizado, propone una forma general para calcular la incidencia que tiene la inclusión de un impuesto indirecto sobre los consumidores y productores, así como la pérdida de bienestar ocasionada por dicha inclusión.

Conforme a lo anterior, se realizaron algunos ejercicios de simulación, los cuales proporcionan la suficiente evidencia que permite constatar el impacto de la inclusión de un impuesto de corte indirecto en un mercado perfectamente competitivo. Partiendo de la existencia de tres escenarios, para los cuales se determinó que el monto del impuesto óptimo es de \$40, y aplicando choques simétricos a los parámetros que afectan tanto a la oferta como a la demanda, se pudo mostrar que existen efectos totalmente diferentes en materia del ingreso fiscal para cada uno de los escenarios aquí evaluados. Es así como del escenario 1 al escenario 2, el incremento fiscal registrado fue del orden del 20%, pasando de \$8.000 a \$9.600, mientras que del escenario 1 al escenario 3, este fue de 33%, pasando de \$8.000 a \$5.333, lo cual ilustra la existencia de evidentes no linealidades que se traducen en que cambios en los parámetros conllevan a cambios no proporcionales en el ingreso fiscal.

Asimismo, se logró mostrar que a medida en que la distorsión impositiva excede el nivel de impuesto óptimo, la pérdida irrecuperable de eficiencia para cada uno de los tres escenarios evaluados no solamente aumenta, sino que dicho aumento es más que proporcional. Esto es, cuando el impuesto es de \$40, las pérdidas calculadas son de \$4.000 para el escenario 1, \$4.800 para el escenario 2 y \$2.666 para el escenario 3. Respecto al cálculo de la incidencia fiscal que recae sobre consumidores y productores, se encontró que para el escenario 1 es de 50%, mientras que para los escenarios 2 y 3 es de 60% y 33%, respectivamente.

Finalmente, se pudo constatar que la relación existente entre el ingreso fiscal y la pérdida irrecuperable de eficiencia para cada nivel de impuesto posible en el mercado, en los tres escenarios evaluados mostró que en un primer tramo de la curva existe una relación constante y creciente. Cuando se alcanza el punto máximo de ingreso fiscal, la relación entre las variables en mención genera una distorsión notoria en materia de eficiencia.

Por otra parte, los resultados del ejercicio empírico realizado sugieren que Colombia se encuentra en el segmento creciente de la curva en la parte alta, estimación de la tasa óptima derivada de las estimaciones presentadas es de 37% en promedio. Como lo muestran Lozano et. al (2019), la tasa efectiva del año 2015 se ubica en 25,3% para el trabajo y en 24,5% para el capital, lo cual indica que el Gobierno todavía tiene cierto margen de maniobra para incrementar las tasas impositivas promedio, tanto del trabajo como del capital, aproximadamente en 12 puntos porcentuales. Adicionalmente, replicando el mismo ejercicio, tomando la tasa efectiva del año 2019, que para el trabajo es del 26,6% y para el capital de 29,5%, el margen de maniobra es aproximadamente de 9 puntos porcentuales.

En la misma dirección, es de recalcar que, si bien la tasa óptima de tributación derivada del ejercicio es de 37%, y teniendo presente la existencia de un margen de maniobra amplio, es

de recalcar que tasas efectivas de tributación mayores a las actuales podrían representar incrementos marginales menores en el recaudo, además pueden decisiones de participación en el mercado laboral y en la inversión, incluso pueden incentivar la evasión y elusión de impuestos.

Aunque estos resultados son importantes, deben ser leídos con precaución, toda vez que en esta aproximación empírica se está tomando el agregado de todos los impuestos sin discriminar los impuestos a las rentas laborales y de capital, además, no se tienen en cuenta algunos aspectos propios del mercado laboral colombiano y del recaudo fiscal, tales como los elevados niveles de informalidad, los índices de corrupción que afectan las expectativas de los contribuyentes, los niveles de evasión y elusión, entre otros. Adicionalmente, vale la pena recordar que el recaudo tributario no solamente puede incrementar vía tasas efectivas de tributación, sino que también, puede hacerlo vía expansión de la base gravable, por lo cual, dada la importancia de las estimaciones de la Curva de Laffer, sería vital contar con actualizaciones periódicas de las mencionadas estimaciones.

Finalmente, de lo expuesto con anterioridad, se pueden establecer al menos tres recomendaciones esenciales. Respecto a la primera, resulta importante mencionar que no es posible establecer una Curva de Laffer única entre mercados. Cada mercado, aún con precios máximos y mínimos similares puede presentar comportamientos significativamente diferentes en cuanto al comportamiento de su respectiva Curva de Laffer con efectos asimétricos sobre el nivel de recaudo máximo a nivel tributario. Por lo anterior, cualquier análisis tendiente a explorar la modificación del sistema impositivo vía impuestos indirectos deberá fundarse en un estudio detallado microeconómicamente hablando del comportamiento de cada uno de los mercados posiblemente afectados.

La segunda recomendación y alerta que se deriva de este documento, es que un gravamen excesivo en un mercado puede traer consigo fuertes impactos en materia de distorsión de un mercado, en el cual, no solamente existe una contracción en el ingreso fiscal para la administración de impuestos, sino un importante efecto adverso en materia del nivel de eficiencia en el mercado.

La tercera recomendación radica en que, si bien las estimaciones sugieren que el Gobierno cuenta con margen de maniobra relativamente amplio para incrementar la carga impositiva, los incrementos de la tasa efectiva pueden generar, en el corto plazo, incrementos no proporcionales en el recaudo tributario, además de desincentivos en las decisiones de participar en el mercado laboral y de inversión. En este sentido, vale la pena mencionar que el Gobierno también puede incrementar el recaudo tributario mediante de la expansión la base gravable de contribuyentes. Lo anterior vía reducción o eliminación de beneficios tributarios, o vía fortalecimiento de las entidades recaudadoras de impuestos, tanto a nivel nacional, local y departamental, a efectos de minimizar la evasión y la elusión de impuestos por parte de los agentes.

REFERENCIAS

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723.
- Andrews, D. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica*, 59: 817–858.
- Bejarano, H. (2008). Verificación Empírica de la Curva de Laffer en la Economía Colombiana 1980-2005. *Revista Facultad de Ciencias Económicas*, XVI(1).
- Bejarano, H. (2013). Tributación en Colombia: La tasa óptima que maximiza el recaudo tributario. *Revista de Estrategia organizacional*.
- Brill, A. y Hassett, K. (2007). Revenue-Maximizing Corporate Income Taxes: The Laffer Curve in OECD Countries. *American Enterprise Institute For Public Policy Research*.
- Buchanan, J., y Lee, D. (1982). Politics, Time, and the Laffer Curve. *The Journal of Political Economy*. Vol. 90, No 4, pp: 816-19
- Canto, V., Douglas, J., y Laffer, A. (1979). An income expenditure version of the wedge model. *Federal Reserve Bank of San Francisco*, 2, 27-62.
- Chakraborty, L. (2015). Fiscal Seigniorage “Laffer-curve effect” on Central Bank Autonomy in India. *National Institute of Public Finance and Policy New Delhi*. No. 2015-156.
- Dickey, D.A., y Fuller, W.A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *J. Am. Statist. Assoc.* 74(366): 427-431.
- Elliott, G., Rothenberg, T. y Stock, J. (1996). "Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root," *Econometrica*, Econometric Society, vol. 64(4), pages 813-836.
- Engle R. and Granger, C.W. (1987). "Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing", *Econometrica*, Vol. 55 (2), pp. 251 - 276.
- Fergusson, L., y Suárez, G. (2010). Política Fiscal: Un Enfoque de Tributación Óptima. *Universidad de Los Andes, Facultad de Economía*, CEDE, Ediciones Uniandes, Bogotá D.C.
- Fullerton, D. (1980). On the Possibility of an Inverse Relationship between Tax Rates and Government Revenues. *NBER Working Paper Series*, 19(467).
- Granger, C.W. and Newbold, P. (1974). "Spurious Regressions in Econometrics", *Journal of Econometrics*, Vol. 2, pp. 111 - 120.

- Guedes de Oliveira, F. y Costa, L. (2015) The VAT Laffer Curve and the Business Cycle in the EU27: An Empirical Approach. *Journal of Economic Issues*, Vol. 20, Part 2.
- Hernández, I. (2005). Teoría y Política Fiscal. *Universidad Externado de Colombia*, Facultad de Economía, Bogotá D.C.
- Jarque, C. y Bera, A. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6 (3), 255-259.
- Kalmarzi, H. y Mousavi, M. (2014). An Estimation of Laffer Curve in Iran: A Non-Linear Approach. *Iranian Journal of Economic Studies*. Vol. 3, No. 1.
- Karas, M. (2012). Tax rate to maximize the revenue: laffer curve for the czech republic. *Acta univ. agric. et silvic. Mendel*. No. 4, pp. 189–194.
- Laffer, A. (1978). An equilibrium rational macroeconomic framework. *Johns Hopkins University Press.*, 44-57.
- Laffer, A., y Seymour, J. (1979). The Economics of the Tax Revolt: A reader. *Harcourt Brace Javanovich*, New York.
- Laffer, A. (2004). The Laffer Curve: Past, Present, and Future. *Heritage Foundation Backgrounder*. No. 1765.
- Lindsey, L. (1986). Individual Taxpayer Response to Tax Cuts 1982-1984 with Implications for the Revenue Maximizing Tax Rate. *NBER Working Paper Series*, 19(33).
- Lozano, I. y Arias, F. (2018). Curvas Laffer de la Tributación en Colombia. *Borradores de Economía* (1045). Banco de la República.
- Mankiw, N. (2014). Principles of Economics. *Cengage Learning*, 7th edition (2014). ISBN: 978-1285165875
- Nutahara, K. (2015). Laffer curves in Japan. *Journal of The Japanese and International Economies*, 36, 56-72.
- Phillips, P. (1986). "Understanding Spurious Regressions in Econometrics". *Journal of Econometrics*, Vol 33, pp. 311 - 340.
- Phillips, P. y Hansen, B.E. (1990). Statistical inference in instrumental variables regression with I(1) processes, *Review of Economic Studies*, 57, 99-125.
- Phillips, P. y Ouliaris, S. (1990). "Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration," *Econometrica*, Econometric Society, vol. 58(1), pages 165-193, January.

- Phillips, P. y Loretan, M. (1991), 'Estimating long-run economic equilibria', *Review of Economic Studies* 58, 407–436.
- Saikkonen, P. (1991), 'Asymptotically efficient estimation of cointegration regressions', *Econometric Theory*, 7, 1–21.
- Schwarz, G. (1978). "Estimating the dimension of a model". *Annals of Statistics*, 6 (2). 461–464.
- Stock, J. y Watson, J. (1993), 'A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems', *Econometrica*, 61, 783–820.
- Stuart, C. . (1981). Swedish Tax Rates Labor Supply and Tax Revenues. *Journal of Political Economy*, 89(5).
- Tatu, S. (2014). An application of debt Laffer curve: Empirical evidence for Romania's case. *Romanian Journal of Fiscal Policy (RJFP)*. ISSN 2069-0983, Editura ASE, Bucharest, Vol. 5, Iss. 1, pp. 29-38
- Trabandt, M., y Uhlig, H. (2011). The Laffer curve revisited. *Journal of Monetary Economics*, Volume 58(4), 305-327.
- Trabandt, M., y Uhlig, H. (2012). How Do Laffer Curves Differ Across Countries? *National Bureau of Economic Research* (Working Paper 17862).
- Van, A., y Vijibrief, H. (1988). Welfare Cost of Higher Tax Rates. An Empirical Laffer Curve for the Netherlands. *Netherlands Economic Review*.
- Wanniski, J. (1978). Taxes, revenues, and the Laffer curve. *Public Interest* , 3–16.