



Entiers ultrafriables en progressions arithmétiques

Cécile Dartyge, David Feutrie, Gérald Tenenbaum

► To cite this version:

Cécile Dartyge, David Feutrie, Gérald Tenenbaum. Entiers ultrafriables en progressions arithmétiques. Quarterly Journal of Mathematics, 2022, 73, pp.149-174. 10.1093/qmath/haab025 . hal-03090432v2

HAL Id: hal-03090432

<https://hal.science/hal-03090432v2>

Submitted on 7 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Entiers ultrafriables en progressions arithmétiques

Cécile Dartyge, David Feutrie & Gérald Tenenbaum

(version 7/4/2021, 2h56)

Abstract

A natural integer is called y -ultrafriable if none of the prime powers occurring in its canonical decomposition exceed y . We investigate the distribution of y -ultrafriable integers not exceeding x among arithmetic progressions to the modulus q . Given a sufficiently small, positive constant ε , we obtain uniform estimates valid for $q \leq y^{c/\log_2 y}$ whenever $\log y \leq (\log x)^\varepsilon$, and for $q \leq \sqrt{y}$ if $(\log x)^{2+\varepsilon} \leq y \leq x$.

Keywords : ultrafriable integers, friable integers, saddle-point estimates, sieve, Siegel zero, Gaussian distribution, local behaviour.

2010 Mathematics Subject Classification : primary 11N25; secondary 11N35, 11N37, 11N60.

1 Introduction

Soit $y > 0$. Un entier positif n est dit y -friable si son plus grand facteur premier, noté $P^+(n)$ avec la convention $P^+(1) = 1$, n'excède pas y . Pour $x > 0$, $y > 0$, nous désignons par $S(x, y)$ l'ensemble des entiers y -friables inférieurs ou égaux à x et par $\Psi(x, y)$ son cardinal. Les propriétés structurelles de l'ensemble $S(x, y)$ ont fait l'objet d'une abondante littérature depuis une trentaine d'années, notamment concernant sa répartition dans les progressions arithmétiques : voir par exemple Fouvry & Tenenbaum [5], Hildebrand & Tenenbaum [9, 10], La Bretèche & Tenenbaum [2], Granville [6, 7], Soundararajan [14], Harper [8].

Quoique également susceptible d'intéressantes applications dans diverses branches des mathématiques — cf. [16] et la bibliographie incluse — une notion voisine, celle d'entier *ultrafriable*, a reçu beaucoup moins d'attention. Un entier naturel est dit y -ultrafriable s'il n'est divisible par aucune puissance de nombre premier excédant y . Pour $x > 0$, $y > 0$, nous désignons par $U(x, y)$ l'ensemble des entiers y -ultrafriables n'excédant pas x et par $\Upsilon(x, y)$ son cardinal.

Des estimations satisfaisantes de $\Upsilon(x, y)$ ont été obtenues dans [16]. Nous nous proposons ici d'aborder la question de la répartition des entiers ultrafriables dans les progressions arithmétiques en évaluant le comportement asymptotique des quantités

$$\Upsilon_q(x, y) := \sum_{\substack{n \in U(x, y) \\ (n, q) = 1}} 1, \quad \Upsilon(x, y; a, q) := \sum_{\substack{n \in U(x, y) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1$$

sous des conditions aussi peu restrictives que possibles concernant les variables x , y et q . Notons toutefois qu'une prise en compte plus fine de la répartition des zéros des fonctions L de Dirichlet permettrait d'étendre, dans les résultats présentés ci-dessous, le domaine de variation de la variable q . Nous avons préféré reporter ces complications à un prochain travail.

Désignons classiquement par $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier naturel n , et par $\omega(n)$ le nombre de ses facteurs premiers, comptés sans multiplicité. Notons par ailleurs $\pi(y)$ le nombre des nombres premiers n'excédant pas y .

Soit $y \geq 1$. Pour tout nombre premier p , nous avons $p^\nu \leq y$ si, et seulement si, $\nu \leq \nu_p = \nu_p(y) := \lfloor \log y / \log p \rfloor$. Posant

$$\psi_q(y) := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \nu_p \log p, \quad N_{q,y} := e^{\psi_q(y)},$$

il s'ensuit que $x \mapsto \Upsilon_q(x, y)$ est la fonction de comptage des diviseurs de $N_{q,y}$. Ainsi

$$\Upsilon_q(x, y) = \tau(N_{q,y}) = \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} (1 + \nu_p) \quad (x \geq N_{q,y})$$

et donc

$$\Upsilon_q(x, y) = 2^{\pi(y) + O(\sqrt{y}/\log y)} \quad (x \geq N_{q,y}, \omega(q) \ll \sqrt{y}/\log y),$$

Comme la symétrie des diviseurs de $N_{q,y}$ autour de $\sqrt{N_{q,y}}$ implique

$$\Upsilon_q(x, y) = \tau(N_{q,y}) - \Upsilon_q\left(\left(N_{q,y}/x\right)^-, y\right) \quad \left(\sqrt{N_{q,y}} \leq x \leq N_{q,y}\right),$$

nous pouvons restreindre l'étude de $\Upsilon_q(x, y)$ au cas

$$x < \sqrt{N_{q,y}}, \quad \text{i.e.} \quad \psi_q(y) > 2 \log x.$$

Pour simplifier l'exposition, nous considérerons en fait le domaine légèrement étendu

$$(1.1) \quad x \geq y \geq 2, \quad \psi(y) > 2 \log x,$$

où $\psi(y) := \psi_1(y)$ désigne la fonction de Tchébychev.

Nous restreignons également l'étude de $\Upsilon(x, y; a, q)$ au cas $(a, q) = 1$. Cette contrainte pourrait être levée au prix de quelques complications techniques. En effet, posant $d := (a, q)$, de sorte que $(a/d, q/d) = 1$, nous avons $\Upsilon(x, y; a, q) = 0$ si $d \notin U(x, y)$, et, dans le cas contraire,

$$\Upsilon(x, y; a, q) = \sum_{\substack{m \leq x/d \\ m \equiv a/d \pmod{q/d} \\ p^\nu \parallel m \Rightarrow \nu \leq \nu_p - v_p(d)}} 1,$$

où $v_p(d)$ désigne la valuation p -adique de d . Les techniques développées dans le présent travail peuvent être adaptées pour évaluer cette quantité : il suffit essentiellement de remplacer la série de Dirichlet $Z_q(s, y)$ introduite en (2.4) *infra* par

$$Z_q(s, y) \prod_{\substack{p^\nu \parallel d \\ p \nmid q/d}} \frac{1 - p^{-(\nu_p + 1 - \nu)s}}{1 - p^{-s}}.$$

Un exemple de l'estimation subséquente est donné à la Remarque 2.8 *infra*.

2 Résultats

2.1 Évaluation de $\Upsilon_q(x, y)$

Tenenbaum [16] a obtenu, pour tout $\varepsilon > 0$, l'estimation

$$(2.1) \quad \Upsilon(x, y) = \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{u \log 2u}{\sqrt{y} \log y}\right) \right\} \quad (x \geq y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}),$$

où, ici et dans la suite, nous notons $u := \log x / \log y$ ($x \geq 2, y \geq 2$). La même méthode permet d'établir la pertinence de l'approximation de $\Upsilon_q(x, y)$ par

$$\Psi_q(x, y) := \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ (n, q) = 1}} 1$$

pour ces mêmes « grandes » valeurs de y , et un large domaine en q . Nous renvoyons à [9, 2, 3] et à la bibliographie de ces travaux pour des évaluations explicites et implicites de $\Psi_q(x, y)$.

Théorème 2.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Sous les conditions*

$$(2.2) \quad x \geq y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}, \quad P^+(q) \leq y, \quad \omega(q) \ll \sqrt{y},$$

nous avons

$$(2.3) \quad \Upsilon_q(x, y) = \Psi_q(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{qu \log 2u}{\varphi(q) \sqrt{y} \log y} \right) \right\}.$$

Notons que le terme d'erreur de (2.3) tend bien vers 0 dans le domaine (2.2) : il est en fait $\ll 1/(\log x)^{\varepsilon/2}$.

L'énoncé relatif aux petites valeurs de y nécessite quelques notations supplémentaires. Nous désignons par

$$(2.4) \quad Z_q(s, y) := \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{1 - p^{-(\nu_p+1)s}}{1 - p^{-s}} \quad (\Re s > 0).$$

la série de Dirichlet associée à la fonction de comptage $\Upsilon_q(x, y)$, convenons de poser $Z(s, y) := Z_1(s, y)$, et notons

$$\varphi_1(s, y) := -\frac{Z'(s, y)}{Z(s, y)} = \sum_{p \leq y} \left\{ \frac{\log p}{p^s - 1} - \frac{(\nu_p + 1) \log p}{p^{(\nu_p+1)s} - 1} \right\} \quad (\Re s > 0, y \geq 2).$$

Ainsi qu'observé dans [16], l'équation

$$(2.5) \quad \varphi_1(\sigma, y) = \log x \quad (\sigma > 0)$$

possède, sous la condition (1.1), une unique solution $\beta = \beta(x, y)$, qui est donc le point-selle relatif à l'intégrale de Perron pour $\Upsilon(x, y)$.

Désignons par

$$(2.6) \quad \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt \quad (z \in \mathbb{R})$$

la fonction de répartition décroissante de la loi gaussienne, et posons

$$G(z) := e^{z^2/2} \Phi(z) \quad (z \in \mathbb{R}),$$

de sorte que

$$(2.7) \quad G(z) = \frac{1}{2} + O(z) \quad (z \rightarrow 0), \quad G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} \left\{ 1 - \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \right\} \quad (z \rightarrow +\infty).$$

L'estimation suivante a été établie dans [16] :

$$(2.8) \quad \Upsilon(x, y) = x^\beta Z(\beta, y) G(\beta \sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} \quad (2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^3),$$

où nous avons posé

$$\sigma_2 := -\varphi'_1(\beta, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\} \frac{w-1}{w} u (\log y)^2 \quad (2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^3),$$

avec $w := \psi(y) / \log x$.

Nous évaluons le rapport $\Upsilon_q(x, y)/\Upsilon(x, y)$ en exploitant l'approximation (2.8), relevant du paramètre implicite β . La démarche est analogue à celle de [2], où La Bretèche et Tenenbaum recourent à l'approximation de $\Psi(x, y)$ par la méthode du col — cf. [9] — pour évaluer $\Psi_q(x, y)/\Psi(x, y)$. Dans ce dernier cas, le col de l'intégrale de Perron est défini comme l'unique solution positive $\alpha := \alpha(x, y)$ de l'équation

$$(2.9) \quad \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Notant p_k le k -ième nombre premier, de sorte que $p_k \asymp k \log 2k$ ($k \geq 1$), et

$$(2.10) \quad z_q := p_{\omega(q)} \quad (q \geq 1)$$

avec la convention $p_0 := 2$, nous posons ensuite

$$(2.11) \quad \eta = \eta(x, y) := \frac{\psi(y)}{\log x} - 2, \quad \vartheta_q = \vartheta_q(y) := \frac{\log z_q}{\log y} \asymp \frac{\log\{2 + \omega(q)\}}{\log y} \quad (q \geq 1),$$

et introduisons les termes d'erreur $\Delta_q = \Delta_q(x, y)$ et $D_q = D_q(x, y)$ définis par

$$(2.12) \quad \Delta_q := \begin{cases} \frac{(\log x)^{\vartheta_q}}{\log y} \left(1 + \frac{1}{\vartheta_q \log(1 + \eta)}\right) & \text{si } 2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^2, \\ \frac{\vartheta_q \{u \log 2u\}^{\vartheta_q}}{1 + \vartheta_q \log 2u} & \text{si } y > (\log x)^2, \end{cases}$$

et $D_q := \min\{\omega(q), \Delta_q\}$. Il est à noter que, lorsque $y = (\log x)^{1+\lambda}$ avec $\lambda \asymp 1$, les deux expressions de Δ_q apparaissant dans (2.12) sont du même ordre de grandeur.

Posant

$$g_q(s) := \prod_{p|q} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{-(\nu_p+1)s}} \quad (q \geq 1, s \in \mathbb{C}),$$

et notant, ici et dans la suite, \log_k la k -ième itérée de la fonction logarithme ($k \geq 1$), nous obtenons le résultat suivant, où x_0 désigne une constante absolue assez grande.

Théorème 2.2. *Soit $\varepsilon > 0$. Les assertions suivantes sont valides sous les conditions*

$$(2.13) \quad x \geq y \geq 2, \quad x > x_0, \quad 2 \log x < \psi(y) \leq \exp((\log x)^{1/5}/(\log_2 x)^{(1+\varepsilon)/5}),$$

$$(2.14) \quad q \geq 1, \quad P^+(q) \leq y, \quad \omega(q) \ll y^{1/2-(1+\varepsilon)(\log_2 u)/\log u}.$$

(i) *Nous avons*

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \Upsilon_q(x, y) &= g_q(\beta) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1 + D_q^2}{u} + \frac{D_q(1 + \eta)}{\sqrt{u} + \eta u}\right) \right\} \\ &= x^\beta Z_q(\beta, y) G(\beta \sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{1 + D_q^2}{u} + \frac{D_q(1 + \eta)}{\sqrt{u} + \eta u}\right) \right\}, \end{aligned}$$

et donc, lorsque $\eta \gg 1$,

$$\Upsilon_q(x, y) = g_q(\beta) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1 + \Delta_q^2}{u}\right) \right\}.$$

(ii) *Si de plus $\eta \leq \frac{1}{2}$, alors*

$$(2.16) \quad \Upsilon_q(x, y) = g_q(\beta) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + R + O\left(\frac{1 + \omega(q)^2}{u}\right) \right\}$$

avec $R \asymp \omega(q)/(\sqrt{u} + \eta u)$.

(iii) Sous la condition supplémentaire $\eta = o(1/\sqrt{u})$, nous avons

$$(2.17) \quad \Upsilon_q(x, y) = g_q(\beta) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + \frac{\omega(q)}{\sqrt{\pi u}} + O\left(\eta \omega(q) + \frac{\log q}{\sqrt{u} \log y} + \frac{\omega(q)^2}{u}\right) \right\}.$$

Remarques 2.3. (a) Sous la condition (2.14), et si en outre $0 < \eta \leq 1$, nous avons $\Delta_q \asymp \{1 + \omega(q)\}/\eta$ et donc $D_q \asymp \omega(q)$.

(b) Ainsi que l'attestent les formules (3.3) et (3.4) infra, les points-selles α et β sont proches lorsque $y > (\log x)^{1+\varepsilon}$, ce qui implique alors $\Delta_q \asymp E_q$, où E_q est le terme d'erreur introduit dans [2]. Cela permet de faire appel à certaines estimations établies dans [2], notamment

$$(2.18) \quad \Delta_q(1 + \Delta_q) \ll \vartheta_q \log(u+1) \ll 1 \quad \left(y > (\log x)^{1+\varepsilon}, \omega(q) \ll y^{1/\log(u+2)} \right).$$

Il s'ensuit en particulier que, dans les hypothèses du Théorème 2.2, tous les termes d'erreur y apparaissant tendent vers 0.

(c) Le terme principal de la seconde formule (2.15) constitue également une bonne approximation dans le domaine complémentaire

$$(2.19) \quad y > (\log x)^{2+\varepsilon}, \quad \omega(q) \ll \sqrt{y}/\log y.$$

En effet, il résulte de [2, Cor. 2.2], (2.3) avec $q = 1$, (2.8), et (3.3), (3.4) infra, que, sous l'hypothèse (2.19), nous avons

$$\begin{aligned} \Psi_q(x, y) &= g_q(\alpha) \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} = g_q(\alpha) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} \\ &= g_q(\alpha) x^\beta Z(\beta, y) G(\beta\sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} \\ &= x^\beta Z_q(\beta, y) G(\beta\sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Par (2.3), nous obtenons donc, sous les mêmes hypothèses,

$$(2.20) \quad \Upsilon_q(x, y) = x^\beta Z_q(\beta, y) G(\beta\sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{qu \log 2u}{\varphi(q) \sqrt{y} \log y} + \frac{1}{u}\right) \right\}.$$

(d) Comme $\Upsilon_q(x, y)$ ne dépend que du noyau sans facteur carré de q et comme $\log q \leq \omega(q) \log y$ si $\mu(q)^2 = 1$ (où μ désigne la fonction de Möbius), $P^+(q) \leq y$, l'ordre de grandeur du second terme d'erreur de (2.17) ne dépasse pas celui du terme principal complémentaire $\omega(q)/\sqrt{\pi u}$.

2.2 Évaluation de $\Upsilon(x, y; a, q)$

Notre approche repose, d'une part, sur une majoration des quantités

$$\Upsilon(x, y; \chi) := \sum_{n \in U(x, y)} \chi(n),$$

lorsque χ est un caractère de Dirichlet de module q distinct du caractère principal χ_0 , et, d'autre part, sur l'évaluation de Granville [7]

$$(2.21) \quad \Psi(x, y; a, q) := \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 = \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log q}{u^\varepsilon \log y} + \frac{1}{\log y}\right) \right\},$$

valable, pour tout $\varepsilon > 0$, sous les conditions $x \geq y \geq q^{1+\varepsilon}$, et avec $c = c(\varepsilon) > 0$.

Le résultat suivant rassemble nos résultats relatifs à la première voie. Nous posons

$$(2.22) \quad Y_\varepsilon := Y_\varepsilon(y) = e^{(\log y)^{3/2-\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0, y \geq 2)$$

et convenons de désigner, dans toute la suite, par c_j ($j = 1, 2, \dots$) des constantes absolues positives convenablement choisies.

Théorème 2.4. *Soit $A > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ assez petits, sous les conditions*

$$(2.23) \quad x \geq 2, \quad 2 \log x < \psi(y) \leq e^{(\log x)^\varepsilon},$$

$$(2.24) \quad 2 \leq q \leq y^{c_0/\log_2 y},$$

et pour tout caractère de Dirichlet non principal χ de module q , nous avons

$$(2.25) \quad \Upsilon(x, y; \chi) \ll \Upsilon_q(x, y) \left\{ e^{-c_1 u / \{1 + \vartheta(\chi)(\log u)^4\}} + Y_\varepsilon^{-1} \right\}$$

où $\vartheta(\chi)$ vaut 0 ou 1 et n'est non nul que si $q > (\log y)^A$ et si χ est égal à un unique caractère exceptionnel, réel.

Le caractère exceptionnel apparaissant dans cet énoncé est précisément défini au § 4.4 — voir notamment la formule (4.24).

Le terme principal attendu pour $\Upsilon(x, y; a, q)$ est $\Upsilon_q(x, y)/\varphi(q)$, où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Nous déduisons du Théorème 2.4 l'évaluation suivante, valable pour les petites valeurs de y .

Théorème 2.5. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$, $(a, q) = 1$, et sous les hypothèses (2.23), (2.24), nous avons*

$$(2.26) \quad \Upsilon(x, y; a, q) = \frac{\Upsilon_q(x, y)}{\varphi(q)} \left\{ 1 + O\left(e^{-c_1 u / (\log u)^4} + Y_\varepsilon^{-1}\right) \right\}.$$

En l'absence de caractère de Siegel modulo q , on peut substituer u à $u/(\log u)^4$ dans le terme d'erreur de (2.26).

Le résultat suivant, dont la démonstration repose sur (2.21), fournit une évaluation de $\Upsilon(x, y; a, q)$ pour les grandes valeurs de y .

Théorème 2.6. *Pour une valeur convenable de $c_2 > 0$, tout $\varepsilon > 0$, et sous les conditions $x \geq y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}$, $q \leq \sqrt{y}$, et $(a, q) = 1$, nous avons*

$$(2.27) \quad \Upsilon(x, y; a, q) = \frac{\Upsilon_q(x, y)}{\varphi(q)} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log q}{u^{c_2} \log y} + \frac{1}{\log y}\right) \right\}.$$

Remarque 2.7. *Dans le domaine de validité commun à (2.26) et (2.27), le terme d'erreur de (2.26) est le plus précis des deux. La discontinuité qualitative observée d'un domaine à l'autre reflète la disparité des méthodes employées.*

Remarque 2.8. *Ainsi qu'évoqué plus haut, les démonstrations des Théorèmes 2.4, 2.5 et 2.6 peuvent être adaptées pour traiter le cas $d := (a, q) > 1$. Supposons par exemple $\mu(d)^2 = 1$ et $(q/d, d) = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et sous les conditions (2.23) et (2.24), nous avons alors*

$$\Upsilon(x, y; a, q) = \frac{h_d(\beta) \Upsilon_{q/d}(x/d, y)}{\varphi(q/d)} \left\{ 1 + O\left(e^{-c_1 u / (\log u)^4} + Y_\varepsilon^{-1}\right) \right\}$$

où

$$h_d(s) := \prod_{p|d} \frac{1 - p^{-\nu_p s}}{1 - p^{-(\nu_p+1)s}} \quad (\Re s > 0).$$

3 Cols

Pour $v > 1$, désignons par $\xi(v)$ l'unique solution de l'équation $e^{\xi(v)} = 1 + v\xi(v)$, et convenons que $\xi(1) := 0$. Nous avons

$$(3.1) \quad \xi(v) = \log(v \log v) + O\left(\frac{\log_2 v}{\log v}\right) \quad (v \geq 3),$$

et renvoyons par exemple aux articles [10, 11] ou à [15, ch. III.5] pour une description plus précise du comportement asymptotique de $\xi(v)$ lorsque $v \rightarrow \infty$.

Posons encore

$$(3.2) \quad L_\varepsilon(y) := e^{(\log y)^{3/5-\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0, y \geq 2).$$

Il est établi dans [9] que, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$(3.3) \quad \alpha = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{u(\log y)^2} + \frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \quad ((\log x)^{1+\varepsilon} < y \leq x).$$

Les estimations suivantes du col β ont été obtenues dans [16]. Rappelons la définition du paramètre η en (2.11).

Lemme 3.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Nous avons*

$$(3.4) \quad \beta(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{u(\log y)^2} + \frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) & ((\log x)^{1+\varepsilon} < y \leq x), \\ \frac{1 + O(1/\log y)}{\log y} \log(1 + \eta) & (2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^3). \end{cases}$$

Compte tenu de (3.1), nous pouvons noter, à fins de référence ultérieure, que

$$(3.5) \quad 1 - \beta \asymp \frac{\log(2u)}{\log y} \quad (\psi(y) > 2 \log x).$$

Lemme 3.2. *Uniformément pour $x \geq y \geq 2$, $\psi(y) > 2 \log x$, nous avons*

$$(3.6) \quad \frac{y^{1-\beta} - 1}{1 - \beta} \asymp \log x,$$

$$(3.7) \quad y^{1-\beta} \asymp u \log 2u.$$

Démonstration. Ces estimations découlent du Lemme 3.1 via quelques calculs. On peut également observer que, lorsque $y \geq (\log x)^2$, l'estimation (3.6) résulte directement du lemme 3 de [9] et de la première formule (3.4). Sous la condition $2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^3$, elle découle de l'estimation (2.16) de [16] et de (3.5) sous la forme $(1 - \beta) \asymp 1$. La relation (3.7) est une conséquence immédiate. \square

4 Lemmes

4.1 Majoration du terme d'erreur D_q

Lemme 4.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Sous la condition (2.14), nous avons*

$$(4.1) \quad D_q \ll \frac{\sqrt{u}}{(\log 2u)^{1/2+\varepsilon}}.$$

Démonstration. Lorsque $\eta \leq 1$, l'estimation $D_q \asymp \omega(q)$ résulte de la Remarque 2.3(a). Comme cette hypothèse implique $y \ll \log x$ et donc $\log y \asymp \log 2u$, il suit

$$D_q \asymp \omega(q) \ll (u \log y)^{1/2 - (1+\varepsilon)(\log_2 2u)/\log 2u} \ll \frac{\sqrt{u}}{(\log 2u)^{1/2+\varepsilon}}.$$

Lorsque $\eta > 1$, la condition (2.14) implique

$$\vartheta_q \leq \frac{1}{2} - (1+\varepsilon) \frac{\log_2(2u)}{\log 2u} + O\left(\frac{1}{\log y}\right),$$

d'où (4.1), en reportant dans (2.12). \square

4.2 Estimations relatives à la fonction $g_q(s)$

Posons

$$\gamma_q(s) := \log g_q(s) = \sum_{p|q} \left\{ \log(1 - p^{-s}) - \log(1 - p^{-(\nu_p+1)s}) \right\} \quad (\Re s > 0),$$

où, dans le membre de droite, les logarithmes complexes sont pris en détermination principale. Introduisons également la quantité

$$(4.2) \quad C_q := \min\{\omega(q), \Delta_q^2\}$$

et, dans toute la suite, convenons que u_0 désigne une constante absolue assez grande.

Lemme 4.2. *Sous les conditions (2.14) et*

$$(4.3) \quad \psi(y) > 2 \log x, \quad u \geq u_0,$$

nous avons

$$(4.4) \quad \gamma'_q(\beta) \ll D_q \log y, \quad -\gamma''_q(\beta) \ll C_q (\log y)^2.$$

Sous l'hypothèse supplémentaire $\eta \ll 1$, nous avons

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \gamma'_q(\beta) &= \frac{1}{2} \omega(q) \log y + O(\eta \omega(q) \log y + \log q), \\ \gamma''_q(\beta) &= \frac{1}{12} \omega(q) (\log y)^2 + O(\eta \omega(q) (\log y)^2 + (\log q) \log y). \end{aligned}$$

Démonstration. Ainsi qu'il a été observé au lemme 3.13 de [2], les fonctions γ'_q et $-\gamma''_q$ sont décroissantes et positives sur $]0, \infty[$. Nous avons

$$\begin{aligned} \gamma'_q(\sigma) &= \sum_{p|q} \left\{ \frac{\log p}{p^\sigma - 1} - \frac{(\nu_p + 1) \log p}{p^{(\nu_p+1)\sigma} - 1} \right\}, \\ -\gamma''_q(\sigma) &= \sum_{p|q} \left\{ \frac{(\log p)^2 p^\sigma}{(p^\sigma - 1)^2} - \frac{(\nu_p + 1)^2 (\log p)^2 p^{(\nu_p+1)\sigma}}{(p^{(\nu_p+1)\sigma} - 1)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Un développement limité à l'ordre 3 en 0 fournit donc

$$\begin{aligned} \gamma'_q(0) &= \frac{1}{2} \sum_{p|q} \nu_p \log p \ll \omega(q) \log y, \\ -\gamma''_q(0) &= \frac{1}{12} \sum_{p|q} \nu_p (\nu_p + 2) (\log p)^2 \ll \omega(q) (\log y)^2. \end{aligned}$$

Pour achever la preuve de (4.4), il reste à montrer que

$$(4.6) \quad \gamma_q^{(j)}(\beta) \ll (\Delta_q \log y)^j \quad (j = 1, 2).$$

À cette fin, nous pouvons supposer que $\eta > 1$, puisque, dans le cas contraire, nous avons $\Delta_q \gg 1 + \omega(q)$, ainsi qu'observé à la Remarque 2.3(a). Nous utiliserons les majorations

$$(4.7) \quad \gamma'_q(\sigma) \ll \frac{z_q^{1-\sigma} - 1}{(1 - z_q^{-\sigma})(1 - \sigma)}, \quad -\gamma''_q(\sigma) \ll \frac{(z_q^{1-\sigma} - 1) \log z_q}{(1 - z_q^{-\sigma})^2(1 - \sigma)} \quad (0 < \sigma < 1),$$

établies au lemme 3.13 de [2].

Considérons d'abord le cas $y \leq (\log x)^2$. Parallèlement à la preuve du lemme 3.15 de [2], nous observons que les relations (4.7), (3.4), (3.5) et (3.7) impliquent

$$\begin{aligned} \gamma'_q(\beta) &\ll y^{(1-\beta)\vartheta_q} \left(1 + \frac{1}{\beta \log z_q}\right) \ll (\log x)^{\vartheta_q} \left(1 + \frac{1}{\vartheta_q \log(1+\eta)}\right) = \Delta_q \log y, \\ -\gamma''_q(\beta) &\ll (\log x)^{\vartheta_q} \left(1 + \frac{1}{\beta \log z_q}\right)^2 \vartheta_q \log y = (\Delta_q \log y)^2 \frac{\vartheta_q \log y}{(\log x)^{\vartheta_q}} \ll (\Delta_q \log y)^2, \end{aligned}$$

ce qui fournit bien (4.6).

Lorsque $y > (\log x)^2$, compte tenu de la Remarque 2.3(b), l'estimation (4.6) est une conséquence directe de [2, lemme 3.14] sous la forme

$$\gamma_q^{(j)}(\beta) \ll \Delta_q \vartheta_q^{j-1} (\log y)^j \quad (j = 1, 2)$$

et de la majoration $\vartheta_q \ll \Delta_q$, énoncée à la formule (2.10) du même article. \square

4.3 Estimations impliquant les séries $Z_q(s, y)$

Posons

$$(4.8) \quad \varphi_{j,q}(s, y) := (-1)^j \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \frac{Z'_q(s, y)}{Z_q(s, y)}, \quad \sigma_{j,q} := \varphi_{j,q}(\beta, y) \quad (j \geq 1, q \geq 1),$$

et convenons d'omettre le second indice lorsque $q = 1$. Le lemme suivant est une adaptation relative aux quantités (4.8) de [16, lemme 2.5], correspondant au cas $q = 1$.

Lemme 4.3. *Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Sous les conditions (2.14) et (4.3), nous avons*

$$(4.9) \quad \sigma_{j,q} \ll u(\log y)^j.$$

Lorsque $j = 3$, on peut multiplier le membre de droite par $\min(1, \beta \log y) + 1/\sqrt{u}$. De plus, dans les mêmes hypothèses,

$$(4.10) \quad \sigma_{2,q} = \sigma_2 \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log u}\right) \right\}.$$

Sous les conditions supplémentaires $q = 1$ et $\psi(y) \ll (\log x)^3$, nous avons

$$(4.11) \quad \sigma_2 = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\} \frac{1+\eta}{2+\eta} u(\log y)^2.$$

Démonstration. Lorsque $y \ll (\log x)^3$, toutes les majorations découlent directement de [16, lemme 2.5] et des inégalités $\sigma_{j,q} \leq \sigma_j$ ($j \geq 1$). Dans le domaine $y > (\log x)^2$, la même approche fonctionnelle, *mutatis mutandis*, en utilisant (3.7). L'égalité (4.11) coïncide avec [16, formule (2.21)].

Il reste à établir (4.10). Par (4.4), nous avons

$$\sigma_2 - \sigma_{2,q} = -\gamma_q''(\beta) \ll C_q(\log y)^2.$$

Comme la majoration (4.1) implique $\omega(q) \ll \sqrt{u}$ lorsque $\psi(y) \ll \log x$ et

$$\Delta_q^2 \ll u/\log u$$

dans la circonstance complémentaire, nous obtenons bien l'évaluation annoncée. \square

Rappelons la définition (2.22) de Y_ε ($\varepsilon > 0$).

La démonstration du lemme suivant étend à $Z_q(s, y)$ celle de [16, lemme 2.6].

Lemme 4.4. *Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, et sous les conditions (2.14), (4.3), nous ayons*

$$(4.12) \quad \left| \frac{Z_q(\beta + i\tau, y)}{Z_q(\beta, y)} \right| \leq \begin{cases} e^{-c_3 u (\tau \log y)^4} & (|\tau| \leq 1/\log y), \\ e^{-c_3 u \tau^4 / (1 + \tau^4)} & (1/\log y < |\tau| \leq Y_\varepsilon). \end{cases}$$

Démonstration. Posons $s = \beta + i\tau$ ($\tau \in \mathbb{R}$) et notons $\|z\|$ la distance du nombre réel z à l'ensemble des entiers. Les calculs des pages 342-343 de [16] fournissent, pour une constante convenable $\kappa > 0$,

$$\left| \frac{Z_q(s, y)}{Z_q(\beta, y)} \right| \leq e^{-\kappa W_q}$$

avec

$$W_q := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{\|(\tau/2\pi) \log p\|^4}{p^\beta}.$$

Lorsque $|\tau| \leq 1/\log y$, et puisque (2.14) implique $z_q \leq y^{3/4}$, nous avons, grâce à (3.7),

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \sum_{p \mid q} \frac{\|(\tau/2\pi) \log p\|^4}{p^\beta} &\ll \tau^4 (\log z_q)^3 \frac{z_q^{1-\beta} - 1}{1 - \beta} \\ &\ll \tau^4 (\log y)^3 \frac{y^{3(1-\beta)/4} - 1}{1 - \beta} \ll \frac{(\tau \log y)^4 u^{3/4}}{(\log 2u)^{1/4}}. \end{aligned}$$

Comme la minoration (2.27) de [16] implique

$$(4.14) \quad W_1 \gg \frac{\tau^4 (\log y)^3 (y^{1-\beta} - 1)}{1 - \beta} \gg u (\tau \log y)^4,$$

et comme u peut être choisi assez grand en vertu de (4.3), il suit $W_q \gg u (\tau \log y)^4$, ce qui implique bien (4.12) dans ce cas.

Lorsque $1/\log y \leq |\tau| \leq \sqrt{y}$, l'argument employé dans la démonstration de [13, lemme 5.12] fournit

$$(4.15) \quad \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} \|(\tau/2\pi) \log p\|^4 \gg \frac{\tau^4}{1 + \tau^4} \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} 1 \quad (y^{3/4} < z \leq y).$$

Or, l'hypothèse (2.25) implique $\omega(q) = o(z/\log z)$. Il suit

$$(4.16) \quad \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} 1 \gg \frac{z}{\log z},$$

d'où $W_q \gg \tau^4 u / (1 + \tau^4)$ par sommation d'Abel, compte tenu de (3.6) — cf. [16].

Lorsque $\sqrt{y} < |\tau| \leq Y_\varepsilon$, le terme de gauche de (4.15) est

$$\gg \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} \sin^4\left(\frac{1}{2}\tau \log p\right) = \frac{3}{8} \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} \left\{ \cos(\tau \log p) - \frac{1}{4} \cos(2\tau \log p) \right\}.$$

Comme $\omega(q) = o(z/\log z)$, l'argument de [16, lemme 2.6] (relatif au cas $q = 1$) permet de montrer que la dernière somme est $o(z/\log z)$. Compte tenu de (4.16), une sommation d'Abel permet de conclure. \square

Lemme 4.5. *Il existe une constante $c_4 > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ et sous les conditions (2.14), (4.3) et $1 \leq z \leq \min\{Y_\varepsilon, e^{c_4 u}\}$, nous ayons*

$$(4.17) \quad \Upsilon_q(x + x/z, y) - \Upsilon_q(x, y) \ll x^\beta Z_q(\beta, y)/z.$$

Démonstration. La preuve est identique à celle de [16, lemme 2.7] en remplaçant Z par Z_q , et en faisant appel au Lemme 4.4. \square

4.4 Estimations relatives aux séries $Z(s, \chi; y)$

Pour tout caractère de Dirichlet χ non principal modulo q , posons

$$Z(s, \chi; y) := \prod_{p \leq y} \frac{1 - \chi(p)^{\nu_p+1} p^{-(\nu_p+1)s}}{1 - \chi(p) p^{-s}} \quad (\Re(s) > 0),$$

et, sous la condition supplémentaire $|\tau| \leq Y_\varepsilon$, définissons également

$$(4.18) \quad \mathcal{W}_q(y, \tau; \chi) := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{\{1 - \Re(\chi(p)/p^{i\tau})\}^2}{p^\beta},$$

et convenons d'omettre l'indice q lorsque $q = 1$.

Nous nous proposons ici d'établir les propositions auxiliaires nécessaires aux démonstrations des Théorèmes 2.4 et 2.5.

La preuve de l'énoncé suivant est analogue à celle de [16, lemme 2.6].

Lemme 4.6. *Pour un choix convenable des constantes $c_0 > 0$, $c_5 > 0$, nous avons*

$$(4.19) \quad \left| \frac{Z(\beta + i\tau, \chi; y)}{Z_q(\beta, y)} \right| \leq e^{-c_5 \mathcal{W}_q(y, \tau; \chi)} \quad \left(\tau \in \mathbb{R}, \quad q \leq y^{c_0 / \log_2 y} \right).$$

Démonstration. Soit $s := \beta + i\tau$. Un calcul de routine fournit

$$(4.20) \quad \left| \frac{Z(s, \chi; y)}{Z_q(\beta, y)} \right|^2 = \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{1 + 4 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha_p(\nu_p + 1)\right) / \{p^{\beta(\nu_p+1)}(1 - p^{-\beta(\nu_p+1)})^2\}}{1 + 4 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha_p\right) / \{p^\beta(1 - p^{-\beta})^2\}}$$

où $\alpha_p \in]-\pi, \pi]$ est l'argument du nombre complexe $\chi(p)/p^{i\tau}$.

Posons $\tau_p := \|\alpha_p/2\pi\|$ et $B_p := p^\beta(1 - p^{-\beta})^2$. En raisonnant comme dans la preuve de [16, lemme 2.6], on obtient que le terme général du produit de (4.20) n'excède pas

$$1 - \frac{8\tau_p^2 \sin^2(\pi\tau_p)}{3B_p + 12 \sin^2(\pi\tau_p)}.$$

L'inégalité $|\sin \pi \tau_p| \geq 2\tau_p$ fournit donc, pour une constante convenable $\kappa_0 > 0$,

$$(4.21) \quad \left| \frac{Z(s, \chi; y)}{Z_q(\beta, y)} \right|^2 \leq e^{-\kappa_0 \mathcal{V}_q}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{V}_q := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{\tau_p^4}{B_p + 4\tau_p^2} \gg \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{\sin^4(\pi \tau_p)}{p^\beta} = \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{(1 - \cos(\alpha_p))^2}{4p^\beta}.$$

Cette minoration implique bien le résultat annoncé. \square

Posons à présent

$$(4.22) \quad \mathcal{D}(y, \tau; \chi) := \sum_{p \leq y} \frac{\{1 - \Re e(\chi(p)/p^{i\tau})\} \log p}{p^\beta}, \quad S(y, \tau; \chi) := \sum_{n \leq y} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^{\beta+i\tau}}.$$

Lemme 4.7. *Sous la condition (1.1), nous avons*

$$(4.23) \quad \mathcal{D}(y, \tau; \chi) = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} - \Re e(S(y, \tau; \chi)) + O\left(\frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left\{ e^{-\sqrt{\log y}} + \frac{1}{u} \right\}\right).$$

Démonstration. Compte tenu de (3.5) et (3.7), une forme forte du théorème des nombres premiers fournit par sommation d'Abel — cf. [2, Lemme 3.5] —

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\beta} = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left\{ 1 + O\left(e^{-\sqrt{\log y}} + \frac{1}{u \log 2u} \right) \right\}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq y} \frac{\chi(p) \log p}{p^{\beta+i\tau}} - S(y, \tau; \chi) &\ll \sum_{\substack{p^\nu \leq y \\ \nu \geq 2}} \frac{\log p}{p^{\nu\beta}} \ll (1 + y^{1/2-\beta}) \log y \\ &\ll \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left(\frac{1}{u} + \frac{\log u}{\sqrt{y} \log y} \right). \end{aligned}$$

La formule annoncée découle de ces estimations. \square

Le lemme suivant est consacré à l'étude de $S(y, \tau; \chi)$ par l'approche développée dans [15, lemme III.5.16]. Nous notons χ_1 l'éventuel caractère de Siegel de module $q > 1$ et β_1 le zéro correspondant. Posons

$$\eta(T) := 1/\{(\log T)^{2/3}(\log_2 T)^{1/3}\}, \quad \eta_q(T) := \min(1/\log q, \eta(T)),$$

de sorte que le théorème de Vinogradov-Korobov (cf. par exemple, [12, ch. 9, p. 176]), garantit que, pour une constante positive convenable $c_6 > 0$, le domaine

$$\{\sigma + i\tau : |\tau| \leq T, \sigma > 1 - c_6 \eta_q(T)\}$$

est une région sans zéro de $L(s, \chi)$ lorsque $\chi \neq \chi_1$. Pour c_7 assez grande, $c_0 > 0$ assez petite, et $q \leq y^{c_0/\log_2 y}$, il existe donc, dès que y est assez grand, au plus un zéro de $\prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi)$ dans la demi-bande horizontale $\sigma > 1 - 3c_7(\log_2 y)/\log y$, $|\tau| \leq Y_\varepsilon$. Nous posons

$$(4.24) \quad \vartheta(\chi) := \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi_1 \text{ et } \beta_1 > 1 - c_7(\log_2 y)/\log y \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Lemme 4.8. *Soit $\varepsilon > 0$ assez petit. Lorsque q satisfait (2.24) et sous la condition*

$$(4.25) \quad \chi \neq \chi_0, \quad |\tau| \leq Y_\varepsilon, \quad x \geq 2, \quad \psi(y) > 2 \log x, \quad y \leq e^{(\log x)^\varepsilon},$$

nous avons

$$(4.26) \quad S(y, \tau; \chi) = -\vartheta(\chi) \frac{y^{\beta_1 - \beta - i\tau}}{\beta_1 - \beta - i\tau} + O\left(\frac{y^{1-\beta}}{(\log y)^3}\right).$$

Démonstration. Nous pouvons supposer x , et donc y , assez grand. Notons

$$w := \beta + i\tau, \quad v := 1 - \beta + 1/\log y.$$

(Ici β désigne bien le point-selle, et non la partie réelle d'un zéro de $L(s, \chi)$, comme souvent dans la littérature.) Il résulte de la formule de Perron effective (cf. [15, cor. II.2.4]) que, sous la condition $|\tau| \leq Y_\varepsilon$, nous avons

$$(4.27) \quad S(y, \tau; \chi) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{v-iY_\varepsilon}^{v+iY_\varepsilon} \frac{L'(s+w, \chi)y^s}{L(s+w, \chi)s} ds + O\left(\frac{y^{1-\beta}(\log y)^3}{Y_\varepsilon}\right).$$

Pour ε assez petit, l'hypothèse (4.25) implique

$$1 - \beta > 4c_7(\log_2 y)/\log y,$$

en vertu de (3.5).

Déplaçons alors le segment d'intégration vers la gauche jusque

$$\delta := 1 - \beta - \{1 + \vartheta(\chi)\}c_7(\log_2 y)/\log y > 2c_7(\log_2 y)/\log y.$$

Lorsque $\chi \neq \chi_1$, la zone traversée ne contient aucun pôle de l'intégrande, alors qu'elle en contient exactement un, à savoir $s = \beta_1 - w$ lorsque $\chi = \chi_1$. De plus, dans les deux cas, le segment translaté est à distance $\geq c_7(\log_2 y)/\log y$ d'un pôle de l'intégrande.

Le théorème des résidus implique alors que l'intégrale de (4.27) vaut

$$(4.28) \quad \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{W}} \frac{L'}{L}(s+w, \chi) \frac{y^s}{s} ds - \vartheta(\chi) \frac{y^{\beta_1 - w}}{\beta_1 - w}$$

où \mathfrak{W} désigne la ligne brisée $[v - iY_\varepsilon, \delta - iY_\varepsilon, \delta + iY_\varepsilon, v + iY_\varepsilon]$ parcourue dans le sens trigonométrique inverse.

Compte tenu du placement de \mathfrak{W} par rapport aux pôles de l'intégrande, on peut établir classiquement, via la formule explicite en fonction des zéros (cf., par exemple, [15, pp. 380-381], que

$$\left| \frac{L'}{L}(s+w, \chi) \right| \ll (\log q Y_\varepsilon)^2 \quad (s \in \mathfrak{W}).$$

L'intégrale de (4.28) est donc

$$\ll (\log y Y_\varepsilon)^3 y^\delta + \frac{y^{1-\beta}(\log y)^3}{Y_\varepsilon} \ll \frac{y^{1-\beta}}{(\log y)^3},$$

quitte à augmenter la valeur de c_7 . Cela complète la démonstration. \square

Lemme 4.9. *Sous les conditions (2.24) et (4.25), nous avons*

$$(4.29) \quad \mathcal{D}(y, \tau; \chi) \gg \frac{y^{1-\beta}}{(1-\beta)\{1 + \vartheta(\chi)(\log_2 x)^2\}}.$$

Démonstration. Conservons les notations de la démonstration du Lemme 4.8. Par (4.23) et (4.26), nous pouvons écrire, sous les hypothèses effectuées,

$$\mathcal{D}(y, \tau; \chi) = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} + \vartheta(\chi) \Re \left(\frac{y^{\beta_1-\beta-i\tau}}{\beta_1-\beta-i\tau} \right) + O \left(\frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left\{ \frac{1}{(\log y)^3} + \frac{1}{u} \right\} \right).$$

Cela implique immédiatement (4.29) si $\vartheta(\chi) = 0$. Dans le cas contraire, nous avons $\chi = \chi_1$, $\beta_1 > 1 - c_7 \log_2 y / \log y$ et $\beta_1 - \beta \gg (\log_2 x) / \log y$.

Si $|\tau| \leq 1 / \log y$, posant $\varphi := \tau \log y - \arctan\{\tau / (\beta_1 - \beta)\}$ il suit

$$\Re \left(\frac{y^{\beta_1-\beta-i\tau}}{\beta_1-\beta-i\tau} \right) = \frac{y^{\beta_1-\beta} \cos \varphi}{|\beta_1-\beta+i\tau|} \geq 0,$$

d'où (4.29).

Si $1 / \log y < |\tau| \leq Y_\varepsilon$, nous avons, pour une constante convenable $c_3 > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \Re \left(\frac{y^{\beta_1-\beta-i\tau}}{\beta_1-\beta-i\tau} \right) \right| &\leq \left| \frac{y^{\beta_1-\beta}}{\beta_1-\beta-i\tau} \right| \leq \frac{y^{1-\beta}}{|1-\beta+i/\log y|} \\ (4.30) \quad &\leq \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left\{ 1 - \frac{c_3}{(\log_2 x)^2} \right\}. \end{aligned} \quad \square$$

5 Preuve du Théorème 2.1

Plaçons-nous dans les hypothèses (2.2) avec, disons, $\varepsilon \in]0, \frac{1}{3}[$, et posons

$$(5.1) \quad f_q(s) := \prod_{p|q} (1 - p^{-s}) \quad (s \in \mathbb{C}).$$

Lorsque x est suffisamment grand, nous avons $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\varepsilon$ d'après (3.3). Il suit

$$(5.2) \quad 0 \leq \Psi_q(x, y) - \Upsilon_q(x, y) \leq \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \Psi_q \left(\frac{x}{p^{\nu_p+1}}, y \right).$$

Sous la condition supplémentaire $y \leq x^{1/3}$, les théorèmes 2.4.(i) et 2.1 de [2] fournissent

$$(5.3) \quad \Psi_q \left(\frac{x}{p^{\nu_p+1}}, y \right) \ll \frac{f_q(\alpha)}{p^{(\nu_p+1)\alpha}} \Psi(x, y) \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{p^{(\nu_p+1)\alpha}}.$$

En vertu des inégalités (5.2) et (5.3), il suit

$$(5.4) \quad \Psi_q(x, y) - \Upsilon_q(x, y) \leq \Psi_q(x, y) S,$$

où l'on a posé

$$(5.5) \quad S := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{1}{p^{(\nu_p+1)\alpha}} \ll \frac{y^{1/2-\alpha}}{\log y} \ll \frac{u \log 2u}{\sqrt{y} \log y},$$

d'après [16, formule (31)]. Cela implique bien (2.3) dans le cas considéré.

Lorsque $x^{1/3} \leq y \leq x$, nous avons $u \leq 3$ et $\Psi_q(x, y) \ll f_q(\alpha)\Psi(x, y) \asymp f_q(\alpha)x$ en vertu de [2, th. 2.4(i)] et, par exemple, [4]. De plus, on déduit aisément de (3.3) que $f_q(\alpha) \asymp f_q(1) = \varphi(q)/q$. La majoration triviale $\Psi_q(x/p^{\nu_p+1}, y) \leq x/p^{\nu_p+1}$ fournit donc

$$\Psi_q(x, y) - \Upsilon_q(x, y) \leq \sum_{p \leq y} \frac{x}{p^{\nu_p+1}} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\sqrt{y} \log y} \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{f_q(\alpha)\sqrt{y} \log y} \ll \frac{q\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)\sqrt{y} \log y}.$$

Cela complète la preuve de (2.3).

6 Preuve du Théorème 2.2

Le lemme suivant étend à $\Upsilon_q(x, y)$ la formule (3.4) de [16].

Lemme 6.1. *Soit c_4 la constante apparaissant au Lemme 4.5. Pour un choix convenable de $c_8 > 0$, et tout $\varepsilon > 0$, nous avons, sous les hypothèses (2.13) et (2.14),*

$$(6.1) \quad \Upsilon_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\beta-iT}^{\beta+iT} \frac{Z_q(s, y)x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^\beta Z_q(\beta, y) \log T}{T}\right)$$

avec $T := e^{2c_8(\log u)^{4/3}} \leq \min(Y_{1/20}, e^{c_4 u})$.

Démonstration. Une version effective de la formule de Perron (cf. [15, thm. II.2.3]) permet de montrer que la différence entre le membre de gauche de (6.1) et le terme principal du membre de droite est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{1}{T} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \in U(y)}} \frac{x^\beta}{n^\beta \{1 + T|\log(x/n)|\}} \\ &\ll \frac{x^\beta Z_q(\beta, y)}{T} + \sum_{|h| \leq T} \frac{x^\beta}{1 + |h|} \left\{ \Upsilon_q(xe^{(h+1)/T}, y) - \Upsilon_q(xe^{h/T}, y) \right\} \\ &\ll \frac{x^\beta Z_q(\beta, y)}{T} \left\{ 1 + \sum_{|h| \leq T} \frac{1}{|h| + 1} \right\}, \end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.5. Cela implique bien (6.1). \square

Pour $1 \leq U \leq V$, désignons par $I_q(U, V)$ la contribution du domaine $U < |\tau| \leq V$ à l'intégrale de (6.1). Nous posons $T_0 := (\log u)^{(1+\varepsilon)/2} / \{\sqrt{u} \log y\}$.

Lemme 6.2. *Pour un choix convenable de $c_9 > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, nous avons, sous les hypothèses (2.13) et (2.14),*

$$(6.2) \quad I_q(T_0, T) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_9(\log 2u)^{1+\varepsilon}}.$$

Démonstration. Posons $T_1 := u^{-1/3} / \log y$, $T_2 := u^{-1/5} / \log y$. D'après le Lemme 4.4, nous pouvons écrire

$$I_q(T_2, T) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) \{I_{21} + I_{22}\},$$

avec

$$I_{21} := \int_{T_2}^{1/\log y} e^{-c_3 u (\tau \log y)^4} \frac{d\tau}{\beta + \tau} \ll e^{-c_3 u (T_2 \log y)^4} \log u \ll e^{-\frac{1}{2} c_3 u^{1/5}}$$

et

$$I_{22} := \int_{1/\log y}^T e^{-c_3 u \tau^4 / (1+\tau^4)} \frac{d\tau}{\tau} \ll x^{-\frac{1}{2} c_3 u / (\log y)^4} \log_2 y + e^{-\frac{1}{2} c_3 u} (\log u)^{4/3}.$$

Il s'ensuit que

$$(6.3) \quad I_q(T_2, T) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_9(\log(2u))^{1+\varepsilon}}.$$

Lorsque $T_1 < |\tau| \leq T_2$, nous avons $\tau^2 \sigma_{2,q} \gg u^{1/3}$ et $\tau^4 \sigma_{4,q} \ll u^{1/5}$, en vertu Lemme 4.3. Il résulte alors d'un développement limité que

$$(6.4) \quad \begin{aligned} Z_q(s, y) x^s &= Z_q(\beta, y) x^\beta e^{i\tau \gamma'_q(\beta) - \tau^2 \sigma_{2,q}/2 + i\tau^3 \sigma_{3,q}/6 + \sigma_{4,q} \tau^4/24 + O(1)} \\ &\ll Z_q(\beta, y) x^\beta e^{-c_{10} u^{1/3}}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$(6.5) \quad I_q(T_1, T_2) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_{11} u^{1/3}}.$$

Lorsque $T_0 < |\tau| \leq T_1$, nous avons $\tau^2 \sigma_{2,q} \gg (\log(2u))^{1+\varepsilon}$ et $\tau^4 \sigma_{4,q} \ll u^{-1/3}$ d'après le Lemme 4.3. Un développement limité fournit donc

$$(6.6) \quad x^s Z_q(s, y) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2 + \tau^4 \sigma_{4,q}/4 + O(1)} \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_{12}(\log(2u))^{1+\varepsilon}}.$$

L'estimation (6.2) découle de (6.3), (6.5) et (6.6). \square

Nous sommes à présent en mesure de compléter la preuve du Théorème 2.2. D'après (6.1) et (6.2), nous avons

$$(6.7) \quad \Upsilon_q(x, y) = I_q(0, T_0) + O\left(x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_9(\log(2u))^{1+\varepsilon}}\right).$$

Évaluons à présent le terme principal de (6.7).

Puisque $T_0^j \sigma_{j,q} \ll 1$ lorsque $j = 3, 4$ et $\varphi_{4,q}(\beta + i\tau, y) \ll \sigma_4^* := u(\log y)^4$ pour $|\tau| \leq 1/\log y$ et $T_0 \gamma'_q(\beta) \ll 1$ grâce à (4.1) et (4.4), nous pouvons écrire

$$(6.8) \quad \begin{aligned} I_q(0, T_0) &= \frac{x^\beta Z_q(\beta, y)}{2\pi} \int_{-T_0}^{T_0} e^{i\tau \gamma'_q(\beta) - \tau^2 \sigma_{2,q}/2 + i\tau^3 \sigma_{3,q}/6 + O(\tau^4 \sigma_4^*)} \frac{d\tau}{\beta + i\tau} \\ &= \frac{x^\beta Z_q(\beta, y)}{2\pi} \left\{ J_0 + iJ_1 + \frac{1}{6}iJ_2 + O(K) \right\} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_0 &:= \int_{-T_0}^{T_0} e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2} \frac{d\tau}{\beta + i\tau}, \quad J_1 := \gamma'_q(\beta) \int_{-T_0}^{T_0} \tau e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2} \frac{d\tau}{\beta + i\tau}, \\ J_2 &:= \sigma_{3,q} \int_{-T_0}^{T_0} \tau^3 e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2} \frac{d\tau}{\beta + i\tau}, \\ K &:= \int_{-T_0}^{T_0} e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2} \left(\tau^6 \sigma_{3,q}^2 + \tau^4 \sigma_4^* + \tau^2 \gamma'_q(\beta)^2 \right) \frac{d\tau}{\beta + |\tau|}. \end{aligned}$$

Des calculs semblables à ceux de la fin de la proposition 2.13 de [1], utilisant le Lemme 4.3, fournissent

$$(6.9) \quad J_0 = 2\pi G(\beta \sqrt{\sigma_{2,q}}) + O(e^{-c_9 u^{1/3}}), \quad J_2 \ll \frac{1}{u(1 + \beta \sqrt{\sigma_{2,q}})}.$$

Par le changement de variables $v = \tau \sqrt{\sigma_{2,q}}$, nous pouvons écrire

$$(6.10) \quad \begin{aligned} K &= \int_{-T_0 \sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0 \sqrt{\sigma_{2,q}}} e^{-v^2/2} \left(\frac{\sigma_{3,q}^2 v^6}{\sigma_{2,q}^3} + \frac{\sigma_4^* v^4}{\sigma_{2,q}^2} + \frac{\gamma'_q(\beta)^2 v^2}{\sigma_{2,q}} \right) \frac{dv}{\beta \sqrt{\sigma_{2,q}} + |v|} \\ &\ll \frac{1 + D_q^2}{u(1 + \beta \sqrt{\sigma_{2,q}})}, \end{aligned}$$

la dernière majoration découlant des Lemmes 4.2 et 4.3.

En tenant à nouveau compte du fait que l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle, le même changement de variables fournit

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{-i\gamma'_q(\beta)}{\sqrt{\sigma_{2,q}}} \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} \frac{v^2 e^{-v^2/2} dv}{\beta^2 \sigma_{2,q} + v^2}, \\ &= \frac{-i\gamma'_q(\beta)}{\sqrt{\sigma_{2,q}}} \left\{ \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} e^{-v^2/2} dv - \beta^2 \sigma_{2,q} \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} \frac{e^{-v^2/2} dv}{\beta^2 \sigma_{2,q} + v^2} \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} e^{-v^2/2} dv &= 1 + O\left(e^{-(\log u)^{1+\varepsilon/2}}\right), \\ \beta\sqrt{\sigma_{2,q}} \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} \frac{e^{-v^2/2} dv}{\beta^2 \sigma_{2,q} + v^2} &= J_0, \end{aligned}$$

et donc

$$(6.11) \quad \frac{iJ_1}{2\pi} = \frac{\gamma'_q(\beta)}{\sqrt{2\pi\sigma_{2,q}}} \left\{ 1 - \beta\sqrt{2\pi\sigma_{2,q}} G(\beta\sqrt{\sigma_{2,q}}) \right\} + O\left(e^{-(\log u)^{1+\varepsilon/2}}\right).$$

En reportant (6.9), (6.10) et (6.11) dans (6.8) puis (6.7), nous obtenons

$$(6.12) \quad \Upsilon_q(x, y) = x^\beta Z_q(\beta, y) G(\beta\sqrt{\sigma_{2,q}}) \left\{ 1 + R_q(\beta) + O\left(\frac{1 + D_q^2}{u}\right) \right\}$$

avec

$$R_q(\beta) := \beta\gamma'_q(\beta) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{2,q}}\beta G(\beta\sqrt{\sigma_{2,q}})} - 1 \right).$$

Comme (2.7) implique

$$(6.13) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}zG(z)} - 1 \asymp \frac{1}{z(z+1)} \quad (z > 0),$$

il vient, par (4.4) et (3.4),

$$(6.14) \quad R_q(\beta) \ll \frac{D_q}{\sqrt{u}(1 + \beta\sqrt{\sigma_{2,q}})} \ll \frac{D_q(1 + \eta)}{\sqrt{u} + \eta u}.$$

Pour obtenir (2.15), il suffit donc de montrer que l'on peut remplacer $\sigma_{2,q}$ par σ_2 dans (6.12) et (6.14) sans altérer le terme d'erreur.

Au vu de (4.10), c'est clair dans le cas de (6.14). Pour traiter le cas de (6.12), observons que l'on a $\sigma_{2,q} - \sigma_2 \ll C_q(\log y)^2$ en vertu de la seconde majoration (4.4), et donc

$$\sqrt{\sigma_{2,q}} - \sqrt{\sigma_2} \ll C_q(\log y)^2 / \sqrt{\sigma_2} \ll C_q(\log y) / \sqrt{u}.$$

Comme il résulte de (2.7) que

$$(6.15) \quad \frac{G'(z)}{G(z)} = z - \frac{1}{\sqrt{2\pi}G(z)} \asymp \frac{-1}{1+z} \quad (z > 0),$$

nous obtenons, par la formule des accroissements finis,

$$(6.16) \quad G(\beta\sqrt{\sigma_{2,q}}) = \left\{ 1 + O\left(\frac{C_q\beta\log y}{\sqrt{u}(1 + \beta\sqrt{\sigma_2})}\right) \right\} G(\beta\sqrt{\sigma_2}).$$

Par (4.10) et l'évaluation de $C_q = \min(\omega(q), \Delta_q^2)$ résultant de la Remarque 2.3(a), le terme d'erreur de (6.16) est en toute circonstance

$$\ll \frac{C_q \beta \log y}{\sqrt{u} + u \beta \log y} \ll \frac{C_q \eta}{\sqrt{u} + \eta u} \ll \begin{cases} \frac{D_q \eta}{\sqrt{u} + \eta u} & \text{si } \eta \leq 1 \\ \frac{D_q^2}{u} & \text{si } \eta > 1. \end{cases}$$

Cela établit bien (2.15).

Pour prouver (2.16), précisons le terme d'erreur de (2.15) lorsque $\eta \leq \frac{1}{2}$. Grâce à (2.8), nous pouvons supposer $q \geq 2$. Nous pouvons également supposer η arbitrairement petit. D'après (3.4), nous avons $\beta \log y \leq 1$ dès que y est assez grand.

En vertu de (4.5), nous pouvons écrire

$$(6.17) \quad \gamma'_q(\beta) = \frac{1}{2} \omega(q) \log y \{1 + O(\mathfrak{R})\}$$

avec $\mathfrak{R} := \eta + (\log q) / \{\omega(q) \log y\}$. Nous pouvons donc remplacer le signe \ll par \asymp dans l'estimation (6.14).

De plus, la seconde estimation (4.5) permet d'écrire

$$(6.18) \quad \sigma_2 - \sigma_{2,q} = \frac{1}{12} \omega(q) (\log y)^2 \{1 + O(\mathfrak{R})\}.$$

Il suit

$$(6.19) \quad \sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_{2,q}} \asymp \frac{\omega(q) \log y}{\sqrt{u}},$$

d'où, par (6.15),

$$(6.20) \quad \frac{G(\beta \sqrt{\sigma_{2,q}})}{G(\beta \sqrt{\sigma_2})} - 1 \asymp \frac{\eta \omega(q)}{\sqrt{u}(1 + \eta \sqrt{u})}.$$

La formule (2.16) découle de ces observations, en reportant dans (6.12).

Prouvons à présent l'estimation (2.17), relative au cas $\eta = o(1/\sqrt{u})$. Il résulte de (6.19) que

$$\sqrt{\sigma_{2,q}} = \sqrt{\sigma_2} \left\{ 1 + O\left(\frac{\omega(q)}{u}\right) \right\}$$

et de (4.11) que

$$\sqrt{\sigma_2} = \frac{\sqrt{u} \log y}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + O\left(\eta + \frac{1}{\log y}\right) \right\}.$$

Grâce à (6.17), il suit

$$\frac{\gamma'_q(\beta)}{\sqrt{2\pi\sigma_{2,q}}} = \frac{\omega(q)}{2\sqrt{\pi u}} \{1 + O(\mathfrak{R})\}.$$

Compte tenu de (2.7), (6.12) et (6.20), nous obtenons bien (2.17) lorsque

$$\beta \sqrt{\sigma_2} \asymp \eta \sqrt{u} = o(1).$$

7 Preuve du Théorème 2.4

Plaçons-nous dans les hypothèses (2.23) et (2.24).

Parallèlement à (6.1), nous pouvons écrire, pour $\chi \neq \chi_0$ et $T := Y_{2\varepsilon}$,

$$(7.1) \quad \Upsilon(x, y; \chi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\beta-iT}^{\beta+iT} Z(s, \chi; y) x^s \frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^\beta Z_q(\beta, y) \log T}{T}\right),$$

et, d'après (4.19), pour une constante convenable $\kappa > 0$,

$$(7.2) \quad |Z(s, \chi; y)| \leq Z_q(\beta, y) e^{-\kappa \mathcal{W}_q(y, \tau; \chi)} \quad (s = \beta + i\tau, |\tau| \leq T).$$

où $\mathcal{W}_q(y, \tau; \chi)$ a été défini en (4.18).

Grâce à (3.6), une sommation d'Abel — cf. [2, lemme 3.6] — fournit également, sous la seule condition (1.1),

$$(7.3) \quad \sum_{p \leq y} \frac{1}{p^\beta} \asymp u.$$

La quantité $\mathcal{D}(y, \tau; \chi)$ étant définie en (4.22), nous déduisons donc de (3.5), (3.7), et (4.29), via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$(7.4) \quad \mathcal{W}(y, \tau; \chi) \geq \frac{\mathcal{D}(y, \tau; \chi)^2}{(\log y)^2 \sum_{p \leq y} p^{-\beta}} \gg \frac{u}{1 + \vartheta(\chi)(\log u)^4},$$

où $\vartheta(\chi)$ a été défini par (4.24).

Rappelons la notation (2.10) et observons que l'hypothèse (2.24) implique $z_q \ll \log y$, et donc, compte tenu de (3.5), pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(7.5) \quad \sum_{p|q} \frac{1}{p^\beta} \ll \frac{z_q^{1-\beta} - 1}{(1-\beta) \log z_q} \ll_\varepsilon u^\varepsilon.$$

Compte tenu de (7.4), il vient, pour un choix convenable de $c_2 > 0$,

$$(7.6) \quad |Z(s, \chi; y)| \leq Z_q(\beta, y) e^{-c_2 u(\chi)} \quad (|\tau| \leq Y_{2\varepsilon}),$$

où l'on a posé $u(\chi) := u / \{1 + \vartheta(\chi)(\log u)^4\}$.

En reportant (7.6) dans (7.1), nous obtenons

$$\Upsilon(x, y; \chi) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) \left\{ (\log y)^{3/2} e^{-c_2 u(\chi)} + Y_\varepsilon^{-1} \right\},$$

et donc, compte tenu de (2.20),

$$\Upsilon(x, y; \chi) \ll \Upsilon_q(x, y) \sqrt{u} \log y \left\{ (\log y)^{3/2} e^{-c_2 u(\chi)} + Y_\varepsilon^{-1} \right\}.$$

La condition supplémentaire (2.23) permet de conclure.

8 Preuve du Théorème 2.5

La relation d'orthogonalité des caractères permet d'écrire

$$\Upsilon(x, y; a, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ \Upsilon_q(x, y) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)} \Upsilon(x, y; \chi) \right\}.$$

L'estimation annoncée découle donc immédiatement du Théorème 2.4.

9 Preuve du Théorème 2.6

Plaçons-nous dans les hypothèses de l'énoncé. Il résulte de (2.3) et de l'estimation $q/\varphi(q) \ll \log_2 q$ que

$$(9.1) \quad \Psi_q(x, y) - \Upsilon_q(x, y) \ll \frac{qu \log(2u) \Psi_q(x, y)}{\varphi(q) \sqrt{y} \log y} \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{(\log y)^2}.$$

De plus

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \Psi(x, y; a, q) - \Upsilon(x, y; a, q) &\leq \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \Psi\left(\frac{x}{p^{\nu_p+1}}, y; a/p^{\nu_p+1}, q\right) \\ &\leq \sum_{p \leq y} \sup_{(b, q)=1} \Psi\left(\frac{x}{p^{\nu_p+1}}, y; b, q\right) \end{aligned}$$

où, dans la première inégalité, a/p^{ν_p+1} désigne la classe des entiers b tels que

$$p^{\nu_p+1}b \equiv a \pmod{q}.$$

D'après (2.21), (5.3), sous la condition supplémentaire $y \leq x^{1/3}$, chaque terme de la dernière somme est

$$\ll \Psi_q\left(\frac{x}{p^{\nu_p+1}}, y\right) \ll \frac{f_q(\alpha) \Psi(x, y)}{p^{(\nu_p+1)\alpha}} \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{p^{(\nu_p+1)\alpha}} \ll \frac{\Upsilon_q(x, y)}{p^{(\nu_p+1)\alpha}}.$$

Les estimations (5.5) et (2.21) impliquent alors (2.27).¹

Lorsque $x^{1/3} < y \leq x$, nous déduisons simplement de (9.2) que

$$\Psi(x, y; a, q) - \Upsilon(x, y; a, q) \ll \sum_{p \leq y} \frac{x}{p^{\nu_p+1}} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\sqrt{y} \log y} \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q) \log y}.$$

Nous obtenons encore (2.27).

Bibliographie

- [1] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum. Sur les lois locales de la répartition du k -ième diviseur d'un entier. *Proc. London Math. Soc.* (3), 84(2) :289–323, 2002.
- [2] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum. Propriétés statistiques des entiers friables. *Ramanujan J.*, 9(1-2) :139–202, 2005.
- [3] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum. Une nouvelle approche dans la théorie des entiers friables. *Compos. Math.*, 153(3) :453–473, 2017.
- [4] K. Dickman. On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 22 :1–14, 1930.
- [5] E. Fouvry et G. Tenenbaum. Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc.*, 63(3) :449–494, 1991.
- [6] A. Granville. Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. I. *Acta Math.*, 170(2) :255–273, 1993.
- [7] A. Granville. Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. II. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 345(1676) :349–362, 1993.
- [8] A. Harper. On a paper of K. Soundararajan on smooth numbers in arithmetic progressions. *J. Number Theory*, 132(1) :182–199, 2012.
- [9] A. Hildebrand et G. Tenenbaum. On integers free of large prime factors. *Transactions of the American mathematical society*, 296(1) :265–290, July 1986.

1. Il est à noter que dans ce cas, la condition sur q peut être relâchée en $q \leq y^{1-\varepsilon}$.

- [10] A. Hildebrand et G. Tenenbaum. Integers without large prime numbers. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 5(2) :411–484, 1993.
- [11] A. Hildebrand et G. Tenenbaum. On a class of differential-difference equations arising in number theory. *J. Anal. Math.*, 61 :145–179, 1993.
- [12] H. L. Montgomery. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, volume 84 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [13] O. Robert et G. Tenenbaum. Sur la répartition du noyau d’un entier. *Indagationes Math.*, 24 :802–914, 2013.
- [14] K. Soundararajan. The distribution of smooth numbers in arithmetic progressions. *Anatomy of integers, CRM Proc. and Lect. Notes*, 46 :115–128, 2008. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [15] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. coll. Échelles, quatrième édition. Belin, Paris, 2015.
- [16] G. Tenenbaum. On ultrafriable integers. *Quart. J. Math. (Oxford)*, 66(1) :333–351, 2015.

Institut Élie Cartan,
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex,
France

`cecile.dartyge@univ-lorraine.fr`,
`david.feutrie@univ-lorraine.fr`,
`gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr`