



**HAL**  
open science

# Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement

Virginie Deloustal-Jorrand, Michèle Gandit, Zoé Mesnil, Mickael da Ronch

## ► To cite this version:

Virginie Deloustal-Jorrand, Michèle Gandit, Zoé Mesnil, Mickael da Ronch. Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement. INDRUM 2020, Université de Carthage, Université de Montpellier, Sep 2020, Cyberspace (virtually from Bizerte), Tunisie. hal-03114042

**HAL Id: hal-03114042**

**<https://hal.science/hal-03114042>**

Submitted on 18 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement

Virginie Deloustal-Jorrand<sup>1</sup>, Michèle Gandit<sup>2</sup>, Zoé Mesnil<sup>3</sup>, Mickael Da Ronch<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Université de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, EA4148 S2HEP; <sup>2</sup>Maths à modeler, Université Grenoble Alpes; <sup>3</sup>LDAR, Université de Paris, [zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr](mailto:zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr); <sup>4</sup>Institut Fourier, Université Grenoble Alpes.

*This paper highlights the relevance of the articulation between syntax and semantics in proof and proving activities. In the first part, we define what we call syntax and semantics for a proof. In the second part, we present a logical and didactical analysis of a university course entitled "Mathematical Reasoning". This analysis relies on three types of data: interviews with teachers, worksheets and an assessment test.*

*Keywords: Teaching and learning of logic, reasoning and proof ; Teaching and learning of specific topics in university mathematics ; syntax ; semantics.*

## INTRODUCTION

À leur arrivée à l'université, les étudiants sont confrontés à la nécessité d'étudier et d'élaborer par eux-mêmes des raisonnements et des preuves de plus en plus complexes, ce qu'ils ont peu eu l'occasion de faire dans leurs études secondaires, y compris dans les sections scientifiques. De nombreuses recherches, tant au niveau national qu'international, mettent en évidence qu'ils ne peuvent pas s'appuyer sur une bonne maîtrise des connaissances et des compétences logiques nécessaires pour affronter la formalisation et la complexification de la structure logique des énoncés mathématiques. Dans certains cursus de l'enseignement supérieur des dispositifs de formation au raisonnement et à la preuve sont mis en place. Cependant, nous prenons pour hypothèse qu'il n'y a pas de savoir de référence pour de tels enseignements qui ferait consensus dans la communauté, le rôle de la logique mathématique dans l'apprentissage du raisonnement et de la preuve étant notamment l'un des éléments sur lequel les positions divergent (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp et Tanguay, 2012). C'est pourquoi, au sein du groupe de travail « Logique, langage, raisonnement, preuves » du Groupe de Recherche DEMIPS (Didactique et Épistémologie des Mathématiques, interactions Informatique Physique, dans le Supérieur), nous cherchons à étudier les différentes épistémologies relatives à la preuve des professeurs proposant ces cours à l'université. Celles-ci peuvent transparaître de manière plus ou moins explicite dans leurs choix didactiques ou dans leur discours sur ces cours. Nous cherchons aussi à mettre en lien ces choix avec les difficultés et apprentissages effectifs des étudiants.

Pour caractériser ces différentes épistémologies de la preuve, et sans aller pour l'instant jusqu'à l'élaboration complète d'une telle modélisation, nous souhaitons construire une grille d'analyse autour de différents aspects de la preuve, en prenant comme première entrée, présentée ici, l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique. Nous faisons l'hypothèse que chacune de ces dimensions sera plus ou

moins mise en avant dans un cours sur la preuve, et nous nous servons alors de cette grille pour analyser des documents de cours, des entretiens avec des enseignants, des productions d'élèves relatifs à un cours donné. Nous présentons d'abord plus précisément ce que nous entendons par aspects sémantiques et syntaxiques puis nous présentons quelques résultats de cette première étude de cas.

## **ASPECTS SYNTAXIQUE ET SÉMANTIQUE DE LA PREUVE**

### **Le point de vue de la logique**

L'objet de la logique est l'étude de la validité des raisonnements, c'est-à-dire qu'elle vise à fournir des outils pour établir quels sont les raisonnements corrects et pour débusquer ceux qui ne le sont pas. Pour cela, elle liste des *schémas de raisonnement*, ou des *règles de déduction* et modélise alors les raisonnements comme étant des mises en relation entre des propositions conformes à ces schémas ou à ces règles. La validité du raisonnement peut donc être attestée par sa structure et celle des propositions qui y interviennent, c'est-à-dire par des arguments d'ordre syntaxique.

Mais bien sûr, il est attendu de ces schémas ou de ces règles valides qu'elles préservent la vérité (on ne reviendra pas ici sur la distinction vérité/validité, voir Durand-Guerrier, 2008) : une proposition obtenue comme conclusion d'un raisonnement valide dont les prémisses sont vraies *doit nécessairement* être vraie. Ce critère permet de justifier quels sont les raisonnements valides, et d'établir la non-validité d'un raisonnement par des arguments d'ordre sémantique.

Cette articulation entre syntaxe et sémantique est au cœur de la démarche des logiciens, depuis les travaux « fondateurs » d'Aristote dans l'Antiquité Grecque jusqu'à la récente naissance de la logique mathématique contemporaine (Blanché, 1970). Dans la théorie du syllogisme d'Aristote (voir par exemple Aristote, 2007) le point de vue sémantique est bien présent (par exemple dans la justification des syllogismes de la première figure), mais finalement, les syllogismes sont décrits d'un point de vue syntaxique, même si la variété des formulations utilisées par Aristote montre qu'il « ne pousse pas le souci formel jusqu'au formalisme » (Blanché, 1970, p.48). En revanche, bien plus tard, Frege a ce souci du formalisme en construisant son *Idéographie*, qui est un système de signes permettant d'exprimer les déductions dans un langage entièrement formalisé, seule façon de garantir leur validité (Frege, 1999).

Nous retiendrons, pour notre propos, la caractérisation de la syntaxe et de la sémantique de Duparc (2015) :

La syntaxe est le monde des symboles, de ces « coquilles vides » que manipulent les ordinateurs. C'est le lieu des opérations grammaticales indemnes de tout contenu, dépourvues de sens.

La sémantique c'est au contraire le lieu des interprétations et des réalisations, des modèles ou des mondes possibles là où toute la syntaxe « prend corps ». C'est le lieu de la signification. (p. 12)

Duparc précise que « cette dichotomie ne renvoie pas à deux visions de la logique », mais plutôt à « deux faces d'une même feuille de papier » (p.13). Dans les travaux évoqués d'Aristote et de Frege, nous pouvons observer un phénomène de sémantisation de la syntaxe, et la relation syntaxe/sémantique, au départ intuitive dans les travaux des logiciens, est finalement formellement décrite depuis la définition sémantique de la vérité (au sens de la satisfaisabilité dans un modèle) de Tarski en 1933. Il est ainsi possible de vérifier pour un système syntaxique de déduction qu'il préserve la vérité, cela revient à montrer que si une proposition est prouvable (au sens syntaxique) dans une théorie, alors cette proposition est vraie dans tout modèle de cette théorie. Et un pas décisif a été fait par Gödel en 1930 qui, avec le théorème de complétude de la logique du premier ordre, montre la réciproque, à savoir que si une proposition  $F$  est vraie dans tout modèle d'une théorie  $T$ , alors  $F$  est prouvable à partir de  $T$ .

### **Articulation syntaxe/sémantique dans les recherches sur la preuve**

Pour insister sur le fait que, dans la métaphore de Duparc, il s'agit d'une même feuille de papier, plutôt que d'insister sur le fait qu'il y a deux faces, nous préférons utiliser le terme *articulation*. En effet, pour qui s'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage, l'important n'est pas tant une différence formelle que l'on peut faire entre syntaxe et sémantique, mais bien de voir comment ces deux aspects, leur articulation et éventuellement leur distinction, contribuent à la compréhension. On retrouve d'ailleurs ce point de vue dans de nombreuses recherches sur la preuve dans l'enseignement supérieur. Par exemple, dans une des premières recherches sur ce thème, Moore (1994) distingue trois usages des définitions et des théorèmes pertinents pour produire des preuves : nous situons le premier « produire et utiliser des exemples » du côté sémantique, alors que nous situons le troisième « utiliser les définitions pour structurer la preuve » du côté syntaxique. Et plus récemment, dans une liste de difficultés des étudiants identifiées par la recherche établie par Selden (2012), nous retrouvons également des difficultés en lien avec l'aspect syntaxique « *the proper use of logic, the necessity to employ formal definitions* », alors que d'autres sont en lien avec l'aspect sémantique « *the need for a repertoire of examples, counterexamples, and nonexamples, the need for strategic knowledge of important theorems* ».

Nous reprenons la caractérisation de Weber et Alcock (2004) qui distinguent une approche syntaxique et une approche sémantique dans la production des preuves :

We define a *syntactic proof production* as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. [...]

We define a *semantic proof production* to be a proof of a statement in which the prover uses instantiation(s) of the mathematical object(s) to which the statement applies to suggest and guide the formal inferences that he or she draws. (p. 210)

La séparation entre ces deux aspects n'est cependant pas toujours si claire : dans la phase de recherche d'une preuve (*proving*), certains moments peuvent relever d'un

traitement uniquement syntaxique, par exemple lors de manipulations d'énoncés, et d'autres d'un traitement sémantique (par exemple, considérer l'instanciation d'un théorème universel par des éléments singuliers, et essayer de comprendre ce qui se passe pour ces éléments-là). De même, en ce qui concerne la preuve dans son aspect produit (*proof*), les textes de preuve ne sont pas des produits formels élaborés uniquement selon un traitement syntaxique mais montrent au contraire des choix de l'auteur sur les arguments et leur formulation (Hache & Mesnil, 2015). Gandit (2008) a d'ailleurs montré les effets néfastes pour l'apprentissage d'une approche se focalisant sur une mise en forme codifiée. En outre, Deloustal-Jorrand (2004) a montré, que la connaissance des tables de vérité de l'implication ne suffisait pas à la bonne appréhension et utilisation de celle-ci dans un raisonnement. Cependant, les liens entre structure logique d'un énoncé et structure logique de sa preuve peuvent servir de guide, et Selden et Selden (1995) ont montré que les étudiants étaient en difficulté pour exhiber la structure formelle d'un énoncé, et conséquemment, pour produire ou contrôler la structure d'une preuve de cet énoncé.

### **ÉTUDE DE CAS : LE COURS « RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE »**

À la suite de ces recherches, nous faisons donc l'hypothèse que chacune de ces dimensions syntaxique ou sémantique sera plus ou moins mise en avant dans un cours sur la preuve, selon l'épistémologie relative à la preuve propre à l'enseignant. Nous présentons ici une première étude de cas menée sur un cours intitulé « Raisonnement Mathématique », proposé en première année de licence de mathématiques à l'Université Paris Diderot en 2017. Nous avons donc cherché à repérer ces deux entrées syntaxique et sémantique sur différentes données issues de ce cours. En effet, nous avons, d'une part, conduit et analysé des entretiens avec les deux responsables du cours et, d'autre part, nous avons analysé le photocopié de référence du cours, les feuilles d'exercices, et le sujet d'examen. Pour voir si les choix des enseignants pouvaient être mis en lien avec les difficultés des étudiants, nous avons complété ces analyses du cours par des analyses des réponses des étudiants à l'examen.

#### **Étude de la mise en œuvre du cours : photocopiés et entretiens de professeurs**

Lors des entretiens, à la question « selon toi est-ce que c'est important qu'il y ait un enseignement spécifique sur le raisonnement mathématique ? », l'une des professeurs évoque spontanément des éléments de logique mathématique (quantificateurs, connecteurs, variables...) et donne à voir le choix d'une entrée syntaxique dans son enseignement : il s'agit de « décortiquer des énoncés », d'apprendre « comment on s'exprime en mathématiques, comment lire un énoncé, le comprendre », même si elle mentionne la nécessaire articulation avec la sémantique. D'autre part, elle choisit de faire travailler des démonstrations pour lesquelles « il n'y a pas besoin d'avoir d'idées ». On retrouve aussi chez l'autre professeur la volonté de donner aux étudiants des automatismes de rédaction de preuves selon la structure de l'énoncé : « on a tel type d'énoncé, donc la forme  $A$  implique  $B$  par exemple, et donc pour montrer ça qu'est-ce qu'on fait en général, on suppose  $A$  on montre  $B$  ».

L'analyse du polycopié donne également à voir cette entrée syntaxique dans l'enseignement de la preuve. Par exemple, dans une des sections intitulée « Stratégies de preuve en fonction de la forme de l'énoncé à prouver », où « forme » renvoie bien à l'aspect syntaxique, l'auteur s'efforce de fournir aux étudiants une méthode permettant de générer une preuve et cela quelle que soit la forme des énoncés considérés. Cette méthode vise à analyser, puis à modifier les énoncés en fonction de leur structure, suivant des règles issues des tables de vérité.

Regardons enfin l'analyse des deux premiers exercices de la feuille d'exercices n°1 :

**Exercice 1.** Précisez les variables libres et les variables liées qui interviennent dans les noms suivants:

(a) $3q + r$	(b) $f(x_1 + x_2 + x_3)$	(c) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \end{cases}$
(d) $\sum_{i=1}^N (i + j)^2$	(e) $\sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^M (i + j)^2$	(f) $\int_0^x (3t + 1)^2 dt$
(g) $\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ est un nombre pair}\}$	(h) $\#\{i \in \mathbb{Z} : a \leq 2i < b\}$	

**Exercice 2.** Décrire avec des symboles mathématiques les objets suivants, et précisez les variables libres:

1. L'ensemble des entiers relatifs multiples de  $m$ .
2. L'ensemble des solutions réelles de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ .
3. L'ensemble des solutions complexes de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ .

*Figure 1 : Exercices de la première feuille*

Dans l'exercice 1, il est question de *noms*, ce qui renvoie à la distinction noms/énoncés parmi les expressions mathématiques. Le point de vue est syntaxique : on s'intéresse à l'expression, non pas à ce qu'elle désigne. Au contraire, dans l'exercice 2 il est question d'*objets*, le point de vue est ici sémantique. Par ailleurs, dans l'exercice 1, il est demandé de préciser les variables libres et les variables liées. Nous faisons l'hypothèse que la technique attendue est purement syntaxique : par exemple, pour les items (d) et (e), les variables qui sont sous le symbole  $\sum$  sont muettes, les autres sont libres, aucune reformulation de ces noms n'est demandée (ces sommes sont difficiles à interpréter pour des étudiants de première année). Au contraire dans l'exercice 2, il est d'abord question de reformulation, ce qui nécessite de comprendre les sens des mots utilisés dans la désignation de l'objet.

L'exercice 1 donne pourtant la possibilité d'articuler les dimensions syntaxiques et sémantiques : bien que le critère d'identification des quantificateurs soit le plus rigoureux pour repérer le statut des variables et soit suffisant, l'articulation avec la reformulation des noms amène un travail mathématique intéressant. Cette articulation permet alors de développer des outils de contrôle des résultats (par exemple, la variable  $i$  ne peut pas apparaître dans le calcul de la somme (d)). Cette articulation n'est pas demandée explicitement dans la consigne de l'exercice. Nous n'avons pas pu observer de déroulement des séances d'exercices, nous n'avons donc pas d'indication sur la manière dont les enseignants corrigent cet exercice.

Dans l'exercice 2, l'articulation syntaxe/sémantique est plus explicitement attendue puisque qu'après avoir demandé une reformulation, qui est aussi l'occasion d'apprendre à manipuler l'écriture en compréhension d'un ensemble, il est demandé d'indiquer les variables libres. Nous faisons l'hypothèse que ce qui est attendu est bien que les étudiants repèrent la variable rendue muette par l'assemblage {...|...}, les autres variables apparaissant libres dans le nom de départ étant toujours libres dans l'énoncé caractéristique de l'ensemble, et donc dans le nom reformulé.

Ces trois exemples donnés sont représentatifs de l'ensemble de nos analyses qui montrent une entrée syntaxique fortement affirmée, même si elle n'est pas coupée d'une volonté d'articulation avec l'aspect sémantique.

### Étude de l'examen et des copies des étudiants

Nous avons analysé plus particulièrement deux exercices de l'examen (parmi 6) proposé à la fin du cours, qui comportent selon nous des possibilités d'articulation des dimensions syntaxique et sémantique. Nous mettons en regard les réponses des étudiants. Étudions tout d'abord le premier exercice de l'examen :

#### Exercice 1 (4 points)

Soient  $P, Q, R$  trois énoncés. On note  $A$  l'énoncé :

$$(P \vee (\neg R)) \Rightarrow Q$$

et  $B$  l'énoncé :

$$\neg(P \wedge (\neg Q) \wedge R).$$

(On rappelle que  $\vee$  est le connecteur logique OU,  $\wedge$  est le connecteur logique ET).

- (1) Donner les tables de vérité de  $A$  et de  $B$ .
- (2) Démontrer l'énoncé  $A \Rightarrow B$ .
- (3) Les énoncés  $A$  et  $B$  sont-ils équivalents ?

*Figure 2 : Premier exercice de l'examen*

La question (1) de cet exercice est un classique des exercices de calcul propositionnel : il s'agit de dresser la table de vérité de deux propositions. Cette tâche s'apparente à un travail syntaxique : une fois connues les règles pour remplir une table de vérité, il n'est pas nécessaire pour les appliquer de se ramener au sens des connecteurs. Les étudiants ont été entraînés sur ce type d'exercices lors des séances de travaux dirigés. Sur 150 copies analysées, 140 étudiants répondent à cette question, et 68 (soit 45% des réponses) dressent une table de vérité correcte, 62 (soit 41% des réponses) dressent une table de vérité incomplète ou comportant plus de 3 erreurs.

La formulation de la question (2) ouvre plus de possibilités de résolution de la tâche. Une formulation du type « Démontrer que l'énoncé  $A \Rightarrow B$  est toujours vrai », voire « démontrer que l'énoncé  $A \Rightarrow B$  est une tautologie » aurait été plus dans la continuité de la démarche syntaxique attendue pour la question 1, en restant dans le registre du calcul des propositions. Au contraire, une formulation du type « Démontrer que  $A \Rightarrow B$  » se situe plus dans le registre du raisonnement déductif, avec des démarches

du type « supposons  $A$ , montrons  $B$  ». La formulation choisie ici est finalement intermédiaire entre ces deux formulations, et effectivement, les étudiants ont mis en œuvre différentes procédures plus ou moins syntaxiques ou sémantiques. La procédure complètement syntaxique consistant à établir la table de vérité de  $A \Rightarrow B$  a été mise en œuvre par 44 étudiants de façon correcte, et par 46 étudiants avec des erreurs (soit en tout 76% des 119 étudiants ayant répondu). Une autre procédure s'appuie également sur les tables de vérité, mais fait plus appel à la sémantique de l'implication : il s'agit de vérifier que lorsque  $A$  est vrai,  $B$  est vrai. Elle a été mise en œuvre par 9 étudiants. Une troisième procédure se situe dans le registre du raisonnement déductif : elle consiste à supposer  $A$  vrai, et à en déduire que  $B$  est vrai. Construire ainsi le canevas de la démonstration est une démarche syntaxique, dont nous avons vu qu'elle était prônée par les enseignants et dans le polycopié du cours. Cette procédure a été mise en œuvre par 10 étudiants, mais seulement 2 étudiants le font correctement, en listant les distributions de valeurs de vérité qui rendent  $A$  vrai, et en étudiant la valeur de vérité de  $B$  dans chaque cas, ce qui ramène l'exercice dans le registre du calcul propositionnel, et qui mobilise la sémantique de l'implication. Les 8 autres étudiants cherchent à transformer l'énoncé  $A$  ou l'énoncé  $B$ , mais de façon non correcte. Une autre démarche, qui n'a pas été mise en œuvre, consiste à transformer  $A$  en la disjonction  $[(\text{NON } P \text{ ET } R) \text{ OU } Q]$  et à faire une disjonction des cas. Une quatrième procédure similaire consiste à démontrer la contraposée ( $\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A$ ), elle n'a pas non plus été mise en œuvre. Notons que 23 étudiants accompagnent leur réponse à cette question de transformations des propositions, essentiellement en utilisant l'équivalence entre  $A \Rightarrow B$  et  $(\text{NON } A \text{ OU } B)$ .

De même, la formulation de la question (3) ouvre différentes possibilités de résolution. Sur les 126 étudiants ayant traité la question, 53 répondent en comparant les tables de vérité, ce qui en fait la procédure syntaxique majoritairement mise en œuvre. Bien que l'énoncé  $A \Leftrightarrow B$  n'apparaisse pas explicitement, 27 autres étudiants continuent de mobiliser une démarche syntaxique, en faisant les tables de vérité de  $B \Rightarrow A$  ou de  $A \Leftrightarrow B$ . Notons tout de même que 43% des étudiants qui avaient traité la première question avec des tables de vérité, notamment ceux qui ne les avaient pas mobilisées correctement, ne les utilisent pas ici pour répondre à la question de l'équivalence des énoncés, ce qui montre que ce registre syntaxique des tables de vérité est bien mobilisé dans une tâche où elles sont explicitement convoquées, mais moins bien dans une tâche où cela est plus implicite.

Finalement, environ 35% des étudiants mobilisent pour les 3 questions une résolution syntaxique par les tables de vérité, malgré les formulations des questions (2) et (3) ouvrant d'autres possibilités. Ce traitement purement syntaxique s'explique par l'inscription de la tâche dans le registre du calcul propositionnel, même si elle n'y reste pas strictement.

Regardons maintenant le dernier exercice de l'examen (figure 3). Là encore, la formulation de la tâche oscille entre plusieurs registres : il s'agit de démontrer, donc

d'élaborer un raisonnement déductif. Mais l'énoncé à prouver est formulé dans un registre formel du calcul des prédicats, faisant ainsi ressortir sa structure logique, et permettant peut-être plus facilement une approche syntaxique de la preuve. Les quantificateurs, l'équivalence, le « ou » sont notés sous leur forme symbolique, l'étudiant n'a pas à exhiber la structure logique de l'énoncé, ce qui aurait été le cas s'il avait été formulé sous la forme « le produit de deux nombres est nul si et seulement si l'un des deux nombres est nul ».

**Exercice 6 (3 points)**

On rappelle que pour tout nombre réel  $x$  non nul, son inverse  $\frac{1}{x}$  est bien défini et vérifie  $x \times \frac{1}{x} = 1$ . Démontrer l'énoncé suivant :

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \quad ((a = 0 \vee b = 0) \iff a \times b = 0).$$

Figure 3 : Dernier exercice de l'examen

De fait, concernant la structure des démonstrations produites, 84 étudiants, soit 72% des 117 réponses, cherchent bien à montrer les deux implications. Et 55 d'entre eux concluent leur raisonnement en reprenant l'énoncé initial bien quantifié. Par contre, seuls 12 étudiants introduisent explicitement les variables  $a$  et  $b$  manipulées dans la preuve (un effet sans doute du fait qu'elles sont déjà présentes dans l'énoncé, même si elles sont muettes).

Pour ce qui est du contenu des démonstrations produites, l'implication  $\forall a \forall b ((a=0 \vee b=0) \Rightarrow ab=0)$  est beaucoup mieux réussie que sa réciproque. 68 étudiants, soit 58% des réponses, produisent pour cela un raisonnement par disjonction des cas, et 22 étudiants produisent un raisonnement incorrect. Dans la copie ci-dessous, l'étudiant exhibe tous les éléments de structuration de la démonstration : (1) introduire  $a, b$  des réels, (2) supposer  $a=0 \vee b=0$ , (3) faire une disjonction des cas, (4) dire que dans chaque cas on a  $ab=0$ , et (5) conclure que l'implication est vraie.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels :

$\Rightarrow$  Supposons que  $(a=0 \vee b=0)$ .

On peut alors distinguer deux cas :

1.  $a=0$  ... On a alors  $a \times b = 0 \times b = 0$ .

2. ...  $b=0$ . On a alors  $a \times b = a \times 0 = 0$ .

Dans les deux cas, on trouve  $a \times b = 0$ .

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$

On en conclue que  $\forall (a=0 \vee b=0) \Rightarrow a \times b = 0$  /

Figure 4 : Un extrait d'une réponse au dernier exercice

Peu d'étudiants ont une rédaction dans laquelle nous retrouvons tous ces éléments de structure, notamment les éléments (1) et (4) sont peu présents, les éléments (2) et (5) le sont dans un peu plus de 50% des copies. Cette différence reflète ce qui se fait dans

les pratiques usuelles de rédactions. Pour la réciproque, seuls 25 étudiants produisent un raisonnement correct (qui correspondent, à 1 étudiant près, aux 21%, qui ont finalement résolu correctement la tâche), contre 43 qui produisent un raisonnement incorrect.

L'analyse de cet exercice montre, là aussi, que la plupart des étudiants se sont approprié le traitement syntaxique de la preuve d'une équivalence consistant à démontrer une double implication. Cette réussite est peut-être renforcée par l'aspect formel de l'énoncé à prouver. Cependant, nous voyons aussi que structurer correctement la preuve n'est bien sûr pas suffisant, puisque l'une des implications met une grande partie des étudiants en échec. Nous relierons le choix de cet exercice, dans lequel l'énoncé à prouver est un résultat connu depuis plusieurs années par les étudiants, aux propos des enseignants sur le fait qu'ils cherchent des démonstrations pour lesquelles il n'y a pas besoin d'avoir d'idées mathématiques difficiles à trouver. Cependant, nous voyons que les étudiants sont familiers du traitement syntaxique consistant à transformer l'équivalence en une double implication, mais pas du traitement syntaxique consistant à transformer  $A \Rightarrow (B \vee C)$  en  $(A \wedge \text{NON } B) \Rightarrow C$ , transformation qui permettrait une résolution plus simple de la deuxième implication.

## CONCLUSION

Les analyses montrent que pour le cours étudié, l'entrée choisie est fortement ancrée dans l'aspect syntaxique. Cependant, les réponses des étudiants à l'examen montrent une appropriation relative de ce cadre syntaxique. En effet, dans le cas d'une tâche où il est explicitement demandé de mobiliser une approche syntaxique dans le registre du calcul des propositions en dressant une table de vérité, seulement 45% des étudiants répondent correctement. Et sur des tâches où le recours à des tables de vérité n'est pas explicitement demandé, et où d'autres procédures éventuellement moins syntaxiques sont possibles, il y a encore moins de réussite. Par ailleurs, nous avons repéré en analysant les entretiens avec les enseignants et le polycopié du cours une volonté de donner aux étudiants des moyens de produire des preuves en fonction de la forme de l'énoncé. Dans le cas d'une preuve simple, la majorité des étudiants qui produisent un raisonnement correct exhibent effectivement des éléments de structuration de la preuve.

Après cette première étude de cas, et ce premier choix d'une analyse selon les dimensions syntaxique et sémantique, nous souhaitons élargir notre analyse à la prise en compte d'autres articulations telles que fonction d'explication/fonction de validation (Hanna, 2000), aspect processus/aspect produit (Gandit, 2008), logique naturelle/logique mathématique (Deloustal-Jorrand, 2004). Dans le cours présenté ici, l'entrée syntaxique est fortement liée à la fonction de validation et à l'aspect produit : la forme de l'énoncé guide l'écriture de la preuve, et permet de garantir sa validité. L'articulation logique naturelle/logique mathématique n'apparaît pas dans le cours ou l'examen, mais elle transparaît bien dans les entretiens, et est l'objet de certains exercices. Nous envisageons également de reconduire ces analyses sur d'autres cours,

et pour mener à bien cette analyse comparative, nous aurons besoin de construire un test indépendant du cours étudié, permettant d'évaluer l'appropriation par les étudiants des différents aspects de la preuve.

## REFERENCES

- Aristote (2007). *Organon. III. Premiers Analytiques*. Paris : Traduit par J.Tricot, Librairie Philosophique J.Vrin.
- Blanché, R. (1970). *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*. Paris : Librairie Armand Colin.
- Deloustal-Jorrand, V. (2004). L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier, Grenoble, France.
- Duparc, J. (2015). *La logique pas à pas*. Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 373-384.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. & Tanguay, D. (2012). Examining the Role of Logic in Teaching Proof. In G. Hanna et M. de Villiers (éds), *ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education*, 369-389. New-York : Springer.
- Frege, G. (1999). *Idéographie*. Paris : Traduction, préface, notes et index par Corine Besson, Librairie Philosophique J.Vrin.
- Gandit, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation*. Thèse, Université Joseph-Fourier Grenoble I.
- Hache, C. & Mesnil, Z. (2015). Pratiques Langagières et preuves. *Actes du 22<sup>e</sup> colloque de la CORFEM*, Nîmes, juin 2015.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration : an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Moore, R.C. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.
- Selden, A. (2012) Transition and proof and proving at tertiary level. In G. Hanna et M. de Villiers (éds), *ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education*, 391-420. New-York : Springer.
- Selden, A. & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123-151.
- Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.