HAL
open science

Nature et origine des difficultés des étudiants lors de l'utilisation des approximations locales des fonctions en début de l'université : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs

Belhaj Amor Fatma

To cite this version:

Belhaj Amor Fatma. Nature et origine des difficultés des étudiants lors de l'utilisation des approximations locales des fonctions en début de l'université : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs. La troisième conférence des recherches en didactique des mathématiques universitaires, Sep 2020, Bizerte, Tunisie. hal-03083962

HAL Id: hal-03083962

https://hal.science/hal-03083962v1

Submitted on 20 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nature et origine des difficultés des étudiants lors de l'utilisation des approximations locales des fonctions en début de l'université : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs

Belhaj Amor Fatma

Université Virtuelle de Tunis (ECOTIDI) et Université de Pau et des pays de l'Adour (LMAP), fatma.belhajamor@gmail.com

Résumé : *Cet article porte sur l'enseignement et l'apprentissage du concept d'approximations locales des fonctions. Il vise principalement à étudier la nature et l'origine des difficultés des étudiants lors de la mise en œuvre des outils – développements limités, formule de Taylor-Young - au début du cycle préparatoire aux études d'ingénieurs en Tunisie. Après avoir explicité les grandes lignes des programmes officiel, nous effectuerons une analyse des raisonnements des étudiants confrontés à une situation mathématique visant à évaluer leurs capacités à faire un usage raisonné de leurs connaissances dans le domaine des approximations locales des fonctions au voisinage d'un point et lors de l'étude de leurs comportements asymptotiques.*

Mots clés : *enseignement, apprentissage, raisonnement mathématique, approximations locales, développement limité.*

INTRODUCTION

En Tunisie, au début du cycle préparatoire aux études d'ingénieurs, les programmes en vigueur stipulent que les notions de développement limité, la relation de comparaison des fonctions et la formule de Taylor-Young doivent être enseignées afin de permettre la résolution de problèmes d'approximations locales de fonctions et de modélisations de phénomènes physiques relevant de différents domaines (mécanique, optique, etc.). Dans le cadre de notre mémoire de master (Belhaj Amor, 2016), les investigations conduites dans les domaines de l'histoire des mathématiques, de l'épistémologie, et de la didactique nous ont permis de conclure qu'au début du cycle préparatoire, le concept développement limité n'est pas introduit en tant que nouvelle technique d'approximation locale des fonctions, permettant d'articuler les différents types d'approches (cinématique, graphique, géométrique, analytique, algébrique), afin d'en faire usage dans des domaines intra et extra-mathématiques (Belhaj Amor, ibidem). Ainsi, nos travaux de recherche de master ont mis en évidence un phénomène important le fait que les difficultés éprouvées par les étudiants sont étroitement liées à la difficile conceptualisation des objets d'approximations locales des fonctions à l'entrée dans l'enseignement supérieur. Dans le domaine de l'étude des fonctions, certaines recherches en didactique ont permis d'établir que les difficultés des étudiants sont dues principalement à l'existence de ruptures lors de la transition

secondaire/supérieur (Ghedamsi, 2016). Plus précisément, dès le début de l'université, l'approche algébrique fait obstacle à l'entrée dans le champ de l'Analyse et notamment à la conceptualisation des notions locales sur les fonctions (Vandebrouck, 2011). Ainsi lors de l'étude locale des fonctions au début de l'université,

> "…les étudiants traitent algébriquement les équivalents ou les développements limités, donnant très difficilement du sens aux expressions du type o(x) (…). Enfin, les étudiants ne tracent des graphes que quand la question leur est explicitement demandée et ils ne pensent pas spontanément à utiliser cette représentation des fonctions pour faire les raisonnements locaux attendus d'eux." (Vandebrouck, 2011, p.1-2)

Ces précédents travaux n'ont pas ciblé précisément l'analyse didactique des difficultés des étudiants lors de l'étude des approximations locales des fonctions dans la résolution des problèmes intra et extra mathématiques à l'entrée dans le supérieur.

Ces constats nous amènent à nous interroger sur la nature et l'origine des difficultés rencontrées par les étudiants lors de la mise en œuvre des connaissances et des savoirs inhérents aux approximations locales des fonctions en classes préparatoires aux études d'ingénieures tunisiennes (IPEI), dans la section Physique-Chimie.

METHODOLOGIE GENERALE ET CADRES THEORIQUES

Notre travail de recherche porte sur l'enseignement et l'apprentissage des outils d'approximations locales des fonctions. Plus précisément, nous souhaitons étudier les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la formulation et l'utilisation des développements limités d'une fonction au voisinage d'un point, de la relation de comparaison des fonctions et de la formule de Taylor-Young.

Notre méthodologie repose sur l'élaboration de trois situations mathématiques - assimilables à des énoncés de problèmes – élaborées en étroite collaboration avec l'enseignante de la classe. Ces situations ont été proposées aux étudiants en avril 2019, dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice, en vue de déterminer leurs acquis et leurs difficultés inhérentes aux approximations locales des fonctions.

En collaboration avec l'enseignante, nous avons proposé en classe cette évaluation écrite constituée de trois situations mathématiques à 2 classes, chacune composée de 22 étudiants.

Ce devoir écrit fait suite à l'enseignement des chapitres "*Analyse asymptotique*", "*Intégration*" et "*Séries numériques*". La modalité de passation de l'évaluation est la suivante : chaque étudiant travaille seul afin de produire les réponses aux questions. Les étudiants disposent de 75 minutes pour rédiger leur composition.

Dans cet article, compte-tenu des contraintes éditoriales, nous avons choisi de mettre la focale sur la première situation proposée aux étudiants. D'une part, car elle a été traitée par une majorité d'entre eux, d'autre part par la richesse et la variété des réponses produites.

Nous allons réaliser, dans le cadre de la Théorie des situations didactiques, l'analyse a priori de cette première situation. Ensuite, nous effectuerons l'analyse a posteriori de cette situation ; nous analyserons les productions des étudiants en nous attachant à étudier leurs raisonnements produits en réponse aux questions.

Pour cela, nous adoptons le point de vue de Brousseau et Gibel (2005) qui ont proposé une classification des raisonnements des élèves, en situation de résolution de problèmes, selon leur(s) fonction(s) : organiser sa démarche, décider des connaissances à mobiliser, effectuer un changement de cadre, décider d'un changement de registre, formuler une explication, formuler une justification, interpréter le résultat d'un calcul, contrôler la validité du résultat obtenu.

Comme indiqué dans les travaux de Bloch et Gibel (2011), l'analyse des raisonnements produits par les étudiants nécessite d'avoir recours à une analyse sémiotique afin d'analyser les signes produits, leurs usages et leurs transformations. Nous utiliserons ainsi les notions de registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) afin d'identifier d'éventuels changements de registres.

Pour compléter l'étude des raisonnements, nous effectuerons une analyse en termes de dimensions sémantique et syntaxique (Kouki, Belhaj Amor et Hachaichi, 2016), (Bloch et Gibel, 2011). Dans notre cas, la syntaxe fournit des règles de transformation des expressions analytique et algébrique dans un raisonnement mathématique. Dans certains cas, sa satisfaction nécessite un contrôle sémantique prenant en compte aussi les interprétations et vérifications.

La prise en compte de ces trois composantes du raisonnement (fonction, dimension sémiotique et nature) nous permettra d'analyser les différents types de raisonnements élaborés par les étudiants afin d'identifier la nature et l'origine des erreurs commises dans leurs raisonnements erronés (Gibel, 2018).

Afin de déterminer les connaissances antérieures de l'étudiant sur les concepts d'approximations locales des fonctions, nous commençons par une présentation des programmes officiels de la quatrième année secondaire (section Sciences Expérimentales) et la première année des classes préparatoires (section Physique-Chimie). Ensuite nous conduisons une analyse de notre corpus constitué des 44 productions des étudiants selon deux axes dont le premier se rapporte sur l'étude des fonctionnements et nature des raisonnements. Le deuxième axe est lié à une analyse en termes de répertoire didactique et plus précisément les connaissances et savoirs mobilisables.

PRESENTATION DES PROGRAMMES OFFICIELS

Avant d'analyser les productions des étudiants, nous conduisons une étude des programmes afin de déterminer les éléments du répertoire didactique de la classe, défini par Gibel (2004), qui se décompose de deux types d'objets le "*registre des formules*" qui est la collection des formules et le "*système organisateur*" qui permet d'organiser et d'utiliser ce répertoire didactique (Gibel, 2018).

Etude du programme officiel de la quatrième année du secondaire de la section Sciences expérimentales (SC-E)

Au lycée, l'objectif principal du programme de la quatrième année secondaire (SC-E) confère à l'enseignant une mission principale celle d'aider l'élève à utiliser son répertoire didactique constitué des algorithmes et des procédures faisant appel aux technologies de l'information et la communication (logiciel, calculatrice, etc.) ainsi que l'interprétation des illustrations graphiques. Par ailleurs, l'enseignant est invité à aider l'élève à développer sa démarche de raisonnement par la rédaction et l'explication orale de la résolution des problèmes à travers l'interaction avec ses collègues. Le texte du programme impose le recours aux registres graphique et géométrique par des illustrations graphiques ou par des logiciels pour introduire des nouveaux objets. En recours au contenu du programme lié à nos objets d'étude, les approximations locales des fonctions algébriques et transcendantes sont présentées via les approximations affines des fonctions ainsi que les différentes formes d'équations de tangente obtenues à partir du nombre dérivé. Ainsi, l'enseignement des concepts d'approximations locales des fonctions nécessite l'articulation des différents registres afin de développer le raisonnement de l'élève par la rédaction et l'explication orale d'un raisonnement mathématique.

Etude du programme de la première année Physique-Chimie (PC)

Le texte officiel du programme actuel (2016) de première année PC commence par une introduction précisant la mission de l'enseignant qui se réalise selon deux axes. Le premier est du côté "*objet mathématique*" par la mise en jeu des connaissances antérieures des étudiants et l'intérêt d'introduire des nouvelles notions dans les domaines intra et extra mathématiques. Le deuxième axe est du côté "*raisonnement mathématique*" par la mise en jeu de la vérification des différentes étapes d'une démonstration ou un raisonnement mathématique en utilisant des éléments de la logique, des langages mathématique, des techniques fondamentales de calcul en Analyse, des règles de calcul et d'outils logiciels dans certains cas des situations nécessitant l'explication avec des illustrations graphiques. Par ailleurs, l'objectif principal de l'enseignement du chapitre "*Analyse asymptotique*" est d'amener l'étudiant à maitriser les techniques asymptotiques à travers des calculs asymptotiques simples, la détermination des développements limités des fonctions et la résolution des problèmes que la vérification des propriétés des nouvelles notions et surtout liées à la notion de relation de comparaison. L'enseignant est invité à mobiliser les registres

graphique et géométrique par l'utilisation des illustrations graphiques en s'appuyant sur les outils logiciels dans le cas des

> "…situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels" (PO, p.8) [1]

Les savoirs à enseigner dans ce chapitre sont les concepts de relation de comparaison des fonctions, le développement limité et la formule de Taylor-Young afin de déterminer des développements limités usuels. L'objet développement limité est un nouvel outil pour le calcul de l'équivalent et de limite, l'étude locale d'une fonction et de son comportement.

En conclusion, l'objectif principal de ces programmes est de ramener l'élève à la rédaction autonome d'un raisonnement ou d'une démonstration mathématique en articulant les dimensions sémantique et syntaxique par la mobilisation des différents registres graphique, géométrique, analytique, algébrique et numérique.

ANALYSE EXPERIMENTALE

Avant de présenter l'analyse a priori de la première situation selon un plan didactique et l'analyse de notre corpus constitué des 44 productions des étudiants, nous allons commencer par la présentation de l'énoncé de la situation étudiée.

Enoncé de la situation-problème

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$

1) On s'intéresse à faire une étude locale de f en 0.

a. Donner le $DL_2(0)$.

b. En déduire $f^{'}(0)$ et $f^{''}(0)$.

c. Déterminer l'expression de la tangente Δ à C_f passant par le point $(0, f(0))$; préciser la position de C_f par rapport à Δ.

2) Etude de f en +∞ :

a. Montrer que l'on a : $f(x)=x+1+\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$ avec $\varepsilon(\frac{1}{x})\to 0$ quand $x\to+\infty$

b. Déduire une fonction équivalente à f en +∞.

c. Préciser le comportement de f en +∞.

3) Préciser de même le comportement de f en -∞.

Eléments d'analyse a priori de la situation étudiée

Ce problème a été élaboré afin d'étudier la capacité des étudiants à articuler les différents objets d'approximations locales des fonctions en vue de réaliser l'étude locale des fonctions au voisinage d'un réel et le comportement d'une fonction en +∞ et en -∞, ainsi que l'intérêt de l'objet développement limité en tant que nouvel outil pour résoudre certaines questions traitées au secondaire.

Sur le plan didactique, la situation est assimilable à un problème de

réinvestissement des connaissances antérieures relevant des trois chapitres étudiés. Nous pouvons distinguer quatre variables didactiques :

VD_1 : La nature de la fonction à étudier, nous avons choisi de proposer une fonction sous forme d'un produit des fonctions admettant des développements limités usuels.

VD_2 : Les voisinages autours desquels les étudiants doivent déterminer les développements limités de la fonction. Dans l'évaluation, il s'agit d'étudier les développements limités au voisinage de 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

VD_3 : Le choix de l'ordre des développements limités usuels.

VD_4 : La durée laissée aux étudiants pour résoudre les problèmes dans le cadre de l'évaluation.

L'étudiant en s'appuyant sur ses connaissances antérieures va établir une action sur les objets qui est motivée par son répertoire didactique.

Présentation et analyse des principaux résultats expérimentaux

Nous allons présenter les principaux résultats de l'analyse des productions des étudiants de chacune des questions proposées dans cette situation.

Question 1-a

Nous remarquons l'existence des difficultés inhérentes à la justification du raisonnement. La majorité des étudiants ont produit des raisonnements purement syntaxiques. En effet, ils ne contrôlent pas l'ordre auquel chacun des développements limités doit être réalisé. Par ailleurs, l'usage direct de la formule (*) du répertoire didactique de la classe, par certains étudiants dans les étapes de calculus des développements limités de $(x-1)^{-1}$ et $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, met en évidence l'erreur du signe (-).

(*) $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$

Question 1-b

Certains étudiants ont un raisonnement de nature syntaxique. Ils n'ont pas justifié l'application de la formule de Taylor-Young. En effet, deux étudiants seulement, parmi les 22 admettant des réponses valides, ont vérifié que la fonction f est de classe C^2 sur tout intervalle I un voisinage de 0.

La majorité des étudiants ont des difficultés d'ordre technique. D'un côté, un nombre assez-important d'entre eux ont utilisé une méthode n'ayant aucune relation avec le répertoire didactique de la classe. Ils ont calculé les dérivées successives de développement limité de la fonction f au voisinage de 0 afin de donner les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$. D'un autre côté, certains étudiants ont présenté directement des valeurs fausses. Ainsi, par leurs réponses erronées, ces étudiants ne donnent pas de sens au développement limité et la formule de Taylor-

Young comme une approximation locale de la fonction f par un polynôme de degré 2 dans le but de déterminer les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$. Finalement, certains étudiants ont recours à leurs connaissances antérieures, vues au lycée, par l'utilisation de la technique [$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$] pour calculer la valeur de $f'(0)$.

Question 1-c

Nous remarquons que rares sont les étudiants qui ont justifié leur raisonnement. En effet, ils ont écrit directement l'équation de la tangente et sa position par rapport à la courbe représentative de la fonction f. Par ailleurs, certains étudiants ont recours à leurs connaissances anciennes, par l'utilisation des techniques vues au secondaire, pour déterminer l'équation de la tangente à partir du calcul du nombre dérivé, ainsi que sa position par rapport à sa courbe représentative en étudiant le signe de $(f(x)-y)$. En revanche, d'autres étudiants articulent des connaissances du secondaire et du supérieur. Ils ont obtenu l'équation de la tangente par le calcul du nombre dérivé en mettant en valeur le rôle de développement limité pour déterminer sa position par rapport à la courbe C_f.

Question 2-a

La majorité des étudiants mobilisent leurs connaissances antérieures par l'usage direct de la technique de changement de variable et la formule (*) des développements limités. Leur raisonnement est d'un aspect purement syntaxique. Tous les étudiants ont utilisé l'expression de la notion de voisinage [$o(\frac{1}{x})$] au lieu celle de [$\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$] donnée dans la question. A partir des raisonnements erronés, nous pouvons identifier plusieurs difficultés liées au signe et à la notion de voisinage. La recherche de développement limité de $f(\frac{1}{x})$ traduit l'existence de difficulté liée à la notion de voisinage. Par ailleurs, certains étudiants font usage de technique de changement de variable et de la formule des développements limités au voisinage de 0 (*) du répertoire didactique de la classe. Mais on relève des erreurs dans les étapes suivantes de leur raisonnement soit par le calcul des produits des développements limités à travers l'élimination du reste, soit par l'écriture de reste $o(x)$ au lieu de $o(\frac{1}{x})$.

Question 2-b

La plupart des étudiants ont un problème de justification de leur raisonnement. Ils donnent directement la fonction équivalente. Par ailleurs, certains étudiants ont justifié leur raisonnement par le calcul des limites des différents termes du développement asymptotique afin d'obtenir la fonction équivalente.

Le calcul de la limite du rapport de $f(x)$ par x, par certains étudiants, traduit la difficulté de l'usage de la technique de supérieur. Les étudiants, par leurs

raisonnements erronés, n'ont pas recours à leurs connaissances antérieures pour obtenir une fonction équivalente par la mise en considération des notions de la relation de comparaison et le développement limité d'une fonction en +∞.

Question 2-c

A partir de notre corpus, un quart des étudiants ont un raisonnement de nature syntaxique. La majorité d'entre eux font appel à leur anciennes connaissances de secondaire pour la détermination de l'équation de l'asymptote d'une part et, ils remplacent la fonction f au cours de calcul de limite des fonctions [$f(x)$, $\frac{f(x)}{x}$ et ($f(x)-x$)] soit par son développement asymptotique, soit par sa fonction équivalente, d'autre part. En revanche, un seul étudiant donne l'intérêt de l'objet développement limité en faisant usage de la technique de supérieur afin de décider que la droite d'équation $y = x+1$ est l'asymptote oblique.

La majorité des étudiants, par leurs raisonnements erronés, ont rencontré des difficultés d'ordre technique liées à leurs connaissances antérieures de secondaire concernant l'étude du comportement d'une fonction. Par ailleurs, d'autres étudiants ont un problème pour employer la formule de fonction équivalente.

Question 3

La majorité des étudiants ont des problèmes à expliquer leur raisonnement ce qui les met en difficulté. En effet, ils donnent directement le développement limité de la fonction f en -∞, puis la fonction équivalente et finalement ils étudient son comportement. Certains d'entre eux considèrent que le développement limité en -∞ est l'opposé de celui en +∞ soit par l'ajout simplement du signe (-) dans cette expression, soit par le changement de variable x par (-x) dans cette représentation analytique, soit par l'étude de la parité de la fonction f. Cette erreur commise est due à l'incompréhension de la notion de développement limité. Par ailleurs, un nombre assez-important d'étudiants a utilisé le même développement limité en +∞ pour étudier le comportement de la fonction f en -∞. D'un autre côté, certains étudiants ont un problème lié à leurs connaissances antérieures du secondaire concernant l'étude du comportement d'une fonction. En effet, ils voient qu'il est suffisant d'étudier la parité de la fonction f ou d'effectuer le calcul de sa limite en -∞ pour préciser son comportement.

Rares sont les étudiants ayant des raisonnements valides. En effet, ils cherchent le développement limité en -∞, puis la fonction équivalente et finalement l'équation de l'asymptote en articulant des techniques de secondaire et du supérieur. Ces étudiants ont un problème de justification de raisonnement.

En conclusion, nous pouvons identifier l'origine et la nature des difficultés des étudiants lors de la résolution des problèmes dans le champ de l'étude des approximations locales des fonctions selon quatre catégories :

-Difficulté d'ordre conceptuel : liée à la notion de voisinage (le reste, changement de variable, etc.). Dans ce cas, l'étudiant est confronté à un problème pour appliquer une formule du répertoire didactique de la classe afin de déterminer le développement limité d'une fonction au voisinage de 0, en $+\infty$ et $-\infty$.

-Difficulté d'ordre technique : l'étudiant utilise soit ses anciennes connaissances et plus précisément, une technique vue au secondaire, soit une méthode fausse n'ayant aucun lien avec le répertoire didactique de classe. Dans ce cas, il néglige le rôle des nouveaux concepts d'approximations locales des fonctions.

-Difficulté d'ordre justificatif : l'étudiant a problème de justification de son raisonnement

-Difficulté d'ordre calculatoire : Dans ce cas, l'erreur est due aux erreurs du calcul. Nous présentons nos résultats dans le tableau ci-dessous :

Difficultés d'ordre	Conceptuel	Technique	Justificatif	Calculatoire
Question 1-a	16	0	24	4
Question 1-b	2	22	20	0
Question 1-c-1	8	8	17	7
Question 1-c-2	15	6	6	2
Question 2-a	34	0	9	1
Question 2-b	21	0	5	1
Question 2-c	15	24	1	1
Question 3	36	5	1	1

Tableau 1 : *Nature et l'origine des difficultés des étudiants*

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

A l'issue de l'étude des programmes, l'enseignement des objets d'approximations locales des fonctions articule les dimensions sémantique et syntaxique par la mobilisation des registres graphique, géométrique, algébrique et analytique afin de ramener l'étudiant à la rédaction autonome d'un raisonnement.

La majorité des étudiants ont construit des raisonnements de nature syntaxique articulant les approches algébrique et analytique. Les difficultés éprouvées par les étudiants sont étroitement liées à la difficile conceptualisation des objets d'approximations locales des fonctions en première année PC.

Notre questionnement nous amène à réfléchir à l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique en PC à travers une situation permettant aux étudiants d'élaborer des raisonnements permettant de conjuguer différents cadres et d'articuler différents registres de représentation sémiotique.

NOTES

1. http://www.ipeit.rnu.tn/sites/default/files/Prog.Mathématiques-PC.PT_.pdf

REFERENCES

Belhaj Amor, F. (2016). *Enseignement de l'objet développement limité au début de l'université entre syntaxe et sémantique : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs*. Mémoire de mastère. Université virtuelle de Tunis.

Bloch, I. Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(2), 191-228.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. Gibel, P. (2005)

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65.

Ghedamsi, I. (2016). Entrée des étudiants dans l'Analyse formelle de début d'université : Potentialité des méthodes numériques d'approximation. *Actes de colloque INDRUM 2016.*

Gibel, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat : Université de Bordeaux.

Gibel, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse pour une habilitation à diriger les recherches. Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Kouki, R., Belhaj Amor, F & Hachaïchi, Y. (2016). Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'université : Entre syntaxe et sémantique. *Actes de colloque INDRUM 2016*. Montpellier.

Vandebrouck, F. (2011). Points de vue et domaines de travail en analyse. *Annales de didactique de Strasbourg.* (Vol 16). 149-185.