



HAL
open science

Surface minimale

Janusz Ballenstedt

► **To cite this version:**

Janusz Ballenstedt. Surface minimale: Surfaces minimales-périodiques et leur application en architecture. [Rapport de recherche] 0079/78, Comité de la recherche et du développement en architecture (CORDA). 1977. hal-03088353

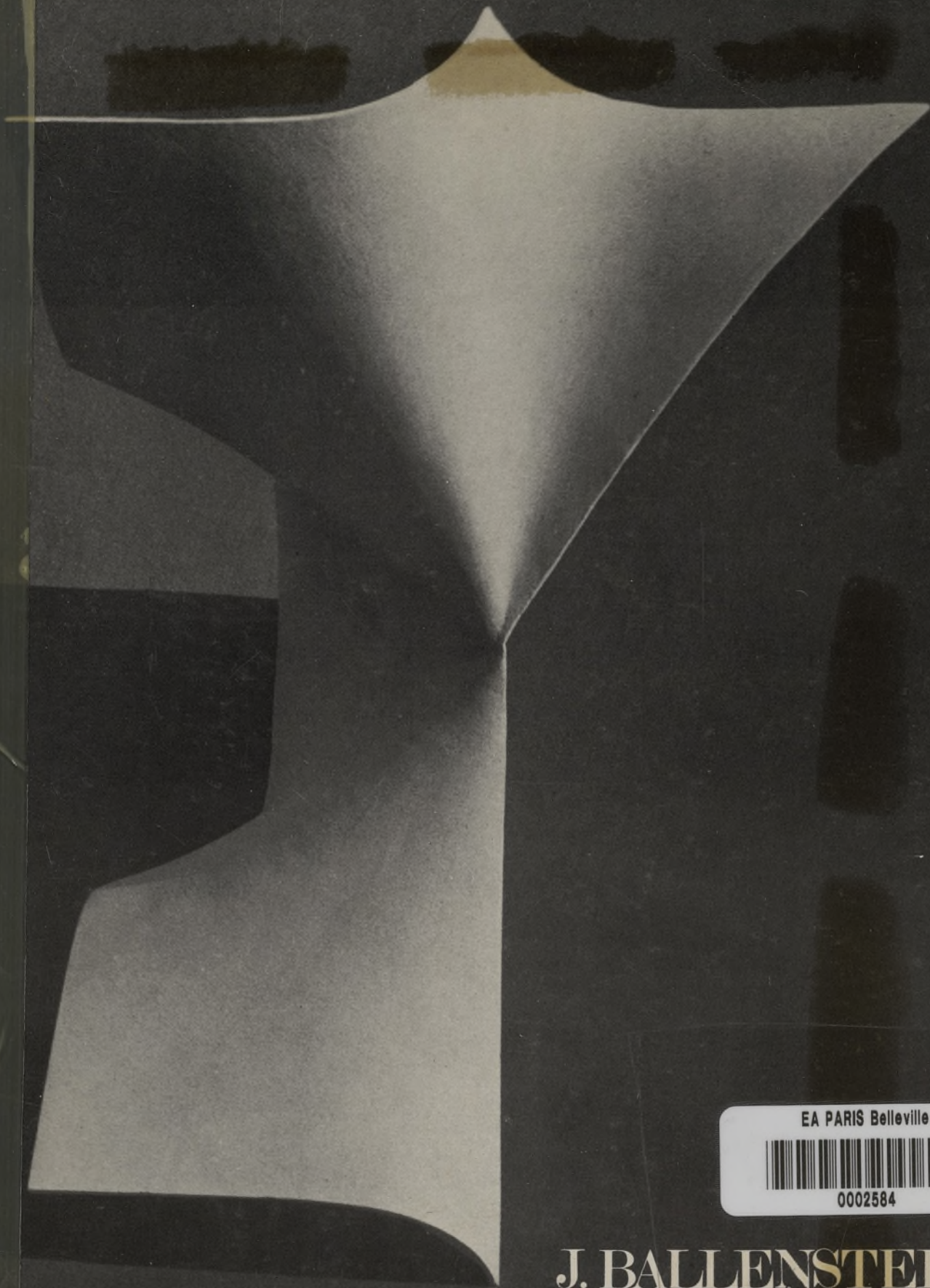
HAL Id: hal-03088353

<https://hal.science/hal-03088353>

Submitted on 26 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



EA PARIS Belleville



0002584

J. BALLENSTEDT

SURFACE MINIMALE

CORDA
79

CORDA 73

MFU 5941 E n° Inv. 3869



J. BALLENSTEDT

SURFACE MINIMALE

Surfaces minimales-périodiques
et leur application
en architecture

RAPPORT FINAL

Ministère de la Culture
et de l'Environnement

Contrat du 9 décembre 1977



AVERTISSEMENT
au lecteur

Le présent document constitue le rapport de fin d'étude d'une recherche remise au Secrétariat de la Recherche Architecturale en exécution du programme général de recherche mené par le Ministère de la Culture et de l'Environnement avec la D.G.R.S.T. depuis 1972. Les jugements et opinions émis par les responsables de la recherche n'engagent que leurs auteurs.

Enfin, l'auteur espère que l'idée générale sera assez



SOMMAIRE

AVERTISSEMENT
au lecteur

I - LE PROBLEME 1

L'auteur a essayé de présenter le problème en remplaçant le langage des formules mathématiques par celui d'une méthode descriptive.

Malgré cette méthode, certaines parties du texte peuvent se révéler difficiles au lecteur ne disposant pas d'une connaissance approfondie en géométrie et en résistance des matériaux, comme par exemple les jeunes étudiants en architecture.

Néanmoins l'auteur espère que l'idée générale sera assez nette.

V - APPLICATION PRATIQUE 19

VI - CRITIQUE ET CONCLUSIONS 30

VII - PROGRAMME DE REALISATION 33

Bibliographie 35

SOMMAIRE

Prèsque chacun de nous au cours de son enfance a joué avec des bulles de savon.

On observe en tirant une membrane de savon entre les deux pouces et les deux index, à regarder comment elle répond à chaque mouvement des doigts, comment elle vit, comment elle change de forme.

Il est intéressant de savoir que dans notre jeunesse nous avons inconsciemment rencontré un problème grave sur lequel plusieurs savants se sont penchés.

Le physicien belge J. PLATEAU (1801-1883) a écrit un livre sur le comportement curieux des bulles de savon (1) et il formula le problème mathématique, devenu désormais "le problème de Plateau", qui stipule qu'à chaque périmètre fermé (comme nos quatre doigts) correspond une et seulement une surface minimale.

Le problème de Plateau est - à dire la plus petite possible - est justement réalisé par la membrane de savon qui obéit aux lois de la physique et prend la forme qui correspond à l'état d'équilibre.

Le problème de Plateau a été résolu en 1930 par le mathématicien J. DOUGLAS (2) qui a trouvé une méthode générale pour préciser la forme de chaque surface minimale donnée par son périmètre.

I - LE PROBLEME	1
II - LE MATERIAU	3
III - RESISTANCE	8
IV - GEOMETRIE	12
V - APPLICATION PRATIQUE	19
VI - CRITIQUE ET CONCLUSIONS	30
VII - PROGRAMME DE REALISATION	33
Bibliographie	38

(1) J. PLATEAU, Statique expérimentale et théorique des liquides, Gauthier et Leipzig, 1873.

(2) J. DOUGLAS, solution of the problem of Plateau, Trans. Amer. Math. Soc. 33, 1931, p. 263-321.

I - LE PROBLEME

Presque chacun de nous au cours de son enfance a joué avec des bulles de savon.

Presque chacun, en étirant une membrane de savon entre les deux pouces et les deux index, a regardé comment elle répond à chaque mouvement des doigts, comment elle vit, comment elle change de forme.

Il est intéressant de savoir que dans notre jeunesse nous avons inconsciemment rencontré un problème grave sur lequel plusieurs mathématiciens se sont penchés.

Le physicien belge J. PLATEAU (1801-1883) a écrit un livre sur le comportement curieux des bulles de savon (1) et il formula le problème théorique, devenu désormais "le problème de Plateau", qui stipule qu'à chaque périmètre fermé (comme nos quatre doigts) correspond une et seulement une surface minimale.

La surface minimale, c'est-à-dire la plus petite possible, est justement réalisée par la membrane de savon qui obéit aux lois de la physique et prend la forme qui correspond à l'état de l'énergie potentielle minimale.

Le problème de Plateau a été résolu en 1930 par le mathématicien J. DOUGLAS (2) qui a trouvé une méthode générale pour présenter en coordonnées carthésiennes chaque surface minimale donnée par son périmètre.

(1) J. PLATEAU, Statique expérimentale et théorique des liquides, Gand et Leipzig, 1873.

(2) J. DOUGLAS, Solution of the problem of Plateau, Trans. Amer. Math. Soc. 33, 1931, p. 263-321.

Entre la formulation du problème (1873) et sa résolution (1930) plusieurs mathématiciens, ne pouvant pas trouver une solution générale, se sont penchés sur les cas spéciaux comme par exemple : une surface minimale étendue entre quatre segments de droites, ou : une surface minimale étendue entre deux segments de droites et un plan ; et leurs travaux ont permis de formuler quelques qualités assez inattendues des surfaces minimales.

Les théorèmes fondamentaux ont été conçus par SCHWARZ (1) et par OSSIAN-BONNET (2).

La qualité la plus inattendue des surfaces minimales est l'existence des surfaces minimales et périodiques, c'est-à-dire des surfaces minimales qui se composent d'éléments identiques, et en plus que chaque surface minimale périodique possède son correspondant qui peut être obtenu par une transformation topologique, ce qui signifie par pliage et sans déchirure (3).

Ici l'intérêt de chaque architecte commence à s'éveiller ! La surface minimale et, de plus, se composant d'éléments identiques, doit pouvoir servir à quelque chose en architecture !

Pour parler de l'application pratique des surfaces minimales et périodiques, il faut prendre en considération trois problèmes à la fois :

- LE MATERIAU avec lequel la surface minimale peut se réaliser,
- LA RESISTANCE spécifique de la surface minimale par rapport aux autres types de construction,
- LA GEOMETRIE de la surface qui peut être utile au bâtiment.

-
- (1) H.A. SCHWARZ, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Berlin, Verlag von J. Springer, 1890.
- (2) OSSIAN-BONNET, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1853, Tome XXXVII, p. 532.
- (3) Théorème d'OSSIAN-BONNET, op. cit. p. 532 : "Chaque surface minima a une conjuguée qui est développable sur elle, et dans chacune des deux surfaces conjuguées les lignes de courbure ont pour transformées les lignes asymptotiques de l'autre surface."

II - LE MATERIAU

Pour exécuter une surface minimale qui travaillerait comme un tout, le meilleur matériau serait le voile mince en béton armé de la conception de Pier Luigi NERVI.

Ce type de construction possède déjà sa propre et longue histoire.

Rappelons-la en quelques mots.

En 1855, Joseph-Louis LAMBOT dépose un brevet (brevet français n° 22120) sur le "Fer-ciment", pour "remplacer le bois, tant pour les constructions navales que pour celles qui ont à combattre l'humidité, tels que : madriers, caisses à eau et à orangers, etc..."

L'invention de LAMBOT est passée inaperçue. LAMBOT a construit deux bateaux en 1848, dont la résistance à l'eau a prouvé que les réactions d'hydratation et de cristallisation dans le ciment se prolongent pendant des années.

Joseph MONIER, un jardinier-horticulteur français, possédait une exploitation aux environs de Paris et cherchait à construire des bacs pouvant contenir de l'eau ou de la terre végétale. Il découvre qu'on peut fabriquer des cages ou des paniers en treillage métallique et couler par-dessus du béton; le béton adhérant bien au fer, il en résulte une masse homogène parfaitement étanche.

Le brevet d'invention que prend MONIER en 1867 lui est acheté par les Autrichiens en 1879 et par les Allemands l'année suivante ; il vient à expiration en 1901.

En 1943, après plusieurs années de recherches, Pier Luigi NERVI, un constructeur italien, dépose un brevet sur le

"ferrocemente" (brevet italien n° 406296). Dans le descriptif de son brevet, NERVI souligne que le cimentage peut se faire sans coffrage et que le matériau possède une qualité extrêmement intéressante pour la construction de bateaux : le comportement du fer-ciment à l'impact.

Le matériau se détériore peu : pas de véritable éclatement mais un affaiblissement du réseau métallique ; la rupture du ciment n'est que partielle et les morceaux restent suffisamment en cohésion pour empêcher l'eau de pénétrer.

Les propriétés du fer-ciment sont dues à une armature très subdivisée et très dense travaillant en collaboration étroite avec le mortier qui l'entoure.

C'est dans le voisinage immédiat de l'armature que le fer-ciment acquiert ses caractéristiques mécaniques ; à plus de 3 cm du grillage, il les perd ; il va se craqueler, et c'est le danger principal qui le guette. La maille fixée par NERVI est petite, 1 cm de côté.

Pour que le mariage entre les deux matériaux soit réussi, il faut que le réseau métallique soit bien réparti.

La couverture de mortier doit être suffisamment mince pour couvrir finement les couches compactées de grillage autour de l'armature d'acier.

Pour des pourcentages inférieurs à 50 g de fer réparti dans un dm³ de mortier, l'élasticité est la même que celle d'un mortier non armé. Pour le pourcentage de 80 g/dm³, l'élasticité est déjà cinq fois plus grande et elle augmente encore jusqu'à ce qu'on obtienne la proportion de 500 g/dm³.

On diminue la concentration du fer en éloignant entre elles les couches de grillage ou bien en augmentant l'épaisseur du mortier.

L'imperméabilité s'améliore si l'on respecte une courbe granulométrique douce et régulière et la proportion sable/ciment : pour 50 sacs de ciment de 50 kg, 2,5 m³ à 3 m³ de sable.

Les premières réalisations de NERVI en fer-ciment furent les constructions navales juste après la seconde guerre mondiale : le bateau "Irène" de 165 tonnes, un double ponton de charge utile de 18 tonnes, un bateau de pêche et un yacht de 12 m de longueur (Nennele) dont la coque d'une épaisseur de 12 mm (!!!) se composait de 7 couches de mailles de fer et armée de barres de 6 mm de diamètre espacées de 5 cm.

La première réalisation de NERVI en bâtiment était un petit dépôt en fer-ciment (10 m sur 20 m) à Rome avec des parois et un toit en surface ondulée d'épaisseur maximale 3 cm.

Parmi les autres réalisations de NERVI en fer-ciment, il faut mentionner celle du bâtiment d'exposition à Turin (bâtiment C) dont la double toiture se compose de poutres ondulées de 8,50 m de longueur en fer-ciment et de dalles préfabriquées de 4 cm d'épaisseur, et celle du bâtiment principal d'exposition à Turin, dont les éléments préfabriqués en fer-ciment de 1 500 kg couvrent une portée de 80 m.

Dans son livre, à la fin du chapitre consacré au fer-ciment, le grand constructeur italien exprime son opinion et ses espérances :

"Mis à part mon optimisme justifié, je pense que les résultats obtenus avec le fer-ciment annoncent un champ d'application beaucoup plus large. Le fer-ciment permettra l'utilisation à grande échelle de structures dont la résistance est due à leur forme même, comme les voiles minces et les surfaces ondulées, ce qui laisse un grand espoir à la réalisation d'une architecture nouvelle." (1)

(1) Pier Luigi NERVI, Structures, F.W. Dodge Corp. New-York, 1956.

RODRIGUEZ TORROJA, Les structures architecturales, Edition Eyrolles, Paris, 1969.

L'autre grand constructeur du XXe siècle, Eduardo TORROJA, en présentant dans son livre (1) de minces voiles réalisés en maille de fer travaillant uniquement en tension ou en compression, parle des formes originales qui pourraient être réalisées et qui ne sont que "les premières lueurs de l'aurore qui vient".

L'auteur de cette étude a eu plusieurs fois dans la pratique de son métier l'occasion de réaliser des structures en fer-ciment à petite échelle et, chaque fois, a pu constater les propriétés extraordinaires de ce matériau. Il a réalisé en outre deux sculptures tournantes (sous la pression du vent), dont l'une de hauteur 4,50 m et l'autre de hauteur 15 m, en fer-ciment. La première a été réalisée en 1965 et, après cinq ans, ne présentait pas la moindre fissure (fig. 1).

Les deux sculptures ont été réalisées sans coffrage.



fig. 1

Sculpture giratoire (sous la pression du vent)
Kaximierz près de Sosnowiec, Pologne, 1967.

Hauteur de la sculpture : 4,50 m - Epaisseur du voile : 16 cm.

La surface de la sculpture possède une double courbure et elle se déforme par le mouvement de la droite dans l'espace.

(1) Eduardo TORROJA, Les structures architecturales, Edition Eyrolles, Paris, 1969.

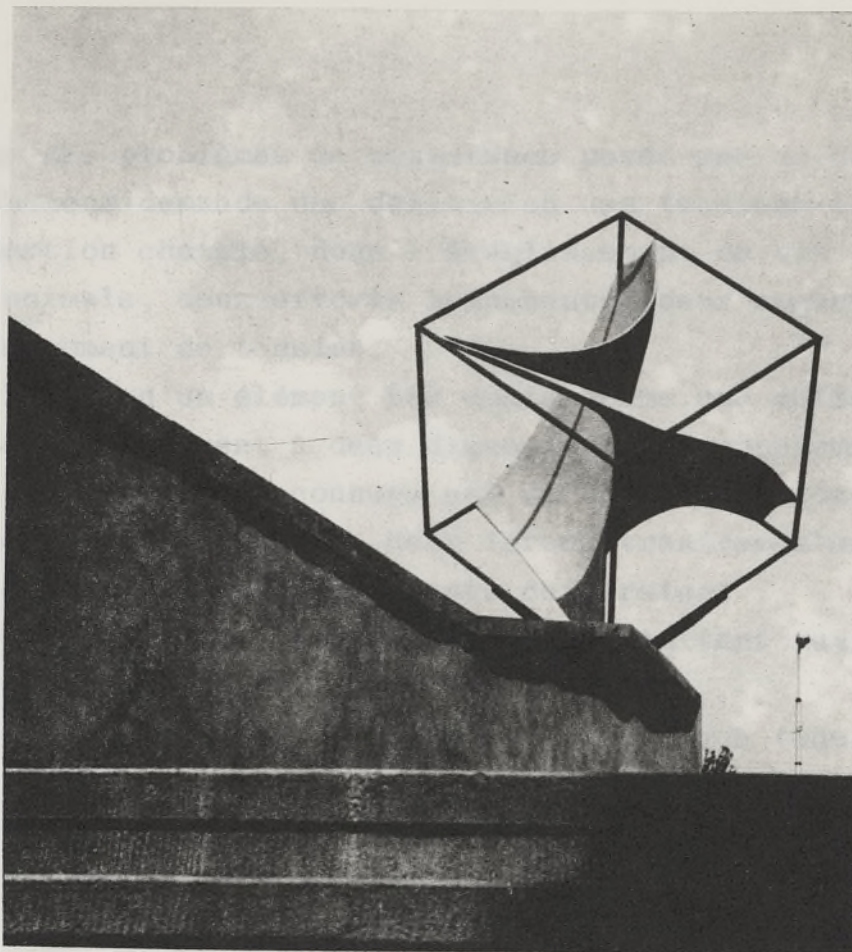


fig.1

Sculpture giratoire (sous la pression du vent)
Kazimierz près de Sosnowiec, Pologne, 1967.

Hauteur de la sculpture : 4,50 m - Epaisseur du voile : 15 mm.
La surface de la sculpture possède une double courbure et elle est définie par le mouvement de la droite dans l'espace.

La sculpture a été réalisée par l'auteur de la présente recherche avec la collaboration de B. KOTARBA.

III - RESISTANCE

Il y a des cas où III - RESISTANCE est encore plus simple ; c'est le cas des surfaces à double courbure, mais de valeurs différentes.

Plaçons une nappe sur la table ; elle n'exerce aucune force sur la surface de la table ; mais dès que la surface deviant légèrement

Chacun des problèmes de résistance posés par un objet à trois dimensions demande une définition des tensions internes et dans une section choisie, donc l'établissement de six inconnues : une force normale, deux efforts tranchants, deux moments fléchissants et un moment de torsion.

Dans le cas d'un élément peu épais comme une surface assez mince, donc pratiquement à deux dimensions, le problème se complique ; la quantité d'inconnues est de dix : deux forces normales, deux efforts tranchants, deux forces transversales, deux moments fléchissants et deux moments de torsion.

On peut simplifier le problème en se limitant aux surfaces à double courbure.

Il suffit de comparer la surface cylindrique (une seule courbure) avec la surface d'une sphère (deux courbures) pour voir la différence dans leur rigidité réciproque. Cette rigidité peut être vérifiée d'après le calcul qui prouve que les tensions sont deux fois plus petites dans le cas de la surface sphérique que dans le cas de la surface cylindrique.

Les expériences confirment que dans le cas des surfaces à double courbure, les moments fléchissants et de torsion sont si petits qu'on peut les négliger.

La disparition pratique des moments fléchissants et des moments de torsion provoque la disparition des forces transversales, tandis que les efforts tranchants deviennent identiques.

La théorie des surfaces se transforme en théorie des membranes et la quantité d'inconnues se réduit à trois : deux forces normales et un effort tranchant.

Il y a des cas où la théorie devient encore plus simple ; c'est le cas des surfaces à double courbure, mais de valeurs différentes.

Étendons une nappe sur la table ; elle n'exerce aucune force sur la surface de la table ; mais dès que la surface devient légèrement convexe, la nappe commence à exercer sur elle une force, laquelle augmente au fur et à mesure qu'augmente la convexité et que le rayon de courbure diminue.

La force avec laquelle la nappe agit sur la surface de la table, soit la pression p , est proportionnelle à la tension T de la nappe et inversement proportionnelle au rayon de courbure R , soit :

$$P = \frac{T}{R}$$

Admettons que la table soit affectée d'une double courbure, c'est-à-dire dans deux directions inverses. Dans ce cas, nous aurons :

$$P = \frac{T}{R_1} + \frac{T}{R_2}$$

$$P = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(D'après ces formules nous pouvons comparer les contraintes dans la surface cylindrique et sphérique. La première formule représente la valeur des contraintes dans une surface cylindrique :

$T = \delta = pR$. La deuxième formule, dès que $R_1 = R_2$, représente la surface sphérique et la formule donne :

$$p = T \left(\frac{2}{R} \right) ; T = \delta = \frac{pR}{2})$$

Nous obtenons sur la surface un tracé de lignes courbes, une sorte d'image du travail de la structure en compression.

La somme des inverses des rayons peut être positive, négative ou nulle. Le cas le plus intéressant est celui où cette somme devient nulle, puisque la pression de la nappe sur la surface de la table disparaît - elle aussi - et seules les forces normales subsistent.

Il y a deux possibilités : R_1 et R_2 sont nuls, ou R_1 est égal à R_2 , mais l'un est positif et l'autre négatif.

La première possibilité donne une surface plane, la deuxième une surface convexe dans une direction et concave dans l'autre, mais de courbures identiques entre elles.

La théorie se simplifie encore. L'effort tranchant disparaît et deux forces normales en chaque point de la surface deviennent identiques, donc la quantité d'inconnues se réduit à une seule.

Il n'y a ni moment fléchissant, ni possibilité de flambage ; c'est l'état d'équilibre, l'état de la bulle de savon, c'est la surface minimum.

En chaque point de la surface deux forces normales existent ; elles sont identiques, l'une étant positive, l'autre négative, dont les directions sont toujours perpendiculaires l'une à l'autre.

Parmi toutes les directions perpendiculaires l'une à l'autre, un cas existe où les forces deviennent maximales.

Imaginons une surface minimale qui s'appuie en quelques points. Il est clair que les forces de compression obéissant aux lois de la physique trouveront toujours le chemin le plus court vers les points d'appui pour y transmettre le poids de la structure.

Imaginons que nous avons dessiné sur la surface en question, pour les points espacés d'un mètre, les lignes de transmission du poids de la structure.

Nous obtenons sur la surface un tracé de lignes courbes, une sorte d'image du travail de la structure en compression.

Une autre famille de courbes orthogonales à la première présentera le travail de la structure en traction.

Ces deux familles de courbes orthogonales s'appellent les trajectoires des forces principales et donnent l'image générale du travail de la structure.

Le problème pratique se réduit donc à la définition de la valeur maximale de la force existante en un point arbitrairement choisi de la surface - et à la définition de la direction de cette force qui cherche le chemin le plus court vers les points d'appui et qui n'est autre que la force de compression.

La direction de la force de traction sera perpendiculaire à la première.

Sur la base de ces données, nous pouvons établir l'épaisseur du voile en chaque point et la position de l'armature qui doit suivre les tractions.

La tangente à cette surface tout le long de cette courbe et le plan de cette courbe contiennent toujours l'angle droit ; le plan de la courbe est le plan de symétrie de la surface minimale.

Parmi les surfaces minimales-périodiques, nous avons choisi celle qui, à notre avis, peut servir aux buts pratiques en bâtiment.

Nous l'appellerons la surface de NEOVIUS, puisque c'est lui qui la présente le premier en coordonnées cartésiennes (2).

Nous la présenterons d'une façon descriptive.

(1) H.A. SCHWARZ, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Berlin, Verlag von J. Springer, 1890.

(2) E.R. NEOVIUS, Bestimmung zweier speziellen periodischen Minimalflächen auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen, Helsingfors, J.C. Frenckell & Sohn, 1893.

IV - GEOMETRIE

Dans cette partie nous ferons usage de deux théorèmes de SCHWARZ (1).

Ier THEOREME DE SCHWARZ :

Un segment de droite se trouvant sur un élément de la surface minimale est un axe de symétrie de la surface minimale ; on obtient celle-ci par la rotation de 180° de cet élément autour de cet axe.

IIe THEOREME DE SCHWARZ :

Si sur un élément de la surface minimale se trouve une courbe plane, le plan tangent à cette surface tout le long de cette courbe et le plan de cette courbe contiennent toujours l'angle droit ; le plan de la courbe est le plan de symétrie de la surface minimale.

Parmi les surfaces minimales-périodiques, nous avons choisi celle qui, à notre avis, peut servir aux buts pratiques en bâtiment.

Nous l'appellerons la surface de NEOVIUS, puisque c'est lui qui la présenta le premier en coordonnées carthésiennes (2).

Nous la présenterons d'une façon descriptive.

(1) H.A. SCHWARZ, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Berlin, Verlag von J. Springer, 1890.

(2) E.R. NEOVIUS, Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen auf welchen unendlich viele gerade Linien und enendlich viele ebene geodätische Linien liegen, Helsingfors, J.C. Frenckell & Sohn, 1883.

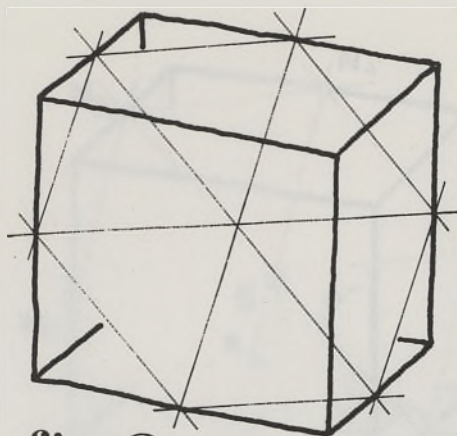


fig.2

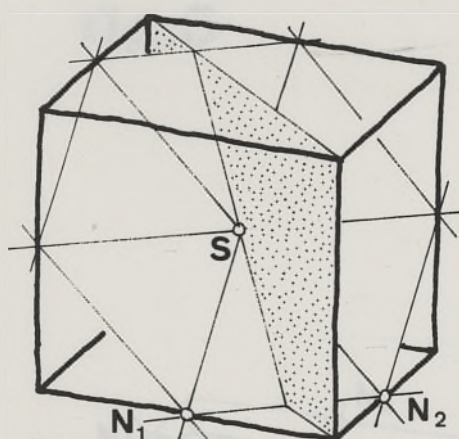


fig.3

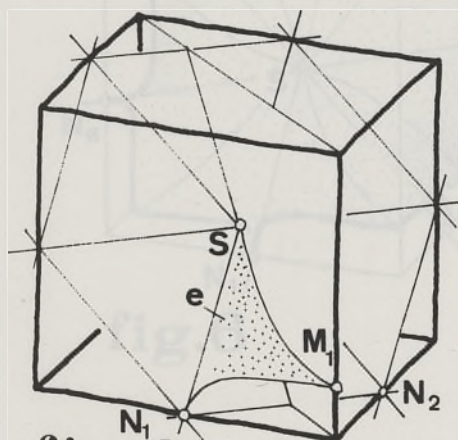


fig.4

Prenons un cube dont l'arête est égale à a , et introduisons à l'intérieur un hexagone dont l'arête est égale à $\frac{a}{2} \sqrt{2}$, de telle manière que chaque sommet de l'hexagone touche le milieu d'une arête du cube (fig. 2).

Choisissons un plan diagonal du cube.

Nommons le centre de l'hexagone S , et ses deux sommets N_1 et N_2 (fig. 3).

Etendons la membrane d'une bulle de savon entre la droite SN_1 , le plan diagonal et la paroi du cube de son côté intérieur.

Nous obtiendrons ainsi une surface minimale e qui définira le point M_1 sur l'arête du cube (fig. 4).

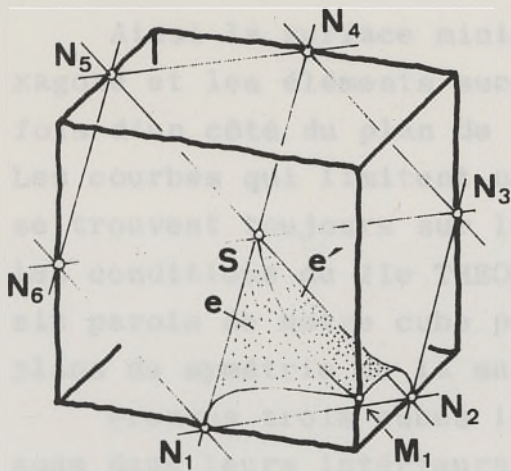


fig.5

Puisque le plan tangent à la surface minimale e (tout le long de la courbe SM_1) et le plan diagonal, qui est en même temps le plan de la courbe SM_1 , contiennent l'angle droit, le plan diagonal peut être considéré (selon le II^e THEOREME DE SCHWARZ) comme le plan de symétrie de la surface minimale $e+e'$ (fig. 5).

Puisque les segments des droites SN_1 et SN_2 se trouvent sur la surface minimale $e+e'$, ils sont en même temps (selon le I^{er} THEOREME DE SCHWARZ) les axes de symétrie de la surface minimale obtenue par la rotation de 180° de la surface $e+e'$ autour de ces deux axes.

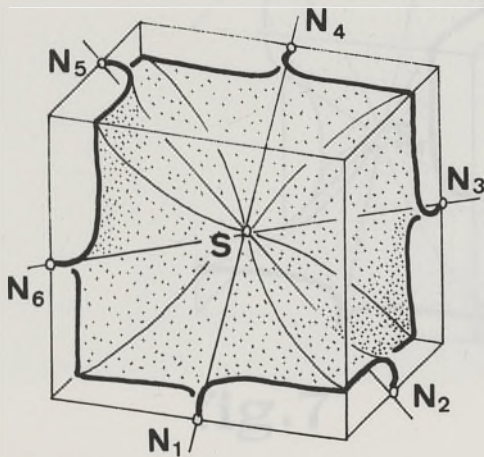


fig.6

Autrement dit, nous pouvons prolonger la surface minimale $e+e'$ dans deux directions et les segments des droites SN_1 et SN_2 s'identifieront avec les autres segments de droites qui se trouvent dans le plan de l'hexagone ; notamment avec SN_3, SN_4, SN_5, SN_6 (fig. 6).

En continuant nous pouvons prolonger la surface minimale à l'infini et remplir l'espace tout entier.

Ainsi la surface minimale $e+e'$ couvrira le plan de l'hexagone et les éléments successifs de celle-ci tomberont une fois d'un côté du plan de l'hexagone, une fois de l'autre. Les courbes qui limitent notre surface minimale ainsi obtenue se trouvent toujours sur les parois du cube et remplissent les conditions du II^e THEOREME DE SCHWARZ. Autrement dit, les six parois de notre cube peuvent être considérées comme les plans de symétrie de la surface minimale.

Prenons trois cubes identiques au premier et construisons dans leurs intérieurs la même surface minimale et arrangeons les de telle manière que la surface minimale du premier cube soit prolongée (fig. 7 et 8).

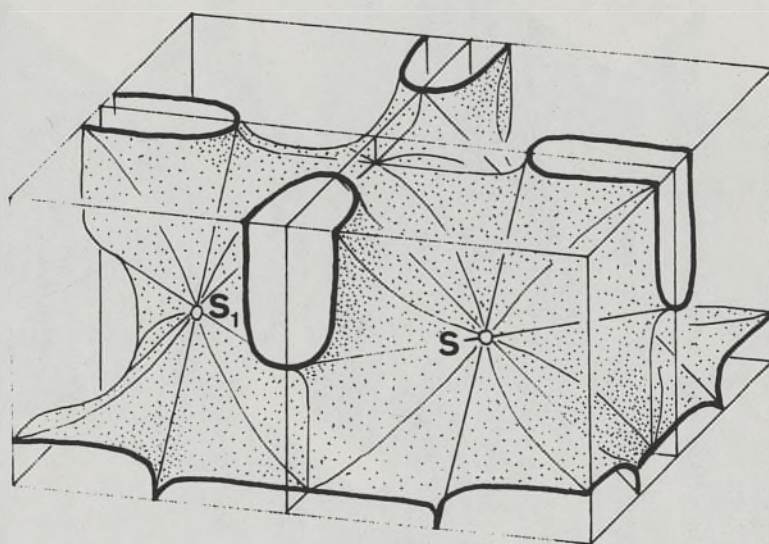


fig.7

fig.8

En continuant nous pouvons prolonger la surface minimale à l'infini et remplir l'espace tout entier.

REMARQUE THEORIQUE

Soit un objet solide S d'équation de l'espace, puiss
sur \mathbb{R}^3 , on peut le définir par une équation de
forme $F(x, y, z) = 0$ où F est une fonction réelle
qui s'annule sur S et qui est positive ou négative

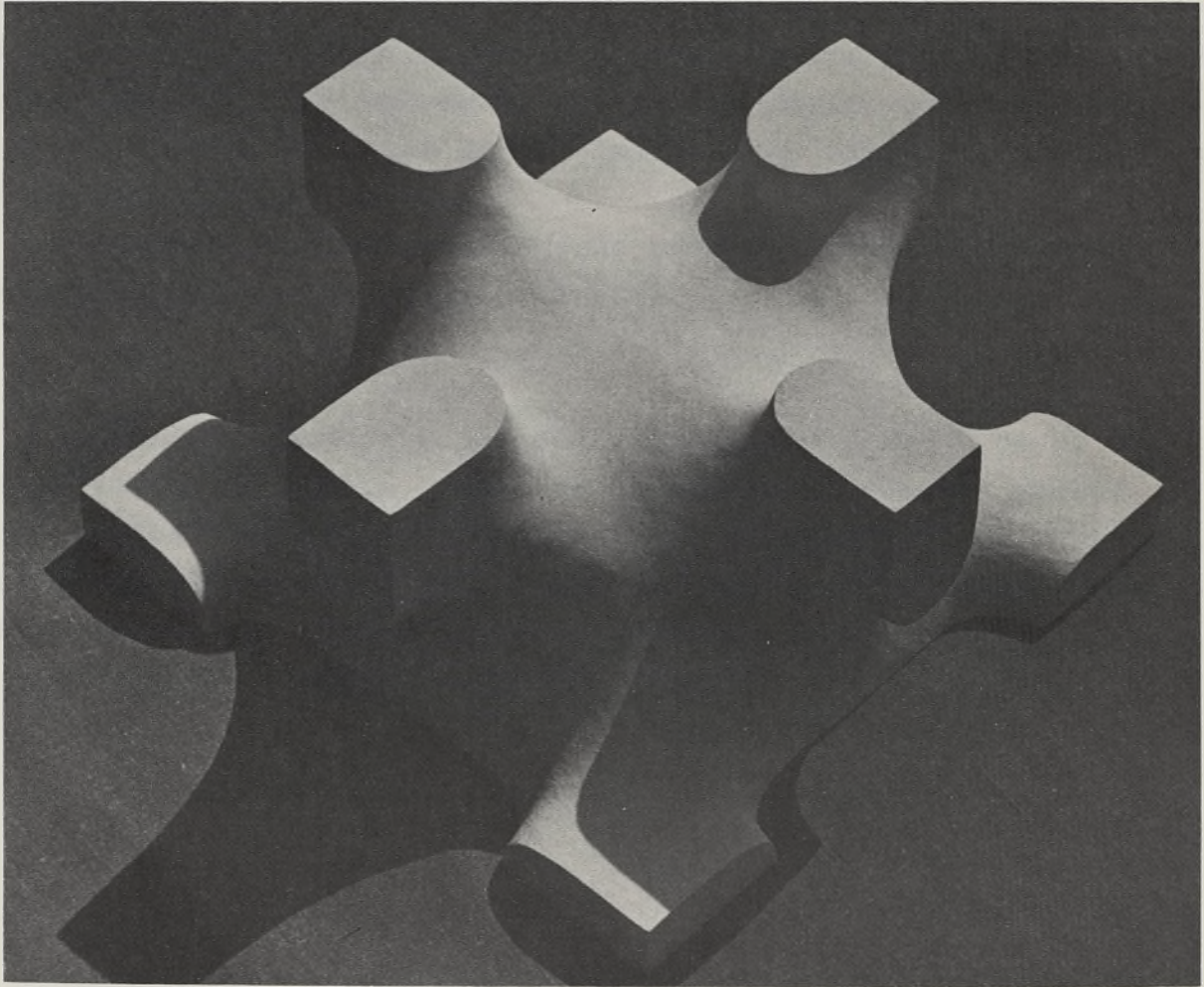


fig. 8

REMARQUE THEORIQUE

Dans un cahier intitulé : "Equipartition de l'Espace", publié par l'E.S.A. en mars 1976, j'ai présenté une classification des formes. A la page 53 de cette publication, j'ai présenté une surface minimale-périodique qui correspond à un cas précis de ma classification. A la page 24-25 de la même publication, j'ai présenté le volume de KELVIN qui, lui aussi, entre dans la classification proposée. (Le volume de KELVIN se compose de huit hexagones et de six carrés et c'est un des volumes qui remplit l'espace tout entier sans laisser de vide).

La surface minimale-périodique présentée dans cet ouvrage a été construite sur un hexagone inscrit dans un cube (fig. 2-6).

Prenons la surface représentée ci-dessus (fig. 7 et 8) et posons-la sur un miroir ; elle se "prolongera" dans le miroir d'une manière continue (encore une fois IIe THEOREME DE SCHWARZ). Maintenant elle remplit huit cubes de base et dans chaque cube elle se développe sur un hexagone. Dessinons ces huit hexagones et nous aurons le volume de KELVIN (fig. 9).

V - APPLICATION PRATIQUE (Exemples)

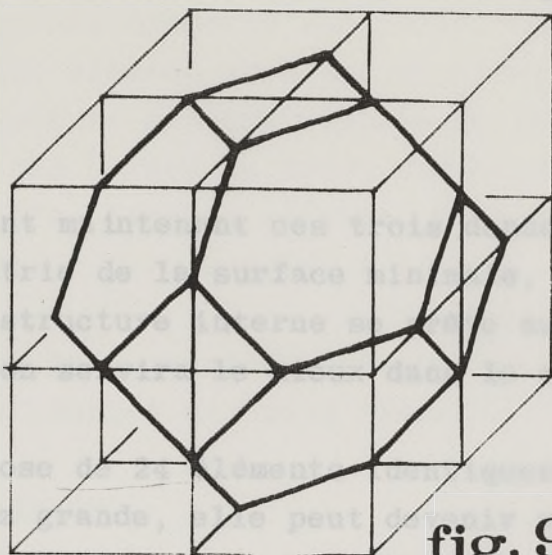


fig. 9

En considérant maintenant ces voiles en matériau, résistance et géométrie de la surface interne, nous voyons que le matériau dont la structure interne est en travail en compression ou en traction, doit avoir une surface minimale.

Elle se compose d'éléments répétitifs. En imaginant cette partie assez grande, elle peut servir à fabriquer des ouvertures basses servant à encastrer les ouvertures hautes pour l'éclairage de l'intérieur.

Un tel bâtiment ne posséderait ni poteaux, ni poutres, tout ce étant une surface minimale où les ouvertures fonctionnelles ont été incorporées.

Cette constatation montre l'intérêt théorique entre la classification présentée dans le cahier "Equipartition de l'Espace" et les surfaces minimales-périodiques.

On devra apporter un soin particulier à l'exécution du moule en fer-ciment car il servira à la préfabrication de tous les éléments.

Cette méthode de réalisation avec un moule permet de résoudre deux problèmes à la fois :

- 1° - l'emplacement de l'armature pour chaque élément selon les trajectoires des forces principales, et
- 2° - la variation de l'épaisseur de voile selon la valeur maximale de compression.

Il faut être conscient des différents problèmes posés par la réalisation :

V - APPLICATION PRATIQUE (Exemples)

En considérant maintenant ces trois données : matériau, résistance et géométrie de la surface minimale, nous voyons que le matériau dont la structure interne se prête au travail en compression ou en traction servira le mieux dans le cas de la surface minimale.

Elle se compose de 24 éléments identiques $e+e'$. En imaginant cette partie assez grande, elle peut devenir un bâtiment, un abri où les ouvertures basses serviront d'entrées et les ouvertures hautes pour l'éclairage de l'intérieur.

Un tel bâtiment ne posséderait ni poteaux, ni poutres, tout en étant une surface minimale où les ouvertures fonctionnelles ont été incorporées.

Le fait que cette structure se compose de 24 éléments identiques impose une méthode de réalisation par la préfabrication d'éléments répétitifs avec un seul moule.

On devra apporter un soin particulier à l'exécution du moule en fer-ciment car il servira à la préfabrication de tous les éléments.

Cette méthode de réalisation avec un moule permet de résoudre deux problèmes à la fois :

- 1° - l'emplacement de l'armature pour chaque élément selon les trajectoires des forces principales, et
- 2° - la variation de l'épaisseur de voile selon la valeur maximale de compression.

Il faut être conscient des différents problèmes posés par la réalisation :

1. L'ASSEMBLAGE DES ELEMENTS ENTRE EUX

L'assemblage des éléments sera effectué par soudure au cours du montage. Chaque élément aura sur sa circonférence une bande de 15-20 cm où l'armature restera découverte (non recouverte de mortier). Le béton des joints au droit des bandes de l'armature découverte sera coulé après le montage. La jonction de plusieurs éléments en un point sera résolue à l'aide d'anneaux en acier rond.

La photo sur la couverture présente la structure au cours du montage. Elle se compose de trois éléments et demi de base (e+e').

2. TAILLE DES ELEMENTS

Prenons par exemple une structure dont la base $2a \times 2a = 30 \times 30$ cm. Dans ce cas, l'arête la plus longue du moule $SN_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 10,60$ m, ce qui donne un élément qui risque d'être trop grand. La taille des éléments préfabriqués doit être établie en proportion des dimensions absolues de la structure. La division des éléments en parties plus petites, si celle-ci se révélait indispensable, ne changerait en rien le principe de montage.

3. POSITION D'UN ELEMENT DANS L'ESPACE

Le problème est très important puisque le travail global de la structure en dépend. Les points d'appui seront fixés sur les fondations, tandis que les points dans l'espace tels que S, S₁, S₂, etc... et le point le plus haut du plafond doivent être calculés et fixés dans l'espace avec précision au cours du montage.

4. RIGIDITE DE LA STRUCTURE

La rigidité de la structure diminue aux endroits où la courbure devient minimale. Les ouvertures basses serviront de portes et de baies qui seront munies de leurs encadrement métalliques qui, renforçant cette partie, entraîneront la possibilité

d'alléger à cet endroit l'armature du fer-ciment. La même remarque concernera les ouvertures hautes, mais ici la structure peut être modifiée de la façon présentée sur la fig. 12 et la fig. 13, ce qui simplifiera la mise en place des encadrements métalliques.

On n'a pas besoin d'isolation thermique. La réalisation est très simple puisque l'étanchéité est assurée par la structure même.

La structure donne la possibilité d'agrandir la surface couverte par adjonction de nouveaux éléments préfabriqués toujours en utilisant le même moule.

L'idée de dépôt évolutif fait ressortir le caractère modulaire de la structure. La fig. 10 montre le schéma de plan qui peut être prolongé dans quatre directions.



DEUX EXEMPLES D'UTILISATION DE LA SURFACE MINIMALE-PÉRIODIQUE

EXEMPLE 1 : Entrepôt évolutif

Nous avons choisi cet exemple en admettant que le bâtiment n'a pas besoin d'isolation thermique. La réalisation devient très simple puisque l'étanchéité est assurée par la structure même.

La structure donne la possibilité d'agrandir la surface couverte par adjonction de nouveaux éléments préfabriqués toujours en utilisant le même moule.

L'idée de dépôt évolutif fait ressortir le sens économique de la structure. La fig. 10 montre le schéma du plan qui peut être prolongé dans quatre directions.

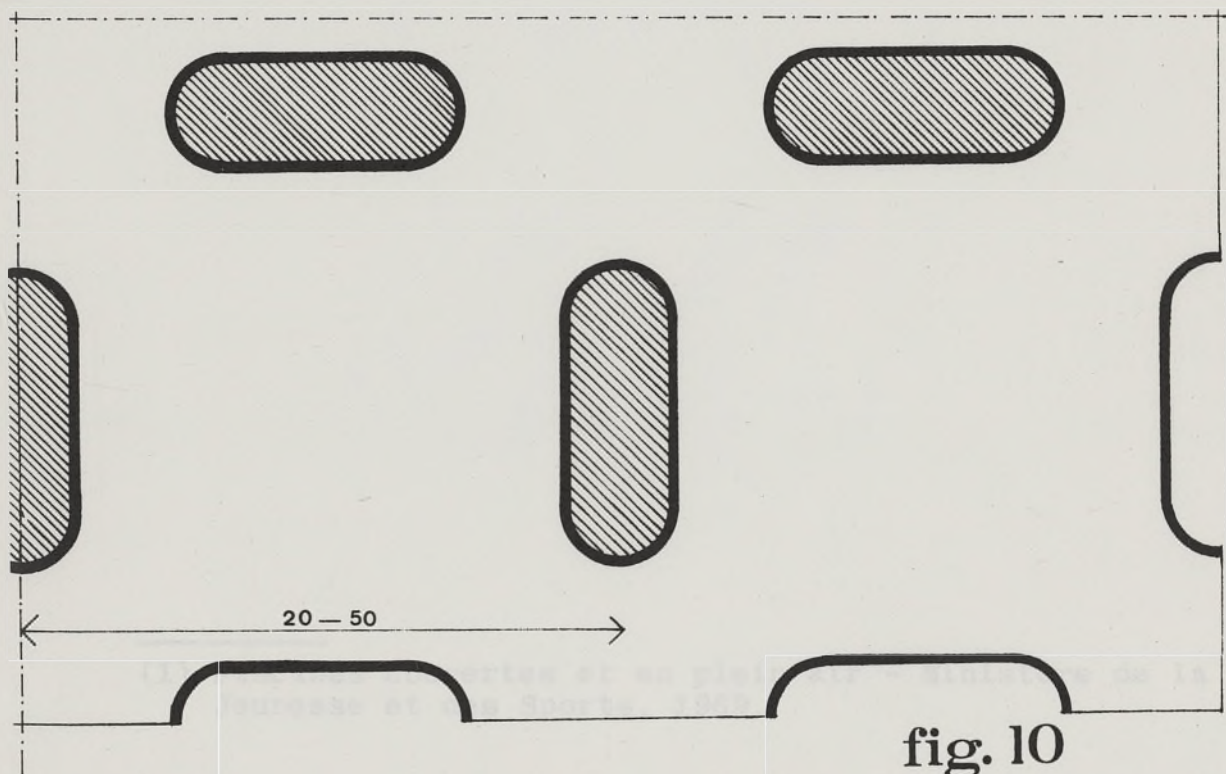


fig. 10

EXEMPLE II : Piscine

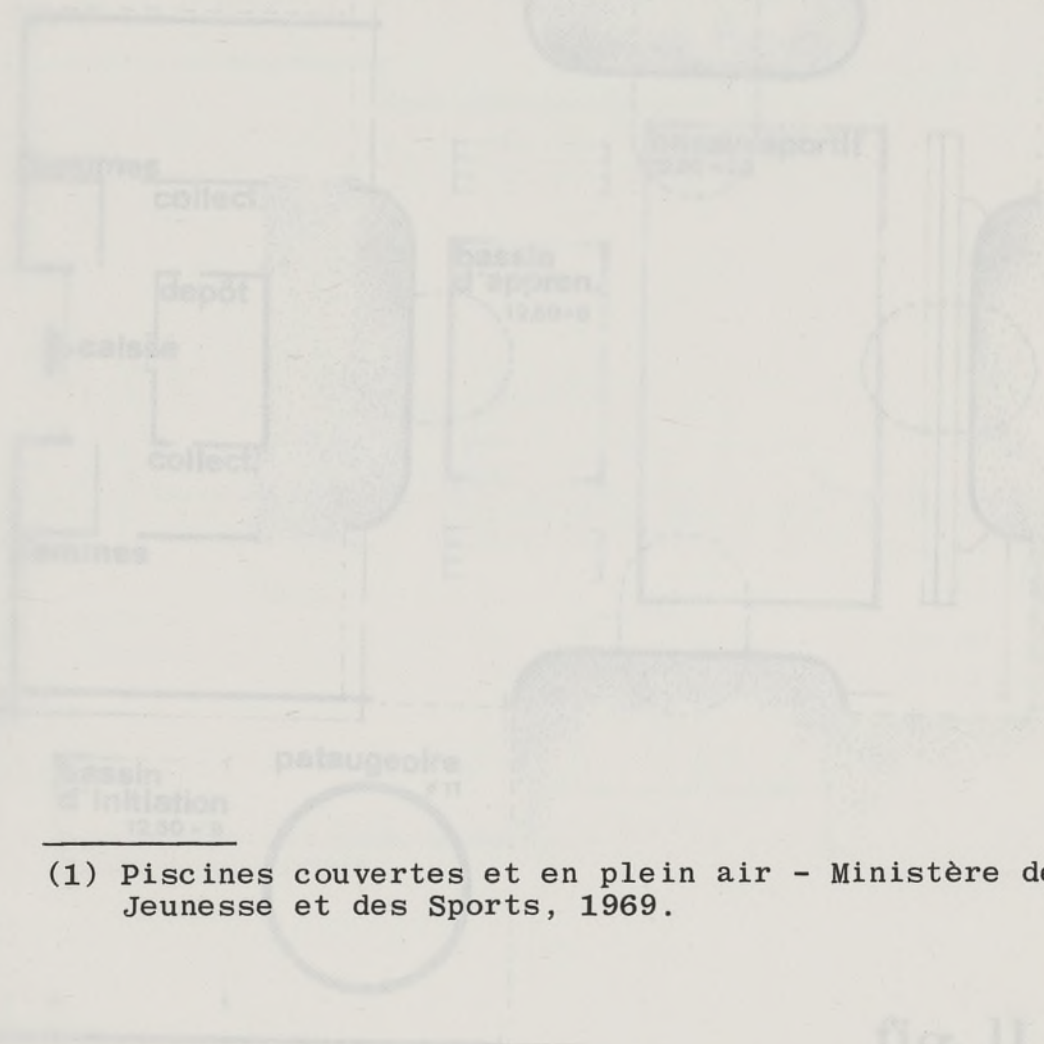
Nous avons choisi cet exemple pour faire ressortir l'adaptabilité de la structure à une fonction plus complexe, tout en résolvant le problème de l'isolation thermique.

Chaque piscine possède son programme propre. Dans l'exemple qui suit, nous avons admis le programme d'une piscine publique moyenne (1).

Les dimensions du plan sont de 36,60 m x 36,60 m. Sur cette surface se trouvent disposés : un bassin sportif de 12,50 m x 25,00 m et un bassin d'apprentissage de 12,50 m x 8,00 m.

Le bassin d'initiation et la pataugeoire qui doivent être toujours isolés se trouvent dans la partie basse avec les vestiaires.

Le plan et la photo de la maquette présentent deux éléments de structure, dont le deuxième contient le plongeur olympique avec accès séparé pour le public (fig. 11, 12 et 13).



(1) Piscines couvertes et en plein air - Ministère de la Jeunesse et des Sports, 1969.

fig. 11

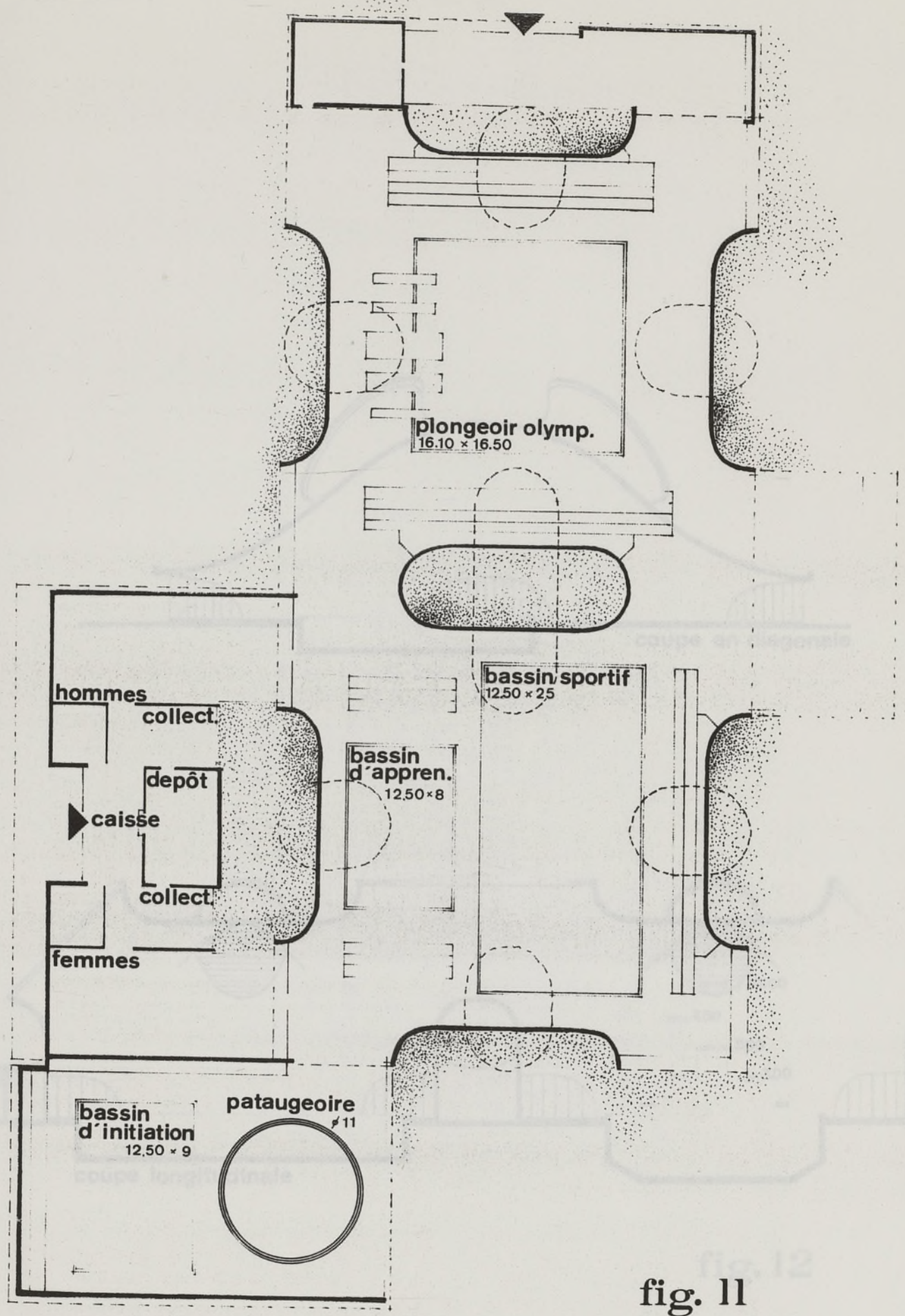


fig. 11

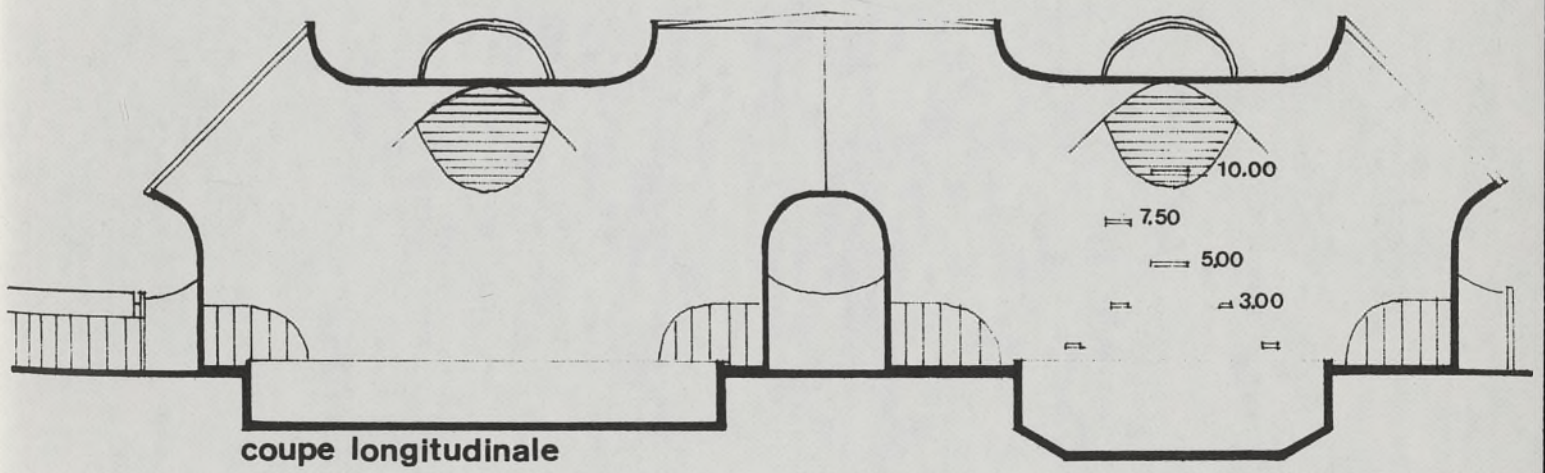
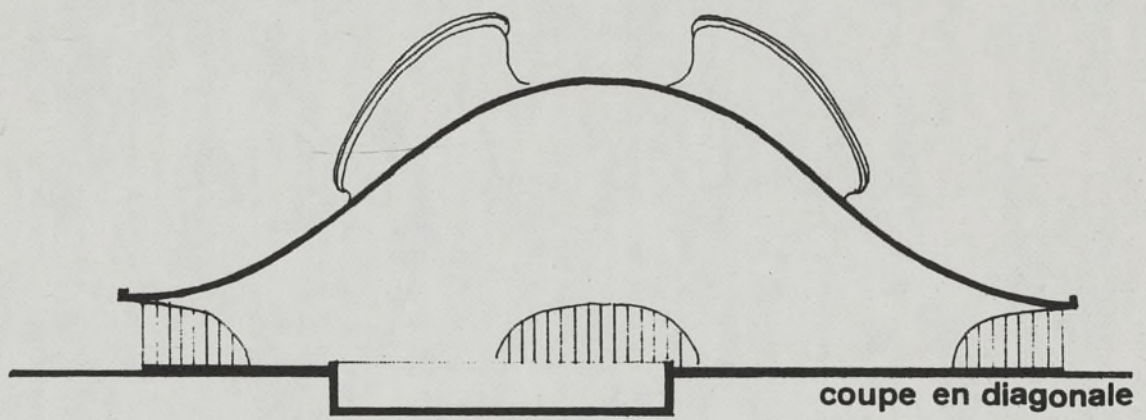


fig. 12

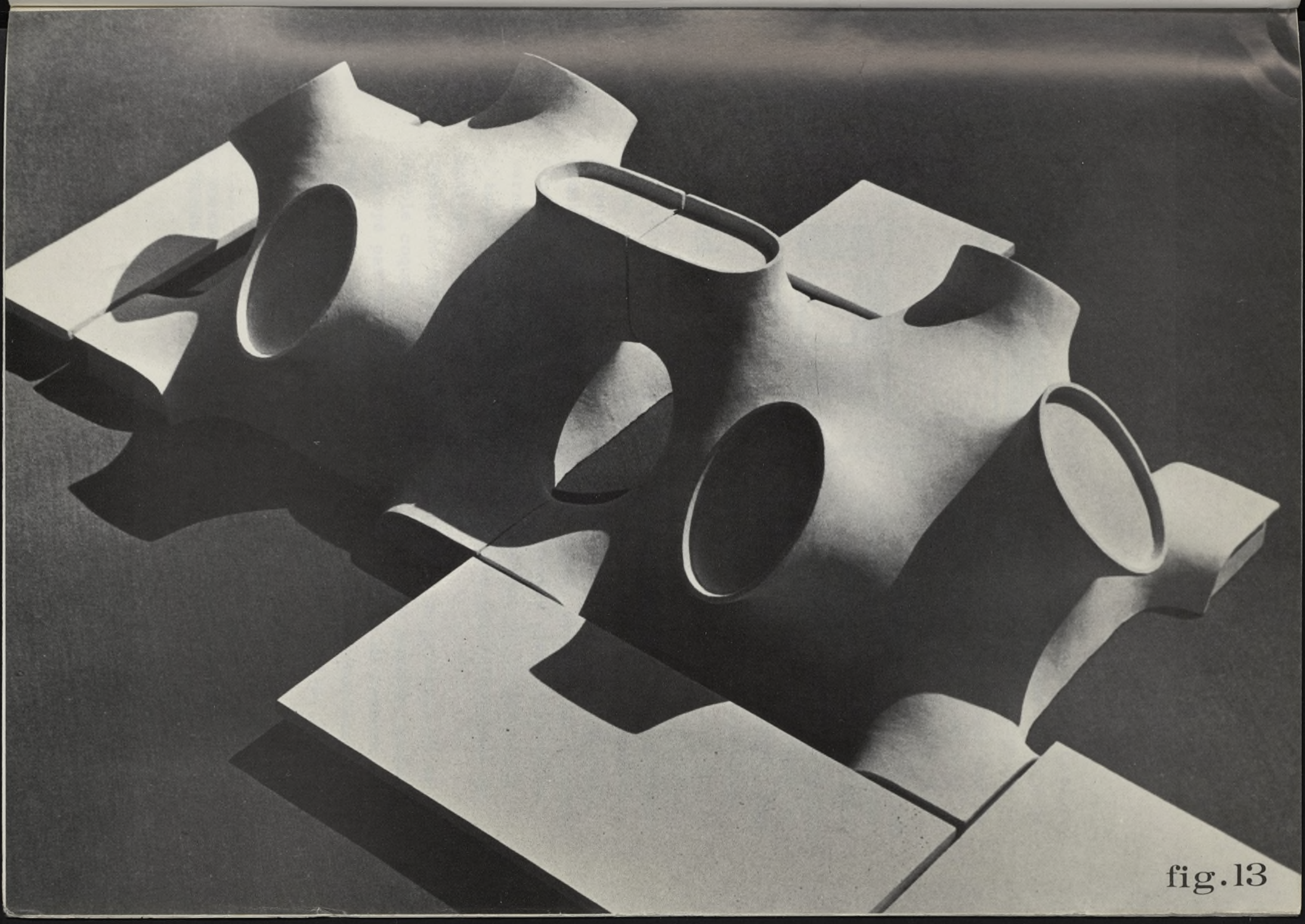


fig.13

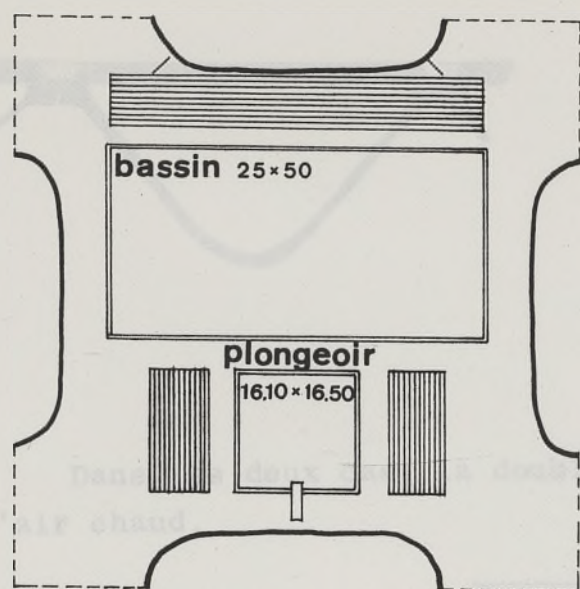


fig. 14

On pourrait aussi couvrir un bassin olympique de 50 m de longueur avec son plongeur ; dans ce cas, les dimensions du plan seraient de 73,00 m x 73,00 m = 2 a x 2 a (fig. 14).

Le problème de l'isolation thermique de la structure peut être résolu d'une manière définitive après l'exécution du programme de réalisation (Voir VI : PROGRAMME DE REALISATION). Pour le moment, deux possibilités existent :

- 1° - Isolation thermique assurée par une couche de mousse polyuréthane (1) sur la surface extérieure. A noter que la mousse polyuréthane adhère parfaitement au béton. La pose de cette couche, qui doit être uniforme et lisse, demanderait l'exécution d'un contre-moule léger en polyester armé de fibre de verre et à être exécutée avant le montage de la structure. L'isolation des joints serait effectuée postérieurement au montage.
- 2° - Isolation thermique assurée sur la base de principe de la double coque, soit avec surface intérieure ondulée (principe employé par NERVI dans le cas de la piscine de Leghorn en Angleterre en 1949) (fig. 15), soit avec deux surfaces ondulées, intérieure et extérieure (cas du CNIT) (fig. 16).

(1) La mousse polyuréthane produite par exemple par SOLOPLAST-VOSSCHEMIE.



fig.15-16

Dans les deux cas, la double coque sert pour le soufflage d'air chaud.

L'on pourrait peut-être s'étonner que des structures de bâtiments couramment construits en traditionnel, et tels que ceux cités au cours du présent mémoire (entrepôts, usines, piscines, etc...) puissent précisément être réalisés de façon tout à fait heureuse à partir d'éléments industrialisés qui sont chacun identiques, étant la surface minimale-périodique décrite dans la présente recherche.

Aussi l'auteur a-t-il voulu illustrer son propos en présentant (fig. 17) une photographie prise sur l'intérieur d'une maquette d'une telle structure, afin qu'il soit possible de juger du résultat architectural obtenu.

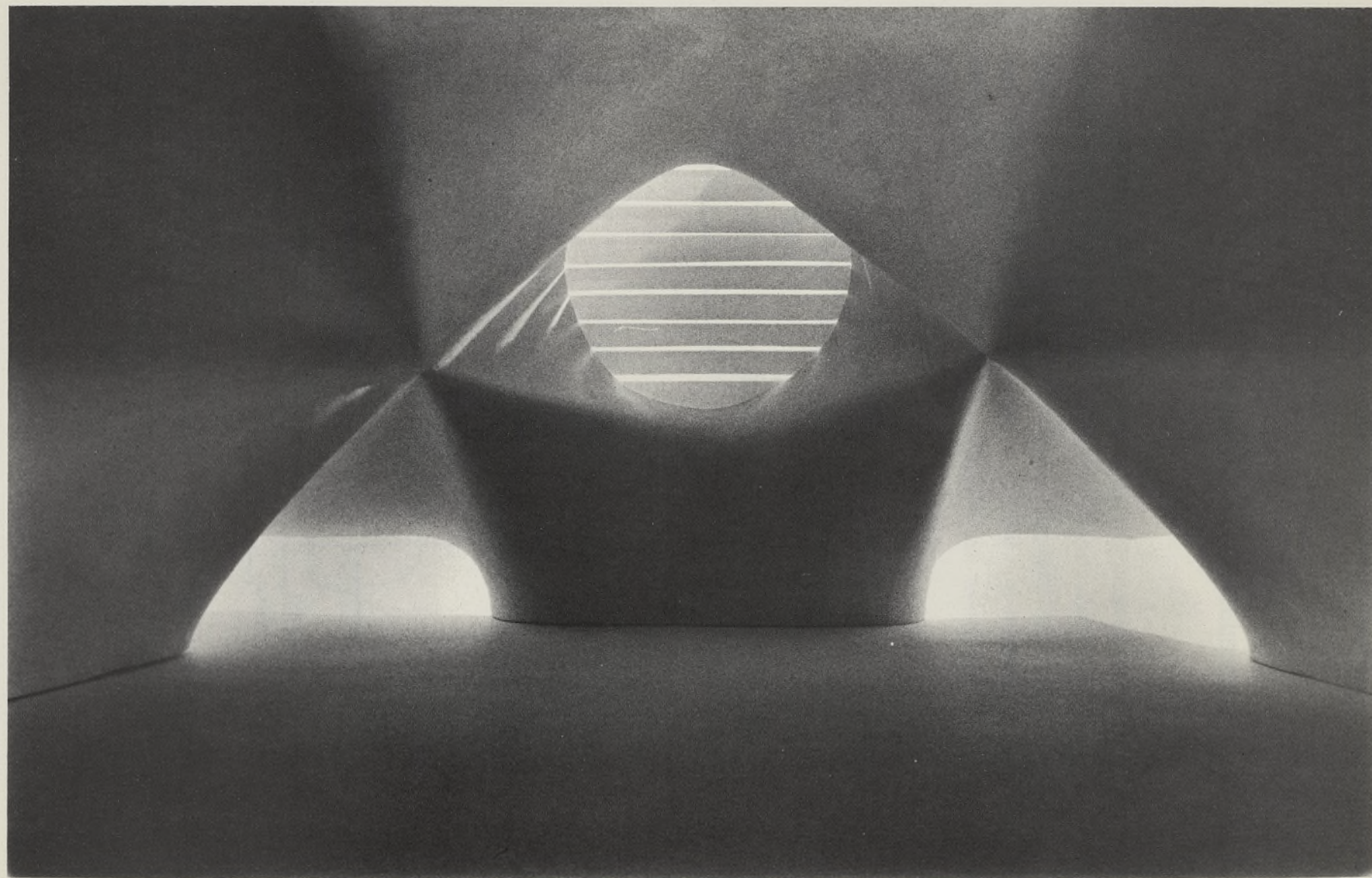


fig.17

VI - CRITIQUE ET CONCLUSIONS

L'auteur veut souligner que la conception décrite peut servir pour différentes applications, mais les cas où elle se révélera être vraiment économique sont limités. Cette limitation résulte de deux faits : 1°- de la rigidité des dimensions relatives de la structure, et 2°- du processus de préfabrication.

1° - RIGIDITE DES DIMENSIONS RELATIVES DE LA STRUCTURE

Les rapports entre les dimensions de la structure sont fixes (fig. 18)

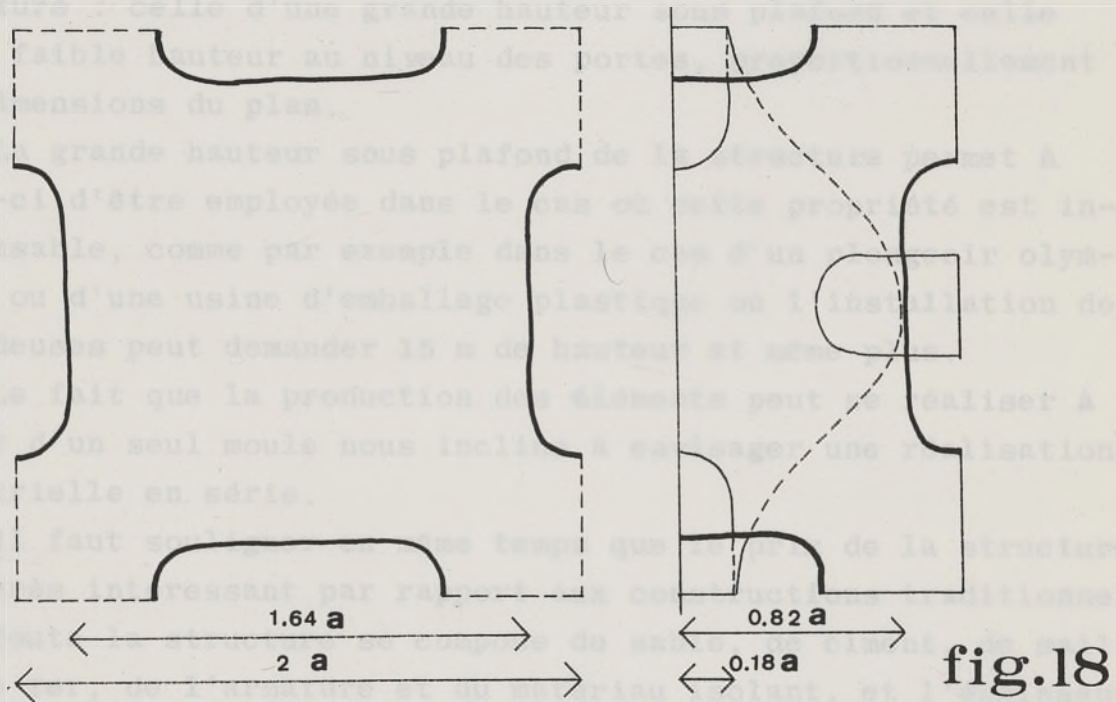


fig.18

Dimensions du plan : $2a \times 2a$ - Dimensions du plan libre de construction : $1,64a \times 1,64a$ - Hauteur maximale sous plafond : $0,82a$ - Hauteur des portes : $0,18a$.

Voici par exemple les dimensions absolues obtenues :

Dimensions du plan	Dimensions du plan libre de construction	Hauteur maximale sous plafond	Hauteur des portes
25 x 25 m	20,50 x 20,50 m	10,25 m	2,25 m
30 x 30 m	24,60 x 24,60 m	12,30 m	2,70 m
35 x 35 m	28,70 x 28,70 m	14,35 m	3,15 m
40 x 40 m	32,80 x 32,80 m	16,40 m	3,60 m
45 x 45 m	36,90 x 36,90 m	18,45 m	4,05 m
50 x 50 m	41,00 x 41,00 m	20,50 m	4,50 m

Les dimensions absolues montrent deux particularités de la structure : celle d'une grande hauteur sous plafond et celle d'une faible hauteur au niveau des portes, proportionnellement aux dimensions du plan.

La grande hauteur sous plafond de la structure permet à celle-ci d'être employée dans le cas où cette propriété est indispensable, comme par exemple dans le cas d'un plongeur olympique ou d'une usine d'emballage plastique où l'installation des extrudeuses peut demander 15 m de hauteur et même plus.

Le fait que la production des éléments peut se réaliser à partir d'un seul moule nous incline à envisager une réalisation industrielle en série.

Il faut souligner en même temps que le prix de la structure sera très intéressant par rapport aux constructions traditionnelles. Toute la structure se compose de sable, de ciment, de mailles de fer, de l'armature et du matériau isolant, et l'épaisseur de la couverture portante dans le cas d'une portée de 25 à 30 m ne doit pas dépasser 3 cm.

A noter, dans le cadre de la présente recherche, que cette réalisation ne sera entreprise qu'après exécution d'un prototype précis de structure (entrepôt, usine, piscine, etc...) et cette exécution d'un prototype ne se fera qu'après étude et mise au point du programme de réalisation.

Pouvons-nous sur la base de cette étude entreprendre une réalisation ? Non. Il faut, avant la réalisation, exécuter les travaux de préparation.

Il serait très risqué d'entreprendre la construction du prototype sans une connaissance approfondie des données techniques.

Nous avons deux manières de le faire : l'une analytique (mathématique), l'autre expérimentale sur le modèle réduit.

S'il s'agit de la manière analytique, elle est favorisée par l'existant en formules mathématiques, puisque précisément nous disposons d'équations d'équilibre pour les surfaces de forme arbitraire : les formules d'équations différentielles (1) lesquelles, dans notre cas, se simplifient encore puisque les deux forces tangentes à la surface sont identiques et l'effort tranchant est nul.

Les dérivées partielles qui apparaissent dans ces équations doivent être calculées d'après les équations de notre surface (2).

On peut aussi calculer la valeur maximale de la contrainte en faisant varier l'angle et trouver ainsi la direction précise des trajectoires des forces principales en chaque point de la surface.

On peut donc calculer tout, sauf la valeur du module d'élasticité.

Mais pouvons-nous seulement sur la base de ces calculs entreprendre la réalisation d'une structure, laquelle, pour le moment, n'a jamais été réalisée ?

(1) W. FLUGGE, Stresses in shells, Springer-Verlag N.Y. Inc. 1967.

(2) S.N. NEOVIUS, op. cit. p. 83.

VII - PROGRAMME DE REALISATION

Pouvons-nous sur la base de cette étude entreprendre une réalisation ? Non. Il faut, avant la réalisation, exécuter les travaux de préparation.

Il serait très risqué d'entreprendre la construction du prototype sans une connaissance approfondie des données techniques.

Nous avons deux manières de le faire : l'une analytique (mathématique), l'autre expérimentale sur le modèle réduit.

S'il s'agit de la manière analytique, elle est favorisée par l'existant en formules mathématiques, puisque précisément nous disposons d'équations d'équilibre pour les surfaces de forme arbitraire : les formules d'équations différentielles (1) lesquelles, dans notre cas, se simplifient encore puisque les deux forces tangentes à la surface sont identiques et l'effort tranchant est nul.

Les dérivées partielles qui apparaissent dans ces équations doivent être calculées d'après les équations de notre surface (2).

On peut aussi calculer la valeur maximale de la contrainte en faisant varier l'angle et trouver ainsi la direction précise des trajectoires des forces principales en chaque point de la surface.

On peut donc calculer tout, sauf la valeur du module d'élasticité.

Mais pouvons-nous seulement sur la base de ces calculs entreprendre la réalisation d'une structure, laquelle, pour le moment, n'a jamais été réalisée ?

(1) W. FLUGGE, Stresses in shells, Springer-Verlag N.Y. Inc. 1967.

(2) E.R. NEOVIUS, op. cit. p. 81.

Écoutons l'opinion des deux plus grands constructeurs de notre époque : E. TORROJA et P.L. NERVI.

E. TORROJA :

"Enfin, le projeteur ne doit pas oublier que si, dans certains cas spéciaux - très peu nombreux - l'analyse s'avère incapable de résoudre le problème, il reste toujours les méthodes expérimentales et analytico-expérimentales avec lesquelles on peut aujourd'hui garantir les conditions de sécurité de n'importe quelle structure, aussi compliquée soit elle." (1).

Ainsi le projet de TORROJA du fronton Recoletos à Madrid en voile mince d'une portée de 55 m et d'une épaisseur égale au 1/500 de la portée a été vérifié sur le modèle réduit.

L'opinion d'un autre grand constructeur de notre époque qui - il faut le souligner - est en même temps un grand mathématicien, est beaucoup plus explicite.

P.L. NERVI :

"Puisque la plupart des systèmes nouveaux ne peut pas être analysée théoriquement, il serait impossible de les réaliser sans les possibilités illimitées offertes par l'analyse expérimentale des contraintes."

"Il est connu que la répartition des contraintes dans une structure, bien qu'elle dépende de sa forme et de la répartition des charges, est indépendante de l'échelle géométrique et dynamique. Le modèle, qui est une reproduction de la structure à une petite échelle, quand il se trouve sous l'action des forces dont la valeur a été définie par la mécanique, sera en état de contraintes absolument identiques à son prototype. Le mesurage des contraintes du modèle à l'aide de témoins (tensiomètres) corrigé

(1) E. TORROJA, Les structures architecturales, Ed. Eyrolles, Paris, 1969, p. 395.

par le facteur de l'échelle, indiquera l'état des contraintes de la structure originale. Au lieu de déterminer les contraintes dans la structure par les méthodes théoriques et donc approximatives et simplifiées, nous pouvons les déterminer par le mesurage simple et direct. C'est comme lire le poids du corps sur la graduation d'une bascule, au lieu de le calculer par le mesurage de son volume et du poids spécifique. La supériorité de la méthode expérimentale sur n'importe quel processus théorique pour déterminer le comportement de la structure est si incontestable qu'on n'a pas besoin d'explication supplémentaire." (1).

"Le champ d'investigation de la méthode analytique peut être divisé en deux branches : le mesurage à l'aide des tensiomètres, et la photoélasticité. Les tensiomètres donnent directement par les moyens mécaniques ou électriques l'importance des déformations pour une section choisie. La détermination précédente du module d'élasticité du matériau permet d'évaluer exactement les contraintes correspondantes et la grandeur de la résultante pour n'importe quelle section."

"... la méthode photoélastique est plus efficace pour étudier les contraintes locales dans les corps dont les dimensions sont limitées (crochet d'une grue, maillon d'une chaîne, partie d'une machine) que dans l'analyse de l'ensemble d'une structure. Dans le cas des structures spatiales qui, beaucoup plus que les autres, ont besoin d'une approche expérimentale, la méthode photoélastique est actuellement trop compliquée." (2).

Les premières applications de l'analyse expérimentale des contraintes des projets de P.L. NERVI ont été exécutées par le Laboratoire de l'Ecole Polytechnique de Milan en 1935 et en 1939

des plus grandes tensions et en même temps l'orientation des trajectoires).

Cette méthode facilite aussi l'établissement de la valeur

(1) P.L. NERVI, Structures, F.W. Dodge Corp. New-York, 1956, p. 87-88.

(2) P.L. NERVI, op. cit., p. 88-89.

sur la structure des hangars à Orvieto, Torre del Labo et Ortebelle. Le modèle réduit du hangar a été exécuté en celluloid (longueur approximative = 2 m).

Le premier modèle réduit exécuté en fer-ciment (d'épaisseur 5 mm) était celui de la structure du Bâtiment d'Exposition de Milan en 1953.

Il faut ajouter que même le bâtiment Pirelli à Milan, de 120 mètres de hauteur, en béton armé, n'a été exécuté qu'après la réalisation en modèle réduit. C'était probablement le plus grand modèle réduit jamais exécuté puisque sa hauteur était de 12 mètres.

Les méthodes analytiques (mathématiques) peuvent servir comme vérification supplémentaire, mais jamais - surtout dans le cas d'une structure absolument nouvelle - elles ne constitueront une base unique pour l'exécution.

Les recherches sur le modèle réduit doivent, dans notre cas, fournir les données suivantes :

1° - Les propriétés du matériau

La valeur du module d'élasticité doit être obtenue dans un laboratoire de résistance des matériaux sur la base des échantillons.

Le modèle réduit de notre structure doit être exécuté en fer-ciment, ce qui donnera une possibilité supplémentaire d'étudier le comportement du matériau sous la charge.

2° - Le dessin des trajectoires des forces principales

Celui-ci doit être établi directement sur le modèle réduit à l'aide, par exemple, de la méthode dite des craquelures. (On étend sur la surface du modèle une couche de vernis et on le met sous la charge ; les premières craquelures montrent les lignes des plus grandes tensions et en même temps l'orientation des trajectoires).

Cette méthode facilite aussi l'établissement de la valeur des tensions puisque l'expérience peut être répétée et les tensiomètres seront appliqués directement sur les parties les plus tendues.

3° - La valeur des tensions maximales

Cette valeur sera établie par le mesurage des allongements maximaux à l'aide des tensiomètres électriques.

La forme la plus simple d'un tensiomètre, c'est un fil isolé collé sur la surface d'un corps considéré. Au cours de la déformation sous l'effet de la charge, le fil s'allonge et sa résistance électrique augmente, autrement dit la déformation peut être mesurée. C'est le principe ; en pratique, on emploie un fil long, plié plusieurs fois, ce qui augmente l'effet de la résistance électrique.

Sur la base des données mentionnées ci-dessus, on peut dresser facilement un étalonnage qui comportera les éléments techniques nécessaires pour l'exécution du prototype pour une portée voulue.

En même temps, la méthode d'exécution du modèle réduit rapprochera les expériences de la pratique et permettra d'élaborer la technique de production des éléments répétitifs et les détails d'exécution tels que joints, pose de l'isolation thermique, etc...

L'auteur prévoit que la grandeur du modèle réduit sera d'environ 3x3 ou même 4x4 m en plan pour faciliter la mise en place des surcharges.

BIBLIOGRAPHIE

- DOUGLAS (J) - Solution of the problem of Plateau, Trans. Amer. Math. Soc. 33, 1931, p. 263 à 321.
- FLUGGE (W) - Stresses in shells, Springer-Verlag N.Y. Inc. 1967.
- NEOVIUS (E.R.) - Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimal-flächen auf welchen unendlich viele gerade linien und unendlich viele ebene geodätische linien liegen, Helsingfors, J.C. Frenckell & Sohn, 1883.
- NERVI (P.L.) - Structures, F.W. Dodge Corp., N.Y. 1956.
- OSSIAN-BONNET - Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1853, Tome XXXVII, p. 529 à 532.
- PLATEAU (J) - Statique expérimentale et théorique des liquides, Gand et Leipzig, 1873.
- Piscines Couvertes et en plein air, Ministère de la Jeunesse et des Sports, 1969.
- SCHWARZ (H.A.) - Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Berlin, Verlag von J. Springer, 1890.
- TORROJA (E) - Les structures architecturales, Ed. Eyrolles, Paris, 1969.

