



HAL
open science

Un résultat de trace sur les domaines d'extension de Sobolev

Djamal Ait Akli, Abdelkader Merakeb

► **To cite this version:**

Djamal Ait Akli, Abdelkader Merakeb. Un résultat de trace sur les domaines d'extension de Sobolev. 2021. hal-03084211v2

HAL Id: hal-03084211

<https://hal.science/hal-03084211v2>

Preprint submitted on 20 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un résultat de trace sur les domaines d'extension de Sobolev

Djamel AIT-AKLI¹, Abdelkader MERAKEB²

20 février 2021

Résumé

On se propose dans cet article d'établir l'existence et la continuité d'un opérateur de trace de fonctions sur le bord d'un domaine Ω plan possédant la propriété de $(1, p)$ -extension de Sobolev. Cet opérateur sera défini sur l'espace fonctionnel de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$. Dans un premier temps, on démontre l'existence et la continuité d'un tel opérateur quand il est appliqué aux éléments du sous-espace des fonctions régulières jusqu'au bord et ce en utilisant un lemme auxiliaire de majoration uniforme. Les ingrédients essentiels utilisés dans la démonstration de ce lemme sont la représentation de Green d'une fonction sur un disque ainsi que le théorème d'isomorphisme de Banach. Puis on conclut le résultat de trace en utilisant la densité des fonctions régulières dans $W^{1,p}(\Omega)$. La preuve qui est présentée exploite totalement l'hypothèse d'extensibilité du domaine Ω . La pertinence du résultat réside dans le fait qu'il existe des domaines d'extension qui ne sont pas Lipschitziens et sous ce point de vue, il constitue une généralisation du théorème habituel de trace.

Mots-clés : espaces de Sobolev ; domaines de $(1, p)$ -extension ; représentation de Green ; inégalité de trace ; densité des fonctions régulières.

AMS subject classification : 46E35, 35J57, 26A16, 46B25.

^{1 2}

1 Introduction

L'opérateur de trace, lorsqu'il est appliqué aux fonctions de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ définies sur un domaine Ω ayant une frontière Lipschitzienne, est une notion standard en théorie des espaces de Sobolev. Plus précisément, il est bien établi que l'opérateur de trace est bien défini sur le bord d'un ouvert Lipschitzien et qu'il est continu, cf. [1]. Le résultat principal de cet article généralise ces faits à une classe importante de domaines

1. L2CSP, UMMTO. 15000, Tizi-Ouzou, Algérie. (d.aitakli@yahoo.com)
2. L2CSP, UMMTO. 15000, Tizi-Ouzou, Algérie. (merakeb_kader@yahoo.fr)

non-Lipschitziens, plus exactement, à la classe des domaines qui admettent la propriété de $(1, p)$ -extension et qu'on appelle communément les domaines de $(1, p)$ -extension.

Donc, il s'agit dans cet article de démontrer l'existence d'un opérateur de trace et la continuité de cet opérateur sur l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ défini sur un domaine, Ω , possédant cette régularité intermédiaire entre Lipschitzien et Jordan arbitraire.

Les fonctions de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ définies sur un tel domaine constituent une classe pertinente de fonctions dans le sens suivant : il existe des domaines dont la frontière est paramétrée par une fonction continue et non-Lipschitzienne et qui, pourtant, admettent la propriété de $(1, p)$ -extension. En effet, Maz'ya a construit, cf. [2], un exemple d'un domaine de Jordan, Ω , dont la frontière $\partial\Omega$ n'est pas Lipschitzienne au voisinage d'un de ses points et telle que la propriété de $(1, p)$ -extension n'est valide que pour $p < 2$. Par ailleurs, il est à rappeler qu'un domaine Lipschitzien est toujours un domaine d'extension.

La preuve du résultat de trace que nous présentons dans le cadre des domaines d'extension s'appuie sur des idées différentes de la preuve habituelle et exploite totalement l'hypothèse d'extensibilité du domaine.

D'abord on commence par introduire quelques notions préliminaires ainsi que les outils et résultats indispensables pour mener à bien la preuve du résultat principal, à savoir : l'établissement d'un théorème de trace pour des fonctions de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ dans le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné et possédant la propriété de $(1, p)$ -extension.

2 Rappels de quelques résultats

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. On note $\text{Int}(\Omega)$ l'intérieur de Ω . Dans toute cette section, p désignera un nombre réel tel que $1 < p < \infty$. On désigne par $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\}.$$

On suppose de plus que Ω possède la propriété de $(1, p)$ -extension. On rappelle que la propriété de $(1, p)$ -extension d'un domaine Ω signifie qu'un opérateur d'extension de Sobolev peut être défini sur $W^{1,p}(\Omega)$, le lecteur pourra se référer à [2] pour une discussion détaillée de cette classe de domaines.

On rappelle un résultat de densité démontré dans ([3], p.261). Ce résultat est valable dans le cas où Ω est un domaine Lipschitzien ou plus généralement un domaine d'extension qui font partie tous deux de la classe des domaines de Jordan :

Théorème 1. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine ayant pour frontière une courbe de Jordan, alors $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$.*

Rappelons la définition d'un opérateur de $(1, p)$ -extension de Sobolev.

Définition 2. *On dit qu'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine d'extension, ou possède la propriété de $(1, p)$ -extension, s'il existe un opérateur linéaire P défini par*

$$\begin{aligned} P : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \\ u &\rightarrow Pu. \end{aligned}$$

tel que P soit continu i.e. il existe $c_{ext} > 0$ tel que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ on ait

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^2)} \leq c_{ext} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (1)$$

et $(Pu)(x) = u(x)$ presque partout dans Ω .

On rappelle la propriété de continuité de l'opérateur de trace, sur la frontière Lipschitzienne (ou faiblement Lipschitzienne) d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, défini sur l'espace de Sobolev $W^{1,p}(D)$, cf. [1] :

Proposition 3. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine Lipschitzien. Il existe une constante $C_D > 0$, dépendant du domaine D , telle que*

$$\|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C_D \|u\|_{W^{1,p}(D)}, \quad (2)$$

pour tout $u \in W^{1,p}(D)$.

Il est à noter que la proposition 3 ne s'applique pas en principe ni à un domaine d'extension en général et encore moins à un domaine de Jordan Ω compte tenu de l'hypothèse, primordiale, du caractère Lipschitzien, ou à la limite faiblement Lipschitzien, du domaine ambiant D .

On rappelle aussi un résultat de trace pour les fonctions de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(D_r)$ où $D_r \subset \mathbb{R}^2$ désigne un disque de rayon $r > 0$, cf. ([4], estimation 7.1) :

Proposition 4. *Pour tout $u \in W^{1,1}(D_r)$ on a*

$$\int_{\partial D_r} |u| d\sigma \leq \frac{2}{r} \int_{D_r} |u| dx + \int_{D_r} |\nabla u| dx. \quad (3)$$

Par ailleurs, on rappelle la représentation intégrale d'une fonction $u \in C^2(D_r) \cap C^0(\partial D_r)$ sur le disque D_r . Cette représentation s'écrit, cf. [5] : pour tout $x \in \text{Int}(D_r)$ on a :

$$u(x) = \int_{D_r} \Delta u(y) G(x, y) dy + \int_{\partial D_r} u(y) K(x, y) d\sigma(y), \quad (4)$$

où G est la fonction de Green du disque, D_r , associée à l'opérateur de Laplace et définie par :

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) + h_x(y),$$

avec $\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$ étant la solution fondamentale du Laplacien en dimension deux et h_x est la fonction harmonique en y et valant $-\Gamma(x - y)$ pour $x \in \text{Int}(D_r)$ et $y \in \partial D_r$. D'un autre coté $K(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y}$ est le noyau de Poisson qui dans le cas du disque s'écrit :

$$K(x, y) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\omega_2 r |x - y|^2},$$

où ω_2 est la mesure de la boule unité en deux dimensions. Cette représentation intégrale est intéressante dans la mesure où elle permet d'exprimer ponctuellement une fonction à l'aide de son Laplacien et des valeurs qu'elle prend sur le bord du disque D_r .

3 Résultat principal

Le principal résultat de cet article est énoncé dans le théorème suivant, sa démonstration sera donné après avoir établi un lemme auxiliaire.

Théorème 5. *Soit Ω un domaine possédant la propriété de $(1, p)$ -extension et p tel que $1 < p < \infty$. Alors, on peut définir un opérateur de trace*

$$\begin{aligned} T : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow L^p(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow Tu \end{aligned}$$

qui coïncide avec l'opérateur de restriction au bord $\partial\Omega$ pour les fonctions continues. En outre, T est continu i.e. il existe une constante $c_t > 0$ indépendante de u telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on ait

$$\|Tu\|_{p,\partial\Omega} \leq c_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (5)$$

où nous avons noté $\|\cdot\|_{p,\partial\Omega}$ la norme usuelle de l'espace de Lebesgue L^p .

Lemme auxiliaire. On démontre à présent un lemme essentiel à la démonstration du théorème principal :

Lemme 6. *Soit $1 < p < 2$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un point fixé. Soit $D_{r_0} := D(x_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2$ le disque de centre x_0 et de rayon $r_0 > 0$. Il existe une constante $c(r_0, p) > 0$ indépendante de u et de x telle que pour tout $u \in C^\infty(\overline{D_{r_0}})$*

$$\forall x \in D_{\frac{r_0}{2}}, \quad |u(x)| \leq c(r_0, p) \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}. \quad (6)$$

On note $|x - y|_2$ pour désigner la distance euclidienne entre les points x et y .

Démonstration. Soit $u \in C^\infty(\overline{D_{r_0}})$. Il existe $f \in C^\infty(D_{r_0})$ et $u^d \in C^\infty(\partial D_{r_0})$ tels que la fonction u soit solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(y) &= f(y) \quad \text{dans } D_{r_0}, \\ u(y) &= u^d(y) \quad \text{sur } \partial D_{r_0}. \end{cases} \quad (7)$$

Soit $x \in D_{\frac{r_0}{2}}$. En utilisant la représentation intégrale, (4), appliquée à la fonction u en x , on a :

$$u(x) = \int_{D_{r_0}} f(y)G(x, y) \, dy + \int_{\partial D_{r_0}} u^d(y)K(x, y) \, d\sigma(y). \quad (8)$$

Étant donné que ∂D_{r_0} est de classe C^∞ , alors on sait que la fonction de Green satisfait $G(x, \cdot) \in W^{1,p}(D_{r_0})$ pour $1 < p < 2$, cf. ([6], estimation 1.5). En utilisant la propriété de continuité de la forme linéaire associée à $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, on obtient à partir de l'estimation (8) ce qui suit

$$|u(x)| \leq \|f\|_{W^{-1,p}(D_{r_0})} \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| \int_{\partial D_{r_0}} |u^d(y)| \, d\sigma(y).$$

Le dernier membre de cette estimation a bien un sens du moment que $|x - y|_2 \geq \frac{r_0}{2}$ pour $x \in D_{\frac{r_0}{2}}$ et $y \in \partial D_{r_0}$.

En appliquant l'inégalité de trace sur le bord du disque, cf. estimation (3), on obtient

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \|f\|_{W^{-1,p}(D_{r_0})} \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ &\quad + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| \left(\frac{2}{r_0} \|u\|_{L^1(D_{r_0})} + \|\nabla u\|_{L^1(D_{r_0})} \right), \end{aligned}$$

l'inégalité de Hölder donne alors

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \|f\|_{W^{-1,p}(D_{r_0})} \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ &\quad + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| c_{r_0} (\|u\|_{p, D_{r_0}} + \|\nabla u\|_{p, D_{r_0}}). \end{aligned}$$

On applique le théorème d'isomorphisme de Banach à l'opérateur bijectif et continu L_1 défini par

$$\begin{aligned} L_1 : \left(W^{-1,p}(D_{r_0}), \| \cdot \|_{W^{-1,p}(D_{r_0})} \right) &\rightarrow \left(W_0^{1,p}(D_{r_0}), \| \cdot \|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \right) \\ f &\rightarrow L(f) = u_1, \end{aligned}$$

avec $\Delta u_1 = f$. On déduit alors l'existence d'une constante c'_1 indépendante de f telle que

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq c'_1 \|u_1\|_{W_0^{1,p}(D_{r_0})} \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ &\quad + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| c_{r_0} \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \end{aligned} \quad (9)$$

avec $u_1 = u - u_2$ et u_2 est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{sur } D_{r_0}, \\ u_2 = u & \text{sur } \partial D_{r_0}. \end{cases} \quad (10)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, l'estimation (9) devient alors

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq & c_1 (\|\nabla u\|_{p,D_{r_0}} + \|\nabla u_2\|_{p,D_{r_0}}) \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ & + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| c_{r_0} \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}. \end{aligned} \quad (11)$$

En utilisant le résultat de la proposition 3, on peut appliquer le théorème d'isomorphisme, à l'opérateur associé au problème 10, pour établir de l'existence d'une constante c_2 telle que

$$\|\nabla u_2\|_{p,D_{r_0}} \leq c_2 \|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial D_{r_0})}.$$

L'estimation (11) devient

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq & c_1 \left(\|\nabla u\|_{p,D_{r_0}} + c_2 \|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial D_{r_0})} \right) \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ & + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| c_{r_0} (\|u\|_{p,D_{r_0}} + \|\nabla u\|_{p,D_{r_0}}). \end{aligned}$$

L'application du théorème de trace sur $W^{1,p}(D_{r_0})$, cf. proposition 3, permet de déduire qu'il existe une constante c_3 telle que

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq & c_1 (\|\nabla u\|_{p,D_{r_0}} + c_3 (\|u\|_{p,D_{r_0}} + \|\nabla u\|_{p,D_{r_0}})) \|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})} \\ & + \max_{y \in \partial D_{r_0}} |K(x, y)| c_{r_0} \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}, \end{aligned}$$

alors on déduit aisément facilement qu'il existe une constante $c(r_0, p)$ qui est indépendante de u et de x telle que

$$\forall x \in D_{\frac{r_0}{2}}, \quad |u(x)| \leq c(r_0, p) \|u\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}.$$

Cette dernière estimation est obtenue en utilisant le fait que $\|G(x, \cdot)\|_{W^{1,p}(D_{r_0})}$ est uniformément borné en $x \in D_{\frac{r_0}{2}}$. \square

4 Preuve du résultat principal

Démonstration. Soit $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. La fonction u est Lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$. Si on note L la constante de Lipschitz de la fonction $x \rightarrow u(x)$ relativement au domaine Ω , alors pour tout $x \in \partial\Omega$ et tout $y \in \text{Int}(\Omega)$ nous avons

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|_2,$$

ce qui implique immédiatement

$$|u(x)| \leq L|x - y|_2 + |u(y)|, \quad (12)$$

pour tout $x \in \partial\Omega$ et tout $y \in \text{Int}(\Omega)$. Fixons $x \in \partial\Omega$. Soit $(y_\delta)_{\delta>0}$ une suite de points, $y_\delta \in \text{Int}(\Omega)$, telle que $|y_\delta - x|_2 \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$. Fixons $\delta > 0$. L'estimation (12) donne

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + |u(y_\delta)|, \quad (13)$$

pour tout $\delta > 0$. On note $\tilde{u} = \text{P}u$ avec P étant l'opérateur d'extension défini sur $W^{1,p}(\Omega)$ à valeurs dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \subset W^{1,p}(\Omega)$, cf. Définition 2. Du moment que Ω possède la propriété de $(1, p)$ -extension, un tel opérateur d'extension est bien défini.

Il faut bien noter que la fonction \tilde{u} n'est pas nécessairement continue sur $\mathbb{R}^2 - \Omega$, c'est-à-dire qu'elle ne possède pas de fonction représentative continue. En effet, ceci est dû au fait que $1 - \frac{2}{p} < 0$ pour $1 < p \leq 2$; donc l'injection classique des espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder ne peut pas être appliquée dans le cas qui nous concerne, à savoir $p > 1$.

Comme Ω est borné, il existe $r_0 > 0$ et $x_0 \in \Omega$ tels que le disque D_{r_0} de centre x_0 et de rayon r_0 contienne Ω comme sous ensemble propre. L'ensemble des fonctions régulières jusqu'au bord, $C^\infty(\overline{D_{2r_0}})$ définies sur le domaine lipschitzien $\overline{D_{2r_0}} \subset \mathbb{R}^2$, étant dense dans $W^{1,p}(D_{2r_0})$, cf. théorème 1, par conséquent il existe une suite $(v_n)_n$, $v_n \in C^\infty(\overline{D_{2r_0}})$, telle que

$$\|v_n - \tilde{u}\|_{W^{1,p}(D_{2r_0})} \rightarrow 0. \quad (14)$$

L'estimation (14) implique qu'il existe une sous-suite $(\phi(n))_n$, telle que $v_{\phi(n)}(x) \rightarrow \tilde{u}(x)$ p.p. dans D_{2r_0} . Comme v_n et \tilde{u} sont continues dans Ω , cette convergence simple est valable partout dans Ω i.e.

$$\forall y \in \Omega, \quad v_{\phi(n)}(y) \rightarrow \tilde{u}(y), \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (15)$$

En utilisant (13) et (15) on obtient : $\forall \delta > 0$ et $\forall \epsilon > 0$, $\exists n(\epsilon, y_\delta) > 0$ tel que pour tout $n > n(\epsilon, y_\delta)$ on a :

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + |v_{\phi(n(\epsilon, y_\delta))}(y_\delta)| + \epsilon, \quad (16)$$

où $\epsilon > 0$ est destiné à tendre vers zero et $(n(\epsilon, y_\delta))_{\epsilon>0}$ est une suite d'entiers qui tend vers $+\infty$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et ce pour tout $\delta > 0$. D'autre part, la formule (16) et la régularité de $v_{\phi(n(\epsilon, y_\delta))}$ permettent d'écrire

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + |v_{\phi(n(\epsilon, y_\delta))}|_{\infty, \overline{D_{2r_0}}} + \epsilon,$$

pour tout $\delta > 0$. En appliquant le lemme 6, dans le disque D_{2r_0} de centre x_0 , on a

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + c(r_0, p) \|v_{\phi(n(\epsilon, y_\delta))}\|_{W^{1,p}(D_{2r_0})} + \epsilon \quad (17)$$

RÉSULTAT DE TRACE

où $c(r_0, p)$ est la constante qui apparait dans l'estimation (6). L'estimation (17) est valable, indépendamment de δ , pour tout $\epsilon > 0$. Ainsi, en passant à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et en utilisant (14), on obtient

$$|u(x)| \leq L|x - y_\delta|_2 + c(r_0, p)\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(D_{2r_0})}, \quad (18)$$

pour tout $\delta > 0$. Étant donné que tous les éléments constituant l'estimation (18) sont indépendants de δ alors en faisant tendre $\delta \rightarrow 0$ on trouve

$$|u(x)| \leq c(r_0, p)\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(D_{2r_0})}. \quad (19)$$

Donc l'estimation (19) donne

$$|u(x)| \leq c(r_0, p)\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^2)}. \quad (20)$$

En utilisant (1), l'estimation (20) donne à son tour

$$|u(x)| \leq c(r_0, p)c_{ext}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (21)$$

Noter bien que l'estimation (21) est valide pour tout $x \in \Gamma := \partial\Omega$ indépendamment des quantités présentes dans le membre de droite de cette inégalité.

A présent, on note $t \in [a, b] \rightarrow x(t) = (t, \gamma(t))$ la fonction qui représente paramétriquement la courbe Γ . Ainsi, d'après (21), nous avons :

$$|u(t, \gamma(t))|^p \leq (c(r_0, p)c_{ext})^p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p, \quad (22)$$

pour tout $t \in [a, b]$. Par définition de l'intégrale curviligne, on a

$$\int_{\Gamma} |u|^p ds := \int_a^b |u \circ \gamma|^p ds_\gamma. \quad (23)$$

Ainsi, en intégrant les deux côtés de (22) par rapport à l'abscisse curviligne ds_γ et en utilisant (23), on trouve

$$\int_{\Gamma} |u|^p ds \leq (c(r_0, p)c_{ext})^p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \int_a^b 1 ds_\gamma,$$

ce qui donne

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p ds \leq (c(r_0, p)c_{ext})^p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p |\partial\Omega|. \quad (24)$$

On pose $c_t := [(c(r_0, p)c_{ext})^p |\partial\Omega|]^{-\frac{1}{p}}$, la constante c_t ne dépend pas de u mais seulement de Ω et de l'exposant p . A partir de (24), nous avons pour tout $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$

$$\|u\|_{p, \partial\Omega} \leq c_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (25)$$

Présentement, on conclut l'estimation (5). D'après le théorème 1, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ il existe $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $u_l \in C^\infty(\overline{\Omega})$, tel que

$$\|u_l - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Ainsi, en appliquant (25) aux éléments de la suite $(u_l)_l$, nous avons pour tout $l \in \mathbb{N}$ l'estimation suivante :

$$\|u_l\|_{p,\partial\Omega} \leq c_t \|u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (26)$$

Comme $(u_l)_l$ est une suite de Cauchy dans l'espace normé $W^{1,p}(\Omega)$ alors l'estimation (26) implique que c'est aussi une suite de Cauchy dans l'espace normé $L^p(\partial\Omega)$. Mais $L^p(\partial\Omega)$ est complet, alors il existe $u^* \in L^p(\partial\Omega)$ tel que

$$\|u^*\|_{p,\partial\Omega} \leq c_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Finalement, on pose $Tu := u^*$, nous avons

$$\|Tu\|_{p,\partial\Omega} \leq c_t \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ce qui définit bien un opérateur de trace continu sur l'espace $L^p(\partial\Omega)$ défini à son tour sur le bord $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} T : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow L^p(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow Tu \end{aligned}$$

□

Remarque 7. *La pertinence du résultat qu'on vient de démontrer réside dans le fait qu'il est vrai pour des fonctions de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ qui ne sont pas nécessairement continues pour $1 < p < 2$, fonctions pour lesquelles l'existence même de la trace n'est pas évidente. L'exemple du domaine construit par Mazya dans [2] illustre parfaitement non seulement la pertinence mais aussi la généralité qui résulte du fait qu'on ait considéré le domaine Ω possédant seulement la propriété de $(1, p)$ -extension.*

Références

- [1] E. Gagliardo. *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*. Ren. Sem. Mat. Univ. Padova., vol. 27, pp. 284–305, (1957).
- [2] V.G. Maz'ya. *Extension of functions from Sobolev spaces*. English translation : Journal of Soviet Mathematics, vol. 22, pp. 1851-1855, (1983).
- [3] J. L. Lewis. *Approximation of Sobolev functions in Jordan domains*. Ark. Mat., vol. 25, N.1-2, pp. 255-264, (1987).

RÉSULTAT DE TRACE

- [4] G. Auchmuty. *Sharp boundary trace inequalities*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A : Mathematics, vol. 144, N.1, pp. 1-12, (2014).
- [5] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Series in Mathematics, vol. 19.R, A.M.S, (2010).
- [6] D. Mitrea, I. Mitrea. *On the Regularity of Green Functions in Lipschitz Domains*. Comm. Partial Differential Equations, vol. 36, pp. 304–327, (2011).