



**HAL**  
open science

# Une approche bifluide statistique de modélisation des écoulements diphasiques à phases compressibles

Jean-Marc Hérard, Yujie Liu

► **To cite this version:**

Jean-Marc Hérard, Yujie Liu. Une approche bifluide statistique de modélisation des écoulements diphasiques à phases compressibles. [Rapport de recherche] Rapport EDF H-I81-2013-01162-FR, EDF Lab Chatou. 2013. hal-03092682

**HAL Id: hal-03092682**

**<https://hal.science/hal-03092682v1>**

Submitted on 17 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## UNE APPROCHE BIFLUIDE STATISTIQUE DE MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES À PHASES COMPRESSIBLES

JEAN-MARC HÉRARD<sup>1</sup> AND YUJIE LIU<sup>2</sup>

**Abstract.** This note provides a statistical approach for the modelling of compressible two-phase flows. We present first the basic formalism in order to obtain the open set of equations. Then we detail how to get closure laws with respect to entropy and jump conditions criteria. Hyperbolicity conditions are discussed, and some remarks pertaining to the positivity of smooth solutions are pointed out. Extensions to the framework of porous media and multiphase flows are also briefly mentioned.

**Résumé.** Cette note propose une approche de modélisation statistique des écoulements diphasiques à phases compressibles. On présente dans un premier temps le formalisme d'obtention du système d'EDP ouvert. On détaille ensuite le processus de dérivation des lois de fermeture au regard des critères de caractérisation entropique et d'existence de relations de saut. Les conditions d'hyperbolicité sont également discutées, et quelques remarques associées au respect de la positivité des solutions régulières sont formulées. Les extensions au cadre poreux et au cadre multiphasique sont également brièvement mentionnées.

### 1. INTRODUCTION ET RAPPELS ÉLÉMENTAIRES

On s'intéresse ici à la modélisation statistique des écoulements diphasiques avec une approche à deux fluides. La démarche globale est assez classique. On propose dans un premier temps un jeu de lois d'évolution phasiques, et dans un second temps on construit des lois de fermeture admissibles au regard de certains critères. Les modèles d'équations aux dérivées partielles (EDP) proposés en fin de première section seront donc des modèles pour lesquels des lois de fermeture devront être fournies, qui relieront les grandeurs principales retenues auparavant. Le principe global d'obtention des équations d'évolution retenu dans la première section est de fait très similaire à celui proposé par Favre dans le cadre de la modélisation des écoulements turbulents monophasiques compressibles. Pour cela on introduira un opérateur de moyenne statistique, et on déduira par prise de moyenne les équations d'évolution des variables principales. Les très fortes non linéarités intervenant au niveau des flux convectifs et diffusifs pour les équations de base instantanées locales vont générer alors un nombre important de flux inconnus, ce qui nécessitera par la suite de proposer des lois de fermeture.

---

<sup>1</sup> EDF, R&D, MFEE, 6 quai Watier, 78400, Chatou, France

<sup>2</sup> EDF, R&D, AMA, 1 avenue du Général de Gaulle, 92150, Clamart, France

Ceci sera réalisé en s'appuyant sur plusieurs principes. Une fois définies les inconnues principales, un procédé classique sera utilisé pour proposer des formes admissibles pour les lois de fermeture en terme d'objectivité, et qui admettent également une caractérisation entropique globale. Cette dernière contrainte permettra de "filtrer" partiellement les lois de fermeture. En outre, certaines relations locales reliant les fonctions d'énergie interne, de pression et de densité, aux inconnues principales seront examinées à ce stade. Enfin, une spécificité importante au cadre diphasique sera liée au fait qu'un ensemble de lois de fermeture sera construit de manière telle que les relations de saut construites sur la base des équations fermées sur les variables principales soient uniques (en un certain sens). On comprend de suite l'importance de ce dernier point, qui fait l'objet de nombreux débats actuellement.

Pour clore ce travail, de nombreux commentaires seront faits, concernant :

- les modèles similaires existant dans la littérature;
- les extensions possibles au cadre multiphasique, ou au cadre des écoulements en milieu poreux;
- les possibilités d'extension permettant de gérer la transition entre différents régimes *a priori*;
- certaines implications numériques afférentes au choix d'une loi de fermeture.

### 1.1. Quelques Rappels

Avant de débiter la construction des modèles, il est indispensable de rappeler certains éléments (le lecteur pourra par exemple relire [27]). Tout d'abord, on supposera que les équations locales instantanées vérifiées au sein de chaque phase  $k = 1, 2$  gèrent l'évolution spatio-temporelle des variables densité  $\rho_k$ , débit  $\rho_k U_k$  et énergie totale  $E_k$ , l'inconnue vectorielle associée étant alors:  $W_k = (\rho_k, \rho_k U_k, E_k)$  pour chaque phase. Ces équations s'écrivent:

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_k) + \partial_x (\rho_k U_k) &= 0 \\ \partial_t (\rho_k U_k) + \partial_x (\rho_k U_k^2) + \partial_x (P_k) &= \partial_x (\Sigma_k(W_k, \partial_x(W_k))) \\ \partial_t (E_k) + \partial_x (U_k(E_k + P_k)) &= \partial_x (\Sigma_k(W_k, \partial_x(W_k))U_k) + \partial_x (g_k^F(W_k, \partial_x(W_k))) \end{aligned} \quad (1)$$

On rappelle que l'énergie totale est reliée à l'énergie interne via la relation:

$$E_k = \rho_k \epsilon_k + \rho_k U_k^2 / 2$$

sachant que l'énergie interne  $\epsilon_k(P_k, \rho_k)$  est fonction des variables thermodynamiques  $P_k, \rho_k$ . Les flux  $\Sigma_k$  et  $g_k^F$  prennent en compte les effets de viscosité et de diffusivité thermique. Classiquement, ces derniers flux suivent une loi de premier gradient.

On peut formellement écrire de manière condensée les équations (1) sous la forme suivante:

$$\partial_t (W_k) + \partial_x (F_k^0(W_k)) = \partial_x (F_k^1(W_k, \partial_x(W_k))) \quad (2)$$

en notant  $F_k^0(W_k)$  le vecteur flux convectif et  $F_k^1(W_k)$  le vecteur flux diffusif. Il est possible d'adjoindre à ce système une caractérisation entropique, en introduisant un couple entropie/flux d'entropie  $\eta_k(W_k), f_{\eta_k}(W_k)$  compatible avec les termes visqueux, qui vérifie l'inégalité:

$$0 \leq \partial_t (\eta_k(W_k)) + \partial_x (f_{\eta_k}(W_k)) \quad (3)$$

Ce point est important, et permet par ailleurs de caractériser les solutions faibles admissibles, lorsque les effets diffusifs sont négligés, dès lors que cette dernière inégalité est conservée. En effet, dans ce cas, les évolutions des solutions  $W_k$  sont régies par le système:

$$\partial_t (W_k) + \partial_x (F_k^0(W_k)) = 0 \quad (4)$$

Des solutions choc peuvent alors apparaître au cours du temps: il faut alors, pour une discontinuité séparant deux états  $l, r$ , et se propageant à vitesse  $\sigma$ , imposer les relations de saut suivantes:

$$-\sigma[W_k]_l^r + [F_k^0(W_k)]_l^r = 0 \quad (5)$$

Même si cela peut paraître inutile, il faut rappeler ici que la formulation des relations de saut ne peut être faite que sur la base des lois de conservation (existence d'une divergence temps-espace) afférentes aux grandeurs physiques pertinentes; dans le cadre Euler, il s'agit des grandeurs densité, débit, énergie totale, soit  $W_k$ .

Enfin, il faut également rappeler que les densités et énergies internes sont physiquement dans  $\mathbf{R}^+$ , et que la loi d'état doit respecter la condition:

$$(\partial_{P_k} (\epsilon_k(P_k, \rho_k)))^{-1} (P_k/\rho_k - \rho_k \partial_{\rho_k} (\epsilon_k(P_k, \rho_k))) > 0 \quad (6)$$

ce qui induit donc certaines contraintes sur la loi d'état. Cette condition (6) garantit notamment que les ondes se propageant dans le milieu isolé en phase  $k$  sont réelles (condition nécessaire pour obtenir l'hyperbolicité).

Dans la suite du document, l'espérance d'une variable aléatoire  $\psi(\xi)$  est notée :

$$\langle \psi(\xi) \rangle = \int_{\omega} \psi(\xi) \mu(\xi) d\xi$$

sachant que :  $\int_{\omega} \mu(\xi) d\xi = 1$ , et que  $0 \leq \mu(\xi)$ .

Cet opérateur est tel que:

$$\langle a\psi \rangle = a \langle \psi \rangle$$

si  $a$  est indépendant de  $\xi$ , et vérifie trivialement pour tout couple de variables  $(\alpha, \beta)$  l'identité:

$$\langle \alpha + \beta \rangle = \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle$$

En outre, il commute avec les opérateurs de dérivée spatiale et temporelle:

$$\langle \partial_z (\psi(\cdot; \xi)) \rangle = \partial_z (\langle \psi(\cdot; \xi) \rangle)$$

pour:  $z = t, x$ , et pour toute fonction  $\psi(\cdot; \xi)$ .

Pour décrire le "mélange" des deux phases, on introduit classiquement la fonction caractéristique de présence de phase  $\chi_k(x, t; \xi)$ , valant 1 au point  $x$  à l'instant  $t$  si la phase  $k$  est présente pour une réalisation  $\xi$ , et 0 sinon. Ces deux fonctions sont telles que :  $0 \leq \chi_k(x, t; \xi)$ , et:

$$\chi_1(x, t; \xi) + \chi_2(x, t; \xi) = 1. \quad (7)$$

On en déduit de suite que:

$$\langle \chi_1(x, t; \xi) \rangle = 1 - \langle \chi_2(x, t; \xi) \rangle, \quad (8)$$

et:

$$\partial_z (\langle \chi_1(x, t; \xi) \rangle) = -\partial_z (\langle \chi_2(x, t; \xi) \rangle), \quad (9)$$

mais également :

$$0 \leq \langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle,$$

et ainsi:

$$0 \leq \langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle \leq 1, \quad (10)$$

mais aussi :

$$0 \leq \langle \chi_k(x, t; \xi) \psi(\cdot; \xi) \rangle \leq \langle \psi(\cdot; \xi) \rangle,$$

dès lors que la fonction  $\psi(\cdot; \xi)$  est à valeurs positives sur le support d'intégration  $\omega$ . Compte tenu des contraintes locales instantanées (8) et (9), on ne considèrera plus loin qu'une variable de description moyenne de la présence de phase.

L'évolution spatio-temporelle de  $\chi_k(x, t; \xi)$  est donnée par l'équation ([10]):

$$\partial_t (\chi_k(x, t; \xi)) + V_\sigma(x, t; \xi) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) = 0, \quad (11)$$

où la vitesse  $V_\sigma(x, t; \xi)$  est communément (et assez improprement) appelée vitesse de déplacement de l'interface. Pour toute réalisation, cette vitesse est clairement indéterminée. On reviendra sur ce point par la suite. Il faut remarquer que cette équation (11) est consistante avec la contrainte (7).

Munis de ces éléments, nous pouvons écrire formellement les équations d'évolution des moments d'ordre un.

## 2. LOIS D'ÉVOLUTION PHASIQUES

Pour simplifier la présentation, nous considérons dans un premier temps le cadre non visqueux. Nous décrivons tout d'abord l'évolution de la variable  $\langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle$ , en s'appuyant sur la contrainte (11). Puis nous considérons l'espérance des équations (4), en précisant ensuite l'expression des flux, et en détaillant la contrainte en moyenne sur les lois d'état thermodynamique.

### 2.1. Equation topologique

Partant de (11), on obtient immédiatement :

$$\langle \partial_t (\chi_k(x, t; \xi)) + V_\sigma(x, t; \xi) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \rangle = 0, \quad (12)$$

et donc:

$$\partial_t (\langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle) + \langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle \partial_x (\langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle) = \phi_k(x, t), \quad (13)$$

où  $\phi_k$  désigne la quantité:

$$\phi_k(x, t) = \langle (\langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle - V_\sigma(x, t; \xi)) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \rangle. \quad (14)$$

On note de manière évidente, compte tenu de (9), que:

$$\phi_1 + \phi_2 = 0 \quad (15)$$

ce qui, d'ailleurs, garantit la compatibilité avec la contrainte (10). Il est aussi essentiel à ce stade de remarquer que, dans un cadre potentiellement multiphasique, soit pour  $2 \leq N$  phases, la vitesse  $V_\sigma(x, t; \xi)$  est unique. Il faut également noter que, si  $\langle \chi_1(x, t; \xi) \rangle$  désigne une variable principale, il faudra proposer deux lois de fermeture pour les termes  $\langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle$  et  $\phi_1$ .

### 2.2. Définition des variables pondérées et choix des variables principales

On introduit les variables pondérées phasiques et massiques comme suit:

$$\tilde{a}_k(x, t) = \langle \chi_k(x, t; \xi) a_k(x, t; \xi) \rangle / \langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle$$

et:

$$\tilde{\tilde{a}}_k(x, t) = \langle \chi_k(x, t; \xi) \rho_k(x, t; \xi) a_k(x, t; \xi) \rangle / \langle \chi_k(x, t; \xi) \rho_k(x, t; \xi) \rangle$$

la seconde s'apparentant aux moyennes pondérées au sens de Favre, qui ont été introduites dans le cadre monophasique compressible turbulent en 1965 ([12, 13]), et la première étant analogue à la moyenne de Reynolds en situation monophasique (formellement, en substituant  $\chi_k = 1$ ). On déduit simplement, en notant :

$$a''_k(x, t; \xi) = a_k(x, t; \xi) - \tilde{\tilde{a}}_k(x, t)$$

que:

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) \rho_k(x, t; \xi) a''_k(x, t; \xi) \rangle = 0$$

De même, on aura :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) b'_k(x, t; \xi) \rangle = 0$$

si  $b'_k(x, t; \xi) = b_k(x, t; \xi) - \tilde{b}_k(x, t)$ .

On considérera par la suite que les huit variables principales s'identifient à  $\alpha_k(x, t) = \langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle$ ,  $\tilde{\rho}_k(x, t)$ ,  $\tilde{U}_k(x, t)$  et  $\tilde{P}_k(x, t)$  (respectivement taux de présence, densité, vitesse et pression moyenne statistique de phase  $k$  au point  $(x, t)$ ).

### 2.3. Moyenne statistique des équations d'évolution

Considérant les équations d'évolution (4) et (11), un calcul simple conduit à:

$$\partial_t (\chi_k(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi)) + \frac{\partial_x (\chi_k(x, t; \xi) F_k^0(W_k(x, t; \xi)))}{(F_k^0(W_k(x, t; \xi)) - V_\sigma(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi))} = \dots \quad (16)$$

pour des solutions suffisamment régulières, et dès lors à:

$$\partial_t (\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi) \rangle) + \frac{\partial_x (\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^0(W_k(x, t; \xi)) \rangle)}{\langle (F_k^0(W_k(x, t; \xi)) - V_\sigma(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi)) \rangle} = \dots \quad (17)$$

On pourra par exemple, pour une telle approche, se référer aux articles [5, 10, 41]. On notera également par la suite:

$$J_k(x, t) = \langle (F_k^0(W_k(x, t; \xi)) - V_\sigma(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi)) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \rangle \quad (18)$$

sachant que la somme des deux contributions n'est pas nulle puisque:

$$(J_1 + J_2)(x, t) = \langle (F_1^0(W_1) - F_2^0(W_2))(x, t; \xi) - V_\sigma(x, t; \xi)(W_1 - W_2)(x, t; \xi) \rangle \partial_x (\chi_1(x, t; \xi)) \quad (19)$$

Il faut donc exprimer les flux en temps et en espace en fonction des variables principales, en spécifiant les contributions devant faire l'objet de modélisations, puis proposer des lois de fermeture pour les contributions  $J_k$ . Ce dernier point sera abordé dans une section ultérieure.

En ce qui concerne les flux temporels, et si  $W_k^l$  désignent (pour  $l = 1, 2, 3$ ) les trois composantes de  $W_k$ , il est clair que:

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^1(x, t; \xi) \rangle = \alpha_k(x, t) \tilde{\rho}_k(x, t) \quad (20)$$

et:

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^2(x, t; \xi) \rangle = \langle \chi_k(x, t; \xi) \rho_k(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) = \alpha_k(x, t) \tilde{\rho}_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) \quad (21)$$

L'expression suivante est sensiblement plus complexe, ce qui est attendu car elle est associée au plus haut niveau de non linéarité par rapport aux variables de description locale instantanée. On établit simplement que :

$$\begin{aligned} \langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^3(x, t; \xi) \rangle &= \langle (\chi_k E_k)(x, t; \xi) \rangle = \langle \chi_k (\rho_k \epsilon_k + \rho_k U_k^2/2)(x, t; \xi) \rangle \\ &= \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k)(x, t; \xi) \rangle + \langle \alpha_k(x, t) \tilde{\rho}_k(x, t) \tilde{U}_k^2(x, t) + (\chi_k \rho_k u_k^2)(x, t; \xi) \rangle / 2 \end{aligned} \quad (22)$$

Tout comme dans le cadre monophasique turbulent, la structure de la fonction  $\rho_k \epsilon_k$  est essentielle. Il faut noter en particulier que l'on peut toujours décomposer cette fonction comme suit:

$$(\rho_k \epsilon_k)(P_k, \rho_k) = a_k^0 P_k + b_k^0 \rho_k + c_k^0 + (\rho_k \epsilon_k)^\delta (P_k, \rho_k)$$

avec un triplet constant  $(a_k^0, b_k^0, c_k^0)$  choisi tel que  $(\rho_k \epsilon_k)^\delta$  soit minimal, ce qui implique:

$$\langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k)(x, t; \xi) \rangle = (a_k^0 \alpha_k \tilde{P}_k + b_k^0 \alpha_k \tilde{\rho}_k + c_k^0 \alpha_k)(x, t) + \langle \chi_k (\rho_k \epsilon_k)^\delta \rangle (x, t)$$

En pratique, si l'on considère une loi de "stiffened gas", on aura simplement:

$$a_k^0 = 1/(\gamma_k - 1) \quad ; \quad b_k^0 = 0 \quad ; \quad c_k^0 = \gamma_k P_k^\infty / (\gamma_k - 1)$$

et  $(\rho_k \epsilon_k)^\delta = 0$ .

Il faut impérativement garder à l'esprit le fait que la fonction  $\langle \chi_k (\rho_k \epsilon_k)^\delta \rangle$  devra être exprimée en fonction des seules grandeurs principales  $\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k, \alpha_k$ , et qu'elle devra être de telle sorte que la contrainte de positivité :

$$0 \leq \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k) \rangle^{Modele} (x, t)$$

soit vérifiée sur l'ensemble des états admissibles. En outre, certaines conditions de type (6) concernant les dérivées partielles de la fonction résultante pourront émerger ultérieurement. Notons qu'au troisième terme dans le second membre de l'équation (22) correspond l'intensité d'énergie cinétique turbulente, dans le cadre des modèles de turbulence monophasique compressible (ou incompressible).

Considérons ensuite les flux en espace dans l'équation (17). On notera tout d'abord, si  $F_k^{0,i}$  désigne la  $i$ -ème composante du flux non diffusif  $F_k^0$ , que:

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,1}(W_k(x, t; \xi)) \rangle = \langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^2(x, t; \xi) \rangle = \alpha_k(x, t) \tilde{\rho}_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) \quad (23)$$

Ce regroupement au sens de Favre est essentiel, car c'est lui qui garantit aux *solutions*  $\alpha_k \tilde{\rho}_k$  de rester positives -en utilisant le lemme classique rappelé dans [16]-. En outre, un calcul simple donne:

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,2}(W_k(x, t; \xi)) \rangle = (\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2)(x, t) + (\alpha_k \tilde{P}_k)(x, t) + \langle (\chi_k \rho_k u_k^2) \rangle (x, t; \xi) \quad (24)$$

Le dernier terme au second membre ne doit pas être confondu avec celui afférent à la variable d'énergie totale. Il s'agit ici d'un tenseur du second ordre semi-défini positif, dont l'analogue serait le tenseur de Reynolds en configuration monophasique. La confusion d'écriture tient ici au fait que l'espace considéré est de dimension un. L'expression du dernier flux en espace est la suivante:

$$\begin{aligned} \langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle &= \langle \chi_k(x, t; \xi) U_k(x, t; \xi) (E_k + P_k)(x, t; \xi) \rangle \\ &= \langle (\chi_k U_k \rho_k \epsilon_k)(x, t; \xi) \rangle && (RHS1) \\ &+ \langle (\chi_k U_k P_k)(x, t; \xi) \rangle && (RHS2) \\ &+ \langle (\chi_k \rho_k U_k^3)(x, t; \xi) / 2 \rangle && (RHS3) \end{aligned} \quad (25)$$

En introduisant les décompositions suivantes :

$$\phi(x, t; \xi) = \tilde{\phi}(x, t) + \phi''(x, t; \xi)$$

et:

$$\psi(x, t; \xi) = \tilde{\psi}(x, t) + \psi'(x, t; \xi)$$

dans les trois contributions figurant dans le second membre de (25), il vient de suite:

$$RHS1 = \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) + \langle (\chi_k \rho_k u_k'' \epsilon_k')(x, t; \xi) \rangle \quad (26)$$

sachant que :  $\langle (\chi_k \rho_k u_k'')(x, t; \xi) \rangle = 0$ , d'une part, mais aussi:

$$\begin{aligned} RHS2 &= \langle (\chi_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \tilde{P}_k(x, t) \\ &+ \langle (\chi_k u_k'')(x, t; \xi) \rangle \tilde{P}_k(x, t) \\ &+ \langle (\chi_k u_k'' p_k')(x, t; \xi) \rangle \\ &+ \langle (\chi_k p_k')(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \end{aligned} \quad (27)$$

et:

$$\begin{aligned} RHS3 &= 1/2 \langle (\chi_k \rho_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k^3(x, t) \\ &+ 3/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k'')(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k^2(x, t) \\ &+ 3/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k''^2)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \\ &+ 1/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k''^3)(x, t; \xi) \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

Sachant en outre que :  $\langle (\chi_k p_k')(x, t; \xi) \rangle = 0$ , on déduit finalement, après simplifications et regroupement des contributions thermodynamiques, l'expression du troisième flux en espace, qui est:

$$\begin{aligned} \langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle &= \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \\ &+ \alpha_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) \tilde{P}_k(x, t) \\ &+ 1/2 (\alpha_k \tilde{\rho}_k)(x, t) \tilde{U}_k^3(x, t) \\ &+ 3/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k''^2)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \quad (RHS4) \\ &+ \langle (\chi_k u_k'')(x, t; \xi) \rangle \tilde{P}_k(x, t) \quad (RHS5) \\ &+ \langle (\chi_k u_k'' (\rho_k \epsilon_k' + p_k'))(x, t; \xi) \rangle \quad (RHS6) \\ &+ 1/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k''^3)(x, t; \xi) \rangle \quad (RHS7) \end{aligned} \quad (29)$$

Les deux dernières contributions (RHS6) et (RHS7) ne sont pas spécifiques au cadre diphasique, puisque leur trace est non nulle (corrélations d'ordre 3 et de flux turbulent enthalpique) dans le cadre monophasique compressible (ou même incompressible). L'analogue de (RHS5) dans le cadre monophasique est par contre nul lorsque le fluide est incompressible. Dans le cadre monophasique compressible, on sait en particulier que la prise en compte du flux de masse turbulent  $\langle u_k'' \rangle$  est très sensible, et que peu de modèles proposés dans la littérature sont admissibles sur le plan thermodynamique, hormis le modèle de Ristorcelli (cf. [2, 6]), celui-ci alimentant la fonction de dissipation d'entropie globale du système fermé. Enfin, il faut signaler que le terme (RHS4) correspond à la prise en compte des fluctuations turbulentes, la corrélation  $\langle (\chi_k \rho_k u_k''^2)(x, t; \xi) \rangle$  étant déjà explicitement présente dans l'expression de  $\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^3(x, t; \xi) \rangle$  dans (22).

A ce stade, le modèle ouvert est constitué du système d'équations aux dérivées partielles (17), les flux en espace et en temps étant donnés par (20),(21),(22),(23),(24),(25), et de l'équation gouvernant les évolutions du taux de présence statistique (13).

## 2.4. Conditions de positivité

Les conditions de positivité concernent simplement les taux de présence, les densités, les énergies internes et un tenseur de corrélations. On attend donc que le modèle fermé soit en mesure d'assurer, au moins pour les solutions régulières, que les solutions soient telles que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_k(\mathbf{x}, t) \\ 0 &\leq \tilde{\rho}_k(\mathbf{x}, t) \\ 0 &\leq \langle \chi_k \rho_k \epsilon_k \rangle (\mathbf{x}, t) \end{aligned} \tag{30}$$

Enfin, le tenseur des corrélations devra être tel que:

$$0 \leq \sum_{i,j} Z_i \langle \chi_k \rho_k (u_k)_i (u_k)_j \rangle (\mathbf{x}, t) Z_j \quad i=1,d; j=1,d$$

pour tout  $Z \in R^d$ ,  $d$  désignant la dimension de l'espace considéré, et ce quel que soit le point de référence  $(\mathbf{x}, t)$ . En reprenant la terminologie propre au cadre monophasique, ceci correspond au principe de réalisabilité faible ([31, 32, 46, 50, 53]).

A ce stade, il importe de noter que la structure advective des équations d'évolution de  $\alpha_k(x, t)$  et de  $\tilde{\rho}_k(x, t)$  garantit, pour des solutions assez régulières (au moins  $C^1$ ), et sous réserve de satisfaire des conditions aux limites naturelles, que les deux premières contraintes seront satisfaites. On rappelle que ce résultat découle de l'utilisation d'un lemme classique, rappelé dans [16]. La difficulté essentielle concerne en fait la dernière condition dans (30) portant sur l'énergie interne moyenne phasique pondérée.

### 3. LOIS DE FERMETURE

#### 3.1. Loi d'état moyenne et tenseur des corrélations

Si l'on observe la loi de fermeture associée à  $\langle \chi_k \rho_k \epsilon_k \rangle$ , et la contrainte associée, il faut noter que les lois phasiques de type "stiffened gas", assez bien adaptées au liquide, ont un statut particulier. En effet, si la loi phasique:

$$(\rho_k \epsilon_k)(P_k, \rho_k) = (P_k + \gamma_k P_k^\infty) / (\gamma_k - 1)$$

est retenue (on rappelle que:  $\gamma_k > 1$ , et que  $0 \leq P_k^\infty$ ), alors il vient :

$$\langle \chi_k(\rho_k \epsilon_k)(P_k, \rho_k) \rangle = \alpha_k(\tilde{P}_k + \gamma_k P_k^\infty) / (\gamma_k - 1)$$

Dans ce cas, il n'existe aucun problème de fermeture adhérent à la thermodynamique moyennée. Qui plus est, on peut raisonnablement s'attendre à ce que la contrainte de positivité associée soit préservée. En effet, au niveau local instantané phasique, la loi d'évolution de pression  $P_k$  est simplement, dans le cadre convectif pur:

$$\partial_t (P_k) + U_k \partial_x (P_k) + \gamma_k (P_k + P_k^\infty) \partial_x (U_k) = 0$$

ou encore, après translation, et pour toute réalisation:

$$\partial_t (P_k + P_k^\infty) + U_k \partial_x (P_k + P_k^\infty) + \gamma_k (P_k + P_k^\infty) \partial_x (U_k) = 0$$

Sous des hypothèses classiques, associées aux conditions initiales et aux limites, et en postulant que  $U_k$  et  $\partial_x (U_k)$  restent bornés sur  $\Omega \times [0, T]$ , cette structure garantit que la solution vérifie  $0 \leq P_k(x, t; \xi) + P_k^\infty$ , et ainsi statistiquement:

$$0 \leq \langle \chi_k (P_k + P_k^\infty) \rangle = \alpha_k (\tilde{P}_k + P_k^\infty)$$

en tout point  $(x, t)$ , soit donc, en définitive, après minoration :

$$0 \leq \alpha_k P_k^\infty \leq \langle \chi_k(\rho_k \epsilon_k)(P_k, \rho_k) \rangle$$

qui est la condition escomptée. Il faudra par contre s'assurer que ce résultat reste valable, en considérant  $\tilde{P}_k$  comme *solution* du système fermé d'EDP, et non plus comme une variable soumise à une contrainte *a priori*.

En ce qui concerne le tenseur de corrélations  $\langle \chi_k \rho_k (u_k'' )_i (u_k'' )_j \rangle$ , plusieurs possibilités classiques existent, rappelées brièvement ci-dessous.

La première consiste à proposer une loi de fermeture locale instantanée, s'inspirant des lois de premier gradient, et donc à poser:

$$\langle \chi_k \rho_k (u_k'' )_i (u_k'' )_j \rangle = \alpha_k \tilde{\rho}_k (\mathcal{P}_N(\mathbf{S}_k))_{ij} \quad (31)$$

où  $\mathbf{S}_k$  désigne le tenseur de déformation au sein de la phase  $k$ , et  $\mathcal{P}_N$  est un polynôme de degré  $N < d$  à valeurs positives. On retrouve bien entendu ici l'esprit des modèles de turbulence classiques

à une ou deux équations de transport, en se souvenant toutefois que ceux-ci n'imposent pas la contrainte de positivité sur  $\mathcal{P}_N$ , et sont donc non réalisables. La formulation (31) implique clairement l'alignement des axes propres de  $\langle \chi_k \rho_k (u_k'' )_i (u_k'' )_j \rangle$  et de  $\mathbf{S}_k$ .

Une seconde possibilité de modélisation est de prescrire une équation d'évolution pour le tenseur des corrélations. Une difficulté classique afférente est due au fait que le respect des conditions de réalisabilité devient alors assez technique ([2, 31, 32]).

**Remarque importante:**

*Nous considérons par la suite le modèle particulier consistant à négliger  $\langle (\chi_k \rho_k (u_k'' )_i (u_k'' )_j)(x, t; \xi) \rangle$ , mais aussi les contributions  $\langle (\chi_k \rho_k u_k'' )^3(x, t; \xi) \rangle$ ,  $\langle (\chi_k u_k'' )(x, t; \xi) \rangle$  et  $\langle (\chi_k u_k'' )(\rho_k \epsilon'_k + p'_k)(x, t; \xi) \rangle$ . Nous supposons en outre que la corrélation  $\langle (\chi_k (\rho_k \epsilon_k)(P_k, \rho_k))(x, t; \xi) \rangle$  peut s'écrire en fonction des seules variables principales  $\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k, \alpha_k$ .*

Ainsi, le système global s'écrit donc sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_k) + \langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle \cdot \partial_x (\alpha_k) &= \phi_k(x, t) \\ \partial_t (Z_k) + \partial_x (\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^0(W_k(x, t; \xi)) \rangle (Y_k)) &= J_k(x, t) \end{aligned} \quad (32)$$

sachant que  $Y_k = (\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{U}_k, \tilde{P}_k)$ , et que:  $Z_k = (\alpha_k \tilde{\rho}_k, \alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k, Z_k^E)$ , avec:

$$Z_k^E = \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k) \rangle (\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k, \alpha_k) + \alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2 / 2$$

et même, plus précisément, en tenant compte des approximations précédentes:

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_k) + \langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle \cdot \partial_x (\alpha_k) &= \phi_k(x, t) \\ \partial_t (\alpha_k \tilde{\rho}_k) + \partial_x (\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k) &= J_k^M(x, t) \\ \partial_t (\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k) + \partial_x (\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2 + \alpha_k \tilde{P}_k) &= J_k^Q(x, t) \\ \partial_t (Z_k^E) + \partial_x (\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle (Y_k)) &= J_k^E(x, t) \end{aligned} \quad (33)$$

Il faut se souvenir à ce stade de la contrainte (15), et du fait que:

$$\begin{aligned} \langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle &= \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \\ &+ \alpha_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) \tilde{P}_k(x, t) \\ &+ 1/2 (\alpha_k \tilde{\rho}_k)(x, t) \tilde{U}_k^3(x, t) \end{aligned} \quad (34)$$

compte tenu des approximations retenues. En introduisant la notation de moyenne phasique pondérée définie en section 2.2, ce dernier terme peut encore s'écrire:

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle = \alpha_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) (\widetilde{\rho_k \epsilon_k}(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) + \tilde{P}_k + 1/2 \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2)(x, t) \quad (35)$$

Tous les termes figurant en rouge dans les équations (33) doivent clairement faire l'objet d'une modélisation. On se restreindra dorénavant à la modélisation des termes de transfert interfacial de

masse, de dynamique et d'énergie,  $J_k^{M,i}(x, t)$ ,  $J_k^{Q,i}(x, t)$ ,  $J_k^{E,i}(x, t)$ , qui par définition seront tels que:

$$\begin{aligned}\Sigma_k J_k^{M,i}(x, t) &= 0 \\ \Sigma_k J_k^{Q,i}(x, t) &= 0 \\ \Sigma_k J_k^{E,i}(x, t) &= 0\end{aligned}\tag{36}$$

Si l'on examine le terme  $J_k$ , on note que celui-ci s'écrit explicitement sous la forme:

$$J_k(x, t) = \langle (F_k^0(W_k(x, t; \xi)) - V_\sigma(x, t; \xi)W_k(x, t; \xi))\partial_x(\chi_k(x, t; \xi)) \rangle$$

En considérant que la vitesse instantanée  $V_\sigma$  est une combinaison convexe des vitesses de phase  $U_1$  et  $U_2$ , soit:

$$V_\sigma = \beta U_1 + (1 - \beta)U_2$$

avec  $\beta \in [0, 1]$ , et en décomposant les pressions et vitesses comme suit:

$$P_1 = \pi + (1 - \gamma)(P_1 - P_2), \quad P_2 = \pi - \gamma(P_1 - P_2)$$

$$U_1 = V + (1 - \delta)(U_1 - U_2), \quad U_2 = V - \delta(U_1 - U_2)$$

avec:

$$\pi = \gamma P_1 + (1 - \gamma)P_2$$

$$V = \delta U_1 + (1 - \delta)U_2$$

et  $(\gamma, \delta)$  dans  $[0, 1]^2$ , on note alors que :

$$J_k(x, t) = \langle (U_k - V_\sigma)(\rho_k, \rho_k U_k, E_k)^t \partial_x(\chi_k) \rangle + \langle (0, P_k, P_k U_k)(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle\tag{37}$$

peut aussi s'écrire:

$$\begin{aligned}J_k(x, t) &= \langle (U_k - V_\sigma)(\rho_k, \rho_k U_k, E_k)^t \partial_x(\chi_k) \rangle \\ &+ \langle (0, (P_k - \langle \pi \rangle), (P_k U_k - \langle \pi V \rangle))(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle \\ &+ \langle (0, \langle \pi \rangle, \langle \pi V \rangle)(x, t) \partial_x(\alpha_k) \rangle\end{aligned}\tag{38}$$

On aura ainsi, en notant:  $p^* = \pi - \langle \pi \rangle$ , et:  $(pv)^* = \pi V - \langle \pi V \rangle$ :

$$\langle (P_k - \langle \pi \rangle)(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle = \langle a_k(P_1 - P_2) + p^*(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle$$

avec  $a_1 = 1 - \gamma$ ,  $a_2 = -\gamma$ . De même, on aura:

$$\begin{aligned}\langle (P_k U_k - \langle \pi V \rangle)(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle &= \langle (b_k V(P_1 - P_2) + c_k \pi(U_1 - U_2))(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle \\ &+ \langle (d_k(U_1 - U_2)(P_1 - P_2) + (pv)^*)(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle\end{aligned}\tag{39}$$

avec  $|b_k| < 1$ ,  $|c_k| < 1$  et  $|d_k| < 1$ . On aura en outre:  $\|U_k - V_\sigma\| < \|U_1 - U_2\|$ .

Ainsi, si l'on suppose que les vitesses relatives et les écarts de pression restent d'amplitude faible, il sera alors naturel de postuler que  $J_k^i(x, t)$  contient deux contributions, soit:

**Hypothèse fermeture 1:**

$$\begin{aligned}
J_k^{M,i} &= J_k^{M,i,0}(W) \\
J_k^{Q,i} &= J_k^{Q,i,0}(W) + \Pi(W)\partial_x(\alpha_k) \\
J_k^{E,i} &= J_k^{E,i,0}(W) + \Pi(W)V(W)\partial_x(\alpha_k)
\end{aligned} \tag{40}$$

sachant que  $W = (\alpha_1, Z_1, Z_2)$ , et en notant que  $\Pi(W)$  et  $V(W)$ , qui ont respectivement la dimension d'une pression et d'une vitesse, doivent faire l'objet d'une modélisation. Les premiers termes au second membre de (40) sont associés aux deux premières contributions afférentes à (38), tandis que les termes proportionnels à  $\partial_x(\alpha_k)$  modélisent la troisième contribution dans (38). Il est clair dans ce cas que (36) sera vérifié si et seulement si:

**Hypothèse fermeture 2:**

$$\begin{aligned}
\Sigma_k J_k^{M,i,0}(W) &= 0 \\
\Sigma_k J_k^{Q,i,0}(W) &= 0 \\
\Sigma_k J_k^{E,i,0}(W) &= 0
\end{aligned} \tag{41}$$

Nous postulerons également que le terme  $\phi_1 = 1 - \phi_2$  pourra s'écrire sous la forme:

**Hypothèse fermeture 3:**

$$\phi_1 = \phi_1^0(W) + u(W)\partial_x(\alpha_k) \tag{42}$$

le terme  $u(W)$  pouvant être éliminé en l'intégrant au premier membre, soit en écrivant:

$$\partial_t(\alpha_1) + \langle V'_\sigma \rangle(W)\partial_x(\alpha_1) = \phi_1^0(W)$$

avec  $\langle V'_\sigma \rangle(W) = \langle V_\sigma \rangle - u(W)$ . Il s'agit donc désormais de proposer des formes admissibles pour les différents termes,  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$ ,  $\phi_1^0(W)$ ,  $J_1^{M,i,0}(W)$ ,  $J_1^{Q,i,0}(W)$ ,  $J_1^{E,i,0}(W)$ , mais également  $\Pi(W)$  et  $V(W)$ , au regard de critères physiques pertinents.

Ce point fera l'objet des trois sections suivantes, le système s'écrivant désormais:

$$\begin{aligned}
\partial_t(\alpha_1) + \langle V'_\sigma \rangle(W)\partial_x(\alpha_1) &= \phi_1^0(W) \\
\partial_t(\alpha_k \tilde{\rho}_k) + \partial_x(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k) &= (-1)^{k+1} J_1^{M,i,0}(W) \\
\partial_t(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k) + \partial_x(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2 + \alpha_k \tilde{P}_k) - \Pi(W)\partial_x(\alpha_k) &= (-1)^{k+1} J_1^{Q,i,0}(W) \\
\partial_t(Z_k^E) + \partial_x(\alpha_k \tilde{U}_k(\rho_k \tilde{\epsilon}_k(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) + \tilde{P}_k + 1/2 \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2)) - \Pi(W)V(W)\partial_x(\alpha_k) &= (-1)^{k+1} J_1^{E,i,0}(W)
\end{aligned} \tag{43}$$

en rappelant que :

$$Z_k^E = \alpha_k(\widetilde{\rho}_k \tilde{\epsilon}_k(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) + 1/2 \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2)$$

Deux grands principes vont contribuer à clarifier la forme des modèles admissibles:

- Le premier principe consistera à donner une caractérisation entropique du système global;

- Le second principe sera lié au nécessaire établissement des relations de saut dans le cadre limite non visqueux. Ce point sera intimement lié à la structure d'un champ particulier, entraînant dès lors la décorrélation des sauts de taux de présence statistique et des ondes vraiment non linéaires inhérentes au système.

### 3.2. Lois de fermeture et hyperbolicité

En considérant le système (43), et en posant :

$$\psi_k(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) = \widetilde{\rho_k \epsilon_k}(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) / \tilde{\rho}_k$$

on peut dorénavant, et sans risque d'ambiguïté omettre les notations  $\tilde{a}$  pour toute grandeur  $a$ .

On peut alors, pour des solutions régulières, construire les équations d'évolution de  $\rho_k$  et  $U_k$ . celles-ci s'écrivent respectivement:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_k) + U_k \partial_x(\rho_k) + \rho_k \partial_x(U_k) + \frac{\rho_k}{\alpha_k}(U_k - \langle V'_\sigma \rangle(W)) \partial_x(\alpha_k) &= (J_k^{M,i,0}(W) - \rho_k \phi_1^0(W)) / \alpha_k \\ m_k(\partial_t(U_k) + U_k \partial_x(U_k)) + \alpha_k \partial_x(P_k) + (P_k - \Pi(W)) \partial_x(\alpha_k) &= J_k^{Q,i,0}(W) - U_k J_k^{M,i,0}(W) \end{aligned} \quad (44)$$

En prémultipliant par  $U_k$  la seconde équation de (44), et en la soustrayant à la dernière équation de (43), on obtient alors l'équation d'évolution de  $\psi_k$ , i.e.:

$$\begin{aligned} m_k(\partial_t(\psi_k) + U_k \partial_x(\psi_k)) + \alpha_k P_k \partial_x(U_k) + \Pi(W)(U_k - V(W)) \partial_x(\alpha_k) \\ = J_k^{E,i,0}(W) - U_k J_k^{Q,i,0}(W) + (U_k^2/2 - \psi_k) J_k^{M,i,0}(W) \end{aligned} \quad (45)$$

en notant classiquement:

$$m_k = \alpha_k \rho_k \quad (46)$$

En utilisant l'équation de bilan de masse moyenne, et en développant selon les trois variables  $\alpha_k, \rho_k, P_k$ , on obtient une équation portant sur la variable pression moyenne phasique  $P_k$ :

$$\begin{aligned} \partial_t(P_k) + U_k \partial_x(P_k) \\ + \rho_k (c_k)^2 \partial_x(U_k) \\ + (\partial_{P_k}(\psi_k))^{-1} \left( \frac{\Pi(W)(U_k - V(W))}{m_k} + (U_k - \langle V'_\sigma \rangle(W)) (\partial_{\alpha_k}(\psi_k) - \rho_k / \alpha_k \partial_{\rho_k}(\psi_k)) \right) \partial_x(\alpha_k) \\ = S_{P_k} \end{aligned} \quad (47)$$

sachant que:

$$\rho_k (c_k)^2 = (\partial_{P_k}(\psi_k(\alpha_k, \rho_k, P_k)))^{-1} (P_k / \rho_k - \rho_k \partial_{\rho_k}(\psi_k(\alpha_k, \rho_k, P_k))) \quad (48)$$

et:

$$\begin{aligned} \partial_{P_k}(\psi_k(\alpha_k, \rho_k, P_k)) S_{P_k} &= J_k^{E,i,0}(W) - U_k J_k^{Q,i,0}(W) + (U_k^2/2 - \psi_k) J_k^{M,i,0}(W) / m_k \\ &\quad - \phi_k^0(W) \partial_{\alpha_k}(\psi_k) - (J_k^{M,i,0}(W) - \rho_k \phi_k^0(W)) \partial_{\rho_k}(\psi_k) / \alpha_k \end{aligned} \quad (49)$$

Le système agissant sur la variable  $Z = (\alpha_1, \rho_1, \rho_2, U_1, U_2, P_1, P_2)$ , constitué de la première équation de (43), des deux équations (44) et de (47), est donc un système de type convection-sources. Les valeurs propres associées au système convectif seront clairement réelles dès lors que les

deux conditions suivantes:

$$\rho_k(c_k)^2 > 0$$

seront vérifiées (pour  $k = 1, 2$ ), ce qui implique certaines conditions sur les fonctions  $\psi_k$ . Le spectre du noyau convectif est en fait simplement :

$$\langle V'_\sigma \rangle, U_1, U_2, U_1 \pm c_1, U_2 \pm c_2$$

quelles que soient les lois de fermeture afférentes à  $\langle V'_\sigma \rangle$  et aux différents termes sources.

Pour conclure cette section, il faut donc noter que l'hyperbolicité émerge naturellement dans cette approche statistique.

### 3.3. Lois de fermeture et condition d'entropie

Nous introduisons deux fonctions  $S_k(\alpha_k, \rho_k, P_k)$  vérifiant la contrainte suivante:

$$(c_k)^2 \partial_{P_k}(S_k) + \partial_{\rho_k}(S_k) = 0$$

Nous noterons également l'entropie de mélange:

$$S = m_1 S_1 + m_2 S_2$$

et le flux d'entropie de mélange:

$$F_S = m_1 S_1 U_1 + m_2 S_2 U_2$$

On peut alors, moyennant quelques manipulations, obtenir l'équation d'évolution de  $S$ , qui s'écrit:

$$\begin{aligned} \partial_t(S) + \partial_x(F_S) &+ \mathcal{B} \partial_x(\alpha_1) \\ &= \Sigma_k \left( m_k \partial_{P_k}(S_k) S_{P_k} + \rho_k \partial_{\rho_k}(S_k) (J_k^{M,i,0}(W) - \rho_k \phi_k^0(W)) \right) \\ &+ \Sigma_k \left( S_k J_k^{M,i,0}(W) + m_k \partial_{\alpha_k}(S_k) \phi_k^0(W) \right) \end{aligned} \quad (50)$$

où la contribution  $\mathcal{B}$  s'écrit:

$$\mathcal{B} = \Sigma_k (-1)^{k+1} m_k \left( \partial_{P_k}(S_k) (\partial_{P_k}(\psi_k))^{-1} A_k + (U_k - \langle V'_\sigma \rangle(W)) \left( \frac{\rho_k}{\alpha_k} \partial_{\rho_k}(S_k) - \partial_{\alpha_k}(S_k) \right) \right)$$

avec :

$$A_k = (U_k - V(W)) \Pi(W) / m_k + (U_k - \langle V'_\sigma \rangle(W)) \left( \partial_{\alpha_k}(\psi_k) - \frac{\rho_k}{\alpha_k} \partial_{\rho_k}(\psi_k) \right)$$

A ce stade, il est utile d'introduire deux modèles consistants pour les vitesses  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$  et  $V(W)$ , soit:

#### Hypothèse fermeture 4:

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = a_\sigma(W) U_1 + (1 - a_\sigma(W)) U_2 \quad (51)$$

$$V(W) = a(W) U_1 + (1 - a(W)) U_2$$

où les deux fonctions scalaires inconnues  $a(W)$  et  $a_\sigma(W)$  sont à valeurs dans  $[0, 1]$ . Cette hypothèse revient implicitement à assumer une notion de *consistance* pour les vitesses d'interface

$\langle V'_\sigma \rangle(W)$  et  $V(W)$ .

Compte tenu de la forme retenue ci-dessus, le terme  $\mathcal{B}$  prend alors la forme suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & (U_1 - U_2) \left( \Pi(W) \left( \frac{1-a(W)}{T_1} + \frac{a(W)}{T_2} \right) - \left( \frac{(1-a_\sigma(W))P_1}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)P_2}{T_2} \right) \right) \\ & + (U_1 - U_2) \left( m_1(1-a_\sigma(W)) \left( \frac{1}{T_1} \partial_{\alpha_1}(\psi_1) - \partial_{\alpha_1}(S_1) \right) + m_2(a_\sigma(W)) \left( \frac{1}{T_2} \partial_{\alpha_2}(\psi_2) - \partial_{\alpha_2}(S_2) \right) \right) \end{aligned} \quad (52)$$

en notant classiquement :

$$1/T_k = \partial_{P_k}(S_k) / \partial_{P_k}(\psi_k) > 0$$

Le terme  $\mathcal{B} \partial_x(\alpha_1)$  étant d'ordre différentiel 1 et ne pouvant être dissipatif, le contrôle intégral de l'entropie de mélange  $S$  conduit à imposer la contrainte:

$$\mathcal{B} = 0 \quad (53)$$

pour toute valeur de  $U_1 - U_2$ .

Si les fonctions  $\psi_k$  ne dépendent pas de la variable  $\alpha_k$ , ceci implique que  $c_k$  est une fonction des seules variables  $\rho_k, P_k$ , ce qui conduit donc à retenir les fonctions  $S_k$  ne dépendant que de  $\rho_k, P_k$ . Ainsi, la contrainte (53) équivaut alors à annuler:

$$\Pi(W) \left( \frac{1-a(W)}{T_1} + \frac{a(W)}{T_2} \right) - \left( \frac{(1-a_\sigma(W))P_1}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)P_2}{T_2} \right) = 0 \quad (54)$$

ce qui revient à exprimer explicitement  $\Pi(W)$  en fonction de  $W$  et de  $(a_\sigma(W), a(W))$ :

$$\Pi(W) = \frac{\frac{(1-a_\sigma(W))P_1}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)P_2}{T_2}}{\frac{1-a(W)}{T_1} + \frac{a(W)}{T_2}}$$

Si en revanche une des fonctions  $\psi_k$  dépend de  $\alpha_k$ , on imposera alors les contraintes sur les entropies partielles moyennes comme suit:

$$\frac{1}{T_1} \partial_{\alpha_1}(\psi_1) - \partial_{\alpha_1}(S_1) = \frac{1}{T_2} \partial_{\alpha_2}(\psi_2) - \partial_{\alpha_2}(S_2) = 0$$

Examinons la formule (54), en imposant des états de pression à l'équilibre entre les phases. Dans ce cas, on constate que l'on aura une *consistance* en pression si et seulement si:

### Hypothèse fermeture 5:

$$a(W) = a_\sigma(W) \quad (55)$$

Nous retiendrons cette hypothèse dorénavant, sachant qu'aucun élément *a priori* ne permet de remettre en cause ce point. La forme finale du terme  $\Pi(W)$  sera donc:

$$\Pi(W) = \frac{\frac{(1-a_\sigma(W))P_1}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)P_2}{T_2}}{\frac{1-a_\sigma(W)}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)}{T_2}} = \mu(W)P_1 + (1-\mu(W))P_2$$

avec  $\mu \in [0, 1]$  si et seulement si  $a_\sigma(W) \in [0, 1]$ .

Il reste à ce stade à détailler la forme de la fonction de production d'entropie. Pour cela, il est préférable d'introduire des formes des termes sources tenant compte respectivement du transfert de masse, de quantité de mouvement, en posant:

$$\begin{aligned} J_k^{Q,i,0}(W) &= \mathcal{U} J_k^{M,i,0}(W) + L_k^Q(W) \\ J_k^{E,i,0}(W) &= \mathcal{U} L_k^Q(W) + \mathcal{W} J_k^{M,i,0}(W) + L_k^E(W) \end{aligned} \quad (56)$$

sachant que :

$$L_1^Q(W) + L_2^Q(W) = 0$$

et:

$$L_1^E(W) + L_2^E(W) = 0$$

Les fonctions scalaires  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  ont respectivement la dimension d'une vitesse et du carré d'une vitesse. En l'absence de transfert de masse,  $L_k^Q(W)$  représente le transfert interfacial de quantité de mouvement entre phases; de même,  $L_k^E(W)$  désigne le transfert de chaleur entre phases lorsque les transferts de masse et de dynamique sont négligés. Cette ré-écriture n'est pas indispensable, mais elle permet une meilleure compréhension de ce qui suit.

Dès lors, le second membre  $RHS_S$  de l'équation (50) prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} RHS_S(W) &= ((\psi_2 + P_2/\rho_2 - T_2 S_2)/T_2 - (\psi_1 + P_1/\rho_1 - T_1 S_1)/T_1) J_1^{M,i,0}(W) \\ &+ ((\mathcal{W} - \mathcal{U}U_1 + U_1^2/2)/T_1 - (\mathcal{W} - \mathcal{U}U_2 + U_2^2/2)/T_2) J_1^{M,i,0}(W) \\ &+ ((\mathcal{U} - U_1)/T_1 - (\mathcal{U} - U_2)/T_2) L_1^Q \\ &+ (P_1/T_1 - P_2/T_2) \phi_1^0(W) \\ &+ (1/T_1 - 1/T_2) L_1^E(W) \end{aligned} \quad (57)$$

On posera dans la suite :

$$\mu_k = \psi_k + P_k/\rho_k - T_k S_k$$

mais aussi :

**Hypothèse fermeture 6:**

$$\mathcal{U} = (U_1 + U_2)/2 \quad (58)$$

et:

$$\mathcal{W} = U_1 U_2 / 2 \quad (59)$$

Il est clair alors que le second membre dans le bilan d'entropie sera tel que :

$$\begin{aligned} RHS_S &= (\mu_2/T_2 - \mu_1/T_1) J_1^{M,i,0}(W) \\ &+ ((1/(2T_1) + 1/(2T_2)) (U_2 - U_1) L_1^Q \\ &+ (P_1 - P_2) ((1 - \mu(W))/T_1 + \mu(W)/T_2) \phi_1^0(W) \\ &+ (1/T_1 - 1/T_2) (L_1^E(W) + \mathbb{H}(W) \phi_1^0(W)) \end{aligned} \quad (60)$$

Il faut absolument noter à ce stade que les lois de fermeture (58) et (59) portant sur  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  sont les seules permettant de déconnecter la contribution cinématique dans le terme de transfert de masse

interfacial. Il est également fondamental de souligner l'importance du respect d'appartenance à  $[0, 1]$  de  $\mu(W)$ . Enfin la reformulation des deux dernières lignes du second membre dans (57) sous la forme des deux dernières contributions dans (60) est importante puisqu'elle va permettre de retrouver une forme globale des équations fermées plus classique.

### 3.4. Synthèse partielle

A ce stade, et sachant qu'il ne reste plus qu'une inconnue  $\alpha_\sigma(W)$  dans le modèle global, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

**Proposition 1 (bilan d'entropie de mélange diphasique):**

*Supposons que les hypothèses 1–6 sont vérifiées, et donc que les lois de fermeture soient conformes à (40), (41), (42), (51), (55), (58), (59), et qu'en outre la fonction  $\Pi(W)$  soit telle que (54) soit satisfaite ; dans ce cas, si les termes sources  $J_1^{M,i,0}(W)$ ,  $L_1^Q(W)$ ,  $L_1^E(W)$ ,  $\phi_1^0(W)$  sont tels que:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_1^{M,i,0}(W)(\mu_2(W)/T_2 - \mu_1(W)/T_1), \\ 0 &\leq L_1^Q(W)(U_2 - U_1), \\ 0 &\leq (L_1^E(W) + \Pi(W)\phi_1^0(W))(T_2 - T_1), \\ 0 &\leq \phi_1^0(W)(P_1 - P_2), \end{aligned} \tag{61}$$

alors les solutions régulières  $W$  du système (43) seront telles que le bilan d'entropie de mélange  $S(W)$  sera conforme à:

$$0 \leq RHS_S(W) = \partial_t(S(W)) + \partial_x(F_S(W)). \tag{62}$$

Si, par exemple, nous postulons que les lois de fermeture sont telles que:

$$\begin{aligned} J_1^{M,i,0}(W) &= \alpha_1\alpha_2 K_M(W) (\mu_2/T_2 - \mu_1/T_1) \\ L_1^Q(W) &= \alpha_1\alpha_2 K_Q(W)(U_2 - U_1) \\ \phi_1^0(W) &= \alpha_1\alpha_2 K_P(W) (P_1 - P_2) \\ L_1^E(W) + \Pi(W)\phi_1^0(W) &= \alpha_1\alpha_2 K_E(W) (T_2 - T_1) \end{aligned} \tag{63}$$

où les fonctions scalaires  $K_Q(W)$ ,  $K_M(W)$ ,  $K_P(W)$ ,  $K_E(W)$  sont à valeurs positives, alors l'inégalité d'entropie (62) ci-dessus sera assurée.

On notera que la première loi portant sur  $L_1^Q(W)$  correspond à la prise en compte de la traînée statique, sachant que les vitesses dans cette formule sont bien les vitesses moyennes au sens de Favre. La littérature propose des échelles de temps de relaxation associées à ce terme qui renvoie à l'équilibre cinématique, notamment dans le cadre de mélanges de gaz et de particules, ou de bulles de gaz placées dans un liquide ([40]). Il en est de même pour le terme d'échange de chaleur  $K_E(W)(T_2 - T_1)$ , qui conduit asymptotiquement à un équilibre en température entre les deux phases; ce terme est bien entendu actif même si les phases sont non miscibles. La troisième contribution de relaxation des pressions de phases est sensible, sachant que la plupart des modèles classiques dans la littérature proposent des échelles de temps de relaxation associées *nulles*, conduisant ainsi à un équilibre local instantané en pression (voir par exemple [38]); ce cadre sera explicitement exclu ici. Une estimation simple de  $K_p(W)$  peut s'obtenir en considérant le mouvement d'une bulle isolée dans un fluide au repos ([17] et références associées), en tenant compte

éventuellement des effets de tension superficielle. Enfin, le terme de transfert de masse associé au déséquilibre de potentiel chimique  $(\mu_2/T_2 - \mu_1/T_1)$  est lui aussi classique, même si de nombreuses approches proposent une simplification de ce terme fortement non linéaire. Finalement, on remarque que l'annulation totale du terme source implique un quadruple équilibre en vitesse/pression/température/potentiel chimique.

Le système associé sera donc:

$$\begin{aligned}
\partial_t (\alpha_1) + (a_\sigma(W)U_1 + (1 - a_\sigma(W))U_2)\partial_x (\alpha_1) &= \phi_1^0(W) \\
\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k U_k) &= (-1)^{k+1} J_1^{M,i,0}(W) \\
\partial_t (\alpha_k \rho_k U_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k U_k^2 + \alpha_k P_k) - \mathbf{\Pi}(W)\partial_x (\alpha_k) &= (-1)^{k+1} (L_1^Q(W) + \mathcal{U} J_1^{M,i,0}(W)) \\
\partial_t (Z_k^E) + \partial_x (U_k (Z_k^E + \alpha_k P_k)) + \mathbf{\Pi}(W)\partial_t (\alpha_k) &= (-1)^{k+1} \alpha_1 \alpha_2 (K_E(W)(T_2 - T_1)) \\
&\quad + (-1)^{k+1} (\mathcal{W} J_1^{M,i,0}(W) + \mathcal{U} L_1^Q(W))
\end{aligned} \tag{64}$$

avec :

$$Z_k^E = \alpha_k \rho_k (\psi_k(\alpha_k, \rho_k, P_k) + 1/2U_k^2)$$

On notera que la forme finale des équations fait apparaître explicitement au premier membre des équations d'énergie une contribution proportionnelle à la variation temporelle  $\partial_t (\alpha_k)$ , qui peut, au moins formellement, être rapprochée d'un terme analogue dans la formulation monophasique en milieu poreux *mobile*. Nous garderons cette écriture par la suite.

### 3.5. Lois de fermeture et relations de saut

Le dernier point invoqué ici concerne l'existence (et unicité) de relations de saut associées au cadre non visqueux, pour le système convectif *non conservatif* correspondant au membre de gauche des équations du modèle (64). On sait en effet qu'une pathologie classique de nombreux modèles diphasiques est liée à l'absence de relations de saut, et concomitamment à la non-unicité de solutions chocs. Ce défaut majeur de certains modèles, indépendamment du respect (ou non) du caractère neutralement stable des systèmes convectifs, est lié à la définition des trois produits non conservatifs  $\langle V'_\sigma \rangle(W)\partial_x (\alpha_k)$ ,  $\mathbf{\Pi}(W)\partial_x (\alpha_k)$ , et  $\mathbf{\Pi}(W)\langle V'_\sigma \rangle(W)\partial_x (\alpha_k)$ .

Or, il a été souligné dans [8, 16] que l'hypothèse structurelle de champ linéairement dégénéré (LD) associée à la valeur propre  $\lambda = \langle V'_\sigma \rangle(W)$  permet de garantir l'existence et unicité des relations de saut champ par champ. Cette hypothèse est en fait naturelle: elle signifie simplement que, dans une expérience de type Riemann associée à une condition initiale discontinue sur le taux de présence statistique  $\alpha_k$ , le bloc convectif ne peut créer à lui seul de valeurs intermédiaires pour ce taux. On retrouve donc le caractère non matériel de cette variable moyenne *transportée*. La difficulté réside alors dans la recherche de fonctions scalaires  $a_\sigma(W)$  qui confèrent au champ associé à  $\lambda = \langle V'_\sigma \rangle(W)$  ce caractère LD.

On ne détaillera pas ici cet aspect qui a été examiné en détail dans [8, 16] (voir également [20, 36]).

### 3.6. Synthèse

Nous pouvons ici conclure la section en donnant les principales propriétés du modèle diphasique fermé, en rappelant que le terme de pression interfaciale  $\Pi(W)$  est fermé en considérant une inégalité d'entropie globale. Des caractérisations plus précises (en particulier des invariants de Riemann et des relations de saut à la traversée de chaque onde) sont accessibles dans les références citées.

#### Proposition 2 (propriétés du modèle diphasique):

- Le système homogène associé au système (64) admet sept valeurs propres réelles qui sont :

$$\lambda_1 = (a_\sigma(W)U_1 + (1 - a_\sigma(W))U_2) \quad (65)$$

$$\lambda_2 = U_1, \quad \lambda_3 = U_1 - c_1(W), \quad \lambda_4 = U_1 + c_1(W), \quad (66)$$

$$\lambda_5 = U_2, \quad \lambda_6 = U_2 - c_2(W), \quad \lambda_7 = U_2 + c_2(W) \quad (67)$$

Les vecteurs propres associés engendrent l'espace  $\mathcal{R}^7$ , dès lors que  $z_k|U_1 - U_2|/c_k \neq 1$ , avec  $z_1 = |1 - a_\sigma(W)|$  et  $z_2 = |a_\sigma(W)|$ .

- Les champs associés à  $\lambda_{2,5}$  sont LD. Les autres champs associés à  $\lambda_{3,4,6,7}$  sont vraiment non linéaires (VNL). Le 1-champ est LD si:

$$a_\sigma(W)(1 - a_\sigma(W)) = 0, \quad \text{ou si:} \quad a_\sigma(W) = m_1/(m_1 + m_2). \quad (68)$$

- Les solutions régulières  $W(x, t)$  de (64) satisfont l'inégalité d'entropie :

$$0 \leq \partial_t (S(W)) + \partial_x (F_S(W)). \quad (69)$$

- Le système homogène admet des relations de saut uniques champ par champ dès lors que  $a_\sigma(W)$  est conforme à (68) ou admet la forme plus générale donnée dans [36].

En ce qui concerne les propriétés de convexité de l'entropie de mélange  $S$  et la possible symétrisation du système, on renvoie le lecteur à [9]. Le dernier point peut notamment être utilisé pour la reconstruction des valeurs de maille, dans un processus global -classique- de montée en ordre des schémas de convection.

#### 4. REMARQUES CONCERNANT LE CADRE BIFLUIDE

##### 4.1. Liens avec quelques modèles diphasiques bifluides issus de la littérature.

Les modèles proposés ci-dessus sont à mettre en relation avec les travaux externes, notamment des équipes de Kapila [4, 43, 44], Glimm [5, 24–26, 41, 42], Abgrall-Forestier-Gavrilyuk-Saurel [1, 14, 18, 20, 49], et des références initiales [3, 11, 51]. Ceux-ci concernent la plupart du temps des applications au cadre granulaire dense associé à la modélisation de la transition déflagration-détonation. Ce cadre est assez éloigné de celui qui nous intéresse ici, pour plusieurs raisons. Tout d’abord, les phases considérées gaz-solide correspondent à deux matériaux distincts, sachant qu’en outre la densité d’une des deux phases (solide) est constante, ce qui introduit une contrainte spécifique dans le système d’EDP. Il faut en outre mentionner le fait que les phénomènes de compactage maximal sous-jacents introduisent des spécificités importantes [15].

Deux références paraissent se détacher afin d’établir un parallèle avec la démarche retenue ici. La première analyse décrit avec une approche originale et très distincte un mélange de bulles en agitation turbulente au sein d’un liquide [20]. Il faut en particulier retenir le mode de construction, qui postule une structure d’évolution des entropies phasiques; il faut également signaler la prise en compte potentielle d’une contribution d’entropie associée à l’interface (sans masse), point spécifique. La seconde contribution [49], qui examine le bilan entropique, est dans l’esprit plus proche des propositions [8, 16].

On notera également que les lois de fermeture proposées pour les couples vitesse/pression d’interface dans les publications [5, 24, 25] conduisent à des propriétés sensiblement différentes en ce qui concerne le champ associé à  $\lambda = \langle V'_\sigma \rangle(W)$ . On y postule en particulier que cette vitesse d’interface, choisie *a priori* comme combinaison convexe des vitesses phasiques, est contrainte à s’identifier à  $U_1$  dans la limite où  $\alpha_1$  tend vers 0, soit par exemple:

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = \alpha_2 U_1 + \alpha_1 U_2$$

Il faut aussi souligner que les lois de fermeture de pression d’interface sont plus de type phénoménologique.

##### 4.2. Commentaires concernant le modèle de Baer-Nunziato.

Ce modèle correspond au choix particulier suivant:

$$\Pi(W) = P_k \tag{70}$$

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = U_{3-k} \tag{71}$$

où  $k$  désigne l’indice de la phase la plus présente dans l’écoulement. Ce modèle a été introduit dans le cadre de la modélisation de la transition déflagration détonation (DDT), de manière ”directe” [3]. Une particularité importante de ce modèle est que chaque entropie phasique est elle-même solution convective d’une équation classique de type:

$$\partial_t (S_k) + U_k \partial_x (S_k) = 0$$

Ce modèle est assez bien adapté à la représentation des écoulements en eau-vapeur lorsque la vapeur est peu présente (et donc en posant  $\Pi(W) = P_l$  et  $\langle V'_\sigma \rangle(W) = U_v$ ), ou lorsque la phase vapeur

dominante contient des gouttelettes d'eau (et donc en posant  $\Pi(W) = P_v$  et  $\langle V'_\sigma \rangle(W) = U_l$ ). Il est par contre *a priori* non optimal lorsque la configuration bascule (temporellement ou localement) du premier régime au second, ou inversement.

#### 4.3. Impact de la structure associée au champ $\langle V'_\sigma \rangle(W)$ .

On souligne ici que les lois parfois proposées concernant  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$ , typiquement:

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2$$

qui a la particularité d'être à divergence nulle lorsque les deux phases sont *incompressibles et non miscibles* (cadre distinct de celui retenu ici), ou encore la loi mentionnée ci-dessus:

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = \alpha_2 U_1 + \alpha_1 U_2$$

conduisent à une structure de champ VNL associé à  $\lambda = \langle V'_\sigma \rangle(W)$ . Une conséquence immédiate est qu'il n'est pas possible de construire de relations de saut uniques dans ces cas ; dès lors, les simulations convergées en maillage sont systématiquement schéma-dépendantes (voir par exemple [29]).

Signalons ici qu'une synthèse des travaux réalisés dans le domaine de la modélisation multiphasique à phases compressibles (cadre le plus général) est disponible dans le document [7]. On y mentionne en particulier la difficulté associée à la détermination précise des échelles de temps de relaxation associées aux termes de traînée statique  $K_Q(W)$ , de transfert de masse  $K_M(W)$ , de chaleur  $K_E(W)$  et à la relaxation en pression  $K_P(W)$ . Le lecteur pourra également y trouver des éléments pour construire des schémas numériques adaptés à la simulation des solutions de ces équations, ainsi que de nombreuses références bibliographiques.

On discute ci-après très succinctement les possibilités d'extension du formalisme présenté dans le cadre bi-fluide en milieu libre, et plus particulièrement:

- une formulation admissible pour les évolutions dans un cadre bifluide poreux;
- une formulation admissible pour la gestion des écoulements triphasiques.

## 5. EXTENSIONS DU FORMALISME BIFLUIDE

## 5.1. Le cadre poreux

Une première extension concerne le cadre des écoulements en milieu poreux. Il importe de noter ici que cette extension "classique" n'est pas nécessairement optimale pour ce qui concerne la spécificité poreuse; il vaut mieux voir ce cadre comme un cadre admissible au sens de la modélisation bifluide en milieu poreux ou libre, que pour sa valeur "poreuse" stricte.

Dans le contexte du nucléaire civil, cette approche est essentiellement motivée par le fait qu'il est actuellement impossible d'envisager la modélisation de l'écoulement de fluide primaire au sein du cœur de réacteur, ou au niveau d'un générateur de vapeur, sachant que les très nombreux obstacles de petite taille vont interdire la création d'un maillage de taille admissible (au sens du coût CPU induit, ou de la mémoire à allouer). Une approche classique consiste alors à introduire une "porosité" locale stationnaire  $\epsilon(\mathbf{x})$  définie par:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = 1 - \mathcal{V}_s(\mathbf{x})/\mathcal{V}_{total}(\mathbf{x})$$

sachant que  $\mathcal{V}_f(\mathbf{x})$  et  $\mathcal{V}_s(\mathbf{x})$  sont les volumes de fluide et de solide au sein d'une maille de volume  $\mathcal{V}_{total}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_f(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_s(\mathbf{x})$ .

Si l'on retient alors le formalisme bifluide, le principe de construction retenu permet de construire le modèle poreux suivant:

$$\begin{aligned} \partial_t(\epsilon) &= 0 \\ \partial_t(\alpha_k) + V_{int}(W)\partial_x(\alpha_k) &= \phi_k^0(W) \\ \partial_t(\epsilon m_k) + \partial_x(m_k U_k) &= \epsilon J_k^{M,i,0}(W) \\ \partial_t(\epsilon m_k U_k) + \partial_x(\epsilon m_k U_k^2) + \epsilon \alpha_k \partial_x(P_k) - \epsilon(\Pi(W) - P_k)\partial_x(\alpha_k) &= \epsilon(L_k^Q(W) + J_k^{M,i,0}(W)\mathcal{U}) \\ \partial_t(\epsilon \alpha_k E_k) + \partial_x(\epsilon \alpha_k U_k(E_k + P_k)) + \epsilon \Pi(W)\partial_t(\alpha_k) &= \epsilon(-1)^{k+1}K_E(W)(T_2 - T_1) \\ &\quad + \epsilon(\mathcal{U}L_k^Q(W) + J_k^{M,i,0}(W)\mathcal{W}) \end{aligned} \tag{72}$$

pour  $k = l, v$ .

Ce système admet les propriétés suivantes:

**Propriété (voir [23, 35]):**

- La partie homogène du système (72) est hyperbolique, hormis lorsque  $|U_k - V_{int}(W)|/c_k = 1$ , ou lorsque  $|U_k|/c_k = 1$ . Les valeurs propres de ce système sont les suivantes:

$$\lambda_0 = 0 \quad \lambda_1 = V_{int}(W) \tag{73}$$

$$\lambda_2 = U_1, \quad \lambda_3 = U_1 - c_1(W), \quad \lambda_4 = U_1 + c_1(W), \tag{74}$$

$$\lambda_5 = U_2, \quad \lambda_6 = U_2 - c_2(W), \quad \lambda_7 = U_2 + c_2(W). \tag{75}$$

- On note toujours :  $S = m_1 S_1 + m_2 S_2$ . Les solutions régulières du système (72) satisfont l'inégalité d'entropie:

$$0 \leq \partial_t (\epsilon S(W)) + \partial_x \left( \epsilon \sum_{k=l,v} m_k U_k S_k \right) \quad (76)$$

lorsque les lois de fermeture associées à  $\Pi(W)$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{W}$  et aux termes sources sont respectivement conformes à (54), (58), (59) et (63).

- Les champs associés à  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_2 = U_1$ ,  $\lambda_5 = U_2$  sont linéairement dégénérés (LD). Il en est de même pour le champ associé à  $\lambda_1 = V_{int}(W)$  si la loi de fermeture pour la vitesse interfaciale est donnée par (68). Les autres champs sont vraiment non linéaires (VNL).

Il faut remarquer ici que, contrairement au cadre des évolutions en milieu libre, la probabilité d'occurrence de la résonance augmente notablement, puisque les cas soniques par phase (et non plus seulement au sens de la vitesse relative entre phases) peuvent déclencher la dégénérescence du système.

## 5.2. Le cadre multiphasique [34]

Une seconde application du formalisme concerne l'extension au cadre triphasique compressible, et on renvoie pour cet aspect le lecteur à la référence [34]. Deux points doivent être essentiellement retenus à ce niveau.

Tout d'abord, l'analyse constructive retenue permet de proposer une "extension directe" des résultats obtenus dans le cadre bifluide, notamment grâce à:

- L'utilisation du principe de caractérisation entropique, qui permet de mieux voir que les contributions du transfert interfacial de quantité de mouvement et d'énergie d'ordre un sont obtenues de manière *unique* en fonction de la vitesse d'interface (unique),  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$ , l'entropie de mélange étant ici encore

$$S = \sum_k m_k S_k$$

- L'imposition de relations de saut uniques, qui sont assurées si le champ  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$  a une structure LD.

Le second point concerne la complexité qui est partiellement occultée dans le cadre diphasique, notamment en ce qui concerne les degrés de liberté dans le transfert interfacial entre phases, mais aussi à propos de la vitesse d'interface moyenne.

En fin de compte, la construction des modèles à trois phases permet de constater que l'extension à un nombre quelconque de phases est possible, sachant que le degré de complexité afférent est croissant.

## 6. QUELQUES COMMENTAIRES

Dans l'approche proposée ici, qui est de fait assez classique dans un cadre de modélisation en thermo-mécanique des milieux continus, plusieurs éléments ont été volontairement oubliés, notamment:

- (i) La prise en compte des effets de viscosité dans le système initial associé à chaque phase;
- (ii) La prise en compte des effets de "turbulence";
- (iii) La comparaison avec le cadre monophasique.

Le premier point n'introduit pas réellement de problème incontournable, si l'on se restreint à l'utilisation de lois de premier gradient classiques [21] pour la modélisation des flux moyens associés à  $\Sigma_k$  dans (1). On pourra par exemple examiner la référence [29] pour cet aspect.

En ce qui concerne le second point, il faut souligner que certains aspects ont été abordés dans [33], en se limitant à une modélisation comportant une équation d'intensité de turbulence  $K_k$  par phase. Ceci correspond de fait à un choix simple du modèle de turbulence, à savoir:

$$\langle \chi_k \rho_k (u_k^*)_i (u_k^*)_j \rangle = 2/3 \alpha_k \rho_k K_k \delta_{ij}$$

qui vérifie les contraintes de réalisabilité dès lors que  $0 \leq K_k$  (sachant que les équations d'évolution de cette variable garantissent effectivement la positivité des solutions dans le cadre régulier). On rappelle que le cahier des charges retenu dans [33] est identique à celui considéré ici, mais que l'obtention de relations de saut bien définies se heurte aux mêmes difficultés que dans le cadre monophasique compressible turbulent (voir [2, 6, 18]). On souligne que cette problématique de définition correcte des relations de Rankine Hugoniot est essentielle pour certaines applications telles que celles faisant intervenir des coups de bélier dans les tuyauteries (cf. [54]). Un dernier point important est relatif à la prise en compte correcte des flux de masse turbulents diphasiques  $\langle (\chi_k u_k^*)(x, t; \xi) \rangle$  (contribution (RHS5) dans l'équation (29)) ; on rappelle que, dans le contexte monophasique, une possibilité consistante avec l'inégalité d'entropie correspond à la formulation de Ristorcelli. L'analyse dans le cadre diphasique n'a cependant jamais été entreprise jusqu'alors.

Enfin, on notera que la démarche retenue est identique à celle afférente au cadre monophasique compressible. En particulier, la modélisation naturelle en approche statistique n'introduit pas de réel problème concernant l'hyperbolicité du modèle fermé complet, et la caractérisation entropique globale émerge assez simplement. Il en résulte d'ailleurs en général un comportement des solutions régulières conforme aux attentes, en terme de respect de la positivité des variables ad hoc.

La dernière remarque concerne le processus de validation du modèle, qui présuppose que plusieurs tirs sont effectués pour chaque mesure expérimentale. En réalité, la littérature ne propose pas systématiquement des dossiers de ce type, alors que la dispersion des résultats peut s'avérer être assez importante, notamment en ce qui concerne le taux de présence statistique (voir [52] par exemple pour l'expérience de dépressurisation rapide Canon).

## REFERENCES

- [1] ABGRALL R., SAUREL R., "Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures" *J. Comp. Physics.*, vol. 186, pp. 361-396, 2003.
- [2] B. Audebert, Contribution à l'analyse des modèles aux tensions de Reynolds pour l'interaction choc turbulence, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2005
- [3] M.R. Baer, J.W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials, *IJMF*, **12(6)**, pp. 861-889, (1986).
- [4] J.B. Bdzil, R. Menikoff, S.F. Son, A.K. Kapila, D.S. Stewart, Two phase modelling of deflagration to detonation transition in granular materials: a critical examination of modelling issues, *Phys. of Fluids*, **11**, pp. 378-402, (1999).
- [5] W. Bo, H. Jin, D. Kim, X. Liu, H. Lee, N. Pestieau, Y. Yu, J. Glimm, J.W. Grove, Comparison and validation of multi phase closure models, *Computers and mathematics with Applications*, **56**, pp. 1291-1302, (2008).
- [6] G. Brun, J.M. Hérard, D. Jeandel, M. Uhlmann, An approximate Roe-type Riemann solver for a class of realizable second-order closures, *Int. J. Computational Fluid Dynamics*, **13**, pp.223-249 (2000)
- [7] F. Coquel, T. Gallouët, P. Helluy, J.M. Hérard, O. Hurisse, N. Seguin, Modelling compressible multiphase flows, internal EDF report H-I81-2012-02421-EN, to appear in *ESAIM Proceedings*, (2013).
- [8] F. Coquel, T. Gallouët, J.M. Hérard, N. Seguin, Closure laws for a two-fluid two-pressure model, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **I-332**, pp. 927-932, (2002).
- [9] F. Coquel, J.M. Hérard, K. Saleh, N. Seguin, Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows, internal EDF report H-I81-2013-0935-EN, to appear in *Communications in Mathematical Sciences*, (2013).
- [10] D.A. Drew, S.L. Passman, *Theory of multi-component fluids*, Applied Mathematical Sciences, **135**, Springer, (1999).
- [11] P. Embid, M. Baer, Mathematical analysis of a two-phase continuum mixture theory, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **4**, pp. 279-312, (1992).
- [12] J. Favre, Equations des gaz turbulents compressibles. Méthode des vitesses moyennes, méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique, *Journal de Mécanique*, **4**, pp. 391-421 (1965).
- [13] J. Favre, L.S.G. Kovasnay, R. Dumas, J. Gaviglio, M. Coantic, *La turbulence en mécanique des fluides*, Gauthier-Villars, (1976).
- [14] A. Forestier, S. Gavrilyuk, Criterion of hyperbolicity for non-conservative quasi-linear systems admitting a partially convex conservation law, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **32**, pp. 2148-2158 (2011)
- [15] T. Gallouët, P. Helluy, J.M. Hérard, J. Nussbaum, Hyperbolic relaxation models for granular flows, *ESAIM: M2AN*, **44 (2)**, (2010).
- [16] T. Gallouët, J.M. Hérard, N. Seguin, Numerical modelling of two phase flows using the two-fluid two-pressure approach, *Math. Mod. Meth. in Appl. Sci.*, **14(5)**, pp. 663-700, (2004).
- [17] S. Gavrilyuk, Caractérisation des échelles de temps de relaxation dans les modèles diphasiques, rapport interne EDF (2013).
- [18] S. Gavrilyuk, H. Gouin Geometric evolution of the Reynolds stress tensor, *International Journal of Engineering Science*, **59**, p.65-73, (2012).
- [19] S. Gavrilyuk, H. Gouin, Y.V. Perepechko A variational principle for two-fluid models, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **Iib 324**, p.483-490, (1997).
- [20] S. Gavrilyuk, R. Saurel, Mathematical and numerical modelling of two-phase compressible flows with micro-inertia, *J. Comp. Phys.*, **175**, pp. 326-360, (2002).
- [21] P. Germain, *Mécanique des milieux continus*, Masson (1962).
- [22] F. R. Gilmore, The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid, *California Institute of Technology*, report **26-4**, (1952).
- [23] L. Girault, J.M. Hérard, A two-fluid hyperbolic model in a porous medium, *ESAIM: M2AN*, **44(6)**, pp. 1319-1348, (2010).
- [24] J. Glimm, D. Saltz, D.H. Sharp, Renormalization group solution of two-phase flow equations for Rayleigh-Taylor mixing, *Phys. Letters A.*, **222**, pp. 171-176, (1996).
- [25] J. Glimm, D. Saltz, D.H. Sharp, Two-phase flow modelling of a fluid mixing layer, *J. Fluid Mech.*, **378**, pp. 119-143, (1999).
- [26] J. Glimm, D. Saltz, D.H. Sharp, Statistical evolution of chaotic fluid mixing, *Phys. Rev. Letters*, **80**, pp. 712-715, (1999).

- [27] E. Godlewski, P.A Raviart, Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, **Springer Verlag**, (1996).
- [28] H. Gouin, S. Gavriluk, Hamilton's principle and Rankine-Hugoniot conditions for general motions of mixtures, *Mechanica*, **34**, p. 39-47, (1999).
- [29] V. Guillemaud , Modélisation et simulation des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions, PhD thesis, Université Aix Marseille, Marseille, France, (2007).
- [30] J.M. Hérard, Basic analysis of some second-order closures. Part I: incompressible isothermal turbulent flows, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **6**, pp. 213-233, (1993).
- [31] J.M. Hérard, Basic analysis of some second-moment closures. Part II: incompressible turbulent flows including buoyant effects, internal EDF report HE-41-94-30-A, (1994).
- [32] J.M. Hérard, Modèles au second ordre réalisables non dégénérés pour les écoulements turbulents incompressibles, *Comptes-Rendus Académie des Sciences Paris*, **322-IIb**, pp. 371-377, (1996).
- [33] J.M. Hérard, Numerical modelling of turbulent two phase flows using the two-fluid approach, AIAA paper 2003-4113, <http://www.aiaa.org> (2003)
- [34] J.M. Hérard, A three-phase flow model, *Math. and Computer Model.*, **45**, pp. 732-755, (2007).
- [35] J.M. Hérard, Un modèle hyperbolique diphasique bifluide en milieu poreux, *Comptes-Rendus Mécanique*, **336**, pp. 650-655, (2008).
- [36] J.M. Hérard, Une classe de modèles diphasiques bi-fluides avec changement de régime, internal EDF report H-I81-2010-0486-FR, in French, (2010).
- [37] O. Hurisse, Modelling of compressible single-phase flows using a stochastic approach, internal EDF report H-I83-2012-03036-FR, (2013).
- [38] M. Ishii, Thermofluid dynamic theory of two-phase flow, **Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France**, Collection Eyrolles, (1975).
- [39] M. Ishii, T. Hibiki, Thermofluid dynamics of two-phase flow, **Springer**, (2006).
- [40] M. Ishii, N. Zuber, Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows, *AIChE Journal*, **25**, pp. 843, (1979).
- [41] H. Jin, J. Glimm, D.H. Sharp, Compressible two-pressure two-phase flow models, *Physics Letters*, **353**, pp. 469-474, (2006).
- [42] H. Jin, J. Glimm, Weakly compressible two-pressure two-phase flow, *Acta Mathematica Scientia*, **29B**, pp. 1497-1540, (2009).
- [43] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, D.S. Stewart, Two phase modeling of a DDT in a granular material: reduced equations, *Phys. of Fluids*, **13**, pp. 3002-3024, (2001).
- [44] A.K. Kapila, S.F. Son, J.B. Bdzil, R. Menikoff, D.S. Stewart, Two phase modeling of a DDT: structure of the velocity relaxation zone, *Phys. of Fluids*, **9(12)**, pp. 3885-3897, (1997).
- [45] M. Labois , Modélisation des déséquilibres dynamiques dans les écoulements diphasiques. Approches par relaxation et par modèle réduit, PhD thesis, Université Aix Marseille, Marseille, France, (2008).
- [46] J.L. Lumley, Computational modelling of turbulent flows, *Advances in Applied Mechanics*, **18**, p. 123-176, (1978).
- [47] D. Lhuillier, Evolution of the volumetric interfacial area in two-phase mixtures, *Comptes rendus Mécanique*, **332**, p. 103-108, (2004).
- [48] C. Morel, Parcours théorique et numérique autour de la modélisation des écoulements diphasiques gaz-liquide, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Joseph Fourier (2013).
- [49] M. Papin, R. Abgrall, Fermetures entropiques pour les modèles bifluides à sept équations, *Comptes-Rendus Mécanique*, **333**, pp. 838-842, (2005).
- [50] S.B. Pope, PDF methods for turbulent reactive flows, *Progress Energy Combustion Sciences*, **11**, p. 119-192, (1985).
- [51] V. Ransom, D.L. Hicks, Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow, *J. Comp. Physics.*, **53**, pp. 124-151, (1984).
- [52] B. Riegel , Contribution à l'étude de la décompression d'une capacité en régime diphasique, PhD thesis, Université Scientifique et Médicale et Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, (1978).
- [53] U. Schumann, Realisability of Reynolds stress turbulence models, *Physics of Fluids*, **20**, p. 721, (1977).
- [54] A.R. Simpson , Large water-hammer pressures due to column separation in sloping pipes (transient cavitation), PhD thesis, University of Michigan, (1986).
- [55] C.G. Speziale, Invariance of turbulence closure models, *Physics of Fluids A*, **22**, p. 1033-1037, (1979).
- [56] H.B. Stewart, B. Wendroff, Two-phase flow: models and methods, *J. Comp. Physics.*, **56**, pp. 363-409, (1984).