



**HAL**  
open science

## Suites définies par récurrence dans la transition lycée-université : activité et travail mathématique

Macarena Flores González, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier

### ► To cite this version:

Macarena Flores González, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier. Suites définies par récurrence dans la transition lycée-université : activité et travail mathématique. INDRUM 2020, Université de Carthage, Université de Montpellier, Sep 2020, Cyberspace (virtually from Bizerte), Tunisie. hal-03113856

**HAL Id: hal-03113856**

**<https://hal.science/hal-03113856>**

Submitted on 18 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Suites définies par récurrence dans la transition lycée-université : activité et travail mathématique

Macarena Flores González<sup>1</sup>, Fabrice Vandebrouck<sup>2</sup> et Laurent Vivier<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Université de Paris, France & LDAR  
prof.macarena.flores@gmail.com

*Nous présentons une première étude qui permet de rendre compte des ruptures et des continuités dans la transition lycée-université à partir de l'analyse d'une tâche emblématique de cette transition qui vise à étudier une suite définie par récurrence de la forme  $u_{n+1}=f(u_n)$ . Les outils théoriques utilisés (issus de la théorie des Espaces de Travail Mathématique et de la Théorie de l'Activité) nous permettent de fournir des analyses de la tâche a priori et a posteriori. Nous constatons que les attentes de l'enseignement actuel par rapport à ces suites, se placent sur une analyse algébrisée de la notion. Cela nous amène à proposer des variations dans l'activité et le travail mathématique à atteindre lors de l'étude de ces suites, qui en l'occurrence, pourraient servir à introduire les élèves à l'analyse réelle.*

*Mots clés : Suites récurrentes, transition lycée-université, activité mathématique, travail mathématique, instruments.*

## INTRODUCTION

Nous avons comme objectif d'étudier les ruptures et continuités existantes dans la transition lycée-université dans le domaine de l'analyse, à partir des tâches évaluatives qui se trouvent à la fin des cours de l'enseignement secondaire et au début de l'enseignement universitaire. Ces tâches caractéristiques visent à étudier les suites définies par récurrence de la forme  $u_{n+1}=f(u_n)$  ; nous nous intéressons à ses potentialités notamment dans l'étude de la notion de convergence, et analysons leur place dans l'enseignement actuel. D'autre part, l'objet mathématique de suites que nous avons choisi, nous semble être un objet mathématique pertinent pour étudier le passage du *calculus* à l'analyse, car il permet de travailler dans une analyse algébrisée (comme l'étude de variations de fonctions, applications des théorèmes de convergence de suites, etc.), des notions essentielles du début de l'analyse réelle qui sont encore en construction chez les étudiants (comme la limite, la convergence, les nombres réels, etc.), jusqu'aux problèmes que l'on étudie en analyse réelle comme les systèmes dynamiques discrets. Ainsi, concernant l'épistémologie, le choix des suites définies par récurrence comme objet mathématique d'étude dans l'enseignement actuel n'est pas anodin. En effet, ce type de suites a une place épistémologique importante dans le développement du domaine de l'analyse en mathématiques ; d'ailleurs comme le mathématicien D. Perrin<sup>1</sup> l'affirme, un des intérêts d'étudier ces suites repose sur la recherche des points fixes par itérations, ce qui permet de montrer des résultats d'existence en analyse.

En didactique, la transition lycée-université a fait l'objet de nombreux travaux (pour une synthèse, voir Gueudet, 2008). Certains résultats restent encore d'actualité ; tel est

le cas de la thèse de Praslon (2000) qui construit des tâches pour cette transition, en prenant en compte le contexte éducatif des deux institutions et qui identifie des micro-ruptures dans cette transition par rapport à la notion de dérivée. D'autres travaux sont également à relever : ceux de Robert concernant l'étude de suites avec les représentations que les étudiants expriment sur la convergence (dynamiques et statiques), et son ingénierie didactique pour établir une représentation de la convergence chez les étudiants (ingénierie reprise par Bridoux (2016)).

Concernant les suites qui nous intéressent, on trouve le travail de Boschet (1982) qui fait une étude au niveau de la première année de l'université. Elle constate que les exercices sur les suites  $u_{n+1}=f(u_n)$  sont stéréotypés et utilisent le lexique le plus pauvre en comparaison à d'autres suites. L'auteur remarque que ces suites sont artificiellement conçues pour appliquer certains théorèmes, et que si nous faisons appel aux mêmes connaissances de façon régulière, cela pourrait provoquer une représentation erronée de la convergence.

Plus récemment, Ghedamsi et Fattoum (2018) ont étudié l'évolution des images mentales chez les élèves de 3<sup>ème</sup> année de secondaire, formées en amont et en aval de la définition de convergence de suites numériques. Elles signalent qu'au moment d'étudier la convergence, les techniques des opérations sur les limites finies de suites « *pourraient renforcer les pratiques d'algébrisation dans le travail des élèves, sans qu'aucun apport significatif dans le processus de conceptualisation de la convergence ne puisse être entrepris* » (Ibid., p. 232). Ce renforcement dans l'algébrisation dont parlent Ghedamsi et Fattoum, nous semble important à prendre en compte et à considérer dans l'étude de la convergence de suites. Ainsi, nous nous demandons : quels sont les attendus de l'institution lycée et de l'institution université en ce qui concerne les suites définies par récurrence  $u_{n+1}=f(u_n)$  ? Et comment l'enseignement actuel dans la transition lycée-université se sert de cet objet mathématique pour conduire les élèves d'une analyse algébrisée vers une entrée dans l'analyse réelle ?

## CADRES THEORIQUES

Quand on étudie la transition lycée-université, il s'agit d'un domaine d'étude particulièrement complexe par le nombre de variables à considérer et les problématiques épistémologiques et cognitives, lesquelles supposent des analyses élaborées. Cela nous amène à considérer deux cadres théoriques pour l'analyse de ces deux institutions éducatives et des tâches qu'elles proposent. Nous plaçons au centre de notre étude l'analyse du travail mathématique que chaque institution cherche à développer chez les étudiants, et le travail mathématique que les étudiants développent effectivement. De cette manière, nous utilisons la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2016) qui s'intéresse aux aspects épistémologiques de l'objet mathématique en question (avec l'étude du plan épistémologique en regardant le référentiel théorique, les artefacts mis à disposition et les signes qui interviennent dans le travail de résolution de la tâche) ; mais qui permet aussi de comprendre comment ces composants épistémologiques se mettent en place lorsqu'un sujet les

utilise (avec l'étude du plan cognitif en analysant la preuve et le discours mathématique de l'élève, sa construction et la visualisation mathématique de l'objet). Les relations qui existent entre ces deux plans se décrivent à partir des dimensions *sémiotique*, *instrumentale* et *discursive*, et on identifie les plans verticaux [Sem-Dis], [Ins-Dis] et [Sem-Ins] pour caractériser les tensions et relations entre ces dimensions. D'autre part, nous prenons en compte les différents niveaux d'ETM : ETM de référence (permettant d'analyser le travail mathématique visé par l'institution), ETM idoine (qui est une adaptation de l'ETM de référence mis en place par l'enseignant/professeur) et ETM personnel (qui permet de décrire le travail mathématique développé par le sujet). Dans le cadre de la théorie des ETM, Kuzniak, Tanguay et Elia (2016) signalent que les mathématiques enseignées sont en priorité une activité humaine.

Nous faisons l'étude de l'activité humaine et nous approfondissons des aspects de l'individu dans son contexte et d'autres aspects cognitifs grâce à la Théorie de l'Activité (TA) en didactique des mathématiques. La TA se base sur une idée cognitiviste des processus d'enseignement et d'apprentissage, s'appuyant sur les idées des psychologues comme Leontiev et Vygotsky. En didactique des mathématiques, ces travaux ont été enrichis par des didacticiens (pour une synthèse voir Vandebrouck, 2018) permettant de caractériser l'activité mathématique des élèves (ainsi que l'activité des enseignants à partir d'une double approche ergonomique et didactique). Dans cette étude, on s'intéresse aux outils théoriques de la TA qui vont nous permettre de rendre compte de l'activité attendue par l'institution (en analysant la tâche prescrite) et les traces de l'activité effectuée par les élèves (en analysant la tâche effective). Ainsi, nous analysons l'étude de la tâche en prenant en compte : le contexte dans lequel elles sont proposées, les buts, les connaissances (ses adaptations<sup>2</sup> et le niveau de sa mise en fonctionnement) et les types de sous-activités développées par un sujet en activité (*reconnaissance*, *organisation de raisonnement global* et *Traitement*).

### **Paradigmes de l'analyse**

Dans les travaux qui s'intéressent à l'étude du domaine de l'analyse réelle en didactique, nous relevons la notion de *paradigmes de l'analyse* (Montoya et Vivier, 2016). On dégage trois types de paradigmes : « *AI* » qui permet des interprétations provenant de la géométrie, de l'arithmétique ou du monde réel ; « *AII* » qui permet de faire des calculs avec des règles plus ou moins définies et les appliquer sans avoir un travail de pensée critique par rapport à la nature des objets utilisés ; et « *AIII* » où les propriétés et définitions sont bien établies, où on développe un travail en termes d'approximation et voisinage (un travail avec  $\epsilon$ ), caractérisé par l'implication d'inégalités, de bornes, et du « négligeable ». Ces paradigmes vont nous permettre de différencier et caractériser le type de travail mathématique mis en place.

### **L'articulation entre les deux cadres théoriques**

Nous constatons que les deux théories accordent une importance aux considérations épistémologiques sur les tâches, car la connaissance mathématique joue un rôle indispensable dans l'activité et dans le travail que l'on développe ; ainsi, nous

accordons une place prépondérante à la vigilance épistémologique de notre sujet d'étude. Par ailleurs, grâce à une étude précédente (Flores González, 2019), nous avons pu voir que la notion de tâche est un élément didactique essentiel pour analyser le travail et l'activité mathématique (au sens de chacune des théories). D'une part, nous nous centrons sur la notion de « tâche emblématique », qui sert à identifier l'importance des tâches dans le développement et la description du travail mathématique ; ainsi elles doivent « *bénéficier d'une reconnaissance institutionnelle, être utilisées dans les classes ordinaires et doivent permettre de réaliser, au moins potentiellement, un travail mathématique complet*<sup>3</sup> » (Kuzniak et Nechache, 2016). D'autre part, cette tâche nous sert à caractériser l'ETM attendu à la fin du lycée, et l'ETM attendu en première année d'université pour les suites récurrentes  $u_{n+1}=f(u_n)$ . Enfin, nous cherchons à caractériser la continuité et les ruptures dans l'activité et le travail attendus de l'élève dans la transition lycée-université. En termes théoriques la question qui guidera notre travail sera : Quelles sont les caractéristiques de l'ETM et de l'activité à la fin du lycée et au début de l'université concernant les suites récurrentes  $u_{n+1}=f(u_n)$  ?

## METHODOLOGIE

Nous faisons une étude cognitivo-épistémologique de la tâche emblématique grâce aux deux cadres théoriques choisis avec une analyse a priori et posteriori des tâches prescrites. Pour aborder notre question et ainsi approfondir la reconnaissance de ruptures et continuités de cette transition, notre tâche emblématique est construite à partir des tâches d'évaluation de la fin du lycée de l'enseignement scientifique (le Baccalauréat<sup>4</sup> S) et des évaluations du début de l'université (des examens de la fin du premier semestre) en France. Ainsi, nous avons conçu une tâche pour le cours de la fin du secondaire scientifique (FSS) qui prend en compte le modèle proposé par le Baccalauréat mais aussi le contexte évaluatif en début de l'université (DU) à partir de tâches modèles que nous détaillons ci-dessous.

### **Nos tâches modèles à l'université et à la fin d'études de secondaire**

Notre première tâche modèle (Figure 1) a été extraite d'un examen de DU (de 1<sup>er</sup> année de licence) de l'année 2018. Il s'agit d'une suite de récurrence non linéaire à un terme (homographique). Les connaissances à mettre en place sont principalement du paradigme de l'analyse AII (ou issues d'une analyse réelle algébrisée). De cette tâche nous gardons le choix de la suite pour construire une tâche pour la classe de FSS.

**Exercice 5.** Math/Math-Info/Physique/CPEI/DLPC/STEP  
 Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{2-x}$ .  
 On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les conditions :  $u_0 = \alpha$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$ . Puis que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
3. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
4. Quelle est la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

Figure 1 : Tâche d'examen du DU, 2018.

Notre deuxième tâche modèle est un exercice de Baccalauréat de 2016 (Figure 2). Cette tâche se compose de deux parties : La première partie se réfère à l'étude de la fonction  $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$  en commençant par la résolution de l'équation  $f(x) = x$ , puis l'étude des variations de  $f$  (grâce au tableau de variations déjà complété dans l'énoncé), et l'étude de la stabilité de l'intervalle  $[0, 1]$  par  $f$ . Dans la deuxième partie de l'exercice, on commence à étudier la suite comme le montre la figure 2 (Partie B).

**Partie B**  
 Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n, u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$ .

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n, u_n$  appartient à  $[0, 1]$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
4. On note  $l$  sa limite, et on admet que  $l$  vérifie l'égalité  $l = f(l)$ . En déduire la valeur de  $l$ .

Figure 2 : Exercice 3 Baccalauréat Scientifique Métropole 2016.

Pour adapter la tâche de DU à la classe de FSS, on a adopté la façon dont la tâche est présentée dans le modèle du Baccalauréat, et la suite choisie est celle de la tâche proposée dans l'examen de DU. Pour rester dans le contexte de FSS, on a fait un découpage dans l'étude de la suite, c'est-à-dire que d'abord on étudie la fonction (partie A) et ensuite on fait l'étude de la suite (partie B) (Figure 3). Les changements qui ont été faits se situent principalement au niveau des aides et registres sémiotiques fournis. Par exemple, dans l'énoncé du Baccalauréat la question A.2) fournit le tableau de variations comme aide ; ou encore dans la question B.1) il est écrit « *montrer par récurrence que...* » (ce changement a été fait pour ne pas s'éloigner de la tâche telle qu'elle a été présentée en DU).

**PARTIE A :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$ , par  $f(x) = \frac{1}{2-x}$ .

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R} - \{2\}$  l'équation :  $f(x) = x$ .
- 2) Étudier le sens de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0, 1], f(x)$  appartient à  $[0, 1]$ .

**PARTIE B :** Soit  $\alpha$  un réel appartenant à  $]0, 1[$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \alpha$  et, pour tout entier naturel  $n, u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 1) Montrer que pour tout entier naturel  $n, u_n$  appartient  $[0, 1]$ .
- 2) Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- 3) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.
- 4) On note  $l$  sa limite, et on admet que  $l = f(l)$ . En déduire la valeur de  $l$ .

Figure 3 : Tâche adaptée à la classe FSS.

Comme nous voulons avoir accès aux ETM personnels et aux activités individuelles, nous analysons des productions des élèves dans les deux institutions éducatives. En ce qui concerne la classe de FSS, nous disposons des productions écrites des 10 élèves

qui sont susceptibles de poursuivre des études à l'université (selon l'enseignant). Par rapport aux données de début de l'université, nous disposons de 40 productions d'étudiants de l'examen de DU (Figure 1) proposé en CPEI (cycle de préparatoire aux écoles d'ingénieurs).

### **Analyse a priori des tâches du lycée et de l'université**

Comme exemple, on explique l'analyse a priori fournie avec les deux cadres théoriques choisis de l'énoncé : « *Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$*  » (première partie de l'étude de la suite, nous faisons l'analyse à partir de la stratégie<sup>5</sup> prévue). Il est à remarquer que la façon dont cette tâche a été proposée au lycée et à l'université est différente. Au lycée, la stabilité de l'intervalle par  $f$  a été abordée dans la partie A et l'étude de la bonne définition de la suite est présentée dans la partie B de l'énoncé, tandis qu'à l'université, ces deux études ne sont pas séparées.

De la part de la TA, on différencie le contexte de la tâche des deux institutions en question. Pour le lycée, le raisonnement par récurrence a été étudié au début d'année de la classe FSS, et les exercices des suites récurrentes sont présents dans les manuels. Au début de l'université, la démonstration par récurrence n'a été un objet d'étude ni dans les cours magistraux, ni dans les cours de travaux dirigés (TD). Ensuite, nous identifions comme **but de la tâche** le fait de montrer que tous les termes de la suite sont bien définis. En ce qui concerne les **connaissances** à utiliser, elles sont les mêmes pour les deux institutions : raisonnement et preuve par récurrence. Ainsi les **adaptations de ces connaissances** seraient : la reconnaissance de l'utilisation de la preuve par récurrence, l'introduction des étapes classiques de la preuve par récurrence, et l'utilisation du résultat de la question précédente, notamment pour montrer la stabilité  $[0,1]$  par  $f$ . Le **niveau de mise en fonctionnement** de ces connaissances est *mobilisable*, car on n'indique pas dans l'énoncé d'utiliser le raisonnement par récurrence, mais on dit « montrer que pour tout naturel  $n \dots$  ». Finalement on repère les **sous-activités mathématiques** de *reconnaissance* (du raisonnement par récurrence) et de *traitement* (des données algébriques, leur travail et leurs implications, et les étapes comme traitement de la preuve par récurrence).

De la part de l'ETM personnel, on privilégie la **dimension discursive** en mettant en amont un discours de preuve par récurrence. Cette preuve est ancrée dans le référentiel théorique du sujet et utilise des raisonnements issus de la récursivité et du formalisme liés à ce type de preuve.

À partir de l'analyse a priori de la tâche entière, nous avons pu identifier les continuités et les ruptures dans la transition lycée-université à partir des deux cadres théoriques. Pour les continuités, on garde les connaissances à mettre en place en commun au lycée et à l'université (tel est le cas de la démonstration par récurrence, l'étude de variation de la suite à partir de la méthode  $u_{n+1} - u_n$ , ou encore le théorème de convergence de la limite monotone). Nous repérons que l'ETM personnel attendu présente presque les mêmes types de signes à utiliser (la plupart dans le registre algébrique), et en général, c'est le traitement de ces signes qui va permettre un discours mathématique cohérent,

ainsi que des signes utilisés en tant qu'outils (les artefacts symboliques) qui vont permettre de résoudre la majorité des tâches. Ainsi, on voit que dans les deux institutions on privilégie un travail mathématique dans la dimension discursive. Du côté de la TA, les aspects en commun aux deux institutions sont pour la plupart les buts des tâches qui seraient les mêmes pour l'étude de la suite (à l'exception de la question 3 pour étudier le sens de variation de la suite).

Concernant les ruptures, du côté des ETM, les plans privilégiés vont changer à partir de la stratégie choisie pour répondre aux tâches. D'autre part, étant donné que la tâche est découpée en deux parties au lycée (étude de la fonction puis étude de la suite), la façon dont la tâche est conçue fait produire des circulations entre les différents plans de l'ETM, tandis qu'à l'université on ne prévoit pas des circulations provoquées par l'énoncé, et cela resterait à la charge de l'élève à partir de la stratégie choisie. En termes de TA, cette rupture se traduit à partir des aides données dans les énoncés des tâches, tel est le cas de la dernière question concernant la limite de  $(u_n)$  : On voit qu'au lycée on admet que  $l=f(l)$  et puis l'élève doit « *en déduire* » la valeur de  $l$ , alors qu'à l'université on demande juste la limite de  $(u_n)$ . Ce fait produit une rupture au niveau de sous-activités attendues, car pour le cas du lycée il s'agit d'un *traitement* (qui est simple car les élèves doivent juste résoudre l'équation), et à l'université cela va demander des sous-activités de *reconnaissance* et d'*organisation* (l'étudiant doit reconnaître la méthode qui n'est pas donnée dans l'énoncé, et bien organiser ses connaissances pour justifier sa réponse). En termes généraux pour la TA, les ruptures entre le lycée et l'université se décrivent aussi à partir des différences dans les adaptations des connaissances, car à l'université les étudiants ont plus de choix de méthodes pour les différentes tâches. Finalement, la rupture des contextes des tâches est aussi importante : dans le cas de la classe du DU les étudiants trouvent dans la feuille des cours TD, 3 exercices parmi 25 sur les suites  $u_{n+1}=f(u_n)$ , et le mot récurrence n'est évoqué que pour nommer la suite ; alors qu'au lycée la tâche est présente dans les manuels de la classe de FSS, et la démonstration par récurrence fait un objet d'étude du cours.

### **Éléments de l'analyse a posteriori et premiers résultats**

Dans cette analyse on montrera l'impact des continuités et ruptures dans les productions des étudiants. Concernant les connaissances présentes au lycée et à l'université on voit des changements quantifiables dans la mobilisation de ces connaissances : pour la question 1 liée à la démonstration par récurrence, elle est mobilisée par 50% des élèves au lycée (de 10 élèves au total), tandis qu'à l'université on trouve seulement 22,5 % (même si elle est non formalisée – de 40 élèves au total). Au lycée 80% des étudiants mobilisent le théorème de la limite monotone, alors que le taux est de 37,5% à l'université. Du point de vue des ETM, le plan vertical qui a été privilégié dans le travail mathématique des élèves et des étudiants a été effectivement [Sem-Dis] avec des traitements sémiotiques dans le registre algébrique, et la dimension discursive – cet aspect nous semble important dans les résultats généraux sur la tâche (seulement 3 des 40 étudiants réussissent en DU). Nous y reviendrons dans les conclusions. Du point de vue des ruptures et des aides qui n'ont pas été données, nous



relevons le cas de la question 4, car au lycée cette tâche est réussie par 90% des élèves, alors qu'à l'université seulement 7,5 % des étudiants l'ont réussie. Un des éléments qui peut être le plus lié aux ruptures est le contexte de la tâche, car cela va déterminer les différentes adaptations de connaissances disponibles susceptibles d'être utilisées dans les différentes stratégies adoptées. Mais ce contexte va aussi jouer son rôle lors de l'appel aux connaissances, qui ont peut-être été cataloguées comme acquises (comme le cas de la démonstration par récurrence), ce qui expliquerait le décalage de l'utilisation de cette preuve au lycée et à l'université.

Comme erreur répétitive dans les deux institutions, on trouve dans la question 3 l'application du théorème-en-acte « *si fest croissante, (u<sub>n</sub>) est croissante* » où le domaine de validité est seulement quand  $u_n=f(n)^6$  (ce théorème a été appliqué par un 30% d'élèves au lycée et à l'université). D'autre part, la non maîtrise du registre algébrique dans l'étude des variations de la suite (question 2) produit des blocages dans le travail mathématique des élèves. Il s'avère qu'aucun étudiant de lycée n'a eu une reconnaissance de l'identité remarquable pour déterminer la croissance de la suite, comme l'exemple de la figure 4 (qui, au-delà de son erreur, fait un travail de décomposition intéressant pour analyser le sens de variation de la suite), et qu'à l'université seulement 12,5% l'ont reconnue.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2-u_n} - u_n \\
 &= \frac{1}{2-u_n} - \frac{2u_n - u_n^2}{2-u_n} \\
 &= \frac{-u_n^2 - 2u_n + 1}{2-u_n}
 \end{aligned}$$

$u_n \in [0; 1]$  le sens de variation de la suite ( $u_n$ ) est  
 $2-u_n \geq 1$   
 $-u_n^2 - 2u_n + 1$   
 ~~$\in [0; 1]$~~   
 ~~$\in [0; 1]$~~   
 ~~$\in [0; 1]$~~

Figure 4 : Production à la question 3 d'un élève de lycée (E1 FFS).

Une dernière erreur fréquente est le fait d'établir des égalités entre l'objet suite et l'objet fonction comme  $f(x)=(u_n)$ , ou encore entre  $x$  et  $n$ . À l'université 22,5% des étudiants font cette erreur de façon explicite. On montre la réponse des questions 2, 3 et 4 de l'étudiant E26 (figure 5). D'abord pour le sens de variation de la suite, il détermine sa croissance, mais son tableau de variation montre une confusion dans les objets suite et fonction ; aspect que l'on note aussi dans la question 4 par rapport à l'égalité entre les limites.

<p>2) <math>u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}</math> <del><math>f(x) = \frac{1}{2-x}</math></del></p> <p><math>f'(u_n) = \frac{1-x}{(2-x)^2}</math> avec <math>1-x \geq 0</math>  <math>\Rightarrow x \geq 1</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;"><math>u_n</math></td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;"><math>f'(u_n)</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 2px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;"><math>f(u_n)</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 2px;">↗</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;">la suite <math>u_n</math> est croissante sur <math>[0, 1]</math></p>	$u_n$	0	1	$f'(u_n)$	+		$f(u_n)$	↗		<p>3 et 4) Pour montrer que la suite converge, il faut déterminer la limite de la suite quand <math>n</math> tend vers <math>+\infty</math> <math>\forall n</math></p> <p><del><math>\lim_n f(u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-x} = 0^-</math></del></p> <p><del>donc <math>\lim_n f(u_n) = 0^-</math></del></p> <p><del>la suite <math>u_n</math> converge vers <math>0^-</math>.</del></p>
$u_n$	0	1								
$f'(u_n)$	+									
$f(u_n)$	↗									

Figure 5 : Production d'un étudiant aux questions 2, 3 et 4 à l'université (E26 DU).

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Grâce à cette étude, nous avons pu obtenir quelques éléments de réponses à nos questions et constater certains effets de cette transition. D'une part, les caractéristiques de l'ETM attendu dans l'étude de ces tâches emblématiques se basent principalement dans le plan [Sem-Dis]. La dimension sémiotique implique surtout des traitements de type algébrique (qui parfois bloquent le travail des élèves) et la dimension discursive implique l'utilisation des méthodes et du référentiel théorique en tant qu'outil.

Les résultats dans les productions des étudiants nous permettent de repérer certaines progressions dans les apprentissages, mais aussi des régressions. Ainsi, cette étude nous montre que l'articulation entre les objets « suite » et « fonction » a une faible cohérence lors de l'étude de suites récurrentes  $u_{n+1}=f(u_n)$  ; et telle que la tâche a été conçue, elle n'exploite pas les potentialités d'une étude contrôlée en autonomie des élèves, avec des notions de l'analyse réelle qui puissent tendre vers le paradigme AIII. Nous pensons que nous devrions appuyer l'apprentissage des élèves à l'entrée de l'université à partir d'un soutien dans la réorganisation des connaissances (qui est nécessaire), en s'appuyant sur des connaissances anciennes pour pouvoir ajouter et organiser des nouvelles. Nous faisons l'hypothèse que cela pourrait être rendu possible par un enrichissement de l'activité et du travail mathématique via l'introduction du paradigme AI (pour aller ensuite vers le paradigme AIII) et en mettant l'accent sur la visualisation de la suite. Pour ce faire, nous comptons d'abord promouvoir un travail mathématique dans le plan [Sem-Ins] à partir d'artefacts (comme des calculatrices ou logiciels) pour que les élèves exploitent les capacités technologiques qu'ils ont développées au lycée. Nous espérons ensuite pouvoir analyser leur pertinence pour évaluer la possibilité de *contrôler* l'activité et le travail mathématique dans la transition lycée-université. Finalement, nous pensons que faire une étude plus approfondie de la convergence (des comparaisons de la vitesse de convergence avec d'autres suites par exemple) et de la distinction de la nature entre suites, pourrait aider à réduire les problèmes et erreurs dans cette transition concernant l'étude des suites définies par récurrence.

## NOTES

1. *Sur les suites récurrentes*. Cours préparation au CAPES. <https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/Suites/suites-re%CC%81currentes.pdf>
2. A. Robert (1998) identifie 7 types d'adaptations de connaissances : de reconnaissance (A1) ; d'introduction d'intermédiaires (A2) ; des mélanges de plusieurs cadres ou notions, mises en relation ou interprétation, changements de points de vue (A3) ; d'introduction d'étapes par rapport aux calculs ou raisonnements (A4) ; utilisation des questions précédentes dans un problème (A5) ; l'existence de choix (A6) ; et le manque des connaissances nouvelles (A7).
3. Travail mathématique complet : les plans cognitif et épistémologique des ETM sont en relation et les circulations des plans verticaux rendent compte d'une diversité dans le travail.
4. Le baccalauréat est l'examen qui termine les études secondaires en France.

5. Stratégie prévue : *Initialisation* :  $u_0 \in [0, 1]$ . *Hérédité* : Soit  $m \in \mathbb{N}$ , on suppose  $u_m \in [0, 1]$ . Par résultat de question précédente  $f(u_m) \in [0, 1]$ , donc  $u_{m+1} \in [0, 1]$ . *Conclusion* :  $u_n \in [0, 1]$  pour tout  $n \geq 0$ ).
6. Le théorème valide c'est : « si  $f$  est croissante,  $(u_n)$  est monotone ».
7. Remerciement : Ce travail a été financé principalement grâce à BECAS CHILE - Doctorado en el extranjero convocatoria 2016, ANID (Folio : 72170523).

## REFERENCES

- Bridoux, S. (2016). Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique pour l'enseignant? *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Montpellier, France.
- Boschet, F. (1982). *Cours sur les suites numériques dans le premier cycle de l'enseignement supérieur*. Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université Paris VII.
- Flores González, M. (2019). L'activité et le travail mathématique dans une tâche géométrique. *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique (ETM6)*, 13-18 décembre 2018, Valparaíso, Chile : Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Ghedamsi, I. Fattoum, F. (2018). Etude de l'évolution des images de la convergence de suites lors d'un enseignement ordinaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 38(2), 207-259.
- Guedet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*. 67, 237-254.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling : An introduction. *ZDM - Mathematics Education*, 48(6), 721-737.
- Kuzniak, A. Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines et personnels : existences et usages. In Gómez-Chacon et al. (Eds). *Actes du cinquième symposium ETM5*, 18-22 juillet, Florina, Grèce, 145-155.
- Montoya-Delgadillo, E., Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM, Mathematics Education*, 48(6), 739-754.
- Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Vandebrouck, F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. In : Kaisier G., Forgasz H., Graven M., Kuzniak A., Simmt E., Xu B. (eds) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. (pp 679-698) ICME-13 Monographs. Springer, Cham.