



**HAL**  
open science

# Analyse des effets d'un dispositif innovant sur l'évolution des représentations des étudiants en première année de licence de mathématiques

Isabelle Bloch, Patrick Gibel

## ► To cite this version:

Isabelle Bloch, Patrick Gibel. Analyse des effets d'un dispositif innovant sur l'évolution des représentations des étudiants en première année de licence de mathématiques. INDRUM 2020, Université de Carthage, Université de Montpellier, Sep 2020, Cyberspace (virtually from Bizerte), Tunisie. hal-03113865

**HAL Id: hal-03113865**

**<https://hal.science/hal-03113865v1>**

Submitted on 18 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ANALYSE DES EFFETS D'UN DISPOSITIF INNOVANT SUR L'EVOLUTION DES REPRESENTATIONS DES ETUDIANTS EN PREMIERE ANNEE DE LICENCE DE MATHEMATIQUES

Isabelle Bloch<sup>1</sup> et Patrick Gibel<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Bordeaux, Lab-E3D, isabelle.bloch@u-bordeaux.fr; <sup>2</sup>Université de Bordeaux, Lab-E3D, Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr

*Résumé : Cet article présente un dispositif mis en place à l'université de Pau afin d'aider les étudiants de Licence 1 à surmonter les difficultés d'adaptation aux mathématiques du niveau supérieur, et à s'impliquer dans la recherche de problèmes mathématiques. Une situation est précisée et les productions des étudiants analysées.*

*Mots-clés : situations de recherche à l'Université, concepts mathématiques, outils sémiotiques, disponibilité des savoirs et des signes.*

## INTRODUCTION

La volonté politique de l'UPPA<sup>1</sup> d'expérimenter des dispositifs innovants pour lutter contre l'échec en première année de Licence (L1) de mathématiques et de licence MIASHS<sup>2</sup> a conduit des enseignants intervenant en L1 et les didacticiens de l'ESPE<sup>3</sup> à se réunir pour envisager la mise en œuvre d'un projet pédagogique innovant. Ceci a été rendu possible grâce aux interactions engagées, depuis plusieurs années, entre l'ESPE d'Aquitaine (site de Pau) et le département mathématique de l'université dans le cadre des mémoires liés à l'enseignement des mathématiques (Master MEEF) et au co-encadrement de thèses en didactique des mathématiques. Ces échanges ont contribué à expliciter les principaux enjeux du champ de la didactique des mathématiques et à montrer l'efficacité des concepts de didactique pour questionner et étudier les problématiques liées à l'enseignement des mathématiques dans le secondaire et le supérieur. Ces interactions ont conduit certains collègues de mathématiques de l'UPPA à vouloir diversifier leurs méthodes d'enseignement, suite au constat du manque manifeste d'investissement des étudiants de L1 dans l'étude des cours dispensés en CM<sup>4</sup> et dans la recherche des activités proposées en TD<sup>5</sup>, et donc de leur échec – potentiel ou avéré.

## CARACTERISATION DU DISPOSITIF PEDAGOGIQUE

### L'élaboration du projet

Le souhait des enseignants de l'UPPA était donc de mettre en place un dispositif pédagogique spécifique ciblant les difficultés des étudiants et visant à augmenter leur

---

<sup>1</sup> Université de Pau et des Pays de l'Adour

<sup>2</sup> MIASHS : Mathématiques et Informatique appliquées aux Sciences Humaines et Sociales

<sup>3</sup> Ecole Supérieure du Professorat et de l'Éducation, devenue en 2019 INSPE : Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation

<sup>4</sup> CM : cours magistraux

<sup>5</sup> TD : séances de travaux dirigés

compréhension des savoirs mathématiques en jeu, en vue de permettre une plus grande responsabilisation de ces étudiants de L1 et de favoriser leur implication dans les activités de résolution de problèmes, notamment en les faisant travailler en groupes. La volonté de privilégier les échanges au sein de groupes d'étudiants et de permettre des travaux en trinômes a reposé sur une méthode : il a été décidé d'aménager un effectif réduit pour chacun des groupes, soit 24 étudiants. Puis ont été constitués huit trinômes d'étudiants par groupe afin que les enseignants présents puissent suivre et encadrer les travaux engagés par chacun des trinômes, et étudier les principales difficultés rencontrées. Les étudiants ont été laissés libres de constituer un trinôme, notamment par affinité. Le but du projet est donc de motiver et responsabiliser chaque trinôme d'étudiants, en leur dévoluant une situation mathématique proche d'une situation adidactique ou à dimension adidactique, c'est-à-dire une situation comportant une dimension de recherche. Les situations présentées ont pour but de faire approfondir les connaissances présentées notamment durant les CM et les TD classiques.

### **Nature des difficultés des étudiants constatées en L1**

Le décalage de connaissances et de pratiques mathématiques observé lors de la transition secondaire/supérieur s'avère particulièrement difficile à gérer pour les étudiants ; en effet le contrat didactique évolue, conduisant les étudiants à une plus grande responsabilisation liée aux choix :

- des connaissances et des savoirs qu'il convient de mobiliser pour répondre à la situation de recherche dévolue par l'enseignant ;
- du cadre (numérique, géométrique, algébrique, graphique...) qui apparaît le plus adéquat pour répondre à la question posée ;
- du mode de raisonnement qu'il faut mobiliser (inductif, déductif, abductif) et la forme de raisonnement associée (raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence, raisonnement 'direct' ou par contraposée) pour élaborer la solution ;
- de l'interprétation et de l'usage des signes mathématiques, signes dont le niveau de complexité est élevé, par exemple les quantificateurs.

Les nombreuses études menées en didactique sur la transition secondaire-supérieur mettent en évidence un attendu spécifique en L1, à savoir une pratique maîtrisée du raisonnement au travers de ses différentes fonctions (Bloch et Gibel, 2016), (Gibel, 2018). Parmi les attendus du raisonnement on peut citer : organiser sa recherche, chercher, conjecturer, expliquer, justifier, prouver, démontrer, valider, invalider, réfuter.

Les précédentes recherches en DDM montrent des déficiences importantes des étudiants dans la prise d'initiative quant aux connaissances et savoirs à mobiliser pour résoudre un problème et élaborer une procédure de résolution. Au lycée les connaissances mobilisées dans le cadre des activités de résolution de problèmes sont le plus souvent en lien direct avec la notion mathématique étudiée précédemment, et ne nécessitent que la mise en œuvre de procédures répertoriées directement (et enseignées dans le cours) en lien direct avec la notion étudiée, voire explicitement

indiquées dans l'énoncé du problème. Il en est de même dans l'épreuve du baccalauréat. De plus les signes utilisés relèvent peu du formalisme mathématique.

A l'université, les étudiants doivent être capables d'élaborer, puis de rédiger et communiquer une preuve mathématique de façon autonome, mais également de débattre de la validité et de la pertinence d'une preuve complète, ceci en intégrant un niveau de justification adéquat, et des outils nouveaux, comme les quantificateurs : il y a donc un basculement du contrat didactique. Le décalage entre les deux niveaux a été largement illustré dans la recherche, par exemple dans Bloch (2016) :

(...) ce décalage fait que les étudiants ne savent manipuler que des fonctions définies par une formule algébrique, et [...] ne prennent que peu en compte le fait que l'étude des fonctions implique des calculs et raisonnements à différents niveaux, soit ponctuel, global, local, ce dernier point de vue étant celui qui se trouve le moins investi. Le global n'est pas non plus bien maîtrisé, les graphiques, par exemple, n'étant parfois vus que comme des icônes de fonctions, et non comme des outils de travail sur ces fonctions. Benitez & Drouhard (2015) mettent aussi en évidence que les étudiants testés dans leur étude [...] ont d'abord à surmonter des difficultés de calcul algébrique et de raisonnement, et que les étudiants qui ne manifestent plus ces difficultés algébriques sont confrontés à des obstacles venant de leur conception inachevée des objets mathématiques, et des liens entre les différents objets.

Rogalski (2008) pointe également la difficulté qu'ont les étudiants à passer du niveau global au local, ou réciproquement, notamment dans l'étude des fonctions. C. Winslow signale aussi que :

Parmi les enseignants universitaires, il y a un sentiment répandu que l'étudiant doit, effectivement, accomplir des « sauts cognitifs » dans le parcours [...] vers l'analyse abstraite enseignée à l'université. (Winslow, 2007, p.189)

### **Les grandes lignes du dispositif et le contrat didactique**

La mise en œuvre du dispositif décrit précédemment repose donc sur un contrat didactique universitaire *et* spécifique qu'il nous semble important de définir. Ainsi les principales responsabilités dévolues aux étudiants sont :

- L'implication dans la recherche, l'élaboration de raisonnements en réponses aux questions de l'énoncé, la formulation de questions en vue de surmonter certains obstacles ainsi que la rédaction d'une solution intégrant un niveau de justification adéquat et l'usage conforme des signes mathématiques.
- La présentation par le trinôme, tiré au sort, du raisonnement mathématique produit en réponse à chacune des questions de la situation de recherche.
- Le questionnement, par les trois étudiants constituant le jury, des raisonnements et des réponses produites par le binôme exposant son travail.
- L'analyse critique du raisonnement produit par des étudiants ayant ou non travaillé cette situation

- La rédaction<sup>6</sup> d'une solution intégrant les commentaires et les remarques effectués par les étudiants et l'enseignant suite à la présentation.

Les principales responsabilités de l'enseignant lors de la mise en œuvre de la séance et à l'issue de celle-ci sont :

- Observer les interactions au sein de chaque trinôme pour identifier leurs difficultés, les accompagner dans la résolution en apportant des réponses au questionnement des étudiants en vue de favoriser l'appropriation de la situation de recherche et d'éventuels changements de cadres ou de registres. Il s'agit de conserver la composante recherche de la situation, en s'inscrivant dans l'optique d'une 'guidance faible' (Bartolini-Bussi, 2009) ne dénaturant pas la dimension heuristique.
- Identifier précisément la nature et l'origine des difficultés des étudiants en analysant les différents types d'erreurs produites lors de l'exposé de leurs travaux.
- En fin de questionnement par le jury, choisir de revenir sur certains éléments de la solution en vue de lever le doute sur certaines interrogations quant aux savoirs en jeu, à l'adéquation des signes mobilisés et à la pertinence des réponses proposées.
- A l'issue des questions, décider des connaissances et des savoirs qu'il convient d'institutionnaliser : identification des objets mathématiques qui définissent la situation objective, nature et forme des signes et des raisonnements mobilisés lors de l'étude, liens entre les procédures distinctes mises en œuvre par différents groupes ; principaux enjeux didactiques et mathématiques de la situation, retour sur les registres sémiotiques mobilisés.
- Commenter et questionner l'écrit de synthèse produit par le trinôme – en charge de produire la mémoire de la situation de recherche – en vue d'une réécriture valide sur le plan sémantique et syntaxique.

Ce contrat spécifique est exposé en début d'année aux étudiants inscrits dans cette unité d'enseignement, et une première situation de recherche leur est proposée, situation qui est ensuite présentée et corrigée par l'enseignant afin de mettre en évidence les attendus de la restitution des situations.

## **METHODOLOGIE UTILISEE POUR ANALYSER L'EVOLUTION DES REPRESENTATIONS ET DES CONCEPTIONS DES ETUDIANTS**

### **Contexte du dispositif et de la recherche**

L'expérimentation a été menée dans cinq groupes de travaux dirigés au premier semestre de la première année de Licence de Mathématiques et de licence MIASHS<sup>7</sup>. Les étudiants ont choisi de suivre cette Unité d'Enseignement intitulée « Outils de méthodologie pour comprendre les mathématiques ». Les cinq enseignants qui ont

---

<sup>6</sup> Par un trinôme n'ayant pas présenté son travail.

<sup>7</sup> Mathématiques et Informatique appliquées aux Sciences Humaines et Sociales

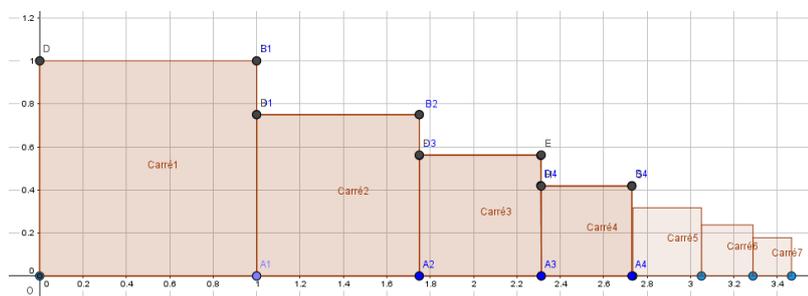
mené ces expérimentations sont ceux à l'origine du projet pédagogique innovant. Ils ont interagi avec les chercheurs en didactique, en vue de définir précisément le déroulement de chaque séance, de rédiger les énoncés des situations de recherche et de déterminer pour chacune des situations le contrat didactique correspondant.

### Mise en œuvre

Afin de déterminer en quoi la confrontation des élèves à des situations de recherche favorise non seulement l'identification des objets mathématiques et l'appropriation des concepts mathématiques, mais aussi la pratique du raisonnement, nous avons procédé à l'analyse des différentes versions produites successivement par un trinôme en charge de la restitution de la solution construite à partir de la situation 1.

### La situation 1 objet d'étude : Suite de carrés<sup>8</sup>

On construit une « suite » de carrés juxtaposés de la manière suivante : le côté du premier carré est de longueur 1 (en référence à une unité donnée), puis chaque carré a pour mesure de côté  $\frac{3}{4}$  de la mesure du côté du carré précédent.



**Figure 1 Les sept premiers carrés obtenus par le procédé de construction**

Dans cette situation, les élèves doivent déterminer s'il est ou non possible de construire un « *énième* » carré, dont  $a_n$ , l'abscisse du point  $A_n$  – correspondant à la mesure  $OA_n$ , où  $O$  désigne l'origine du repère – est strictement supérieure à 4. Puis ils doivent montrer que les points  $B_i$  sont alignés, et calculer l'aire totale de la figure. Il s'agit d'une situation à dimension adidactique, visant à confronter les étudiants à la notion de limite. Cette dernière est obtenue ici comme le résultat du processus de construction des carrés, itéré à l'infini. Cette situation offre la possibilité d'étudier la notion de limite finie d'une suite ; son intérêt principal est qu'elle est issue de connaissances du secondaire, et qu'elle offre la possibilité d'articuler différents cadres (algébrique, graphique et géométrique) pour une meilleure appréhension du concept.

### Déroulement de la séance et analyse a priori de la situation « Suite de carrés »

#### Place de la situation dans le dispositif

La situation « Suite de carrés » est la première situation de recherche dévolue aux étudiants et dont la résolution leur incombe pleinement. Auparavant l'enseignant a proposé une situation sur les fonctions (variation d'une aire de triangle dont un sommet

<sup>8</sup> La situation complète est en annexe.

varie selon deux variables possibles : l'abscisse  $x$  du point variable ou la mesure  $\alpha$  de l'angle opposé du triangle) à l'ensemble des trinômes de son groupe ; après la phase de recherche, c'est l'enseignant qui a effectué la présentation au tableau de la solution attendue. Puis il a répondu aux questions posées par un trinôme d'étudiants tiré au sort, constituant le jury. Il a enfin institutionnalisé les connaissances et les savoirs en jeu dans la situation étudiée : distinction entre fonction de  $x$  ou  $\alpha$  et variation d'aire étudiée, étude des fonctions et représentation graphique, etc.

### **Analyse a priori de la situation suite de carrés**

Cette situation est fondée sur la notion de limite ; il s'agit de différencier la limite d'une suite de carrés, d'une suite de points, d'une aire... et de calculer l'aire totale d'une figure constituée d'une infinité de carrés dont l'aire tend vers zéro. La situation permet de s'appuyer sur le registre graphique ; la raison de la suite des aires de carrés est un rationnel ; les abscisses des points  $(B_i)_{i \geq 1}$  sont à identifier, et à distinguer des points mêmes, et il faut montrer l'alignement des  $(B_i)$ . Ensuite un calcul de somme de série géométrique est à effectuer pour calculer l'aire.

Les étudiants peuvent confondre les points, et leurs coordonnées ; ils peuvent avoir des difficultés à montrer l'alignement demandé, et à calculer aisément la somme de la série. Les savoirs relèvent a priori tous du secondaire, mais l'usage des signes peut être problématique. De même, le choix des raisonnements peut poser problème : les élèves du secondaire ne sont pas habitués à choisir un raisonnement par l'absurde, par récurrence, par contraposée... de leur propre chef.

### **Questions sur les restitutions et rédactions des étudiants**

On focalisera donc l'analyse sur les points suivants :

- L'identification correcte du problème par les étudiants ;
- Leur capacité à poser des conjectures ;
- La capacité à distinguer les termes d'une suite et la limite, une fonction et un ensemble de fonctions ;
- La capacité à mener des calculs puis à en tirer des conclusions ;
- La réponse donnée, ou non, au problème ;
- Comment utilisent-ils des savoirs : lesquels, de façon adéquate, ou non, avec les signes et notations ;
- Réussissent-ils à généraliser un calcul, puis à identifier et utiliser un mode adéquat de validation ? Ceci concerne le niveau d'utilisation des signes atteint par les étudiants, notamment du point de vue de leur capacité à généraliser les calculs et donc à atteindre le niveau des arguments génériques (cf. tableau signes et milieux, Bloch & Gibel 2011).

Du point de vue de l'enseignant, quelle institutionnalisation est pertinente, ainsi :

- Quel problème a-t-on résolu, et quels étaient les objets mathématiques en jeu ?
- Comment fonctionnent les signes utilisés, quelles sont les règles d'écriture ?

## PREMIERS RESULTATS EXPERIMENTAUX : EFFETS DU DISPOSITIF SUR LES REPRESENTATIONS ET LES CONCEPTIONS DES ETUDIANTS

Dans ce paragraphe nous rendons compte de l'évolution de la rédaction de la solution produite par un trinôme d'étudiants issus de section scientifique ; nous examinons la première version rédigée par le trinôme, puis les suivantes, ainsi que les commentaires rédigés par l'enseignant (en police Calibri gras) et, dans la colonne de droite, nos analyses de ces productions.

<p>La suite de carrés représente la suite <math>C_n</math>  Puisque <math>C_1=1=\left(\frac{3}{4}\right)^0</math> ; <math>C_2=\left(\frac{3}{4}\right)^1</math> ; <math>C_3=\left(\frac{3}{4}\right)^2</math> ; <math>C_4=\left(\frac{3}{4}\right)^3</math> et <math>C_5=\left(\frac{3}{4}\right)^4</math>  On a donc <math>C_{n+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^n</math> <b>"Pb <math>C_1</math> est un carré et <math>(3/4)</math> est un nombre ! Ceci n'a pas de sens !"</b>  1) On conjecture que les points <math>(B_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> sont alignés  Pour démontrer cette conjecture nous utiliserons la fonction affine tq <math>f(x)=ax+b</math> dont la droite passe par les points <math>B_n</math>.  On calcule le coefficient directeur  <math>f(1)=1</math> <math>f(1,75)=0,75</math></p> $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,75 - 1}{1,75 - 1} = \frac{-0,25}{0,75} = -\frac{1}{3}$ <p>On résout l'équation <math>f(1)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 1 + b = 1</math>  <math>\Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}</math>  Donc <math>\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}</math>  <b>"Ceci est la droite <math>(B_1B_2)</math> Pourquoi <math>B_n \notin (B_1B_2)</math> si <math>n &gt; 2</math> ? Expliquer !"</b>  2) <math>A_n &gt; 4 \Leftrightarrow x &gt; 4</math>  <math>\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x &lt; -\frac{4}{3}</math>  <math>\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} &lt; -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}</math>  <math>\Leftrightarrow f(x) &lt; 0</math>  A partir de <math>x=4</math>, la fonction <math>f</math> est négative. Donc il ne peut pas exister de carré <math>C_n</math> tel que l'abscisse du sommet <math>A_n &gt; 4</math></p>	<p>Analyses</p> <p>Le professeur relève la confusion entre les points et les abscisses, et la non conclusion pour <math>B_n</math></p> <p>Les étudiants tentent de trouver un critère pour affirmer que <math>A_n</math> a une ordonnée positive</p>
---	--

Dans cet épisode, les étudiants montrent leur difficulté à identifier et transcrire en signes mathématiques le caractère générique de l'alignement, qui doit être valable pour tout  $n$ . Dans la dernière ligne de conclusion, ils semblent se baser sur le registre graphique sans parvenir à traduire dans le registre algébrique afin de produire une preuve recevable. Selon le tableau des signes (Bloch & Gibel 2011), ils restent au niveau des calculs et conjectures ponctuelles, et non au niveau des calculs génériques.

Voici à présent la version 2, rédigée par le trinôme d'étudiants après retour du jury :

1) On conjecture que les points $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont alignés	Version 2
---	-----------

<p>Pour démontrer cette conjecture nous utiliserons la fonction affine tq <math>f(x)=ax+b</math> dont la droite passe par les points <math>B_n</math>.</p> <p>On calcule d'abord le coefficient directeur de <math>(B_1B_2)</math> : <math>B_1(1 ; 1)</math>, <math>B_2(1,75 ; 0,75)</math></p> <p>D'où <math>f(1)=1</math> <math>f(1,75)=0,75</math></p> $a = \frac{y_{B_2} - y_{B_1}}{x_{B_2} - x_{B_1}} = \frac{0,75 - 1}{1,75 - 1} = \frac{-0,25}{0,75} = -\frac{1}{3}$ <p>Puis celui de <math>(B_1B_3)</math> : <math>B_1(1 ; 1)</math> et <math>B_3\left(\frac{37}{16} ; \frac{9}{16}\right)</math></p> <p>D'où <math>f(1)=1</math> <math>f\left(\frac{37}{16}\right) = \frac{9}{16}</math></p> $a = \frac{y_{B_3} - y_{B_1}}{x_{B_3} - x_{B_1}} = \frac{\frac{9}{16} - 1}{\frac{37}{16} - 1} = \frac{-\frac{7}{16}}{\frac{21}{16}} = -\frac{7}{21} = -\frac{1}{3}$ <p><math>(B_1B_2)</math> et <math>(B_1B_3)</math> ont le même coefficient directeur, donc les points sont alignés.</p> <p>On résout l'équation "Pourquoi ??? Expliquer !"</p> $f(1)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 1 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ <p>Donc <math>\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}</math></p>	<p>Les étudiants rencontrent la même difficulté de généralisation à <math>(B)_n, \forall n</math></p>
--	---

Découvrons à présent la troisième et dernière version rédigée par les étudiants en intégrant les remarques faites par l'enseignant :

<p>1) On conjecture que les points <math>(B_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> sont alignés</p> <p>Pour démontrer cette conjecture nous utiliserons la fonction affine tq <math>f(x)=ax+b</math> dont la droite passe par les points <math>B_n</math>.</p> <p>On calcule d'abord le coefficient directeur de <math>(B_1B_2)</math> : <math>B_1(1 ; 1)</math>, <math>B_2(1,75 ; 0,75)</math></p> <p>D'où <math>f(1)=1</math> <math>f(1,75)=0,75</math></p> $a = \frac{y_{B_2} - y_{B_1}}{x_{B_2} - x_{B_1}} = \frac{0,75 - 1}{1,75 - 1} = \frac{-0,25}{0,75} = -\frac{1}{3}$ <p>On effectue maintenant une récurrence pour montrer que peu importe <math>(B_n)</math> <math>a = -\frac{1}{3}</math>, donc ils appartiennent tous à la droite.</p> <p><u>Initialisation</u> : On calcule le coefficient directeur de <math>(B_1B_3)</math> : On a <math>B_1(1 ; 1)</math> et <math>B_3\left(\frac{37}{16} ; \frac{9}{16}\right)</math></p> $a = \frac{y_{B_3} - y_{B_1}}{x_{B_3} - x_{B_1}} = \frac{\frac{9}{16} - 1}{\frac{37}{16} - 1} = \frac{-\frac{7}{16}}{\frac{21}{16}} = -\frac{7}{21} = -\frac{1}{3}$ <p><u>Hérédité</u> : On suppose que <math>(B_n)</math> appartient à la droite. On souhaite démontrer que <math>B_{n+1}</math> aussi. Pour cela on souhaite démontrer que <math>a_{B_nB_1} = -\frac{1}{3}</math></p> <p>Et <math>B_{n+1}(x_{n+1}; y_{n+1})</math> avec <math>x_{n+1} = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}</math> et <math>y_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}</math></p> $A_{B_nB_{n+1}} = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}^{n+1}} = \dots = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$	<p>Version 3</p> <p>Dans cette version, les étudiants mettent en forme une récurrence claire avec ses trois étapes</p>
--	--

<p><u>Conclusion</u> <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math>, on a <math>a = -\frac{1}{3}</math>, donc la droite passe par tous les points <math>(B_n)</math> donc ils sont alignés.</p> <p>2) On cherche si un carré <math>C_n</math> existe pour <math>A_n &gt; 4</math>, on a <math>A(x_n; 0)</math>. Si <math>A_n(4; 0)</math>, <math>B_n(4; y_n)</math>. Pour savoir si un carré <math>C_n</math> existe, nous devons trouver si <math>y_n</math> existe pour <math>x_n &gt; 4</math>.</p> <p><math>x_n</math> correspond à <math>x</math> dans la fonction affine, on a alors <math>f(4) = -\frac{1}{3} \times 4 + \frac{4}{3} = 0</math></p> <p>Donc pour <math>A_n(4; 0)</math> on a <math>B_n(4; 0)</math> soit <math>A_n = B_n</math>.</p> <p>Donc pour <math>A_n &gt; 4</math>, soit <math>a_n &gt; 4</math>, il n'existe pas de carré <math>C_n</math>.</p> <p><b>"Car alors <math>y_n &lt; 0</math> d'après l'équation de droite."</b></p>	<p>Il manquait l'argument principal : <math>y_n</math> doit être strictement positif car l'ordonnée de <math>B_n</math> est une puissance de <math>3/4</math></p>
---	---

## CONCLUSION

Le dispositif expérimenté a confirmé que les étudiants ne sont pas habitués à vérifier si un calcul conduit à un argument recevable puis à une preuve : pour eux, le but serait juste de "faire un calcul". Il a permis une véritable implication des étudiants dans la recherche et la formulation des situations proposées. La problématique a mis en lumière la nature des obstacles des étudiants concernant l'identification des objets mathématiques, et leur formulation par des signes adaptés. On a aussi constaté leur difficulté quant au choix raisonné des procédures de preuve, et leur manque de discernement quant à la forme adéquate du raisonnement adapté au problème posé. Les étapes rédactionnelles prévues dans le dispositif les aident à surmonter ces obstacles et à adopter une posture réflexive quant aux exigences d'une preuve argumentée. L'étude didactique menée montre donc que ce dispositif s'avère complémentaire par rapport au cursus classique de licence, et peut aider les étudiants à comprendre et à réussir ce cursus.

## RÉFÉRENCES

- Bartolini-Bussi, M. (2009). Proof and proving in Primary school: An experimental approach. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* Vol.1, pp.53–58.
- Benitez, N.S., Drouhard, J.P. (2015). Una mirada epistemografica sobre el rol de las dificultades algebraicas ligadas al estudio de funciones en el ingreso a la universidad. *Actas IV Jornadas de Enseñanza e Investigacion Educativa, Universidad Nacional de La Plata*, Buenos Aires. Consulté le 20/11/2015
- Bloch, I. (2016). L'enseignement de l'analyse, de la limite à la dérivée et aux équations différentielles : questions épistémologiques et didactiques. In G. Guedet, Y. Matheron et al., *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*, pp. 67-92., La Pensée Sauvage.
- Bloch, I., Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **31(1)**, 191-227.

Bloch, I., Gibel, P. (2016). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. *Communication to INDRUM*, 43-52 Université de Montpellier, ISSN: 2496-1027.

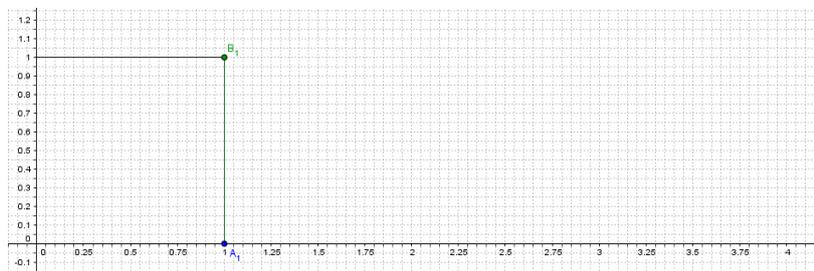
Gibel, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. HDR, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle dans la physique élémentaire, questions didactiques. In IREM de Paris Editeur, *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, pp. 61-87.

Winslow, C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **12**, 189-204.

### Annexe : La situation Suite de carrés

Le côté du premier carré a pour mesure 1. Le côté du deuxième carré mesure  $\frac{3}{4}$  du premier, le côté du carré suivant mesure  $\frac{3}{4}$  du précédent et ainsi de suite (on itère ce procédé de construction).



1. Construire les cinq premiers carrés dans le repère ci-dessous.
2. On note  $B_1, B_2, B_3, \dots$  les sommets « en haut à droite » de chaque carré (la suite  $(B_n)_{n \geq 1}$  est une suite de points). Quelle conjecture peut-on émettre quel que soit  $n$  sur les points  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  ? Justifier ou invalider la conjecture.
3. On note  $A_1, A_2, A_3, \dots$  les sommets « en bas à droite » de chaque carré (la suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite de points).

**Question :** on se demande si, en itérant le processus de construction un nombre  $n$  de fois suffisant, on peut obtenir un  $n$ -ième carré dont l'abscisse du sommet  $A_n$  est strictement supérieure à 4.

4. Déduire de la propriété des sommets  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , la réponse à la question ci-dessus.

5. On note  $a_n$  l'abscisse du point  $A_n$  ; la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite numérique.

$a_1 = 1, a_2 = 1,75$ , etc.  $\forall n \geq 1$ , exprimer  $a_{n+2}$  en fonction de  $a_{n+1}$  et  $a_n$ .

6. En mettant en œuvre un outil numérique, faites une conjecture sur la limite de la suite  $(a_n)$

Soit un nombre  $s \in [1;4[$ . Peut-on déterminer le rang  $n_0$  à partir duquel on ait  $a_n \geq s$  ?

On pose  $s=4-\epsilon$ , avec  $\epsilon=10^{-6}$ . Par la mise en œuvre d'un outil numérique, effectuez une approximation de la valeur du rang  $n_0$  correspondant.

7. Déterminer l'expression algébrique de  $a_n$  en fonction de  $n$ . Démontrer la convergence de la suite  $(a_n)$ .