



HAL
open science

Un problème de CAPES comme premier pas vers une implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale

Gaëtan Planchon, Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

Gaëtan Planchon, Thomas Hausberger. Un problème de CAPES comme premier pas vers une implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale. INDRUM 2020, Université de Carthage, Université de Montpellier, Sep 2020, Cyberspace (virtually from Bizerte), Tunisie. hal-03114040

HAL Id: hal-03114040

<https://hal.science/hal-03114040>

Submitted on 18 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un problème de CAPES comme premier pas vers une implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale

Gaëtan Planchon¹ et Thomas Hausberger¹

¹IMAG, Univ. Montpellier, CNRS, Montpellier, France,
gaetan.planchon@umontpellier.fr

Dans le contexte institutionnel de la formation des enseignants du secondaire en France, nous avons élaboré un problème qui vise à créer des liens entre l'intégrale du Lycée (upper secondary) et les théories de Riemann et de Lebesgue enseignées à l'Université. En d'autres termes, il s'agit d'une réponse à la question de l'implémentation du plan B de Klein, dans le cas de l'intégrale, comme stratégie pour pallier à la seconde discontinuité de Klein. La méthodologie se fonde sur l'exploitation d'un modèle praxéologique de référence pour les différents objets de savoir. Les premiers résultats suggèrent que la modalité sous forme de problème écrit est insuffisante pour produire le transfert des connaissances mathématiques académiques en des connaissances utiles pour un enseignant du secondaire.

Mots clefs: teaching and learning of analysis and calculus, transition to and across university mathematics, teacher training, integral, Klein's plan B

INTRODUCTION

Dans une préface souvent citée, Klein (1908) a mis en avant une double discontinuité dans le parcours des étudiants de mathématiques se destinant à la carrière d'enseignant. La première discontinuité a lieu à l'entrée de l'université (on parle de nos jours de “transition secondaire-supérieur”) tandis que la seconde, moins étudiée en éducation mathématique, s'opère à la sortie, lorsque les étudiants quittent l'université pour prendre un poste d'enseignant de mathématiques dans le secondaire. En effet, ces derniers perçoivent en général mal, d'eux-mêmes, les liens entre les savoirs universitaires et ceux, plus élémentaires, qui font l'objet des programmes de l'enseignement secondaire. La seconde discontinuité pose donc la question du transfert des connaissances mathématiques académiques en des connaissances utiles pour un enseignant du secondaire.

En France, la formation initiale des futurs enseignants est dispensée à l'université dans le cadre des masters MEEF¹. Ces derniers préparent à la fois au concours de recrutement (le CAPES², lequel évalue la maîtrise de connaissances disciplinaires couvrant essentiellement les deux premières années d'université, ainsi des capacités liées aux dimensions professionnelles) et à l'entrée dans le métier d'enseignant de mathématiques (pendant la seconde année, les étudiants enseignent à mi-temps). Les étudiants du master MEEF ont, pour la plupart, suivi un cursus de licence de mathématiques. La première année de master est alors un moment propice au travail

¹ Métier de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation

² Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré

des liens entre les notions mathématiques (dans le monde anglo-saxon, on parle de “capstone course”, point culminant de l’apprentissage qui vise l’intégration des connaissances en un tout cohérent) et en particulier, dans la perspective du concours, des liens entre savoirs mathématiques du supérieur et ceux du secondaire.

Klein (1908) propose en fait un programme de cours de type capstone (deux autres ouvrages suivront), basé sur une stratégie d’apprentissage qu’il appelle plan B (loc. cit. p.77-85). Par opposition au plan A qui opère un morcellement des savoirs en des pans plus ou moins autonomes (c’est la stratégie dominante à l’université, mise en oeuvre dans la division en modules), le plan B promeut une vision davantage holistique des mathématiques dans sa démarche de mise en évidence et d’exploitation des liens entre domaines mathématiques.

Les idées de Klein n’ont pas manqué d’inspirer mathématiciens et didacticiens. Récemment, Winsløw et Grønbaek (2014) se sont appuyés sur des outils de la théorie anthropologique du didactique (TAD ; Chevallard, 1991, 1999) pour modéliser la double discontinuité et proposer une première étude diagnostique des difficultés des étudiants qui se destinent au métier d’enseignant, dans le cadre d’un enseignement de type capstone au Danemark. Dans une seconde étude et avec des outils similaires, Winsløw et Kondratieva (2018) ont construit deux problèmes qui relient la théorie de l’Analyse aux savoirs pratiques du Calculus, dans le but de préciser, exemplifier et raviver l’idée de plan B de Klein. Des données issues d’expérimentations en classe sont analysées afin de discuter la faisabilité et les effets d’une telle approche.

L’objectif de cet article est d’exposer, dans la continuité des travaux de Winsløw et ses collaborateurs, une implémentation du plan B, cette fois dans le contexte des masters MEEF en France et sous la forme d’un problème de CAPES portant sur l’intégrale. Le cadre de la seconde épreuve écrite du CAPES semble être favorable à ce type d’implémentation puisque le programme de cette épreuve “est constitué des programmes de mathématiques du collège et des différentes séries du lycée général et technologique. Les notions traitées dans ces programmes doivent pouvoir être abordées avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master” (Journal Officiel du 8 décembre 2015, texte 8). L’intégrale est rencontrée par les élèves en classe de Terminale (dernière année du Lycée), puis par les étudiants à l’université à différents niveaux du cursus, avec souvent plusieurs théories (intégrale de Riemann, de Lebesgue, intégrale par rapport à une mesure quelconque, etc), ce qui en fait un objet riche et porteur pour l’étude de la deuxième discontinuité de Klein.

Dans un premier temps, nous exposons les outils de TAD qui ont guidé la construction du problème de CAPES et servent également à l’évaluation des effets sur les apprentissages. Puis nous présentons globalement le problème en soulignant les liens entre connaissances mathématiques qu’il vise à tisser. Enfin, nous ciblons deux parties du problème afin d’illustrer, par une analyse de copies d’élèves, les premiers résultats que cette étude a permis de produire.

CADRE THÉORIQUE ET QUESTIONS DE RECHERCHE

Winsløw et Grønbaek (2014) formalisent tout d'abord la double discontinuité à l'aide de la notion de rapport d'un individu à un objet de savoir au sein d'une institution, introduite par Chevallard (1991). Il s'agit de considérer : l'institution I, qui ici sera soit le lycée (L), soit l'université (U) ; un individu x qui occupe différentes positions dans l'institution I : d'abord élève au lycée (s), puis étudiant à l'université (σ) et enfin enseignant au lycée (t) ; un objet de savoir (ici l'intégrale), qui vit à travers différentes institutions et sera noté o au lycée et ω lorsqu'il s'agit d'une théorie de l'intégration enseignée à l'université. Le problème de Klein se modélise alors ainsi :

$$R_L(s,o) \rightarrow R_U(\sigma,\omega) \rightarrow \mathbf{R}_U^*(\sigma,\omega) \rightarrow \mathbf{R}_U(\sigma,o) \rightarrow R_L(t,o)$$

où l'enjeu d'un cours de type capstone dans une formation des enseignants se situe au niveau des éléments en gras : quels types de connaissances complémentaires instaurant un rapport $\mathbf{R}_U^*(\sigma,\omega)$ sont à apporter sur les théories universitaires de l'intégration pour établir un rapport $\mathbf{R}_U(\sigma,o)$ qui soit pertinent pour un futur enseignant ?

En TAD, les rapports institutionnels aux savoirs sont décrits en termes de praxéologies (Chevallard, 1999), c'est-à-dire de couples (Π, A) où Π dénote le *bloc praxique* et A le *bloc théorique*. Le premier bloc est composé d'un *type de tâches* T et d'une technique τ permettant de réaliser ces tâches. Le second, qui est souvent rattaché à une famille de blocs praxiques, comprend la technologie θ , un discours qui justifie la technique, ainsi qu'un niveau supérieur de justification, la théorie Θ , qui unifie en général plusieurs technologies. Dans leur travail, Winsløw et Kondratieva (2018) font l'hypothèse que les cours de Calculus à l'université développent en général des praxéologies notées (Π_i, L_i) aux blocs du logos "faible" (par rapport à la pratique mathématique experte), tandis que les cours plus avancés d'Analyse développent des praxéologies (P_i, A_i) aux blocs praxiques artificiels. Une interprétation du plan B est alors de créer des liens du type $A_i \leftrightarrow \Pi_j$ visant à montrer aux étudiants comment des blocs du logos de l'analyse A_i sont "construits" (dans un sens épistémologique à clarifier en fonction des objets d'étude) sur des blocs praxiques Π_j qu'ils ont travaillés au préalable en Calculus.

Le dernier outil de TAD que nous allons mobiliser est la notion de *modèle épistémologique de référence* (MER ; Florensa et al., 2015). Ce modèle consiste en une reconstruction du savoir enseigné, obtenue en étudiant l'objet de savoir à différents niveaux de la transposition didactique (via l'épistémologie historique, les programmes officiels, les études de manuels et documents de cours). Il constitue la référence pour le chercheur et est construit en lien avec les questions de recherche. Dans la section suivante, nous ferons une présentation simplifiée du MER qui a été élaboré pour l'intégrale du secondaire o et ses avatars universitaires ω_R (intégrale de Riemann) et ω_L (intégrale de Lebesgue dans le cadre de la théorie de la mesure). Les questions de recherche qui guident sa construction sont les suivantes : quels liens

peut-on établir entre les praxéologies mobilisant o dans le secondaire et les praxéologies universitaires développées relativement à ω_R et ω_L ? Quelle implémentation d'un plan B de Klein proposer dans le contexte des étudiants de master MEEF, pour l'intégrale ? Enfin, notre dernière question de recherche concerne alors les effets sur les apprentissages : la modalité sous forme d'un problème de Capes permet-elle aux étudiants de construire les liens $\mathbf{R}_U^*(\sigma, \omega) \rightarrow \mathbf{R}_U(\sigma, o)$ qui ont guidé sa construction et constituent les objectifs d'apprentissage ?

MÉTHODOLOGIE, PRÉSENTATION DES MER ET DU PROBLÈME

Pour construire le MER pour l'intégrale au lycée, nous avons mené une analyse praxéologique de manuels et nous sommes appuyés sur le programme officiel de 2011. Pour l'intégrale de Riemann à l'université, nous avons complété le MER proposé par Cong Khan (2006) par une analyse praxéologique de documents de cours et travaux dirigés utilisés à l'université de Montpellier en 2016 ainsi que d'un ouvrage collectif en ligne (<http://exo7.emath.fr>). Enfin, le MER relatif à l'intégrale de Lebesgue, encore en cours d'élaboration, s'appuie également sur des ressources issues des enseignements donnés à Montpellier.

Au lycée comme en début d'université, un bloc praxique prépondérant pour l'intégrale est le bloc Π_l composé du type de tâches T_1 (calculer l'intégrale définie d'une fonction continue f sur un segment $[a, b]$) et de la technique τ_1 (calculer une primitive F de f puis $F(b) - F(a)$). La technique est justifiée par le théorème fondamental de l'analyse (θ_1) qui, à son tour, est justifié au lycée à partir de la notion d'aire et ses propriétés (l'intégrale est définie géométriquement comme l'aire sous la courbe). Ces dernières ne sont pas formalisées, voire demeurent implicites, et restent donc largement fondées sur l'intuition. Le bloc du logos du lycée, noté L_o est donc un bloc faible au sens de la rigueur universitaire, voire incomplet. Un second bloc praxique P_2 rattaché à ce logos est celui du calcul approché des intégrales, avec pour technique la subdivision de l'intervalle et l'encadrement par des rectangles, de façon à définir ce qui sera appelé à l'université les "sommes de Riemann".

À l'université, une plus grande diversité de techniques (intégration par partie, changement de variable) permettent de réaliser T_1 . La technique τ_1 n'est cependant pas obsolète et toujours justifiée par θ_1 . Par contre, la théorie de Riemann vient justifier la technologie ; elle comprend la définition de l'intégrale de Riemann ainsi que des notions qui fondent l'analyse comme la borne supérieure. Nous notons A_R ce nouveau bloc du logos qui accompagne le passage de o à ω_R , ou encore la fondation de l'intégrale sur le nombre plutôt que sur la géométrie. De nouvelles praxéologies apparaissent également à cette occasion, notamment des types de tâches plus théoriques, par exemple "Montrer qu'une fonction donnée est Riemann-intégrable", dont les techniques correspondantes sont justifiées par la théorie A_R . Plus tard, en général en troisième année de licence, les étudiants peuvent trouver dans la théorie de la mesure les idées générales d'une formalisation possible du bloc du logos L_o . Des types de tâches relatifs à ω_L tels que "Montrer qu'une application donnée définit une

mesure sur un ensemble donné” ou encore “Montrer qu’une mesure (générale) est croissante” facilitent en effet une telle formalisation. Cependant, cette théorie abstraite demeure probablement hors de portée de nombreux étudiants qui abordent le cycle de formation des enseignants et elle ne figure pas au programme officiel du CAPES.

Le problème de CAPES que nous proposons comme implémentation du plan B de Klein a pour objectif la construction d’un nouveau bloc du logos \mathcal{A}_0 de l’intégrale du lycée, pour l’enseignant. La méthodologie de sa construction se base sur l’exploitation des liens que les différents MER ont permis de mettre en évidence, lesquels sont pensés en termes de relations entre blocs de la praxis et du logos, comme expliqué dans le cadre théorique. Les éléments ci-dessus suggèrent la possibilité de relier \mathcal{A}_0 à différents blocs du logos et de la praxis relatifs à ω_R et ω_L . Nous allons voir que l’implémentation de ces liens va se faire en exhumant dans l’histoire des éléments d’une théorie de la mesure des aires due à Jordan et Lebesgue (mais différente de ω_L). En d’autres termes, c’est l’épistémologie historique qui a permis d’enrichir les MER.

Notre problème comporte quatre parties. La première partie commence par la définition axiomatique d’une mesure des aires, inspirée de celle proposée par Perrin (2005). Cette axiomatique repose sur ce que Lebesgue considère comme les éléments essentiels que doit vérifier une mesure des aires (Lebesgue, 1935), renforçant le rôle des transformations géométriques du plan, dans l’esprit de l’algèbre moderne. Cette mesure consiste en la donnée d’une application μ définie sur un ensemble \mathcal{Q} appelé ensemble des parties quarrables du plan. Contrairement à l’axiomatique contemporaine de théorie de la mesure, μ n’est pas supposée σ -additive mais simplement additive (la mesure d’une union disjointe est la somme des mesures), d’où sa propriété de croissance (pour l’inclusion). On suppose de plus qu’elle vérifie les propriétés d’invariance par isométrie et d’homogénéité par rapport aux homothéties ($\mu(h(X))=k^2 \mu(X)$ pour une homothétie h de rapport k). Ces propriétés sont démontrées par Lebesgue mais nous les considérons comme faisant partie des axiomes. La mesure du carré unité est 1. Cette axiomatique constitue le fondement de notre logos \mathcal{A}_0 .

Les tâches demandées dans la partie 1 consistent à démontrer un certain nombre de formules élémentaires de calculs d’aires (aire d’un rectangle, découpages dans un triangle, aire d’un parallélogramme) en s’appuyant sur l’axiomatique précédente. Le travail proposé consiste donc à appliquer la méthode axiomatique travaillée à l’université (autant en algèbre qu’en topologie ou théorie de la mesure) pour fonder des praxis enseignées à l’école et au collège. En vertu de la sémantique des objets et du type de formalisme, ce travail est à rapprocher de praxéologies en théorie de la mesure (voir plus haut) ou encore de raisonnements ensemblistes en théorie des probabilités menés dans le secondaire. Mais il s’agit également d’intégrer des éléments de géométrie (usage des transformations), ce qui est susceptible de

déstabiliser certains étudiants. Nous détaillerons des exemples dans la partie empirique.

La deuxième partie de ce problème consiste à montrer que, sous l'hypothèse d'existence de la mesure μ et de "quarrabilité" de l'aire sous la courbe $\Omega_x = \{(t,y) \in \mathbf{R}^2, 0 \leq t \leq x, 0 \leq y \leq f(t)\}$, la fonction d'aire $x \mapsto \mu(\Omega_x)$ est dérivable de dérivée f (théorème fondamental de l'analyse, TFA). Deux exemples sont proposés pour débiter : le cas des fonctions x^2 et e^x . Les tâches suivantes correspondent aux étapes de la preuve du TFA rencontrée au lycée (donc sous l'hypothèse de monotonie de f), qui utilise la figure et l'encadrement classique par des rectangles comme dans la praxis P_2 . Mais il est attendu des étudiants qu'ils exercent le niveau de rigueur de l'université, c'est-à-dire qu'ils justifient les propriétés habituellement lues sur la figure en s'appuyant sur l'axiomatique (voir partie empirique). La dernière tâche généralise le résultat aux fonctions continues quelconques, ce qui nécessite de raisonner en termes de ε et δ comme de coutume dans les praxéologies d'analyse à l'université.

La troisième partie vise à construire une mesure vérifiant l'axiomatique, ce qui nécessite de définir la notion d'ensemble quarrable du plan. Cette construction, proposée par Lebesgue (1935), s'appuie sur des quadrillages du plan, de plus en plus fins, pour définir des mesures "extérieures" et "intérieures" des sous-ensembles du plan, lesquels sont dits quarrables en cas d'égalité. A l'aide des praxéologies du domaine des suites numériques, on étudie la quarrabilité de certains ensembles (les rectangles, l'ensemble des points à coordonnées rationnelles du carré unité) puis démontre que la mesure satisfait les propriétés que pose l'axiomatique. La dernière tâche de cette partie consiste à prouver un critère de quarrabilité : une surface S est quarrable si et seulement si il existe deux suites de polygone (P_n) et (Q_n) telles que :

- (1) $\forall n \in \mathbf{N}, P_n$ et Q_n sont quarrables;
- (2) $\forall n \in \mathbf{N}, P_n \subset S \subset Q_n$; (3) $\lim \mu(Q_n) - \mu(P_n) = 0$.

La fonction de ce critère apparaît par la suite.

En effet, on montre dans la dernière partie, en appliquant ce critère, que Ω_x est quarrable (sous l'hypothèse $f \geq 0$). Comme précédemment, on commence par le cas f monotone. On effectue une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ de pas $(b-a)/n$: les unions des rectangles que l'on obtient par la praxis P_2 donnent deux suites qui répondent au critère. En fait, il s'agit de l'analogue de la preuve que les fonctions monotones sont Riemann-intégrables. Cette tâche permet donc de relier le logos \mathcal{A}_o au logos de Riemann \mathcal{A}_R .

ETUDE EMPIRIQUE

Nous avons donc soumis ce problème à 19 étudiants de Master MEEF, dans les conditions du concours (épreuve de 5 heures sans document). Nous analyserons les productions des étudiants relativement à des tâches issues des deux premières parties du problème : il s'agit de tester la capacité des étudiants à mobiliser le logos \mathcal{A}_o pour

justifier d'une part des calculs d'aires (première partie), d'autre part les inférences qui permettent d'établir le TFA (deuxième partie) dans le cas d'une fonction monotone positive.

Etant donnée une mesure μ vérifiant l'axiomatique, la première tâche consiste à démontrer l'assertion suivante : $(X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y))$ pour toutes parties quarrables X et Y . Si l'axiomatique n'est pas celle d'une mesure stricto sensu (au sens de ω_L), cette tâche peut néanmoins être considérée comme une instanciation du type de tâche "montrer qu'une mesure générale est croissante". La technique privilégiée consiste à faire un découpage classique (en théorie de la mesure, comme en théorie des probabilités) : $Y = X \cup (Y \setminus X)$, ce qui donne directement le résultat par additivité de la mesure, puisque $\mu(Y \setminus X) \geq 0$. Il s'agit donc essentiellement d'un bloc praxique relatif à ω_L . Sur les 19 copies, 5 étudiants ont utilisé la technique décrite ci-dessus pour réaliser la tâche, 5 ont proposé une preuve partielle en affirmant que Y pouvait être partitionnée en deux parties disjointes, sans expliciter davantage le raisonnement, et deux étudiants manifestent des conceptions erronées (confusion de la mesure avec la cardinalité, introduction d'une relation d'ordre sur les éléments, ce qui n'a aucun sens). Nous considérons que 10 étudiants sur les 19 ont su mobiliser la praxis relative à ω_L .

La deuxième tâche étudiée est : "montrer que la mesure d'un carré de côté 3 est 9". Là encore, l'axiomatique de μ est sollicitée : les étudiants peuvent soit décomposer le carré en 9 carrés disjoints ou bien utiliser une homothétie et la propriété d'homogénéité de la mesure. On remarque que la technique de découpage est peu utilisée puisque seulement 3 étudiants l'utilisent comparativement à 12 étudiants qui utilisent une homothétie. Enfin, 2 étudiants appliquent une formule d'aire, ce qui revient à admettre le résultat. A part ces derniers qui n'ont pas cerné l'enjeu de l'axiomatique, nous pouvons donc considérer que les étudiants ont su s'approprier la définition formelle de mesure d'une partie quarrable.

La troisième tâche étudiée consiste à démontrer le TFA, ce qui revient essentiellement à reprendre la preuve vue en lycée en justifiant soigneusement, à l'aide de l'axiomatique, les propriétés de l'aire habituellement lues sur la figure.

B.3. Soit f est une fonction définie, positive et continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et $\Omega = \{(x, y), x \in [a, b], y \leq f(x)\}$. Pour chaque $t \in [a, b]$, on note $S(t) = \mu(\Omega_t)$ où

$$\Omega_t = \{(x, y) \in E, a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

B.3.1. On suppose f croissante sur $[a, b]$. Soit $x_0 \in]a, b[$.

B.3.1.1. Soit $h > 0$. Que représente $S(x_0 + h) - S(x_0)$? En déduire un encadrement de $S(x_0 + h) - S(x_0)$

B.3.1.2. Montrer alors que S est dérivable à droite en x_0 .

Figure 1. Enoncé des tâches relatives à la preuve du TFA

Plusieurs sous-tâches sont à réaliser : d'abord remarquer que $\mu(\Omega_{x_0+h}) - \mu(\Omega_{x_0})$ représente la mesure de $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}$ grâce à l'axiome d'additivité de μ , puis encadrer $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}$ par deux rectangles de largeur h et de longueurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.

Bien que la justification de cet encadrement soit possible (et attendue) à l'aide de l'algèbre, le passage au cadre graphique permet sûrement d'obtenir plus facilement cet encadrement. On peut faire l'hypothèse que si l'encadrement est obtenu par l'étudiant, le registre graphique a été mobilisé au moins au brouillon. L'avant dernière étape mobilise à la fois la croissance de μ et la formule de la mesure d'un rectangle (de façon similaire à la praxis P_2 des sommes de Riemann) afin d'aboutir à l'encadrement $hf(x_0) \leq \mu(\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}) \leq hf(x_0+h)$. Enfin, la dérivabilité (à droite) de la fonction $t \mapsto \mu(\Omega_t)$ en x_0 est une conséquence du théorème des gendarmes.

Sur les 19 copies, 10 étudiants ont réussi à obtenir l'encadrement attendu $hf(x_0) \leq S(x_0+h) - S(x_0) \leq hf(x_0+h)$. Seulement 3 étudiants ont effectivement tracé une figure. On reconnaît le dessin que l'on trouve habituellement dans les ouvrages de terminale, lequel constitue un bon support à la preuve (figure 2). Nous faisons néanmoins l'hypothèse que tous les étudiants qui ont su donner l'encadrement de $S(x_0+h) - S(x_0)$ ont mobilisé le cadre graphique, ne serait-ce qu'à travers une image mentale d'un tel dessin. Par exemple, l'étudiant dont le travail est présenté dans la figure 3 note R_1 et R_2 les deux domaines qui permettent d'encadrer l'aire sous la courbe, notations qui font directement référence à la méthode des rectangles.

Parmi les 10 étudiants à avoir proposé le bon encadrement, seulement 3 d'entre eux ont évoqué l'axiomatique, par exemple en utilisant la notation μ (figure 3). Cependant, la propriété de croissance de μ n'est jamais explicitement utilisée et il n'est pas fait référence au résultat précédemment établi sur la mesure des rectangles, ce qui laisse supposer que ce dernier a également été mobilisé sur une base essentiellement intuitive.

Parmi les 9 étudiants restants et qui n'ont donc pas su donner l'encadrement attendu de $S(x_0+h) - S(x_0)$, cinq étudiants n'ont pas abordé cette question. Les autres apparaissent bloqués ou mis en défaut par l'interprétation de l'ensemble $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}$, sans doute face au grand nombre de variables et paramètres dans les écritures algébriques. Par exemple, un étudiant a considéré l'ensemble Ω_{x_0} comme étant un rectangle. Il n'a visiblement pas perçu la dépendance en x dans l'expression des ordonnées, ou mal interprété cette dépendance dans la conversion vers le registre graphique. On peut donc faire l'hypothèse que le formalisme a été un obstacle majeur pour ceux qui n'ont pas interprété directement $S(t)$ comme une aire.

Au final, aucun étudiant n'a justifié les inférences à l'aide de l'axiomatique ce qui était l'enjeu de cette question. En particulier, ni la croissance ni l'additivité de μ n'apparaissent comme des éléments clés de la preuve. Nous faisons donc l'hypothèse que les étudiants qui ont réalisé la tâche se sont appuyés sur un point de vue intuitif de la notion d'aire et n'ont pas compris le rôle joué par l'axiomatique dans la démonstration. Ceci est à mettre en perspective avec les attendus du programme de Terminale S (2011) : « On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie. »

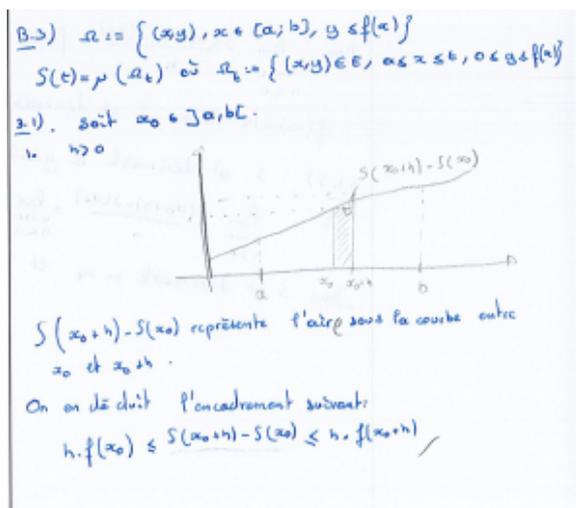


Figure 2. Exemple de réalisation de la preuve du TFA avec usage explicite du registre graphique

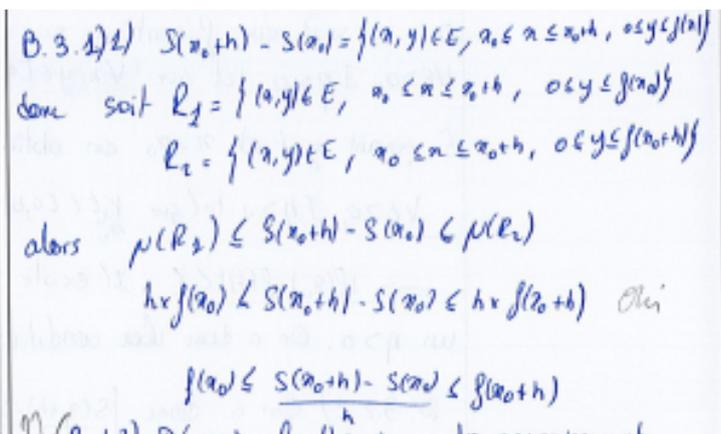


Figure 3. Exemple de réalisation de la preuve du TFA avec mobilisation de la notation μ

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans le contexte institutionnel de la formation des enseignants du secondaire en France, nous avons élaboré un problème de CAPES qui vise à créer des liens entre l'intégrale du Lycée σ et les théories de Riemann ω_R et de Lebesgue ω_L enseignées à l'Université. Ce problème répond à une demande institutionnelle, notifiée dans les programmes du concours de recrutement, d'aborder les objets de savoirs du secondaire avec le recul des connaissances de Licence (Bachelor). Interprétant cette injonction dans l'esprit du plan B de Klein (comme remède à la seconde discontinuité), nous avons suivi la méthodologie proposée par Winslow et ses collaborateurs. L'élaboration du problème se fonde ainsi sur un modèle praxéologique de référence pour σ , ω_R et ω_L . Ceci a permis de construire des tâches autour d'un nouveau logos \mathcal{A}_σ pour l'intégrale du lycée, à destination de l'enseignant. Du point de vue historique, ce logos correspond à une formalisation de la mesure antérieure à celle de la théorie contemporaine de la mesure (celle-ci inclut la σ -additivité), mais reformulée en partie en termes de transformations du plan (rôle des isométries et homothéties). Les liens que le problème cherche à établir ont été décrits en termes de relations entre blocs du logos et de la praxis de praxéologies mobilisant les différents objets σ , ω_R et ω_L et de différentes praxéologies de calculus et de théorie des ensembles.

L'étude empirique a montré que les étudiants, dans leur majorité, ont réussi à se saisir de l'axiomatique dans les premières questions du problème. On peut y voir l'impact du travail sur les axiomatiques effectué à l'université, autant en algèbre qu'en analyse (topologie, théorie de la mesure) ou en probabilités, mais aussi un transfert réussi de techniques élémentaires travaillées à propos de ω_L . Le contraste est alors saisissant lorsque ces derniers s'engagent dans la preuve du TFA en restant à un niveau de

justifications faisant appel à des propriétés de l'aire lues sur la figure plutôt que de mobiliser l'axiomatique. Dans ce contexte, la fonction de l'axiomatique semble non perçue par les étudiants. Outre la persistance du contrat didactique du second degré, ce phénomène peut également s'expliquer par l'obstacle du formalisme et un déficit de flexibilité cognitive dans l'articulation entre les registres graphiques et formels.

En conséquence, notre étude confirme que le transfert des connaissances universitaires en des connaissances utiles pour l'enseignant est très loin d'être automatique. La modalité en termes de problème de CAPES, si elle répond à une demande institutionnelle, s'avère insuffisante pour produire les effets recherchés sur les apprentissages, suite à une insuffisance de rétroactions du milieu. Ceci suggère qu'une modalité sous forme de situation, dans l'esprit de la théorie des situations didactique de Brousseau, ou bien un processus d'étude permettant la mise en place d'une dialectique fertile entre médias et milieux, dans la lignée des travaux récents en TAD, seraient davantage appropriés. C'est ce travail que nous nous proposons d'entreprendre, comme prolongement de cette première expérimentation.

BIBLIOGRAPHIE

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. 2nd édition. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.

Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2015). The epistemological dimension in didactics: Two problematic issues. In Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.) *Proceedings of CERME9* (pp. 2635–2641). Prague: Faculty of Education, Charles University.

Cong Khan, T.L. (2006). La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam. Université Joseph-Fourier Grenoble I.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, I*. Leipzig : B.G. Teubner. Trad. anglaise (1932). London : Macmilan.

Lebesgue, H. (1935). Sur la mesure des grandeurs. L'enseignement mathématique. Seconde édition, Paris : Blanchard, 1975.

Perrin, D. (2005). Mathématiques d'école. Edition Cassini (Novembre 2005)

Winsløw, C. & Grønbaek, C. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 59-86.

Winsløw, C. & Kondratieva, M. (2018). Klein's Plan B in the Early Teaching of Analysis: Two Theoretical Cases of Exploring Mathematical Links. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, 4, 119-138