



**HAL**  
open science

# Étude théorique de la compression de spin nucléaire par mesure quantique non destructive en continu

Alan Serafin, Yvan Castin, Matteo Fadel, Philipp Treutlein, Alice Sinatra

## ► To cite this version:

Alan Serafin, Yvan Castin, Matteo Fadel, Philipp Treutlein, Alice Sinatra. Étude théorique de la compression de spin nucléaire par mesure quantique non destructive en continu. 2020. hal-03083577v1

**HAL Id: hal-03083577**

**<https://hal.science/hal-03083577v1>**

Preprint submitted on 24 Dec 2020 (v1), last revised 15 Apr 2021 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude théorique de la compression de spin nucléaire par mesure quantique non destructive en continu

Alan Serafin<sup>a</sup>, Yvan Castin<sup>a</sup>, Matteo Fadel<sup>b</sup>, Philipp Treutlein<sup>b</sup>, Alice Sinatra<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université de la Sorbonne et Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

<sup>b</sup>Département de physique, Université de Bâle, Klingelbergstrasse 82, 4056 Bâle, Suisse

---

## Résumé

Nous proposons de tirer parti du très faible couplage du spin nucléaire de l'hélium 3 fondamental à son environnement pour produire des états quantiques macroscopiques à très longue durée de vie, ici des états comprimés du spin nucléaire, dans une vapeur en cellule à température ordinaire. Pour effectuer une mesure quantique non destructive sur une composante transverse du spin nucléaire collectif préalablement polarisé, on allume temporairement une décharge oscillante dans le gaz, ce qui peuple l'état métastable de l'hélium 3. Le spin collectif correspondant au niveau  $F = 1/2$  des métastables s'hybride alors légèrement avec celui des fondamentaux par collision d'échange de métastabilité. Il reste à mesurer en continu le champ lumineux sortant d'une cavité optique, où il a interagi de manière dispersive avec le spin collectif du métastable, pour accéder aux fluctuations du spin nucléaire. Dans un modèle de trois spins collectifs couplés (nucléaire, du métastable et de Stokes de la lumière) dans l'approximation de Primakoff, et pour deux schémas de mesure, nous calculons les moments de la composante comprimée  $I_z$  du spin nucléaire collectif conditionnés au signal optique moyenné sur le temps d'observation  $t$ . Dans le schéma de comptage de photons, nous retrouvons que l'observable comprimée est  $I_z^2$  plutôt que  $I_z$ . Dans le schéma de détection homodyne, nous résolvons analytiquement l'équation stochastique sur l'état du système conditionné à la mesure ; la moyenne conditionnelle de  $I_z$  dépend linéairement du signal et la variance conditionnelle de  $I_z$  n'en dépend pas. La variance conditionnelle décroît comme  $(\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^{-1}$ , où le taux de compression  $\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}$ , que nous calculons explicitement, est linéaire en l'intensité lumineuse dans la cavité à faible couplage atome-champ et sature à fort couplage au taux effectif d'échange de métastabilité dans l'état fondamental, proportionnel à la densité d'atomes métastables. Enfin, nous tenons compte de la désexcitation des métastables sur les parois, qui induit une décohérence du spin nucléaire avec un taux ramené  $\gamma_\alpha$ . Elle impose une limite  $\propto (\gamma_\alpha/\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}})^{1/2}$  sur la variance conditionnelle atteinte en un temps  $\propto (\gamma_\alpha \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}})^{-1/2}$ .

*Mots-clés* : compression de spin ; hélium 3 ; spin nucléaire ; métrologie quantique

---

## 1. Introduction

L'hélium 3 dans son état fondamental jouit de la propriété remarquable d'avoir un spin  $I = 1/2$  purement nucléaire donc parfaitement isolé du monde extérieur, même dans un environnement aussi hostile aux cohérences quantiques que celui d'une vapeur d'hélium dans une cellule centimétrique à température ordinaire et à une pression de l'ordre du millibar. Par des techniques de polarisation nucléaire bien maîtrisées, atteignant un taux de 90 %, on peut préparer alors de manière routinière (par exemple à des fins d'imagerie pulmonaire par résonance magnétique nucléaire [1]) un spin nucléaire collectif géant avec une durée de vie extrêmement longue. Ainsi, un temps de cohérence  $T_2$  supérieur à 60 heures a été mesuré dans des dispositifs de magnéto-métrie ultra-précise [2], et semble limité seulement par le temps de décroissance longitudinal  $T_1$  dû aux collisions avec les parois.<sup>1</sup> Ces valeurs font du spin nucléaire macroscopique dans une vapeur à l'ambiante un système *idéal* pour la production, l'étude et l'utilisation d'états intriqués, et donc un compétiteur des gaz d'atomes froids et des condensats de Bose-Einstein en métrologie et traitement quantique de l'information [4]. Déjà en 2005, nous avons pressenti que les spins nucléaires de l'hélium 3 pourraient donner naissance à des mémoires quantiques [5] ou à des états quantiques non locaux [6] de très longue durée de vie. Depuis,

---

1. Des temps  $T_1$  de plusieurs centaines d'heures peuvent même être obtenus [3].

des percées expérimentales ont été accomplies dans le domaine de la compression de spin, notamment au moyen de mesures quantiques non destructives (QND) dans des gaz atomiques d'alcalins interagissant avec un mode du champ électromagnétique [4, 8], qui ont permis d'obtenir récemment un état comprimé de spin d'une durée de vie d'une seconde dans l'état hyperfin fondamental du rubidium dans des conditions métrologiques [9].

Transposer la technique de compression par mesure QND des spins hyperfins des alcalins au spin nucléaire de l'hélium 3 représente cependant un réel défi, en raison même de la particularité dudit spin, son faible couplage à l'environnement. L'état fondamental singulet de l'hélium 3, séparé en énergie d'environ 20 eV de tous les états excités, n'est pas directement accessible par laser. Cependant, au moyen d'une décharge oscillante, une petite fraction des atomes de la vapeur, de l'ordre de  $10^{-6}$ , peut être portée dans l'état triplet métastable, un excellent point de départ pour des transitions optiques dans le proche infrarouge. L'orientation des spins nucléaires s'obtient alors au travers d'un processus indirect, le pompage optique par échange de métastabilité [3]. Dans un premier temps, le moment cinétique est transféré par interaction laser-matière des photons aux atomes métastables, a priori à leur spin électronique (le seul à être fortement couplé au champ) mais a posteriori aussi à leur spin nucléaire grâce au couplage hyperfin. Dans un deuxième temps, on tire parti des collisions d'échange de métastabilité entre atomes métastables et atomes dans l'état fondamental pour orienter les spins nucléaires dans l'état fondamental, avec une échelle de temps limitée par la faible densité des atomes dans l'état métastable et de l'ordre de la seconde. Même si la collision d'échange de métastabilité peut transférer des corrélations quantiques (voir les références [5, 6] et notre section 3.2), on ne peut s'attendre à ce qu'une seule mesure sur une petite fraction des atomes ( $10^{-6}$ ) projette l'ensemble du système dans un état comprimé. La solution que nous proposons est d'effectuer une mesure QND en continu démultipliée par une cavité optique résonnante. En effet, bien que les atomes métastables aient individuellement une durée de vie relativement courte (ils perdent leurs corrélations quantiques et retombent dans l'état fondamental à chaque collision sur les parois de la cellule), faire une mesure destructive en continu de la lumière qui sort de la cavité après interaction avec les atomes métastables revient à effectuer une mesure QND en continu sur le spin nucléaire collectif dans l'état fondamental, ce qui le projette sur l'état comprimé souhaité sans affecter sa durée de vie.

Ce travail donne une présentation théorique détaillée du mécanisme de compression et de ses limites ; une étude de faisabilité plus pointue prenant en compte les valeurs expérimentalement accessibles des paramètres est effectuée dans la référence [10]. Très récemment, des idées similaires ont été mises en avant dans un système physique différent, le mélange alcalin-gaz rare [11, 12]. Nous sommes confiants que la manipulation quantique des spins nucléaires à longue durée de vie est promise à un développement rapide, ouvrant de nouvelles perspectives pour la recherche fondamentale et les applications.

## 2. Vue d'ensemble et description semi-classique

Le système physique considéré est représenté sur la figure 1. Une cellule remplie d'une vapeur partiellement polarisée de quelques mbars d'atomes d'hélium 3 pur est placée à l'intérieur d'une cavité optique. Alors que la majorité des atomes restent dans l'état singulet fondamental  $1^1S$  de l'hélium, une faible décharge porte une infime fraction des atomes, en général  $\approx 10^{-6}$ , dans l'état triplet métastable  $2^3S$ . D'une part, la cavité est injectée par un faisceau laser se propageant selon l'axe de la cavité  $Oz$  et polarisé linéairement selon la direction  $Ox$ , qui est également la direction de polarisation de l'échantillon atomique, pour exciter la transition  $2^3S - 2^3P$  avec un grand désaccord en fréquence ; d'autre part, les atomes dans l'état métastable  $2^3S$  (de spin hyperfin électronique et nucléaire) sont couplés aux atomes dans l'état fondamental (de spin purement nucléaire) par des collisions d'échange de métastabilité [13, 14]. Comme l'interaction de Faraday avec les atomes métastables fait légèrement tourner autour de l'axe  $Oz$  la polarisation de la lumière initialement dirigée selon  $Ox$ , proportionnellement à la composante du spin collectif des métastables selon  $Oz$  comme nous le verrons, une mesure destructive en continu de la composante de polarisation selon  $Oy$  du champ sortant de la cavité (i) par comptage de photons comme indiqué sur la figure 1b ou (ii) par détection homodyne comme sur la figure 1c, réalise in fine une mesure quantique non destructive en continu du spin nucléaire collectif selon  $Oz$  des atomes d'hélium 3 dans l'état fondamental.

Dans le reste de cette section, par un traitement semi-classique des fluctuations des spins autour de l'état stationnaire, nous réduisons notre système physique complexe à celui plus simple de trois spins collectifs couplés, dont la section 3 donnera une description quantique.

La structure atomique pertinente de l'atome  $^3\text{He}$  et les transitions excitées par le champ en cavité sont représentées sur la figure 2. On appelle  $\vec{I}$  le spin nucléaire collectif dans l'état fondamental,  $\vec{J}$  et  $\vec{K}$  les spins collectifs associés aux

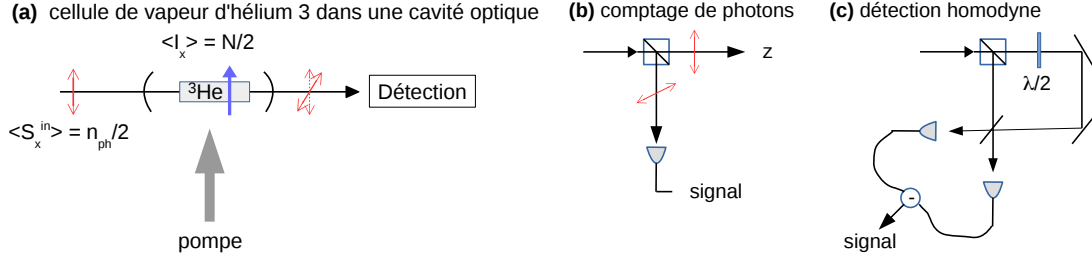


FIGURE 1: Vue d'ensemble du dispositif. (a) Cellule en verre centimétrique remplie d'une vapeur d'hélium 3 à température ambiante et placée dans une cavité optique d'axe  $Oz$  (axe horizontal sur la figure). Le spin de Stokes de la lumière et les spins atomiques (nucléaires et des métastables) sont polarisés linéairement selon  $Ox$  (axe vertical sur la figure). Le mode du champ en cavité polarisé selon  $Oy$ , initialement vide, se peuple par effet Faraday sous l'action des fluctuations quantiques du spin des métastables selon  $Oz$  lors de sa propagation dans le gaz. (b) Les photons sortant de la cavité polarisés selon  $Oy$  sont séparés de ceux polarisés selon  $Ox$  par un cube polariseur puis détectés dans le régime de comptage de photons. (c) À l'extérieur de la cavité, on effectue une détection homodyne d'une quadrature du champ sortant polarisé selon  $Oy$ , en utilisant comme oscillateur local le champ sortant polarisé selon  $Ox$  (dont on a fait tourner au préalable la polarisation avec une lame demi-onde pour l'amener selon  $Oy$ ).

multiplicités hyperfines  $F = 3/2$  et  $F = 1/2$  dans l'état métastable. Pour la lumière se propageant selon  $Oz$ , nous introduisons le spin de Stokes [15] construit à partir des opérateurs de création et d'annihilation d'un photon dans les modes polarisés linéairement selon  $Ox$  et  $Oy$  :<sup>2</sup>

$$S_x = \frac{1}{2} (c_x^\dagger c_x - c_y^\dagger c_y) \quad ; \quad S_y = \frac{1}{2} (c_x^\dagger c_y + c_y^\dagger c_x) \quad ; \quad S_z = \frac{1}{2i} (c_x^\dagger c_y - c_y^\dagger c_x). \quad (1)$$

Nous supposons pour simplifier que la cellule est éclairée uniformément par le mode de cavité. Dans la limite d'un grand désaccord et d'une faible saturation de la transition atomique par le champ, l'état excité  $2^3P$  peut être éliminé adiabatiquement et l'interaction hamiltonienne entre le spin du métastable  $\vec{K}$  et le spin de Stokes  $\vec{S}$  prend la forme de Faraday [15] :

$$H = \hbar\chi K_z S_z \quad (2)$$

qui n'est autre que l'opérateur de déplacement lumineux des sous-niveaux Zeeman dans l'état métastable, comme on le voit bien sur la forme de  $S_z$  dans la note 2. Les équations non linéaires couplées décrivant l'évolution des spins moyens sont données dans l'Annexe A, voir les équations (A.1)-(A.3). Outre l'évolution due à l'hamiltonien de Faraday (2) et aux collisions d'échange de métastabilité, elles incluent la contribution des termes liouvilliens habituels dans l'équation pilote décrivant l'injection d'un champ cohérent polarisé selon  $Ox$  dans la cavité et les pertes dues au miroir de sortie, dont l'effet combiné conduit à  $\langle S_x \rangle = n_{\text{ph}}/2$  dans l'état stationnaire en l'absence d'atomes,  $n_{\text{ph}}$  étant le nombre moyen de photons dans le mode polarisé selon  $Ox$ . Ces équations sont ensuite linéarisées autour d'une solution stationnaire partiellement polarisée (A.8)-(A.9), et les fluctuations du spin  $\vec{J}$  et du tenseur d'alignement collectif dans  $F = 3/2$  sont éliminées adiabatiquement<sup>3</sup> pour obtenir des équations couplées sur les fluctuations des trois spins collectifs  $\vec{I}$ ,  $\vec{K}$  et  $\vec{S}$ , dont les valeurs moyennes stationnaires sont données par :

$$\langle \vec{I} \rangle_s = \frac{N}{2} \vec{u}_x \quad ; \quad \langle \vec{K} \rangle_s = \frac{n}{2} \vec{u}_x \quad ; \quad \langle \vec{S} \rangle_s = \frac{n_{\text{ph}}}{2} \vec{u}_x \quad (3)$$

2. De manière équivalente, on peut construire le spin de Stokes  $\vec{S}$  en utilisant les opérateurs d'annihilation dans les modes polarisés circulairement,  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_x - ic_y)$ ,  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_x + ic_y)$  [16], auquel cas  $S_z = \frac{1}{2}(c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2)$ .

3. Nous pensons que cette approximation non mathématiquement contrôlée est raisonnable pour l'expérience proposée, car le spin  $\vec{J}$  n'est pas directement couplé à la lumière donc n'est pas directement affecté par la mesure du champ en continu. En revanche, si l'on éliminait de même les fluctuations du spin  $\vec{K}$ , directement couplé au champ, on commettrait une erreur non négligeable sur la dynamique de compression du spin dans le cas de la détection par comptage de photons (revenant à omettre le saut double  $C_d$  dans l'équation pilote (36) et le taux  $\Gamma_0$  dans le nombre moyen de photons comptés (44)) donc à sous-estimer fortement le nombre de photodétections requises pour atteindre un niveau de compression donné, mais une erreur négligeable dans le cas de la détection homodyne, comme nous l'avons vérifié sur le modèle à un mode de la section 3.4.

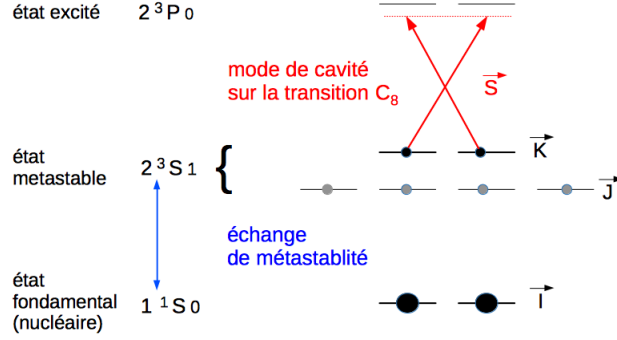


FIGURE 2: Niveaux d'énergie utiles de l'atome  $^3\text{He}$  (les sous-niveaux Zeeman correspondent au choix de  $Oz$  comme axe de quantification, les atomes étant polarisés selon  $Ox$ ). Le mode du champ en cavité polarisé selon  $Ox$  excite la transition  $C_8$  entre le niveau  $F = 1/2$  de l'état métastable  $2^3S_1$  et le plus haut niveau d'énergie  $F = 1/2$  de l'état excité  $2^3P$ , avec un désaccord en fréquence négatif beaucoup plus grand en valeur absolue que la mi-largeur Doppler de l'état excité (de l'ordre de 1 GHz), afin que la classe de vitesse résonnante avec le laser soit presque vide, mais beaucoup plus faible que le clivage hyperfin de 6,74 GHz dans l'état métastable (et a fortiori que le clivage fin  $2^3P_1 - 2^3P_0$  de 29,6 GHz dans l'état excité), afin que le niveau métastable  $F = 3/2$  soit très peu affecté par le laser. (Note : l'espacement en fréquence ne permet pas de satisfaire largement à ces deux contraintes, et l'on ne peut exclure que le couplage de  $F = 3/2$  au champ n'ait un petit effet sur la dynamique de compression ; nous le négligeons ici mais on pourrait en tenir compte avec un hamiltonien plus complet que notre modèle minimal (2), comme celui de la référence [15]). Les six sous-niveaux de l'état métastable  $2^3S_1$  sont couplés aux deux sous-niveaux (purements nucléaires) de l'état fondamental  $1^1S_0$  par les collisions d'échange de métastabilité.

Ici  $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire selon  $Ox$ ,  $N$  et  $n$  sont les nombres effectifs d'atomes fondamentaux et métastables participant à la dynamique des spins collectifs. Comme nous le montrons dans l'Annexe A, ces nombres effectifs sont renormalisés par rapport aux nombres totaux vrais  $N_{\text{cell}}$  et  $n_{\text{cell}}$  dans la cellule, par des facteurs dépendant de la polarisation :

$$N = \eta N_{\text{cell}} \quad ; \quad n = \left( \frac{1 - \eta^2}{3 + \eta^2} \right) \eta n_{\text{cell}} \quad (4)$$

où  $\eta \in [0, 1]$  est la polarisation nucléaire,<sup>4</sup> et les équations semi-classiques sur les fluctuations des trois spins collectifs s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \delta S_z = -\frac{\kappa}{2} \delta S_z \quad \frac{d}{dt} \delta S_y = -\frac{\kappa}{2} \delta S_y + \chi \langle S_x \rangle_s \delta K_z \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \delta I_z = -\gamma_f \delta I_z + \gamma_m \delta K_z \quad \frac{d}{dt} \delta I_y = -\gamma_f \delta I_y + \gamma_m \delta K_y \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \delta K_z = -\gamma_m \delta K_z + \gamma_f \delta I_z \quad \frac{d}{dt} \delta K_y = -\gamma_m \delta K_y + \gamma_f \delta I_y + \chi \langle K_x \rangle_s \delta S_z \quad (7)$$

Ici,  $\kappa$  est le taux de perte de la cavité,  $\gamma_m$  et  $\gamma_f$  sont les taux effectifs d'échange de métastabilité dans l'état métastable et dans l'état fondamental. Ces derniers dépendent de la polarisation nucléaire comme ci-dessous et sur la figure 3a, et sont dans le même rapport que les nombres d'atomes effectifs  $N$  et  $n$  (4) constituant les spins collectifs :

$$\gamma_f = \frac{4 + \eta^2}{8 - \eta^2} \frac{1 - \eta^2}{3 + \eta^2} \frac{1}{T} \quad ; \quad \gamma_m = \frac{4 + \eta^2}{8 - \eta^2} \frac{1}{\tau} \quad ; \quad \frac{\gamma_m}{\gamma_f} = \frac{N}{n} \gg 1 \quad (8)$$

les taux individuels des collisions d'échange de métastabilité  $1/T$  et  $1/\tau$  subies par un atome dans l'état fondamental et dans l'état excité étant proportionnels à  $n_{\text{cell}}$  et  $N_{\text{cell}}$ . Sur la figure 3b, nous montrons également la dépendance en

4. Notons que  $n = 0$  dans le cas entièrement polarisé  $\eta = 1$ . En effet, toute la population de l'état métastable se trouve alors dans le sous-niveau Zeeman extrême  $m_x = 3/2$  de l'état hyperfin  $F = 3/2$  et la multiplicité  $F = 1/2$  est vide.

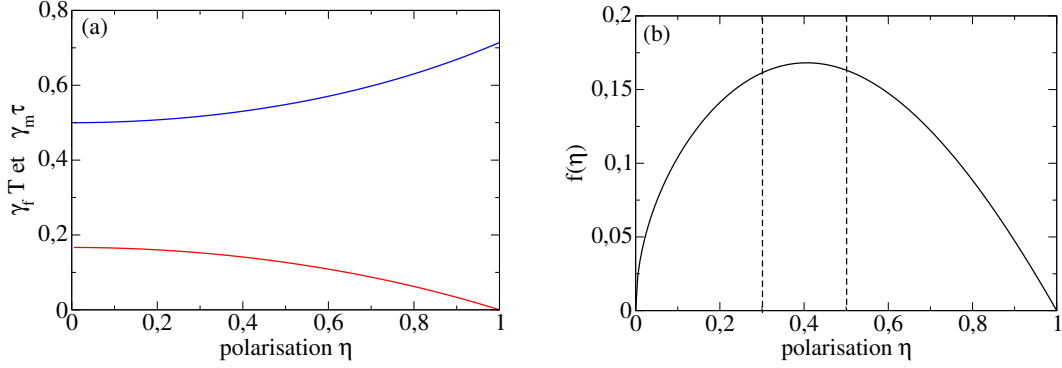


FIGURE 3: (a) Taux effectifs d'échange de métastabilité  $\gamma_f$  et  $\gamma_m$  (8) en fonction de la polarisation nucléaire  $\eta$ , normalisés par les taux des collisions d'échange de métastabilité  $1/T$  et  $1/\tau$  subies par les atomes fondamentaux et métastables dans la vapeur. (b) Dépendance en polarisation nucléaire de la pulsation de Faraday  $\Omega_\alpha$  entrant dans le taux de compression de spin (31), dans la limite  $\gamma_f \ll \gamma_m$ ; plus précisément, on représente le facteur  $f(\eta) = \sqrt{\eta} \frac{1-\eta^2}{3+\eta^2}$  tel que  $\Omega_\alpha \simeq \Omega(\gamma_f/\gamma_m)^{1/2} = \chi \sqrt{n_{\text{ph}} n_{\text{cell}}} \sqrt{\frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}}} f(\eta)$ . Lorsque la polarisation varie entre 0,3 et 0,5 (lignes tiretées verticales),  $f(\eta)$  s'écarte de 4 % de son maximum  $\simeq 0,17$  atteint en  $\eta = 0,42$ .

polarisation nucléaire du couplage de Faraday effectif  $\Omega_\alpha$  (25) entre la lumière et le spin nucléaire hybridé par le métastable, qui contrôle le taux de compression de spin dans (31).

### 3. Description quantique

Dans la section 2, nous avons vu que l'on peut modéliser notre système physique complexe sous la forme de trois spins collectifs couplés (3) : le spin nucléaire  $\vec{I}$  dans l'état fondamental, le spin  $\vec{K}$  dans le niveau hyperfin  $F = 1/2$  de l'état métastable et le spin de Stokes  $\vec{S}$  du champ lumineux en cavité. Dans cette section, nous présentons le traitement quantique complet de ce modèle. Après avoir introduit l'approximation de Primakoff, nous passons à la description quantique de l'échange de métastabilité qui couple les spins nucléaire et métastable.

#### 3.1. Approximation de Primakoff

Initialement, le spin nucléaire collectif  $\vec{I}$ , le spin collectif du métastable  $\vec{K}$  et le spin de Stokes  $\vec{S}$  de la lumière sont polarisés selon  $Ox$ , et le resteront pendant toute la procédure expérimentale. Dans l'approximation de Holstein-Primakoff, qui assimile les composantes de spin macroscopiques selon  $Ox$  à des variables classiques, les composantes  $Oy$  et  $Oz$  restantes, orthogonales aux spins moyens, se comportent comme les opérateurs de quadratures (parties hermitienne et antihermitienne d'opérateurs d'annihilation donc canoniquement conjuguées,  $[X, P] = i/2$ ) de trois modes bosoniques  $a, b, c$  :<sup>5</sup>

$$\frac{I_y}{\sqrt{N}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} X_a = \frac{a + a^\dagger}{2} \quad ; \quad \frac{K_y}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} X_b = \frac{b + b^\dagger}{2} \quad ; \quad \frac{S_y}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} X_c = \frac{c + c^\dagger}{2} \quad (9)$$

$$\frac{I_z}{\sqrt{N}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} P_a = \frac{a - a^\dagger}{2i} \quad ; \quad \frac{K_z}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} P_b = \frac{b - b^\dagger}{2i} \quad ; \quad \frac{S_z}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} P_c = \frac{c - c^\dagger}{2i} \quad (10)$$

Faisons le lien avec la représentation bosonique exacte (1) des spins, en écrivant :

$$\frac{S_y}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} - i \frac{S_z}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} = \frac{1}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} c_y^\dagger c_x \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} c_y^\dagger \quad ; \quad \frac{S_y}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} + i \frac{S_z}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} = \frac{1}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} c_x^\dagger c_y \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} c_x \quad (11)$$

5. Si nous considérons un grand spin  $\vec{S}$  entièrement polarisé selon  $Ox$ , nous pouvons approximer la composante de spin dans cette direction par une variable classique, en posant  $\hat{S}_x \simeq \langle \hat{S}_x \rangle$  si bien que  $[\hat{S}_y/\sqrt{2\langle \hat{S}_x \rangle}, \hat{S}_z/\sqrt{2\langle \hat{S}_x \rangle}] \simeq i/2$ .

Ceci montre que l'opérateur de création  $c^\dagger$  dans (9)-(10), identifié avec  $c_y^\dagger$  dans l'approximation de Primakoff, transfère un photon du mode de cavité fortement peuplé par un état cohérent polarisé selon  $Ox$  dans le mode de cavité initialement vide polarisé selon  $Oy$ . Dans l'approximation de Primakoff, l'hamiltonien du couplage de Faraday atome-champ (2) s'écrit :

$$H = \hbar\Omega P_b P_c \quad \text{avec} \quad \Omega = \chi \sqrt{nm_{\text{ph}}}. \quad (12)$$

Comme  $\chi$  ne dépend pas de l'intensité du champ dans la cavité,  $\Omega^2$  est proportionnel à cette intensité.

### 3.2. Équation pilote pour l'échange de métastabilité

Considérons dans cette sous-section l'évolution du système due au seul échange de métastabilité ( $\chi = 0$ ). Dans un traitement quantique, les équations classiques (6)-(7) deviennent des équations stochastiques incluant les fluctuations quantiques. Dans l'approximation de Primakoff, cela donne pour les quadratures  $X$  dans l'état métastable et fondamental :

$$dX_a = -\gamma_f X_a dt + \sqrt{\gamma_m \gamma_f} X_b dt + dX_a^{\text{stoch}} \quad ; \quad dX_b = -\gamma_m X_b dt + \sqrt{\gamma_m \gamma_f} X_a dt + dX_b^{\text{stoch}} \quad (13)$$

où l'on a utilisé la troisième égalité de l'équation (8). Les bruits de Langevin  $dX_i^{\text{stoch}}$ , avec  $i \in \{a, b\}$ , ont une moyenne nulle, sont des variables aléatoires indépendantes à des temps différents et ont des variances et des covariances à temps égaux calculées dans la référence [5] :

$$\langle dX_i^{\text{stoch}} dX_j^{\text{stoch}} \rangle = D_{ij} dt \quad \text{avec} \quad \underline{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_f & -\sqrt{\gamma_m \gamma_f} \\ -\sqrt{\gamma_m \gamma_f} & \gamma_m \end{pmatrix} \quad (14)$$

On a des équations de même forme que (13) pour les quadratures  $P_i$ , avec d'autres bruits de Langevin  $dP_i^{\text{stoch}}$ , de même matrice de covariance que l'équation (14) entre eux mais de matrice de covariance avec les bruits  $dX_i^{\text{stoch}}$  donnée par

$$\langle dX_i^{\text{stoch}} dP_j^{\text{stoch}} \rangle = \mathcal{D}_{ij} dt \quad \text{avec} \quad \underline{\mathcal{D}} = i \underline{D} \quad (15)$$

Pour le calcul des valeurs moyennes et des variances des observables atomiques, cette formulation stochastique équivaut à une équation pilote sur l'opérateur densité atomique  $\rho_{\text{at}}$  des deux modes bosoniques  $a$  et  $b$  :

$$\frac{d\rho_{\text{at}}}{dt} = C \rho_{\text{at}} C^\dagger - \frac{1}{2} \{C^\dagger C, \rho_{\text{at}}\} \quad \text{avec} \quad C = \sqrt{2\gamma_f} a - \sqrt{2\gamma_m} b \quad (16)$$

En effet, la représentation stochastique de Langevin de l'équation pilote (16) pour un opérateur quelconque  $A$  s'écrit

$$dA = \frac{dt}{2} \{C^\dagger [A, C] - [A, C^\dagger] C\} + dA^{\text{stoch}} \quad \text{où} \quad dA^{\text{stoch}} = [C^\dagger, A] dB + dB^\dagger [A, C] \quad (17)$$

et  $dB$  est un opérateur stochastique markovien de moyenne nulle, de matrice de covariance à temps égaux

$$\langle dB dB^\dagger \rangle = dt \quad ; \quad \langle dB dB \rangle = \langle dB^\dagger dB^\dagger \rangle = \langle dB^\dagger dB \rangle = 0 \quad (18)$$

Pour être complets, esquissons un autre raisonnement, qui fait l'économie des bruits de Langevin quantiques. Il suffit d'admettre que les équations d'évolution sur les moyennes  $\langle X_i \rangle$  et  $\langle P_i \rangle$  tirées de (6)-(7) dérivent d'une équation pilote de la forme de Lindblad (50). Comme ces équations sont linéaires, les opérateurs de saut  $C_m$  encadrant  $\rho_{\text{at}}$  dans l'équation pilote sont des combinaisons linéaires de  $a$  et  $b$ . Ceci redonne (16).

### 3.3. Équation pilote à trois modes

L'évolution complète, comprenant l'interaction hamiltonienne hermitienne (12), l'échange de métastabilité et les pertes de la cavité, est décrite par l'équation pilote<sup>6</sup>  $\vec{B} = \vec{0}$ , soit que nous nous plaçons dans le référentiel tournant

6. Nous négligeons ici l'évolution interne des modes atomiques (précession de spin) en supposant que les sous-niveaux Zeeman sont dégénérés dans l'état fondamental et dans l'état métastable  $F = 1/2$ , soit que le champ magnétique extérieur soit nul,

après compensation de l'écart entre les fréquences de Larmor métastable et fondamentale, par exemple au moyen d'un champ magnétique fictif créé par déplacement lumineux.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \kappa \left( c\rho c^\dagger - \frac{1}{2}\{c^\dagger c, \rho\} \right) + C\rho C^\dagger - \frac{1}{2}\{C^\dagger C, \rho\} \quad (19)$$

où  $C$  est l'opérateur de saut pour l'échange de métastabilité (16),  $\kappa$  est le taux de perte de la cavité,  $\gamma_m$  et  $\gamma_f$  sont les taux d'échange de métastabilité pour un atome métastable et dans l'état fondamental.

Initialement, les trois modes sont dans l'état vide correspondant à un état polarisé pour les trois spins. Pour cet état initial, les premiers moments des quadratures restent nuls, et l'on peut obtenir un système fermé d'équations sur les seconds moments. On trouve que les quadratures  $P$  restent de variances constantes et de covariances nulles dans les trois modes,

$$\langle P_a^2 \rangle(t) = \langle P_b^2 \rangle(t) = \langle P_c^2 \rangle(t) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \langle P_a P_b \rangle(t) = \langle P_a P_c \rangle(t) = \langle P_b P_c \rangle(t) = 0 \quad (20)$$

que la variance  $\langle X_c^2 \rangle$  reste bornée et que les covariances  $\langle X_a X_c \rangle$  et  $\langle X_b X_c \rangle$  restent nulles, tandis que les variances et la covariance des quadratures  $X_a$  et  $X_b$ , et donc le nombre d'excitations dans les modes atomiques,<sup>7</sup> divergent linéairement en temps, du moins tant que l'approximation de Primakoff est applicable. Nous donnons ici explicitement seulement les comportements aux temps longs :

$$\begin{aligned} \langle X_a^2 \rangle(t) &\underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\gamma_m \gamma_f}{(\gamma_m + \gamma_f)^2} \frac{\Omega^2 t}{4\kappa} + O(1) & \langle X_b^2 \rangle(t) &\underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\gamma_f^2}{(\gamma_m + \gamma_f)^2} \frac{\Omega^2 t}{4\kappa} + O(1) \\ \langle X_a X_b \rangle(t) &\underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\gamma_m^{1/2} \gamma_f^{3/2}}{(\gamma_m + \gamma_f)^2} \frac{\Omega^2 t}{4\kappa} + O(1) & \langle X_c^2 \rangle(t) &\underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{4} \left( \frac{\Omega}{2\kappa} \right)^2 \left( 1 - \frac{2\gamma_m}{\kappa + 2(\gamma_m + \gamma_f)} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

### 3.4. Modèle à un mode

Dans cette sous-section, nous établissons une équation pilote à un mode décrivant l'évolution lente du spin nucléaire dans la limite

$$\Gamma_{\text{sq}} \ll \gamma_f < \gamma_m \quad \text{et} \quad \Gamma_{\text{sq}} \ll \kappa \quad (22)$$

où le taux de compression  $\Gamma_{\text{sq}}$  est défini plus tard (il suffit de savoir ici que  $\Gamma_{\text{sq}} \propto \Omega^2$  si bien que (22) est une limite de couplage de Faraday faible  $\Omega \rightarrow 0$ ). Il convient à cette fin d'introduire les opérateurs bosoniques d'annihilation dans une base astucieusement tournée, au moyen des combinaisons linéaires suivantes des opérateurs  $a$  et  $b$  :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_m + \gamma_f}} a + \sqrt{\frac{\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f}} b \quad ; \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_m + \gamma_f}} b - \sqrt{\frac{\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f}} a \quad (23)$$

$\alpha$  et  $\beta$  correspondent en effet aux modes propres de la partie d'échange de métastabilité de l'équation pilote à trois modes (19) (en pratique, on a  $\gamma_m \gg \gamma_f$ , voir l'équation (8), si bien que le mode  $\beta$  correspond au spin du métastable légèrement hybridé avec le spin de l'état fondamental, et  $\alpha$  au spin nucléaire légèrement hybridé avec le spin du métastable). Tandis que le mode  $\alpha$  subit une divergence en temps de son nombre moyen d'excitations, le mode  $\beta$  est fortement amorti et tend vers une valeur stationnaire (voir les résultats (20) et (21), qui montrent que  $\langle X_\beta^2 \rangle = O(1)$  où  $X_\beta = (\beta + \beta^\dagger)/2$ ), ce qui permettra de l'éliminer adiabatiquement, tout comme le champ en cavité. Dans cette nouvelle base, l'équation pilote à trois modes (19) prend la forme

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \kappa \left( c\rho c^\dagger - \frac{1}{2}\{c^\dagger c, \rho\} \right) + \gamma_\beta \left( \beta\rho\beta^\dagger - \frac{1}{2}\{\beta^\dagger\beta, \rho\} \right)} \quad (24)$$

7. Pour l'état initial considéré, on a à tout temps  $\langle X_a \rangle = 0$  et  $\langle X_a^2 \rangle - \frac{1}{4} = \langle a^\dagger a \rangle$ , où  $\langle a^\dagger a \rangle$  est le nombre moyen d'excitations dans le mode de spin nucléaire, si bien que  $\text{Var } X_a = \langle a^\dagger a \rangle + \frac{1}{4}$ . Les mêmes relations valent pour les deux autres modes.



où  $\gamma_\beta \equiv 2(\gamma_m + \gamma_f)$  et, en notant  $P_\alpha = (\alpha - \alpha^\dagger)/2i$  et  $P_\beta = (\beta - \beta^\dagger)/2i$  les quadratures  $P$  des nouveaux modes,

$$H = \hbar(\Omega_\alpha P_\alpha + \Omega_\beta P_\beta)P_c \quad \text{avec} \quad \Omega_\alpha \equiv \Omega \sqrt{\frac{\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f}} \quad \text{et} \quad \Omega_\beta = \Omega \sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_m + \gamma_f}} \quad (25)$$

Effectuons, comme dans la référence [17], l'élimination adiabatique en couplage de Faraday faible  $\Omega \rightarrow 0$  dans le formalisme des fonctions d'onde Monte-Carlo [18, 19], où l'opérateur densité solution de l'équation pilote (24) s'obtient par moyenne de cas purs sur des réalisations stochastiques indépendantes, chaque réalisation correspondant à l'évolution déterministe d'un vecteur d'état non normalisé  $|\psi(t)\rangle$  sous l'action du hamiltonien effectif non hermitien

$$H_{\text{eff}} = H - \frac{i\hbar}{2} (\kappa c^\dagger + \gamma_\beta \beta^\dagger \beta) \quad (26)$$

interrompte aléatoirement par des sauts quantiques (évolutions discontinues  $|\psi\rangle \rightarrow C|\psi\rangle$ ) d'opérateurs de saut

$$C_c = \sqrt{\kappa}c \quad \text{et} \quad C_\beta = \sqrt{\gamma_\beta}\beta. \quad (27)$$

En l'absence du couplage cohérent  $\Omega$  dans (25) le mode métastable hybridé et le mode de cavité restent dans l'état vide initial. Au premier ordre en  $\Omega$ , cet état est couplé à des états à une excitation dans la cavité (par l'action de  $P_c$ ) et à zéro ou une excitation dans le mode du métastable hybridé (par l'action de  $P_\alpha$  ou de  $P_\beta$ ). Nous pouvons alors tronquer le vecteur d'état Monte-Carlo  $|\psi\rangle$  dans la base de Fock  $\{|n_\alpha\rangle_{\text{fond}}|n_\beta\rangle_{\text{méta}}|n_c\rangle_{\text{cav}}\}$  comme suit,

$$|\psi\rangle = |\psi_\alpha^{00}\rangle|0\rangle|0\rangle + |\psi_\alpha^{01}\rangle|0\rangle|1\rangle + |\psi_\alpha^{11}\rangle|1\rangle|1\rangle \quad (28)$$

en commettant une erreur de norme  $O(\Omega^2)$ . Sous l'effet du hamiltonien effectif (26), les composantes rapides  $|\psi_\alpha^{01}\rangle$  et  $|\psi_\alpha^{11}\rangle$  rejoignent exponentiellement un régime de suivi adiabatique de la composante lente  $|\psi_\alpha^{00}\rangle$  avec des taux  $\kappa/2$  ou  $(\kappa + \gamma_\beta)/2$ . D'où leur élimination adiabatique dans la limite (22)<sup>8</sup>

$$|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}} \simeq \frac{i\Omega_\beta}{2(\kappa + \gamma_\beta)} |\psi_\alpha^{00}\rangle \quad \text{et} \quad |\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}} \simeq \frac{\Omega_\alpha}{\kappa} P_\alpha |\psi_\alpha^{00}\rangle \quad (29)$$

On reporte les expressions de  $|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}$ ,  $|\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}}$  dans l'équation d'évolution hamiltonienne de  $|\psi_\alpha^{00}\rangle$  pour obtenir

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_\alpha^{00}\rangle = -\frac{i\hbar}{2} (\Gamma_{\text{sq}} P_\alpha^2 + \Gamma_0) |\psi_\alpha^{00}\rangle \equiv H_{\text{eff}}^{00} |\psi_\alpha^{00}\rangle \quad (30)$$

où l'on a introduit les taux

$$\Gamma_{\text{sq}} = \frac{\Omega_\alpha^2}{\kappa} \quad \text{et} \quad \Gamma_0 = \frac{\Omega_\beta^2}{4(\kappa + \gamma_\beta)} \quad (31)$$

Comme nous le verrons,  $\Gamma_{\text{sq}}$  est le taux de compression typique du spin nucléaire dans le régime (22). En étudiant l'effet de l'opérateur de saut de cavité  $C_c$  et de saut d'échange de métastabilité  $C_\beta$  sur le vecteur d'état (28), nous pouvons

8. Dans le suivi adiabatique, les probabilités d'occupation des composantes excitées sont  $\langle \psi_\alpha^{11} | \psi_\alpha^{11} \rangle_{\text{adiab}} / \langle \psi | \psi \rangle = [\Omega_\beta^2 / 4(\kappa + \gamma_\beta)^2] \langle \psi_\alpha^{00} | \psi_\alpha^{00} \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$  et  $\langle \psi_\alpha^{01} | \psi_\alpha^{01} \rangle_{\text{adiab}} / \langle \psi | \psi \rangle = (\Gamma_{\text{sq}} / \kappa) \langle \psi_\alpha^{00} | P_\alpha^2 | \psi_\alpha^{00} \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$  où l'on a utilisé (31). Dans la limite (22), on vérifie aisément qu'elles sont  $\ll 1$ , si bien que presque toute la population est dans la composante  $|\psi_\alpha^{00}\rangle|0\rangle|0\rangle$  comme il se doit, ce qui nous permettra dans la suite de remplacer  $\langle \psi | \psi \rangle$  par  $\langle \psi_\alpha^{00} | \psi_\alpha^{00} \rangle$ . On vérifie également qu'une autre condition de validité de l'élimination adiabatique, à savoir la lenteur de l'évolution du spin nucléaire hybridé  $\alpha$  par rapport aux variables rapides, qui s'écrit ici  $\Gamma_{\text{sq}}, \Gamma_0 \ll \kappa, \kappa + \gamma_\beta$ , est satisfaite. Ces considérations ne permettent cependant pas de montrer que la condition  $\Gamma_{\text{sq}} \ll \gamma_f$  est nécessaire (sauf si  $\kappa \ll \gamma_\beta$ ). Pour le voir en toute généralité, nous poussons à l'ordre  $\Omega^4$  le calcul du hamiltonien effectif  $H_{\text{eff}}^{00} = PH_{\text{eff}}P + PHQ(zQ - QH_{\text{eff}}Q)^{-1}QHP$  dans le sous-espace  $n_\beta = n_c = 0$  sur lequel  $P$  projette (ici  $Q = \mathbb{1} - P$  et  $z = O(\Omega^2)$ ). Qualitativement, à cet ordre, par action de  $H_\alpha$  puis  $H_\beta$  sur  $|\psi_\alpha^{00}\rangle|0\rangle|0\rangle$  (avec la notation évidente  $H = H_\alpha + H_\beta$ ), on crée virtuellement une excitation  $\beta$  seule, relaxant au taux  $\gamma_\beta/2$ , d'où la condition d'adiabaticité supplémentaire  $\Gamma_0 \ll \gamma_\beta$ ; jointe à  $\Gamma_0 \ll \kappa$  et  $\gamma_f < \gamma_m$ , elle implique  $\Gamma_{\text{sq}} \ll \gamma_f$  puisque  $\Gamma_{\text{sq}}/\gamma_f = (\Gamma_0/\kappa + \Gamma_0/\gamma_\beta)(4\gamma_\beta/\gamma_m) < 16(\Gamma_0/\kappa + \Gamma_0/\gamma_\beta)$ . Quantitativement, nous trouvons une correction au coefficient de  $P_\alpha^2$  dans  $H_{\text{eff}}^{00}$  de type  $H_\alpha G_0 H_\beta G_0 H_\beta G_0 H_\alpha$  ( $G_0$  est la résolvante de  $H_{\text{eff}}$  pour  $\Omega = 0$ ) de la forme  $\hbar \Gamma_{\text{sq}} \Omega_\beta^2 / \gamma_\beta \kappa$ , qui doit être négligeable, ce qui impose  $\Omega_\beta^2 / \gamma_\beta \kappa \ll 1$ , c'est-à-dire  $\Gamma_{\text{sq}} \ll \gamma_f$  compte tenu de  $\gamma_f < \gamma_m$ . Les corrections au terme scalaire sont négligeables dès que  $\Gamma_0 \ll \gamma_\beta, \kappa$ , et le nouveau terme en  $P_\alpha^4$  qui apparaît est négligeable devant  $\hbar \Gamma_{\text{sq}} P_\alpha^2$  pour  $P_\alpha = O(1)$  si  $\Gamma_{\text{sq}} \ll \kappa$ .

interpréter l'hamiltonien effectif de l'équation (30). (i) Considérons d'abord l'effet d'un saut de cavité, qui se produit à l'instant  $t$  avec un taux  $\kappa(\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle + \langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle)_{\text{adiab}}/\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle$ . Juste après le saut, le vecteur d'état, initialement en régime de suivi adiabatique, devient

$$|\psi(t^+)\rangle = C_c|\psi(t^-)\rangle_{\text{adiab}} \propto |\psi_\alpha^{01}(t^-)\rangle_{\text{adiab}}|0\rangle|0\rangle + |\psi_\alpha^{11}(t^-)\rangle_{\text{adiab}}|1\rangle|0\rangle \quad (32)$$

C'est la superposition d'une composante instable  $|1\rangle|0\rangle$  et d'une composante stable  $|0\rangle|0\rangle$ . Avec une probabilité  $\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}/(\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle + \langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle)_{\text{adiab}}$  le saut de cavité est alors suivi d'un saut d'échange de métastabilité avant que le système n'ait le temps de rejoindre sa valeur adiabatique. On a dans ce cas un « saut double », qui en définitive n'affecte pas la composante  $|\psi_\alpha^{00}(t^-)\rangle$  puisque

$$C_\beta C_c |\psi(t^-)\rangle_{\text{adiab}} \propto |\psi_\alpha^{00}(t^-)\rangle|0\rangle|0\rangle \quad (33)$$

Ce processus contribue au terme scalaire (proportionnel à l'identité) dans l'hamiltonien effectif de l'équation (30). Avec la probabilité complémentaire  $\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}}/(\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle + \langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle)_{\text{adiab}}$  le système rejoint sa valeur adiabatique avant que d'autres sauts ne se produisent, et est asservi à  $P_\alpha|\psi_\alpha^{00}(t^-)\rangle$ , c'est-à-dire que la composante lente  $|\psi_\alpha^{00}(t^-)\rangle$  a subi de manière effective un saut quantique simple avec un opérateur de saut proportionnel à  $P_\alpha$ . Ce processus correspond au premier terme, proportionnel à  $P_\alpha^2$ , dans l'hamiltonien effectif de l'équation (30). (ii) Supposons ensuite que le saut à l'instant  $t$  est un saut d'échange de métastabilité, ce qui se produit avec un taux  $\gamma_\beta\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}/\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle$ . On vérifie dans ce cas que le vecteur d'état après le saut,  $C_\beta|\psi(t^-)\rangle$ , est entièrement instable et subit presque immédiatement un second saut, un saut de cavité. L'effet total correspond là encore à un saut double et à l'action d'un opérateur scalaire sur la composante lente. Nous tirons de cette discussion les taux de saut simple et de saut double suivants :

$$\Gamma_s = \frac{\kappa(\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle + \langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle)_{\text{adiab}}}{\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle} \frac{\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}}}{(\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle + \langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle)_{\text{adiab}}} = \Gamma_{\text{sq}} \frac{\langle\psi_\alpha^{00}|P_\alpha^2|\psi_\alpha^{00}\rangle}{\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle} \equiv \Gamma_{\text{sq}}\langle P_\alpha^2 \rangle \quad (34)$$

$$\Gamma_d = \frac{\kappa(\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle + \langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle)_{\text{adiab}}}{\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle} \frac{\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}}{(\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle + \langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle)_{\text{adiab}}} + \frac{\gamma_\beta\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}}{\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle} = \Gamma_0 \quad (35)$$

On obtient finalement l'équation pilote à un mode décrivant l'évolution lente de l'opérateur densité  $\rho_\alpha$  du mode bosonique  $\alpha$  (hybridé mais presque purement de spin nucléaire) :

$$\boxed{\frac{d\rho_\alpha}{dt} = C_s\rho_\alpha C_s^\dagger - \frac{1}{2}\{C_s^\dagger C_s, \rho_\alpha\} + C_d\rho_\alpha C_d^\dagger - \frac{1}{2}\{C_d^\dagger C_d, \rho_\alpha\}} \quad (36)$$

en termes de deux sauts quantiques, le saut simple (uniquement de cavité)  $C_s$  et le saut double (de cavité et d'échange de métastabilité dans cet ordre ou dans l'autre)  $C_d$  :

$$C_s = \sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}P_\alpha \quad ; \quad C_d = \sqrt{\Gamma_0}\mathbb{1} \quad (37)$$

De l'équation (36) intégrée pour l'état initial vide de  $\alpha$ , on tire :

$$\langle X_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{4}(1 + \Gamma_{\text{sq}}t) \quad ; \quad \langle P_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{4} \quad (38)$$

En revenant à la base atomique initiale (non tournée) et en limitant le vecteur d'état (28) à son premier terme, on retrouve l'équation (20) et les trois premiers résultats de l'équation (21) du modèle à trois modes. Enfin, le nombre moyen de photons polarisés selon  $O_y$  sortant de la cavité par unité de temps, donné dans le modèle à un mode par  $\Gamma_0 + \Gamma_{\text{sq}}/4$  comme le montrera l'équation (44), est en accord avec la valeur exacte  $\kappa\langle c^\dagger c \rangle_s$  où le nombre moyen stationnaire de photons polarisés selon  $O_y$  dans la cavité  $\langle c^\dagger c \rangle_s = \langle X_c^2 \rangle_s - 1/4$  est le dernier résultat de (21).<sup>9</sup>

9. En revanche, la valeur de  $\langle c^\dagger c \rangle_{\text{adiab}}$  dans la forme adiabatique (29) du vecteur d'état ne représente pas ce nombre. La solution du paradoxe tient à l'existence de la voie de désexcitation (ii), celle de l'annihilation en premier saut de l'excitation  $n_\beta = 1$  dans le mode du métastable immédiatement suivie par la perte d'un photon en cavité. Le vrai taux de sortie de photons polarisés selon  $O_y$  est donc  $\kappa\langle c^\dagger c \rangle_{\text{adiab}} + \gamma_\beta\langle \beta^\dagger \beta \rangle_{\text{adiab}}$ .

#### 4. Mesure quantique non destructive du spin nucléaire en continu

Les moyennes quantiques calculées dans la section 3 correspondent seulement aux moyennes d'ensemble sur un nombre infini de réalisations expérimentales. Dans cette section, nous étudions ce qui nous intéresse vraiment, l'évolution du système dans une ou plusieurs réalisations données de l'expérience, conditionnée aux résultats d'une mesure en continu sur la lumière polarisée selon  $Oy$  sortant de la cavité. Pour cela, nous revenons à la formulation en termes de fonctions d'onde Monte-Carlo, comme dans la section 3, où des trajectoires stochastiques  $|\psi(t)\rangle$  correspondant à une succession particulière de sauts quantiques reconstruisent l'opérateur densité du système conditionné à des résultats de mesure [19]. La forme précise des opérateurs de saut Monte-Carlo, qui n'est pas unique dans la reformulation stochastique d'une équation pilote, est alors déterminée par les mesures particulières effectuées.

##### 4.1. Étude de la compression par comptage de photons : résultats analytiques à un mode et numériques à trois modes

Supposons que l'on compte continûment et directement (par photodétection) le nombre de photons polarisés selon  $Oy$  sortant de la cavité (voir figure 1b), comme l'a proposé la référence [20]. L'opérateur de saut associé à cette mesure est  $\sqrt{k}c$ , de sorte que l'équation pilote à trois modes (19) est déjà sous la bonne forme pour analyser l'évolution du vecteur d'état  $|\psi(t)\rangle$  conditionnée à la mesure.

Il en va de même dans la limite d'un faible couplage de Faraday,  $\Omega \rightarrow 0$ , qui conduit au modèle à un mode. Comme les opérateurs de saut  $C_d$  et  $C_s$  de son équation pilote (36) correspondent tous deux à la perte en cavité d'un photon polarisé selon  $Oy$  (rappelons-le,  $C_d$  résulte d'un saut de cavité immédiatement suivi ou précédé d'un saut d'échange de métastabilité, et  $C_s$  d'un simple saut de cavité), la mesure ne peut faire la distinction entre les deux, et l'opérateur densité conditionné à un nombre donné  $n$  de photons détectés est obtenu en moyennant sur des réalisations ayant ce même nombre *total*  $n$  de sauts. Un vecteur d'état Monte-Carlo non normalisé ayant subi ces  $n$  sauts pendant la durée  $t$  s'écrit

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}^{00}(t-t_n)} C_{\epsilon_n} e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}^{00}(t_n-t_{n-1})} C_{\epsilon_{n-1}} \dots C_{\epsilon_1} e^{-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}^{00}t_1} |\psi(0)\rangle \quad (39)$$

où  $\epsilon_k \in \{s, d\}$  et  $t_k$  sont le type et l'instant du  $k$ ème saut,  $H_{\text{eff}}^{00}$  est l'hamiltonien effectif (30). La moyenne quantique d'une observable  $O$  s'obtient en moyennant sur toutes les trajectoires possibles, donc en sommant sur le nombre et le type des sauts et en intégrant sur leurs instants :

$$\langle O \rangle(t) = \sum_n \int_{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t} dt_1 dt_2 \dots dt_n \sum_{(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{s, d\}^n} \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle \quad (40)$$

où la norme au carré de chaque vecteur d'état non normalisé  $|\psi(t)\rangle$  donne automatiquement sa densité de probabilité [21]. En prenant  $O = \mathbb{1}$ , nous en déduisons la probabilité que  $n$  sauts se soient produits dans l'intervalle de temps  $[0, t]$

$$\Pi_n(t) = \int_{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t} dt_1 dt_2 \dots dt_n \sum_{(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{s, d\}^n} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \quad (41)$$

Pour évaluer (41), nous tirons parti du fait que tous les opérateurs de saut dans (39) et leurs conjugués hermitiens commutent entre eux et avec  $H_{\text{eff}}^{00}$ . En utilisant les identités

$$\sum_{\epsilon_n = s, d} \dots \sum_{\epsilon_1 = s, d} (C_{\epsilon_n}^\dagger C_{\epsilon_n} \dots C_{\epsilon_1}^\dagger C_{\epsilon_1}) = \left( \sum_{\epsilon_n = s, d} C_{\epsilon_n}^\dagger C_{\epsilon_n} \right) \dots \left( \sum_{\epsilon_1 = s, d} C_{\epsilon_1}^\dagger C_{\epsilon_1} \right) = (\Gamma_{\text{sq}} P_\alpha^2 + \Gamma_0 \mathbb{1})^n \quad (42)$$

et en injectant une relation de fermeture dans la base propre de  $P_\alpha$  telle que  $P_\alpha |p_\alpha\rangle = p_\alpha |p_\alpha\rangle$ , après avoir intégré sur les temps  $t_k$  comme le permet le produit télescopique des opérateurs d'évolution, nous obtenons

$$\Pi_n(t) = \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\alpha (\Gamma_{\text{sq}} p_\alpha^2 + \Gamma_0)^n e^{-\Gamma_{\text{sq}} p_\alpha^2 t} e^{-\Gamma_0 t} \Pi(p_\alpha, 0) = \binom{2n}{n} \frac{(\Gamma_{\text{sq}} t / 8)^n e^{-\Gamma_0 t}}{(1 + \Gamma_{\text{sq}} t / 2)^{n+1/2}} \Phi \left( -n, \frac{1}{2} - n; \Gamma_0 t + \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_{\text{sq}}} \right) \quad (43)$$

où  $\Pi(p_\alpha, 0)$  est la distribution de probabilité initiale de  $p_\alpha$  (une gaussienne de moyenne nulle et de variance  $1/4$ ) et  $\Phi$  est la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer  ${}_1F_1$ . On remarque que (43) est en fait une moyenne

gaussienne sur  $p_\alpha$  d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = (\Gamma_{\text{sq}} p_\alpha^2 + \Gamma_0)t$ . On en déduit la moyenne et la variance du nombre de photodétections pendant la durée  $t$  :

$$\langle n \rangle = \left( \Gamma_0 + \frac{1}{4} \Gamma_{\text{sq}} \right) t \quad ; \quad \text{Var } n = \langle n \rangle + \frac{(\Gamma_{\text{sq}} t)^2}{8} \quad (44)$$

Toujours en utilisant l'équation (43), nous accédons à la distribution de probabilité de  $p_\alpha$  sachant que  $n$  photons ont été détectés dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ , une fonction paire de  $p_\alpha$  :

$$\Pi_t(p_\alpha | n) = \frac{1}{\Pi_n(t)} \frac{t^n}{n!} (\Gamma_{\text{sq}} p_\alpha^2 + \Gamma_0)^n e^{-\Gamma_{\text{sq}} p_\alpha^2 t} e^{-\Gamma_0 t} \Pi(p_\alpha, 0) \quad (45)$$

Nous en déduisons la moyenne et la variance conditionnelles de  $P_\alpha^2$  sachant que  $n$  photons ont été détectés pendant  $t$  :

$$\langle P_\alpha^2 \rangle_n = \frac{(n+1)}{\Gamma_{\text{sq}} t} \frac{\Pi_{n+1}(t)}{\Pi_n(t)} - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{\text{sq}}} \quad ; \quad \text{Var}_n(P_\alpha^2) \equiv \langle P_\alpha^4 \rangle_n - \langle P_\alpha^2 \rangle_n^2 = \frac{(n+1)^2}{(\Gamma_{\text{sq}} t)^2} \left[ \frac{(n+2)\Pi_{n+2}(t)}{(n+1)\Pi_n(t)} - \frac{\Pi_{n+1}^2(t)}{\Pi_n^2(t)} \right] \quad (46)$$

Enfin, au moyen de l'équation (45), nous trouvons que pour  $\Gamma_{\text{sq}} t \rightarrow +\infty$ , la distribution de probabilité de  $p_\alpha^2$  conditionnée au nombre  $n$  de photodétections est piquée autour de la valeur  $p_0^2$  donnée par <sup>10</sup>

$$\boxed{p_0^2 - \frac{1}{4} = \frac{n - \langle n \rangle}{\Gamma_{\text{sq}} t} \quad \text{d'où} \quad \langle P_\alpha^2 \rangle_n \underset{\Gamma_{\text{sq}} t \rightarrow +\infty}{\sim} p_0^2} \quad (47)$$

avec une variance conditionnelle tendant vers zéro

$$\boxed{\text{Var}_n(P_\alpha^2) \underset{\Gamma_{\text{sq}} t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{(\Gamma_{\text{sq}} t)^2} \rightarrow 0} \quad (48)$$

De même, la distribution de probabilité conditionnelle de  $p_\alpha$  présente deux pics à  $\pm p_0$  comme on peut le voir sur la fonction de Wigner de la figure 5b, obtenue par simulation numérique de l'évolution conditionnelle du système aux temps longs dans le modèle à un mode (36). Pour résumer, lors d'une réalisation donnée de l'expérience, la mesure par photodétection en continu du nombre de photons polarisés selon  $Oy$  sortant de la cavité rend de plus en plus certaine la valeur de  $P_\alpha^2$ , et donc de  $I_z^2$ , le carré de la composante selon  $Oz$  du spin nucléaire collectif. Pour être complets, nous relierons dans la limite  $\Omega \rightarrow 0$  les moments conditionnels de  $P_\alpha^2$ , c'est-à-dire de  $I_z^2$ , à ceux de  $P_\alpha^2$  :

$$\langle P_\alpha^2 \rangle_n = \frac{\gamma_m}{\gamma_f + \gamma_m} \langle P_\alpha^2 \rangle_n + \frac{\gamma_f/4}{\gamma_f + \gamma_m} \quad ; \quad \text{Var}_n(P_\alpha^2) = \frac{\gamma_m^2}{(\gamma_f + \gamma_m)^2} \text{Var}_n(P_\alpha^2) + \frac{\gamma_f \gamma_m}{(\gamma_f + \gamma_m)^2} \langle P_\alpha^2 \rangle_n + \frac{\gamma_f^2/8}{(\gamma_f + \gamma_m)^2} \quad (49)$$

Effectuons pour terminer une vérification numérique de ces prédictions analytiques dans le modèle à trois modes. Sur la figure 4, nous représentons la moyenne conditionnelle du carré  $P_\alpha^2$  de la quadrature de spin nucléaire sachant que  $n$  photodétections se sont produites dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ , avec  $\Gamma_{\text{sq}} t = 15$  (points noirs), en fonction de ce nombre  $n$ . L'ensemble des réalisations est divisé en 5 classes correspondant à un nombre de photodétections tombant dans un intervalle donné, et les points noirs sont obtenus en moyennant sur les réalisations dans une même classe. Les résultats numériques sont proches des prédictions analytiques tirées de (46) et (49) et représentées en vert, sauf dans les classes extrêmes qui comportent un nombre trop faible de réalisations. En revanche, les prédictions analytiques asymptotiques (47) et (48), non représentées, seraient en désaccord avec les simulations des deux modèles car le temps  $\Gamma_{\text{sq}} t = 15$  n'est pas assez long. Sur la figure 5, nous explorons justement les temps longs dans le modèle à un mode, avec  $\Gamma_{\text{sq}} t = 1000$ . La figure 5a, qui est l'équivalent de la figure 4a, montre que  $\langle P_\alpha^2 \rangle_n$  est alors relié au nombre de photodétections  $n$  comme dans la prédiction analytique (47), c'est-à-dire selon la première bissectrice dans les unités de la figure, avec un écart-type conditionnel (48) à peu près constant  $\simeq (\Gamma_0 t)^{1/2} / \Gamma_{\text{sq}} t$  car  $\Gamma_0$  est ici  $\gg \Gamma_{\text{sq}}$ .

10. D'après l'équation (44), le second membre de (47) est asymptotiquement de l'ordre de l'unité pour une séquence de photodétection typique. L'équation (47) n'a en fait de sens que pour  $p_0^2$  positif donc  $n > \Gamma_0 t$ ; alors, les équivalents (47) et (48) s'appliquent lorsque l'écart entre les deux pics dans  $\Pi_t(p_\alpha | n)$  est beaucoup plus grand que leur largeur, ce qui impose  $2p_0^2 \gg n^{1/2} / \Gamma_{\text{sq}} t = (\Gamma_0 + \Gamma_{\text{sq}} p_0^2)^{1/2} / \Gamma_{\text{sq}} t^{1/2}$ .

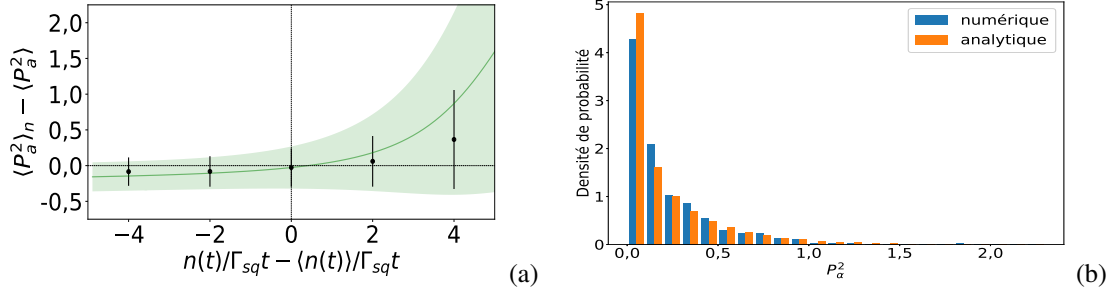


FIGURE 4: Compression de  $P_a^2$  par comptage de photons aux temps courts,  $\Gamma_{sq}t = 15$ . (a) Moyenne et écart-type conditionnels de la quadrature du spin nucléaire au carré  $P_a^2$  sachant que  $n$  photodétections ont eu lieu dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ , en fonction de ce nombre  $n$ . L'écart-type est représenté sous la forme d'un intervalle de confiance. La moyenne inconditionnelle  $\langle P_a^2 \rangle = 1/4$  est indépendante du temps, voir l'équation (20). Points noirs et barres d'erreur : simulation numérique du modèle à 3 modes avec 3000 réalisations ; ligne verte et zone colorée : prédictions analytiques tirées des équations (43), (46) et (49) du modèle à un mode. En pratique, les points noirs sont obtenus après moyenne sur des classes de valeurs de  $n$  centrées sur ces points (dans une classe donnée, les trajectoires ont des nombres de photodétections proches mais des histoires indépendantes pour les sauts d'échange de métastabilité auxquelles l'expérimentateur n'a pas accès). Paramètres du modèle à 3 modes :  $\Omega/\kappa = 1/3$ ,  $\gamma_m/\kappa = 1/10$ ,  $\gamma_f/\kappa = 1/1000$  (si bien que  $\Gamma_{sq}/\kappa = 1/909$ ),  $n_a^{\max} = 64$ ,  $n_b^{\max} = n_c^{\max} = 8$ . Ceci correspond à  $\Gamma_0/\Gamma_{sq} = 12\,500/601 \simeq 20,8$  dans le modèle à un mode. (b) Pour la classe centrée sur  $n = \langle n(t) \rangle$ , histogramme des valeurs conditionnelles de  $P_a^2$ . Barres bleues : simulation numérique du modèle à trois modes ; barres orange : prédictions analytiques tirées de l'équation (45) du modèle à un mode.

#### 4.2. Étude de la compression par détection homodyne : solution analytique à un mode et à trois modes

Nous supposons maintenant que les photons sortant de la cavité polarisés selon  $Oy$  sont mesurés en continu par détection homodyne [22], comme sur la figure 1c. Il nous faut d'abord trouver les bonnes équations stochastiques donnant l'évolution du vecteur d'état du système conditionnée à la détection homodyne, puisque les opérateurs de saut apparaissant naturellement dans l'écriture (24) ou (36) de l'équation pilote à trois modes ou à un mode sont inadaptés. Nous présentons ensuite quelques résultats analytiques obtenus dans le modèle à un mode puis dans le modèle à trois modes, avant de discuter brièvement l'effet du temps de cohérence fini des atomes métastables.

##### 4.2.1. Formulation stochastique adaptée de l'équation pilote

Une équation pilote générale de la forme de Lindblad

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \sum_m C_m \rho C_m^\dagger - \frac{1}{2} \{C_m^\dagger C_m, \rho\} \quad (50)$$

avec  $H$  la partie hermitienne du hamiltonien et  $C_m$  les opérateurs de saut, peut être réécrite de manière équivalente en ajoutant une constante arbitraire aux opérateurs de saut et/ou en les mélangeant par combinaison linéaire unitaire quelconque. Afin de tenir compte d'une détection homodyne sur le champ sortant, on forme, à partir d'un opérateur de saut  $C_m$  correspondant à une photodétection, les deux opérateurs de saut « homodynes »  $D_{m,\pm}$  [19]

$$D_{m,+} = \frac{\mu \mathbb{1} + C_m}{\sqrt{2}} \quad ; \quad D_{m,-} = \frac{\mu \mathbb{1} - C_m}{\sqrt{2}} \quad (51)$$

où  $\mu^2$  a les dimensions d'une pulsation. La mesure de la différence des taux de saut  $D_+^\dagger D_+ - D_-^\dagger D_-$  donne alors accès à une quadrature de  $C_m$ . Ainsi, pour  $\mu$  réel et  $C_m$  correspondant à l'opérateur saut de cavité  $C_c$ , voir l'équation (27), la différence entre les nombres de photons  $N_\pm$  détectés pendant le court intervalle de temps  $\Delta t$  dans les deux voies de sortie de la figure 1c, qui constitue par définition le signal homodyne,

$$N_+ = (D_{c,+}^\dagger D_{c,+}) \Delta t \quad ; \quad N_- = (D_{c,-}^\dagger D_{c,-}) \Delta t \quad ; \quad \frac{N_+ - N_-}{2\mu} = \frac{c + c^\dagger}{2} \sqrt{\kappa} \Delta t \quad (52)$$

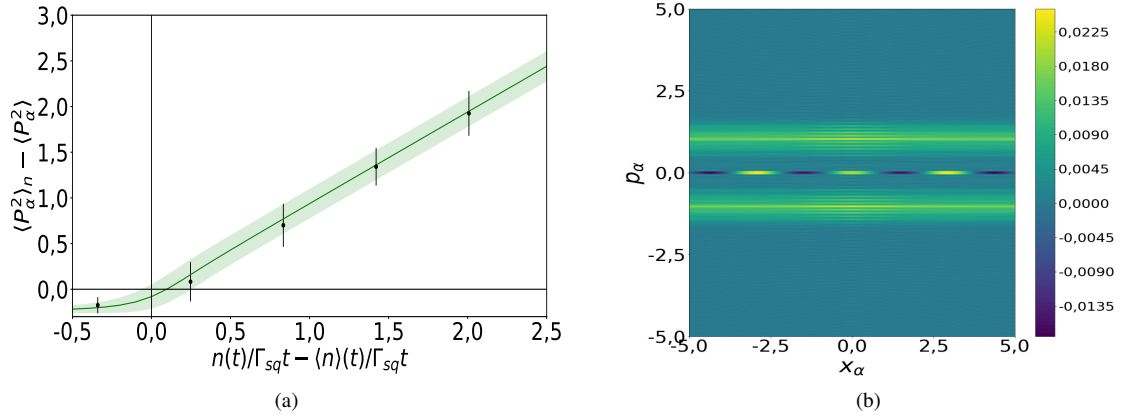


FIGURE 5: Compression de  $P_\alpha^2$  par comptage de photons aux temps longs dans le modèle à un mode (36). (a) Moyenne et écart-type conditionnels de  $P_\alpha^2$  sachant que le nombre de photodétections  $n$  tombe dans une classe de valeurs donnée, de manière similaire à la figure 4a mais pour  $\Gamma_{sq}t = 1000$  et 2000 réalisations (ce temps long rend plus difficile une simulation dans le modèle à 3 modes). (b) Distribution de Wigner du mode bosonique nucléaire hybridé dans l'espace des quadratures  $(X_\alpha, P_\alpha)$  à  $\Gamma_{sq}t = 1000$ , obtenue par moyennage des dyades  $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  sur les trajectoires de la 3ème classe de (a). Elle présente deux lignes de crêtes séparées par des franges d'interférence à valeurs négatives.

donne accès à  $X_c$ ; c'est bien la quadrature du champ conjuguée à  $P_c$  donc translatée d'une quantité proportionnelle à  $P_b$  et au temps sous l'action du hamiltonien  $H$  (12), ce qui renseigne sur  $P_a$  au travers des collisions d'échange de métastabilité. Dans le cas de l'équation pilote à 3 modes (24), on est obligé d'appliquer la procédure de dédoublement (51) *a priori* seulement à l'opérateur de saut de cavité. En pratique, nous appliquerons cette procédure également à l'opérateur de saut  $C_\beta$ , c'est-à-dire que nous dédoublerons par homodynage *tous* les opérateurs de saut  $C_m$ , afin d'éviter l'inconfort d'une représentation mixte mêlant sauts quantiques et évolution stochastique continue, voir l'équation (53) à venir. Dans le cas de l'équation pilote à un mode (36), il faut de toute façon « homodyner » les deux opérateurs de saut  $C_s$  et  $C_d$ , puisque chacun s'accompagne de la perte d'un photon en cavité, comme l'explique la section 3.4.

Dans la limite d'un oscillateur local de grande amplitude  $\mu$ , on peut faire comme si  $\Delta t$  était infinitésimal<sup>11</sup> et représenter l'évolution de la fonction d'onde Monte-Carlo par une équation stochastique non linéaire continue sans sauts quantiques [19, 23, 24] en point de vue d'Ito :

$$\begin{aligned} d|\phi(t)\rangle = & -\frac{i}{\hbar}H|\phi(t)\rangle dt - \frac{1}{2} \sum_m \left( C_m^\dagger C_m - \langle \phi(t) | C_m + C_m^\dagger | \phi(t) \rangle C_m + \frac{1}{4} \langle \phi(t) | C_m + C_m^\dagger | \phi(t) \rangle^2 \right) |\phi(t)\rangle dt \\ & + \sum_m \left( C_m - \frac{1}{2} \langle \phi(t) | C_m + C_m^\dagger | \phi(t) \rangle \right) |\phi(t)\rangle d\zeta_m(t) \end{aligned} \quad (53)$$

où, à chaque opérateur de saut  $C_m$  dans l'écriture initiale de l'équation pilote, on associe un processus stochastique en temps continu  $d\zeta_m(t)$ , à valeurs réelles, gaussien, de moyenne nulle, de variance  $dt$ , statistiquement indépendant des autres processus et sans mémoire. Au même niveau d'approximation, l'opérateur de signal homodyne (52) est remplacé par la somme de sa moyenne et d'un bruit classique représentant ses fluctuations, qui n'est autre que le  $d\zeta_m$  correspondant [19] :

$$\frac{N_+ - N_-}{2\mu} = \frac{\sqrt{\kappa} \langle \phi | c + c^\dagger | \phi \rangle}{2} dt + \frac{1}{2} d\zeta_c \quad (54)$$

11. Cette approximation est valable pour une résolution en temps, c'est-à-dire un pas temporel  $\Delta t$ , telle que  $\mu^{-2} \ll \Delta t \ll \kappa^{-1}$ , où  $\kappa$  est en pratique le taux d'évolution le plus rapide du système dans l'expérience.

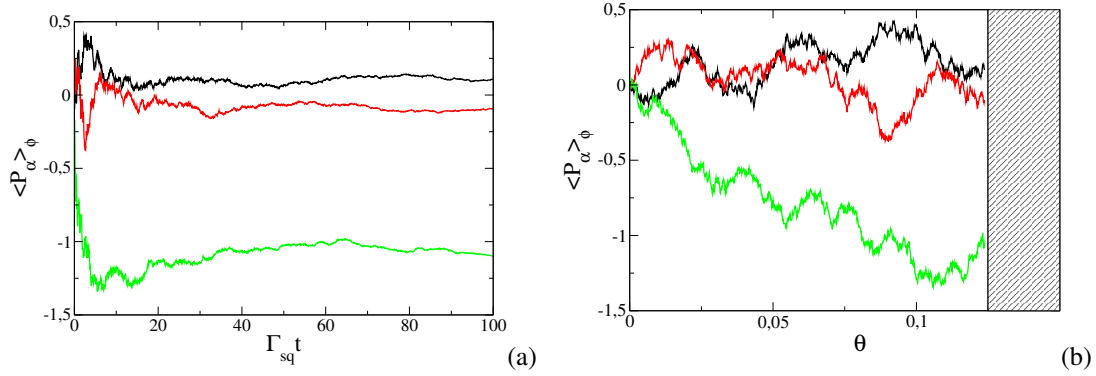


FIGURE 6: Dans le cas de la compression par détection homodyne en continu, marche au hasard (59) effectuée dans le modèle à un mode par la valeur moyenne quantique de la quadrature  $P_\alpha$  du spin nucléaire dans une réalisation donnée de l'expérience. (a) Valeur moyenne en fonction du temps vrai  $t$  pour trois réalisations de l'expérience; il s'agit d'un mouvement brownien étiré convergeant aux temps longs vers une valeur fixe mais imprédictible. (b) Idem en fonction du temps renormalisé compact  $\theta$  (60); il s'agit cette fois d'un mouvement brownien ordinaire mais limité à  $\theta \leq 1/8$ .

En pratique, plus que l'historique d'homodynage, c'est-à-dire la dépendance en temps détaillée du signal de détection homodyne, c'est sa moyenne temporelle sur un intervalle de temps  $[0, t]$  qui est facilement accessible dans une expérience. Nous introduisons donc le signal intégré ayant la dimension de la racine d'une pulsation,

$$\sigma(t) \equiv \frac{N_+^{\text{tot}} - N_-^{\text{tot}}}{2\mu t} = \frac{1}{t} \int_0^t dt' \left[ \sqrt{\kappa} \langle \phi(t') | X_c | \phi(t') \rangle + \frac{1}{2} \frac{d\zeta_c(t')}{dt'} \right] \quad (55)$$

et nous calculerons dans la suite la moyenne et la variance de la quadrature  $P_\alpha$  du spin nucléaire conditionnées à  $\sigma$ .

#### 4.2.2. Résultats analytiques dans le modèle à un mode

Écrivons explicitement l'équation stochastique (53) pour le modèle à un mode (36) :

$$d|\phi(t)\rangle = -\frac{dt}{2} \Gamma_{\text{sq}} [P_\alpha - \bar{P}_\alpha(t)]^2 |\phi(t)\rangle + \sqrt{\Gamma_{\text{sq}}} d\zeta_s(t) [P_\alpha - \bar{P}_\alpha(t)] |\phi(t)\rangle \quad (56)$$

avec  $\bar{P}_\alpha(t) \equiv \langle \phi(t) | P_\alpha | \phi(t) \rangle$ . Le fait marquant est que les sauts associés à l'opérateur  $C_d$  proportionnel à l'identité, qui ajoutaient du bruit dans la détection par comptage de photons de la section 4.1, ne donnent pas de contribution, l'opérateur  $C_d$  disparaissant de l'équation d'évolution conditionnelle dans le cas homodyne. En effet, les photons émis lors de ces sauts proviennent de la composante  $|1\rangle|1\rangle$  du vecteur d'état (28) contenant une excitation  $\beta$ , ce qui les rend optiquement incohérents avec le champ lumineux injecté en cavité, c'est-à-dire avec la composante  $|0\rangle|0\rangle$  de (28), au sens où  $|1\rangle|1\rangle$  contribue à  $\langle c^\dagger c \rangle$  mais pas à  $\langle c + c^\dagger \rangle$ . Il ne reste donc que le processus stochastique  $d\zeta_s$  associé à l'opérateur de saut  $C_s$ . Ce processus se confond avec celui  $d\zeta_c$  apparaissant dans le signal de détection homodyne (54),  $d\zeta_s \equiv d\zeta_c$ , fait admis ici mais qui sera établi en revenant au modèle à trois modes dans la section 4.2.3.

L'équation stochastique (56) présente un terme de bruit linéaire et un terme déterministe quadratique en l'opérateur  $P_\alpha$ , réels dans l'espace de Fourier. Pour l'état initial considéré ici, elle est donc résolue exactement par un ansatz gaussien sur la fonction d'onde en représentation impulsion, réel et correctement normalisé pour la relation de commutation  $[X_\alpha, P_\alpha] = i/2$  :

$$\langle p_\alpha | \phi(t) \rangle = [2\pi u(t)]^{1/4} \exp\{-u(t)[p_\alpha - \bar{P}_\alpha(t)]^2\} \quad (57)$$

En revanche, la gaussianité est perdue dans la compression par photodétection de la section 4.1. En utilisant le calcul d'Ito, <sup>12</sup> on trouve que  $u$  suit une équation d'évolution déterministe, à intégrer avec la condition initiale  $u(0) = 1$  :

$$du(t) = \Gamma_{\text{sq}} dt \quad \text{donc} \quad u(t) = 1 + \Gamma_{\text{sq}} t \quad \text{et} \quad \text{Var}_\phi P_\alpha(t) \equiv \frac{1}{4u(t)} = \frac{1}{4(1 + \Gamma_{\text{sq}} t)} \quad (58)$$

12. On ne garde que les termes linéaires en  $dt$  ou en le bruit, et on remplace systématiquement les termes quadratiques  $d\zeta_s^2$  par leur moyenne  $dt$ .

où nous avons donné aussi la variance de  $P_\alpha$  dans l'état  $|\phi\rangle$ . En revanche, l'équation sur la valeur moyenne de  $P_\alpha$  dans  $|\phi\rangle$  est purement stochastique, avec un coefficient de diffusion  $D(t)$  dépendant du temps et la condition initiale  $\bar{P}_\alpha(0) = 0$  :

$$d\bar{P}_\alpha(t) = [2D(t)]^{1/2} d\zeta_s(t) \quad \text{avec} \quad D(t) = \frac{\Gamma_{\text{sq}}}{8u(t)^2} = \frac{\Gamma_{\text{sq}}}{8(1 + \Gamma_{\text{sq}}t)^2} \quad (59)$$

Comme  $D(t)$  est d'intégrale finie,  $\bar{P}_\alpha(t)$  se stabilise asymptotiquement (aux temps longs) à une valeur fixe sur une seule réalisation, comme on le voit sur la figure 6, avec une variance dans l'état quantique  $\text{Var}_\phi P_\alpha$  tendant vers 0. Ce phénomène de « convergence stochastique » vers un état propre de l'observable mesurée (en l'occurrence  $P_\alpha$ ) est attendu dans la description d'une mesure quantique par une équation de diffusion du vecteur d'état [23, 24, 25]. Pour le montrer ici, on introduit un temps  $\theta$  renormalisé en termes duquel  $\bar{P}_\alpha$  effectue un mouvement brownien ordinaire avec un coefficient de diffusion unité, et on remarque que ce temps est borné :

$$\theta = \int_0^t dt' D(t') = \frac{\Gamma_{\text{sq}} t}{8(1 + \Gamma_{\text{sq}} t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \theta_\infty = \frac{1}{8} \quad (60)$$

À l'instant renormalisé  $\theta_\infty$ ,  $\bar{P}_\alpha$  suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $1/4$  :  $\bar{P}_\alpha$  a donc la même distribution de probabilité asymptotique ( $t \rightarrow +\infty$ ) que celle de l'observable  $P_\alpha$  dans l'état quantique initial du spin nucléaire.

Venons-en maintenant à la moyenne et à la variance de  $P_\alpha$  conditionnées à la valeur  $S$  du signal d'homodynage intégré en temps  $\sigma$  (55). De façon remarquable, nous trouvons que la moyenne conditionnelle est toujours proportionnelle au signal, avec un coefficient de proportionnalité dépendant du temps, et que la variance conditionnelle dépend du temps mais pas du signal :

$$\langle P_\alpha \rangle_{\sigma=S} = m(\Gamma_{\text{sq}} t) \frac{S}{\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}} \quad \text{où} \quad m(\tau) = \frac{\tau}{1 + \tau} \quad ; \quad \text{Var}_{\sigma=S}(P_\alpha) = \mathcal{V}(\Gamma_{\text{sq}} t) \quad \text{où} \quad \mathcal{V}(\tau) = \frac{1}{4(1 + \tau)} \quad (61)$$

Ces expressions désignent  $\Gamma_{\text{sq}}$  comme le taux de compression du spin nucléaire dans le modèle à un mode. Sur la figure 7a, nous représentons  $m(\tau)$  et  $\mathcal{V}(\tau)$  en fonction du temps réduit  $\tau = \Gamma_{\text{sq}} t$ . De même que la variance quantique sur une réalisation  $\text{Var}_\phi P_\alpha$ , avec laquelle elle coïncide en fait, la variance conditionnelle tend asymptotiquement vers zéro comme l'inverse du temps. Dans la moyenne conditionnelle, le coefficient  $m(\tau)$  tend vers 1 aux temps longs. Pour le comprendre, relier le signal intégré (55) à  $\bar{P}_\alpha$  en utilisant les expressions adiabatiques (29) dans le vecteur d'état tronqué (28) :

$$\sigma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t dt' \left[ \sqrt{\Gamma_{\text{sq}}} \bar{P}_\alpha(t') + \frac{1}{2} \frac{d\zeta_s(t')}{dt'} \right] \quad (62)$$

Comme  $\bar{P}_\alpha(t)$  se stabilise asymptotiquement sur une seule réalisation, et que la moyenne temporelle du bruit  $d\zeta_s$  tend vers zéro comme  $1/t^{1/2}$  presque sûrement,  $\sigma(+\infty)$  donne directement la valeur de  $\bar{P}_\alpha$  à un facteur constant  $\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}$  près.

Pour établir les résultats (61), relier d'abord la variance conditionnelle de l'opérateur  $P_\alpha$  à celle de sa moyenne quantique sur une réalisation  $\bar{P}_\alpha$  comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\sigma=S}(P_\alpha) &\equiv \langle \langle \phi | P_\alpha^2 | \phi \rangle \rangle_{\sigma=S} - \langle \langle \phi | P_\alpha | \phi \rangle \rangle_{\sigma=S}^2 = \langle \langle \phi | P_\alpha^2 | \phi \rangle - \langle \phi | P_\alpha | \phi \rangle^2 \rangle_{\sigma=S} + \langle \bar{P}_\alpha \rangle_{\sigma=S} - \langle \bar{P}_\alpha \rangle_{\sigma=S}^2 \\ &= \langle \text{Var}_\phi P_\alpha \rangle_{\sigma=S} + \text{Var}_{\sigma=S}(\bar{P}_\alpha) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \tau} + \text{Var}_{\sigma=S}(\bar{P}_\alpha) \end{aligned} \quad (63)$$

où nous avons utilisé l'expression (58) de la variance quantique de  $P_\alpha$  dans l'état  $|\phi\rangle$ . Il reste donc à déterminer la distribution de probabilité conditionnelle de  $\bar{P}_\alpha$  sachant que  $\sigma = S$ ,

$$P(\bar{P}_\alpha = p_\alpha | \sigma = S) \equiv \frac{P(\bar{P}_\alpha = p_\alpha, \sigma = S)}{P(\sigma = S)} \quad (64)$$

Or, la variable aléatoire  $\bar{P}_\alpha(t)$ , résultant d'un mouvement brownien (59), a une distribution de probabilité gaussienne ; il en va de même pour l'intégrale temporelle de  $\bar{P}_\alpha$  et du bruit  $d\zeta_s$ , donc du signal  $\sigma$  (62) qui en est la somme.



Comme les variables  $\bar{P}_\alpha$  et  $\sigma$  sont de moyennes nulles, leur distribution de probabilité conjointe est caractérisée par leur matrice de covariance, ou plus directement par sa matrice inverse, si bien que

$$\begin{aligned} P(\bar{P}_\alpha = p_\alpha | \sigma = S) &= \frac{\frac{1}{2\pi \sqrt{\langle \bar{P}_\alpha^2 \rangle_{\text{stoch}} \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} - \langle \sigma \bar{P}_\alpha \rangle_{\text{stoch}}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{p_\alpha^2 \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} + S^2 \langle \bar{P}_\alpha^2 \rangle_{\text{stoch}} - 2p_\alpha S \langle \sigma \bar{P}_\alpha \rangle_{\text{stoch}}}{\langle \bar{P}_\alpha^2 \rangle_{\text{stoch}} \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} - \langle \sigma \bar{P}_\alpha \rangle_{\text{stoch}}^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}}} \exp\left(-\frac{S^2}{2\langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \left[ \langle \bar{P}_\alpha^2 \rangle_{\text{stoch}} - \langle \sigma \bar{P}_\alpha \rangle_{\text{stoch}}^2 / \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} \right]}} \exp\left[ -\frac{1}{2} \frac{\left( p_\alpha - \langle \sigma \bar{P}_\alpha \rangle_{\text{stoch}} / \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} \right)^2}{\langle \bar{P}_\alpha^2 \rangle_{\text{stoch}} - \langle \sigma \bar{P}_\alpha \rangle_{\text{stoch}}^2 / \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}} \right] \end{aligned} \quad (65)$$

où  $\langle \dots \rangle_{\text{stoch}}$  à l'instant  $t$  est la moyenne prise sur toutes les réalisations du processus stochastique  $d\zeta_s(t')$  sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ . On en déduit que, dans les équations (61),

$$m(\tau) = \sqrt{\Gamma_{\text{sq}}} \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_\alpha(t) \rangle_{\text{stoch}}}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(\tau) = \frac{1}{4(1+\tau)} + \langle \bar{P}_\alpha^2(t) \rangle_{\text{stoch}} - \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_\alpha(t) \rangle_{\text{stoch}}^2}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \quad (66)$$

Afin de déterminer leurs variances et covariance, on écrit  $\sigma(t)$  et  $\bar{P}_\alpha(t)$  comme des fonctionnelles linéaires du processus stochastique  $d\zeta_s$  et on utilise le fait que les forces de Langevin  $d\zeta_s(t)/dt$  et  $d\zeta_s(t')/dt'$  ont une fonction de corrélation de Dirac  $\delta(t-t')$ . Donnons l'exemple de la première contribution à  $\sigma(t)$  :

$$\int_0^t dt'' \bar{P}_\alpha(t'') = \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' [2D(t')]^{1/2} \frac{d\zeta_s(t')}{dt'} = \int_0^t dt' \int_{t'}^t dt'' [2D(t')]^{1/2} \frac{d\zeta_s(t')}{dt'} = \int_0^t dt' (t-t') [2D(t')]^{1/2} \frac{d\zeta_s(t')}{dt'} \quad (67)$$

où l'on a changé l'ordre d'intégration sur  $t'$  et  $t''$  puis intégré explicitement sur  $t''$ . On aboutit aux expressions cherchées (61), dont la simplicité découle du fait que, sur une réalisation de l'expérience, on a toujours

$$\sigma(t) = \sqrt{\Gamma_{\text{sq}}} \frac{1+\tau}{\tau} \bar{P}_\alpha(t) \quad (68)$$

Pour terminer, revenons à la quadrature  $P_a$  du spin nucléaire non hybridé, qui est celle véritablement utilisable dans l'expérience une fois la décharge éteinte dans la cellule. En quittant la base tournée par inversion de la transformation (23) et en limitant l'équation (28) à son premier terme (à l'ordre dominant en  $\Omega$ ), il vient

$$\langle P_a \rangle_{\sigma=S} = \left( \frac{\gamma_m}{\gamma_f + \gamma_m} \right)^{1/2} \langle P_a \rangle_{\sigma=S} \quad \text{et} \quad \text{Var}_{\sigma=S}(P_a) = \frac{\gamma_f}{4(\gamma_f + \gamma_m)} + \frac{\gamma_m}{\gamma_f + \gamma_m} \text{Var}_{\sigma=S}(P_a) \quad (69)$$

La variance conditionnelle de  $P_a$  aux temps longs tend vers une valeur non nulle, bien que faible en pratique : c'est la limite intrinsèque de ce schéma de compression de spin nucléaire, qui utilise l'état métastable de  $^3\text{He}$  comme intermédiaire.

#### 4.2.3. Solution du modèle à trois modes

L'étude de la compression de spin dans le cadre du modèle à un mode est limitée au régime (22) où le taux de compression  $\Gamma_{\text{sq}}$  correspond à l'échelle de temps la plus longue du système. Il est cependant crucial pour les applications de voir jusqu'où on peut accélérer le processus de compression en augmentant  $\Gamma_{\text{sq}}$  donc, par exemple, le couplage de Faraday  $\Omega$  des atomes métastables au champ en cavité. À cette fin, nous obtenons la solution analytique du modèle à trois modes en utilisant le caractère gaussien du vecteur d'état qui résulte, comme pour le modèle à un mode, de l'état initial considéré (le vide), de la linéarité des opérateurs de saut  $C_m$  et de la quadraticité du hamiltonien  $H$  en les quadratures des modes. L'équation stochastique (53) admet donc comme solution exacte l'ansatz gaussien généralisant celui de l'équation (57),

$$\langle p_\alpha, p_\beta, x_c | \phi(t) \rangle = \phi(\mathbf{q}, t) = [8\pi \det \underline{\underline{u}}(t)]^{1/4} \exp\left\{ -[\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}(t)] \cdot \underline{\underline{u}}(t) [\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}(t)] \right\} \equiv e^{-S} \quad (70)$$

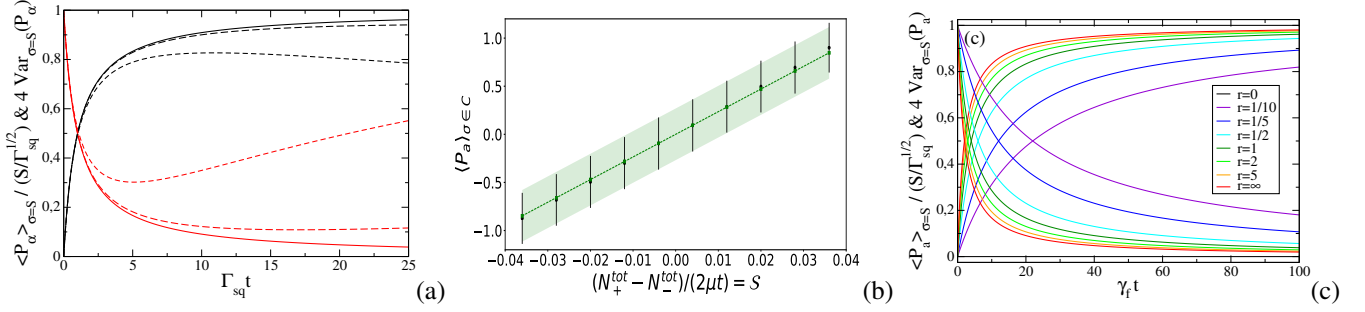


FIGURE 7: Compression de spin par mesure homodyne en continu. (a) Dans le modèle à un mode, moyenne (en noir) et variance (multipliée par 4, en rouge) de la quadrature  $P_\alpha$  du spin nucléaire hybridé conditionnées au signal d’homodyne intégré  $\sigma$ , en fonction du temps d’intégration  $t$ . Traits pleins : expressions analytiques (61). Tiretés : expressions (99) et (100) en présence de décohérence (tireté long :  $\epsilon = 1/100$ , tireté court :  $\epsilon = 1/10$ , avec  $\epsilon = \gamma_\alpha/\Gamma_{\text{sq}}$  et  $\gamma_\alpha$  le taux de décohérence ramené (95)). (b) Dans le modèle à trois modes, pour  $\Gamma_{\text{sq}}t = 5$ , moyenne et écart-type de la quadrature  $P_a$  du spin nucléaire conditionnées à l’appartenance du signal  $\sigma$  à une classe  $C$ , l’intervalle de valeurs de  $\sigma/\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}$  ayant été partagé en 10 classes de même largeur. L’écart-type est représenté sous la forme d’un intervalle de confiance. En noir : simulation numérique de l’équation stochastique (53) avec 1079 réalisations. Tireté vert et zone colorée : résultats exacts tirés des relations (82) et (83), et de l’expression analytique de la distribution de probabilité conditionnelle de  $\bar{P}_a$  en termes des variances et covariance (89) sur le modèle de l’équation (65). L’écart entre numérique et analytique dans les classes extrêmes est imputable aux faibles nombres de réalisations tombant dans ces classes. Valeurs des paramètres :  $\Omega/\kappa = 1/10$ ,  $\gamma_m/\kappa = 1/10$ ,  $\gamma_f/\kappa = 1/100$ ,  $\Gamma_{\text{sq}}/\kappa = 1/1000$ . (c) Dans la limite  $\Gamma_{\text{sq}} \rightarrow 0$  à  $\Gamma_{\text{sq}}/2\gamma_f$  fixé du modèle à trois modes, moyenne et variance conditionnelles de  $P_a$  (91) en fonction du temps réduit  $\gamma_f t$ , pour différentes valeurs du rapport  $r = 2\Gamma_{\text{sq}}/\gamma_f$  (courbes croissantes : moyenne, courbes décroissantes : variance).

où  $\underline{u}$  est une matrice  $3 \times 3$  symétrique réelle,  $\bar{\mathbf{q}}$  est un vecteur à trois composantes réelles, les coordonnées  $q_\alpha = p_\alpha$  et  $q_\beta = p_\beta$  sont dans l’espace de Fourier (base propre de la quadrature  $P$ ) et la coordonnée  $q_c = x_c$  est dans l’espace des positions (base propre de la quadrature  $X$ ). La seule astuce ici était de choisir comme opérateur de saut d’échange de métastabilité  $C_\beta = \sqrt{\gamma_\beta} i\beta$ ; ce choix de phase, qui ne change bien entendu pas l’équation pilote (24), reste légitime pour l’évolution conditionnée à la détection homodyne du champ car les sauts de métastabilité ne sont pas mesurés. Dans la représentation mixte de la fonction d’onde (70), le hamiltonien  $H$  est alors imaginaire pur et les opérateurs de saut sont réels, d’où l’ansatz réel (70).<sup>13</sup>

Pour obtenir les équations du mouvement sur  $\underline{u}$  et  $\bar{\mathbf{q}}$ , nous calculons de deux manières différentes la variation relative  $d\phi(\mathbf{q}, t)/\phi(\mathbf{q}, t)$  de la fonction d’onde, d’une part en la reliant à la variation  $dS$  de la quantité  $S$  dans (70), séparée en une partie déterministe  $dS_d$  et une partie de bruit  $dS_b$ , d’autre part en reportant l’ansatz (70) dans l’équation stochastique (53). En identifiant les parties déterministes et les parties bruitées des deux formes qui en résultent, nous obtenons

$$-dS_b = \gamma_\beta^{1/2} \left( \frac{1}{2} \partial_{q_\beta} S - q_\beta + \bar{q}_\beta \right) d\zeta_\beta - \kappa^{1/2} \left( \frac{1}{2} \partial_{q_c} S - q_c + \bar{q}_c \right) d\zeta_c \quad (71)$$

$$-dS_d + \frac{1}{2} (dS_b)^2 = (\Omega_\alpha q_\alpha + \Omega_\beta q_\beta) \frac{dt}{2} \partial_{q_c} S - \frac{\gamma_\beta dt}{2} \left\{ q_\beta^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[ \partial_{q_\beta}^2 S - (\partial_{q_\beta} S)^2 \right] + \bar{q}_\beta (\partial_{q_\beta} S - 2q_\beta) + \bar{q}_\beta^2 \right\} \\ - \frac{\kappa dt}{2} \left\{ q_c^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[ \partial_{q_c}^2 S - (\partial_{q_c} S)^2 \right] + \bar{q}_c (\partial_{q_c} S - 2q_c) + \bar{q}_c^2 \right\} \quad (72)$$

Il reste à reporter dans (72) l’expression de  $dS_b$  tirée de (71), en appliquant la règle d’Ito de remplacement des carrés des bruits par leur moyenne, puis à identifier les termes de degré 2 en  $\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$  pour obtenir l’équation linéaire purement

13. Par exemple,  $i\beta = i(X_\beta + iP_\beta)$  est représenté en impulsion par l’opérateur réel  $-\partial_{p_\beta}/2 - p_\beta$ , et  $\beta^\dagger\beta$  par  $-\partial_{p_\beta}^2/4 + p_\beta^2 - 1/2$ .

déterministe sur  $\underline{u}$  :<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} du_{\alpha\alpha} &= -\Omega_\alpha dt u_{\alpha c} & du_{\alpha\beta} &= -\frac{dt}{2}(\gamma_\beta u_{\alpha\beta} + \Omega_\beta u_{\alpha c} + \Omega_\alpha u_{\beta c}) & du_{\alpha c} &= -\frac{dt}{2}(\kappa u_{\alpha c} + \Omega_\alpha u_{cc}) \\ du_{\beta\beta} &= -\Omega_\beta dt u_{\beta c} + \gamma_\beta dt(1 - u_{\beta\beta}) & du_{\beta c} &= -\frac{dt}{2}[(\gamma_\beta + \kappa)u_{\beta c} + \Omega_\beta u_{cc}] & du_{cc} &= \kappa dt(1 - u_{cc}) \end{aligned} \quad (73)$$

et les termes de degré 1 en  $\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$  pour obtenir l'équation linéaire stochastique sur  $\bar{\mathbf{q}}$  :

$$d\bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_\beta & 0 \\ \Omega_\alpha & \Omega_\beta & -\kappa \end{pmatrix} dt \bar{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} [\text{Id} - \underline{c}(t)] \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_\beta^{1/2} d\zeta_\beta(t) \\ -\kappa^{1/2} d\zeta_c(t) \end{pmatrix} \quad (74)$$

Faut-il le préciser,  $\bar{\mathbf{q}}$  est le vecteur des moyennes quantiques des variables  $q$  dans le vecteur d'état (70);<sup>15</sup> par ailleurs, on a introduit la notation  $\underline{c}$  pour la matrice inverse de  $\underline{u}$ , qui n'est autre que la matrice de covariance quantique des  $q$  à un facteur numérique près. On a donc :

$$\langle \phi(t) | q_i | \phi(t) \rangle = \bar{q}_i(t) \quad \text{et} \quad \langle \phi(t) | q_i q_j | \phi(t) \rangle = \bar{q}_i(t) \bar{q}_j(t) + \frac{1}{4} c_{ij}(t) \quad \forall i, j \in \{\alpha, \beta, c\} \quad \text{avec} \quad \underline{c}(t) = [\underline{u}(t)]^{-1} \quad (75)$$

Le système différentiel (73) s'intègre aisément pour la condition initiale  $\underline{u}(0) = \text{Id}$  :

$$u_{\alpha\alpha}(t) = 1 + \frac{\Omega_\alpha^2 t}{\kappa} - \frac{2\Omega_\alpha^2}{\kappa^2} (1 - e^{-\kappa t/2}) \quad (76)$$

$$u_{\alpha\beta}(t) = \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\gamma_\beta} \left( \frac{1}{\gamma_\beta + \kappa} + \frac{1}{\kappa} \right) (1 - e^{-\gamma_\beta t/2}) + \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\kappa(\kappa - \gamma_\beta)} (e^{-\kappa t/2} - e^{-\gamma_\beta t/2}) + \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\kappa(\gamma_\beta + \kappa)} (e^{-(\gamma_\beta + \kappa)t/2} - e^{-\gamma_\beta t/2}) \quad (77)$$

$$u_{\alpha c}(t) = -\frac{\Omega_\alpha}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t/2}) \quad (78)$$

$$u_{\beta\beta}(t) = 1 + \frac{\Omega_\beta^2}{\gamma_\beta(\gamma_\beta + \kappa)} (1 - e^{-\gamma_\beta t}) - \frac{2\Omega_\beta^2}{\kappa^2 - \gamma_\beta^2} (e^{-\gamma_\beta t} - e^{-(\gamma_\beta + \kappa)t/2}) \quad (79)$$

$$u_{\beta c}(t) = -\frac{\Omega_\beta}{\gamma_\beta + \kappa} (1 - e^{-(\gamma_\beta + \kappa)t/2}) \quad (80)$$

$$u_{cc}(t) = 1 \quad (81)$$

Comme  $\bar{\mathbf{q}}$  décrit un mouvement brownien (partiellement amorti car la matrice de frottement dans (74) est de valeurs propres 0,  $\gamma_\beta/2$  et  $\kappa/2$ ), et comme le signal homodyne moyenné sur l'intervalle de temps  $[0, t]$   $\sigma$  s'en déduit par intégration, ces variables aléatoires ont une statistique gaussienne et nous pouvons reproduire le raisonnement de la section 4.2.2. Nous trouvons pour la moyenne et la variance conditionnelles de la quadrature  $P_a$  du spin nucléaire sachant que  $\sigma = \mathcal{S}$  :

$$\langle P_a \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} = \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}}}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \mathcal{S} \quad (82)$$

$$\text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_a) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\Omega_\beta^2}{\Omega^2} c_{\alpha\alpha}(t) + \frac{\Omega_\alpha^2}{\Omega^2} c_{\beta\beta}(t) - 2 \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\Omega^2} c_{\alpha\beta}(t) \right] + \langle \bar{P}_a^2(t) \rangle_{\text{stoch}} - \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}}^2}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} = \frac{1}{4} - \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}}^2}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \quad (83)$$

L'expression entre crochets dans l'équation (83) est l'élément de matrice de  $\underline{c}(t)$  dans le vecteur  $(\Omega_\beta/\Omega, -\Omega_\alpha/\Omega, 0)$  des coordonnées de la direction  $a$  dans la base tournée. Le premier terme au second membre est donc la variance

14. On remarque que les termes quadratiques en  $\underline{u}$  au second membre de (72) se compensent avec ceux de  $(dS_b)^2/2$  au premier membre.

15. On peut donc retrouver l'équation (74) à partir de l'équation stochastique déduite de (53) sur la moyenne d'une observable  $O$ ,  $d\langle O \rangle = (dt/i\hbar)\langle [O, H] \rangle + (dt/2)\sum_m \langle C_m^\dagger [O, C_m] + \text{h.c.} \rangle + \sum_m \langle (OC_m + \text{h.c.}) - \langle C_m + C_m^\dagger \rangle \langle O \rangle \rangle d\zeta_m$ , en la spécialisant aux cas  $O = P_\alpha$ ,  $O = P_\beta$  et  $O = X_c$ .

quantique de  $P_a$  dans l'état stochastique  $\phi(t)$ , dépendant du temps mais, rappelons-le, indépendante de la réalisation particulière de  $\phi(t)$ . L'expression simplifiée au troisième membre découle de la propriété (20) sur la moyenne non conditionnelle  $\langle P_a^2 \rangle(t) = 1/4$  et de la chaîne d'égalités

$$\langle P_a^2 \rangle(t) = \langle \langle \phi(t) | P_a^2 | \phi(t) \rangle \rangle_{\text{stoch}} = \langle \langle \phi(t) | P_a^2 | \phi(t) \rangle - \langle \phi(t) | P_a | \phi(t) \rangle^2 + \langle \phi(t) | P_a | \phi(t) \rangle^2 \rangle_{\text{stoch}} = \langle \text{Var}_{\phi(t)} P_a \rangle_{\text{stoch}} + \langle \bar{P}_a^2 \rangle_{\text{stoch}} \quad (84)$$

Il reste, pour déterminer les variance et covariance des variables aléatoires  $\bar{P}_a(t)$  et  $\sigma(t)$ , à calculer leurs amplitudes sur les processus stochastiques  $d\zeta_\beta(t')$  et  $d\zeta_c(t')$ , en intégrant formellement l'équation (74) par la méthode de variation de la constante pour  $\bar{P}_a$  et  $\bar{X}_c$ , et en procédant comme dans l'équation (67) pour  $\sigma$  :

$$p_\beta(t, t') = -\frac{1}{2} \gamma_\beta^{1/2} \left\{ \frac{\Omega_\beta}{\Omega} c_{\alpha\beta}(t') + \frac{\Omega_\alpha}{\Omega} [1 - c_{\beta\beta}(t')] e^{-\gamma_\beta(t-t')/2} \right\} \quad (85)$$

$$p_c(t, t') = \frac{1}{2} \kappa^{1/2} \left\{ \frac{\Omega_\beta}{\Omega} c_{\alpha c}(t') - \frac{\Omega_\alpha}{\Omega} c_{\beta c}(t') e^{-\gamma_\beta(t-t')/2} \right\} \quad (86)$$

$$\sigma_\beta(t, t') = \frac{(\gamma_\beta \kappa)^{1/2}}{2t} \left\{ -c_{\alpha\beta}(t') [t - t' - f_\kappa(t - t')] \frac{\Omega_\alpha}{\kappa} + [1 - c_{\beta\beta}(t')] [f_{\gamma_\beta}(t - t') - f_\kappa(t - t')] \frac{\Omega_\beta}{\kappa - \gamma_\beta} - c_{\beta c}(t') f_\kappa(t - t') \right\} \quad (87)$$

$$\sigma_c(t, t') = \frac{1}{2t} - \frac{\kappa}{2t} \left\{ -c_{\alpha c}(t') [t - t' - f_\kappa(t - t')] \frac{\Omega_\alpha}{\kappa} - c_{\beta c}(t') [f_{\gamma_\beta}(t - t') - f_\kappa(t - t')] \frac{\Omega_\beta}{\kappa - \gamma_\beta} + [1 - c_{cc}(t')] f_\kappa(t - t') \right\} \quad (88)$$

où  $f_\lambda(\tau) \equiv [1 - \exp(-\lambda\tau/2)]/(\lambda/2)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}} &= \int_0^t dt' [p_\beta(t, t') \sigma_\beta(t, t') + p_c(t, t') \sigma_c(t, t')] \quad ; \quad \langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' [\sigma_\beta^2(t, t') + \sigma_c^2(t, t')] \quad ; \\ \langle \bar{P}_a^2 \rangle_{\text{stoch}} &= \int_0^t dt' [p_\beta^2(t, t') + p_c^2(t, t')] \end{aligned} \quad (89)$$

On déduit de ces résultats les limites aux temps longs <sup>16</sup>

$$\langle P_a \rangle_{\sigma=S} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\gamma_m}{\gamma_f + \gamma_m} \right)^{1/2} \frac{S}{\Gamma_{\text{sq}}^{1/2}} \quad ; \quad \text{Var}_{\sigma=S}(P_a) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \frac{\gamma_f}{\gamma_f + \gamma_m} \quad (90)$$

avec lesquelles les prédictions (69) du modèle à un mode, pourtant obtenues dans la limite de couplage faible (22), sont en accord parfait.

En application de notre solution analytique du modèle à trois modes, faisons tendre le taux  $\Gamma_{\text{sq}}$  vers zéro à temps réduit  $\tau = \Gamma_{\text{sq}} t$  fixé en maintenant (contrairement au modèle à un mode) le rapport  $\Gamma_{\text{sq}}/\gamma_f$  à une valeur constante non infinitésimale. La motivation physique est claire : dans les expériences projetées [10],  $\gamma_f$  et  $\Gamma_{\text{sq}}$  sont du même ordre de grandeur mais sont vraiment beaucoup plus petits que  $\gamma_m$  et  $\kappa$  (par des facteurs  $\approx 10^{-6}$  et  $10^{-9}$ ). Nous trouvons dans cette limite : <sup>17</sup>

$$\langle P_a \rangle_{\sigma=S} \sim \frac{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t}{1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t} \frac{S}{\Gamma_{\text{sq}}^{1/2}} \quad \text{et} \quad \text{Var}_{\sigma=S}(P_a) \sim \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t} \quad (91)$$

16. Donnons quelques résultats et considérations intermédiaires. (i) Alors que  $c_{\beta\beta}(t')$ ,  $c_{\beta c}(t')$  et  $c_{cc}(t')$  ont une limite finie lorsque  $t' \rightarrow +\infty$  [on aura besoin de  $c_{\beta\beta}(+\infty) = (1 + \rho)^{-1}$ ,  $c_{\beta c}(+\infty) = \Omega_\beta / ((\gamma_\beta + \kappa)(1 + \rho))$  avec  $\rho = \Omega_\beta^2 \kappa / (\gamma_\beta (\gamma_\beta + \kappa)^2)$ ],  $c_{\alpha\alpha}(t')$ ,  $c_{\alpha\beta}(t')$  et  $c_{\alpha c}(t')$  tendent vers zéro comme  $1/t'$ . (ii) Dans une intégrale sur  $t'$  contenant le facteur exponentiel  $\exp[-\gamma_\beta(t-t')/2]$  ou son carré, on peut remplacer la fonction qui le multiplie par sa limite en  $t' = +\infty$ . (iii) Pour toute fonction uniformément bornée  $w(t, t')$ , on peut montrer pour  $v \in \{\beta, c\}$  que  $\int_0^t dt' [(t-t') c_{\alpha v}(t') + w(t, t')]^2 / t^2 \rightarrow \int_0^{+\infty} dt' c_{\alpha v}^2(t')$ . (iv) On obtient alors les limites asymptotiques  $\langle P_a^2 \rangle_{\text{stoch}} \rightarrow (\Omega_\beta / 2\Omega)^2 \mathcal{I} + (\Omega_\alpha / 2\Omega)^2 \rho / (1 + \rho)$ ,  $\langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} \rightarrow (\Omega_\alpha^2 / 4\kappa) \mathcal{I}$ ,  $\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}} \rightarrow (\Omega_\alpha \Omega_\beta / 4\Omega \kappa^{1/2}) \mathcal{I}$  où  $\mathcal{I} \equiv \int_0^{+\infty} dt' [\gamma_\beta c_{\alpha\beta}^2(t') + \kappa c_{\alpha c}^2(t')]$ . Nous déduisons ainsi (90) de (82) et de la première égalité dans (83), sans avoir besoin de connaître la valeur de  $\mathcal{I}$ . On tire de la seconde égalité dans (83) le résultat  $\mathcal{I} = 1$ , que l'on peut déduire aussi de l'équation du mouvement  $dc_{\alpha\alpha}/dt = -\gamma_\beta c_{\alpha\beta}^2 - \kappa c_{\alpha c}^2$  intégrée entre  $t = 0$  et  $t = +\infty$ .

17. En pratique, il suffit de faire tendre  $\Omega_\alpha$  vers zéro à  $\tau = \Gamma_{\text{sq}} t > 0$ ,  $\Omega_\beta$ ,  $\gamma_\beta$  et  $\kappa$  fixés. En particulier, ceci fait disparaître tous les transitoires exponentiels. Pour simplifier les calculs, il est utile d'introduire la quantité  $\rho = \Omega^2 \kappa / [2\gamma_m(\kappa + 2\gamma_m)^2]$  si bien que  $\rho = (\Gamma_{\text{sq}} / 2\gamma_f)(1 + 2\gamma_m/\kappa)^{-2}$  dans la limite  $\gamma_f \rightarrow 0$ .

où l'on a introduit le taux de compression vrai ou généralisé

$$\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} \equiv \left( \frac{1}{\Gamma_{\text{sq}}} + \frac{2}{\gamma_f} \right)^{-1} \quad (92)$$

On retrouve l'adimensionnement naturel du signal par  $\Gamma_{\text{sq}}^{1/2}$  déjà constaté dans le modèle à un mode et les mêmes formes fonctionnelles en temps, mais on perd toute relation de proportionnalité de type (68), la variance conditionnelle de  $\bar{P}_a$  étant désormais  $\neq 0$ .<sup>18</sup> Nous représentons sur la figure 7c la dépendance en le temps adimensionné  $\gamma_f t$  de la moyenne et de la variance conditionnelles (91) pour différentes valeurs du rapport  $r = 2\Gamma_{\text{sq}}/\gamma_f$ . On remarque que le processus de compression est d'autant plus rapide que  $r$  est plus grand, et qu'il sature à un comportement limite. C'était prévisible, car  $\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}$  est une fonction croissante de  $r$  de limite finie; à temps fixé, la moyenne conditionnelle (en unités de  $S/\Gamma_{\text{sq}}^{1/2}$ ) est donc une fonction croissante et la variance conditionnelle une fonction décroissante de  $r$ , comme on le voit sur la figure 7c. Plus précisément, dans la limite de couplage faible  $\Omega \rightarrow 0$ , où  $r \rightarrow 0$ , le taux de compression généralisé est équivalent au taux  $\Gamma_{\text{sq}}$ , en accord avec le modèle à un mode, et dans la limite  $r \rightarrow +\infty$ , il sature à la valeur  $\gamma_f/2$ . On ne peut donc comprimer plus rapidement qu'au taux  $\gamma_f$ , ce qui n'est pas surprenant : on ne peut espérer réduire les fluctuations du spin nucléaire avant que chaque atome dans l'état fondamental n'ait subi en moyenne au moins une collision d'échange de métastabilité.

#### 4.2.4. Effet de la décohérence

Pour être complets, nous tenons compte, dans le schéma de compression homodyne, de la durée de vie finie  $(2\gamma_0)^{-1}$  des atomes métastables, qui se désexcitent lorsqu'ils atteignent les parois de la cellule après un mouvement diffusif dans la vapeur. À cette fin, nous ajoutons un opérateur de saut  $\sqrt{2\gamma_0}b$  à l'équation pilote à trois modes (19). Comme la partie autre que hamiltonienne hermitienne reste quadratique en les quadratures des modes, elle peut être mise sous forme réduite par une rotation appropriée des modes atomiques, comme nous l'avons fait déjà dans la section 3.4 : il faut décomposer  $(a, b)$  dans la base propre orthonormale de la matrice des taux

$$\underline{\Gamma} = \begin{pmatrix} 2\gamma_f & -2\sqrt{\gamma_f\gamma_m} \\ -2\sqrt{\gamma_f\gamma_m} & 2(\gamma_0 + \gamma_m) \end{pmatrix} \quad (93)$$

avec des coefficients à valeur opérateur  $\alpha$  et  $\beta$ . La direction  $\beta$  reste celle de la valeur propre maximale  $\gamma_\beta$  de  $\underline{\Gamma}$ , et  $\alpha$  celle de la valeur propre minimale  $\gamma_\alpha$ , désormais non nulle. Ceci conduit à l'équation pilote

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \hbar(\Omega_\alpha P_\alpha + \Omega_\beta P_\beta) P_c, \rho \right] + \kappa \left( c\rho c^\dagger - \frac{1}{2}\{c^\dagger c, \rho\} \right) + \gamma_\alpha \left( \alpha\rho\alpha^\dagger - \frac{1}{2}\{\alpha^\dagger\alpha, \rho\} \right) + \gamma_\beta \left( \beta\rho\beta^\dagger - \frac{1}{2}\{\beta^\dagger\beta, \rho\} \right) \quad (94)$$

La nouvelle expression des pulsations de Faraday  $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$  et des taux  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$  se trouve dans l'Annexe B, qui donne aussi l'expression analytique de la moyenne et de la variance de la quadrature  $P_a$  du spin nucléaire conditionnées au signal homodyne intégré, en toute généralité. Nous nous restreignons ici à la limite physiquement utile  $\gamma_0 \ll \gamma_m$  (on a toujours  $\gamma_f < \gamma_m$ ). À l'ordre le plus bas en  $\gamma_0$ , les coefficients  $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$  et  $\gamma_\beta$  restent inchangés, et l'on a

$$\gamma_\alpha \simeq \frac{2\gamma_0\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f} \quad (95)$$

ce qui n'est autre que le taux de décohérence ramené dans le spin nucléaire hybridé. De plus, nous nous plaçons dans la limite (22), avec  $\gamma_\alpha = O(\Gamma_{\text{sq}})$ , ce qui permet d'évaluer l'effet de la décohérence en utilisant le modèle à un mode, dont l'obtention reste la même que dans la section 3.4. L'équation stochastique (56) est complétée comme suit,

$$d|\phi(t)\rangle = -\frac{\Gamma_{\text{sq}} dt}{2} (P_\alpha - \bar{P}_\alpha)^2 |\phi(t)\rangle + \sqrt{\Gamma_{\text{sq}}} d\zeta_s(t) (P_\alpha - \bar{P}_\alpha) |\phi(t)\rangle - \frac{\gamma_\alpha dt}{2} (\alpha^\dagger \alpha + 2i\bar{P}_\alpha \alpha + \bar{P}_\alpha^2) |\phi(t)\rangle + \sqrt{\gamma_\alpha} d\zeta_\alpha(t) (i\alpha + \bar{P}_\alpha) |\phi(t)\rangle \quad (96)$$

18. On a en effet  $\text{Var}_{\sigma=S}(\bar{P}_a) \sim \Gamma_{\text{sq}} t / [4(1 + \Gamma_{\text{sq}} t)] - \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t / [4(1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)]$ .

Nous avons pris soin de choisir  $\gamma_\alpha^{1/2}i\alpha$  comme opérateur de saut de la décohérence ramenée (la justification est la même que dans la section 4.2.3, les sauts de décohérence n'étant pas mesurés), ce qui permet de résoudre l'équation par le même ansatz gaussien réel (57). Nous trouvons cette fois

$$du = [\Gamma_{\text{sq}} + \gamma_\alpha(1-u)]dt \implies u(\tau) = 1 + \frac{1 - \exp(-\epsilon\tau)}{\epsilon} \quad (97)$$

$$d\bar{P}_\alpha = -\frac{1}{2}\gamma_\alpha\bar{P}_\alpha dt + \frac{\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}d\zeta_s + \sqrt{\gamma_\alpha}(u-1)d\zeta_\alpha}}{2u} \quad (98)$$

où nous avons posé  $\tau = \Gamma_{\text{sq}}t$  et  $\epsilon = \gamma_\alpha/\Gamma_{\text{sq}}$ . Les mêmes arguments de gaussianité que dans la section 4.2.2 conduisent aux mêmes dépendances en le signal  $\mathcal{S}$  de la moyenne et de la variance conditionnelles,<sup>19</sup>

$$\langle P_\alpha \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} = m(\tau) \frac{\mathcal{S}}{\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}} \quad \text{avec} \quad m(\tau) = \sqrt{\Gamma_{\text{sq}}} \frac{\langle \sigma(t)\bar{P}_\alpha(t) \rangle_{\text{stoch}}}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \quad (99)$$

$$\text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_\alpha) = \mathcal{V}(\tau) \quad \text{avec} \quad \mathcal{V}(\tau) = \frac{1}{4} - \frac{\langle \sigma(t)\bar{P}_\alpha(t) \rangle_{\text{stoch}}^2}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \quad (100)$$

et les variance et covariance prises sur les processus stochastiques  $d\zeta_s$  et  $d\zeta_\alpha$ ,

$$\frac{\langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}}{\Gamma_{\text{sq}}} = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\tau^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}}{\epsilon u(\tau')} \right]^2 + \frac{[u(\tau') - 1]^2 [1 - e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}]^2}{u^2(\tau') \epsilon} \right\} = \frac{\epsilon\tau - 2(1 - e^{-\epsilon\tau/2})}{\epsilon^2\tau^2} + \frac{1}{4\tau} \quad (101)$$

$$\frac{\langle \sigma\bar{P}_\alpha \rangle_{\text{stoch}}}{\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}} = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\tau} \frac{e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}}{2u(\tau')} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}}{\epsilon u(\tau')} + \frac{[u(\tau') - 1]^2}{u(\tau')} [1 - e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}] \right\} = \frac{1 - e^{-\epsilon\tau/2}}{2\epsilon\tau} \quad (102)$$

Ces expressions permettent d'évaluer facilement l'effet de la décohérence sur la compression de spin, voir les tiretés sur la figure 7a. Pour le cas utile en pratique d'une faible décohérence  $\epsilon \ll 1$  et d'un temps court devant  $1/\gamma_\alpha$ , elles peuvent être développées au premier ordre en  $\epsilon$  :

$$m(\tau) = \frac{\tau}{1+\tau} - \epsilon \frac{(\tau+3)\tau^2}{12(\tau+1)^2} + O(\epsilon^2\tau^2) \quad ; \quad \mathcal{V}(\tau) = \frac{1}{4(\tau+1)} + \epsilon \frac{(\tau+3/2)\tau^2}{12(\tau+1)^2} + O(\epsilon^2\tau^2) \quad (103)$$

On en déduit que la compression optimale sur  $P_\alpha$  est obtenue à un temps  $t_{\text{opt}} \sim (3/\Gamma_{\text{sq}}\gamma_\alpha)^{1/2}$  et correspond à une variance conditionnelle  $\mathcal{V}_{\text{opt}} \sim (\gamma_\alpha/12\Gamma_{\text{sq}})^{1/2}$ . Remarquons qu'on introduit souvent, dans les études de compression de spin dans les gaz d'atomes alcalins en cavité, la coopérativité  $C$  du système couplé atome-champ, définie comme le carré de la pulsation de couplage divisé par les taux de décroissance des états couplés [26]. En ce sens, la coopérativité du système spin nucléaire hybridé-champ vaut

$$C \equiv \frac{\Omega_\alpha^2}{\kappa\gamma_\alpha} = \frac{\Gamma_{\text{sq}}}{\gamma_\alpha} \simeq \frac{\Omega^2}{2\gamma_0\kappa} \quad (104)$$

si bien que nous retrouvons la loi d'échelle d'exposant  $-1/2$ , habituelle dans les alcalins, reliant la variance de spin optimale à  $C$  [26]. Plus généralement, la décohérence a un effet faible sur la compression du spin nucléaire tant qu'on reste à des temps courts devant  $t_{\text{opt}}$ . Le lecteur trouvera en fin d'Annexe B une extension de ces lois d'échelle au-delà du modèle à un mode, c'est-à-dire pour un rapport  $\Gamma_{\text{sq}}/\gamma_f$  quelconque, non infinitésimal; c'est elle qui a été retenue dans le résumé de l'article. Le lien entre  $\mathcal{V}_{\text{opt}}$  et la coopérativité (104) est alors rompu.

## Annexe A. Traitement semi-classique et réduction à trois spins couplés

Nous donnons ici les équations non linéaires qui décrivent la dynamique du système dans la théorie semi-classique, et nous les linéarisons pour de faibles fluctuations autour d'une solution stationnaire partiellement polarisée.

<sup>19</sup>. Nous avons simplifié l'expression (100) à l'aide de l'identité  $[4u(\tau)]^{-1} + \langle \bar{P}_\alpha^2 \rangle_{\text{stoch}} = 1/4$ , qui résulte comme dans l'équation (84) du fait que la moyenne inconditionnelle  $\langle P_\alpha^2 \rangle = 1/4$ , même en présence de décohérence.

*Équations semi-classiques non linéaires.* En partant des considérations et des notations de la section 2, nous prenons la moyenne des équations du mouvement de Heisenberg dans l'état quantique du système et effectuons l'approximation de décorrélation (dite semi-classique en optique quantique)  $\langle AB \rangle \simeq \langle A \rangle \langle B \rangle$  où  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs, pour obtenir les équations d'évolution non linéaires suivantes sur les moyennes de  $\vec{S}$  spin de Stokes du champ lumineux en cavité,  $\vec{I}$  spin nucléaire collectif dans l'état fondamental,  $\vec{J}$  et  $\vec{K}$  spins collectifs associés aux multiplicités  $F = 3/2$  et  $F = 1/2$  dans l'état métastable, et  $\vec{Q}$  tenseur d'alignement collectif dans  $F = 3/2$ , de composantes cartésiennes  $Q_{\alpha\beta}$  :

$$\frac{d\langle S_x \rangle}{dt} = -\frac{\kappa}{2} \left( \langle S_x \rangle - \frac{n_{\text{ph}}}{2} \right) - \chi \langle K_z \rangle \langle S_y \rangle \quad \frac{d\langle S_y \rangle}{dt} = -\frac{\kappa}{2} \langle S_y \rangle + \chi \langle K_z \rangle \langle S_x \rangle \quad \frac{d\langle S_z \rangle}{dt} = -\frac{\kappa}{2} \langle S_z \rangle \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d\langle K_x \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle K_x \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} - \chi \langle K_y \rangle \langle S_z \rangle \quad \frac{d\langle K_y \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle K_y \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} + \chi \langle K_x \rangle \langle S_z \rangle \quad \frac{d\langle K_z \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle K_z \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d\langle \vec{J} \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle \vec{J} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} \quad \frac{d\langle Q_{\alpha\beta} \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle Q_{\alpha\beta} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} \quad \frac{d\langle \vec{I} \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle \vec{I} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} \quad (\text{A.3})$$

Les termes proportionnels au taux de perte  $\kappa$  des miroirs de la cavité font relaxer  $\langle S_x \rangle$  vers sa valeur stationnaire  $\langle S_x \rangle_s = n_{\text{ph}}/2$  forcée par le champ laser polarisé selon  $Ox$  injecté dans la cavité, et les moyennes transverses  $\langle S_y \rangle$  et  $\langle S_z \rangle$  vers zéro. Les termes proportionnels au couplage de Faraday  $\chi$  entre le mode de cavité et le spin  $\vec{K}$  dérivent de l'hamiltonien (2). La contribution des collisions d'échange de métastabilité (ECH) entre atomes fondamentaux et métastables se déduit directement de l'équation pilote sur l'opérateur densité à un atome des références [13, 14] par simple multiplication ou division par le nombre total de fondamentaux  $N_{\text{cell}}$  ou métastables  $n_{\text{cell}}$  dans la cellule :<sup>20</sup>

$$\left. \frac{d\langle \vec{K} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} = -\frac{7}{9\tau} \langle \vec{K} \rangle + \frac{1}{9\tau} \langle \vec{J} \rangle - \frac{1}{9\tau} \frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}} \langle \vec{I} \rangle - \frac{4}{3\tau} \frac{1}{N_{\text{cell}}} \langle \vec{Q} \rangle \cdot \langle \vec{I} \rangle \quad (\text{A.4})$$

$$\left. \frac{d\langle \vec{J} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} = -\frac{4}{9\tau} \langle \vec{J} \rangle + \frac{10}{9\tau} \langle \vec{K} \rangle + \frac{10}{9\tau} \frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}} \langle \vec{I} \rangle + \frac{4}{3\tau} \frac{1}{N_{\text{cell}}} \langle \vec{Q} \rangle \cdot \langle \vec{I} \rangle \quad (\text{A.5})$$

$$\left. \frac{d\langle Q_{\alpha\beta} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} = -\frac{2}{3\tau} \langle Q_{\alpha\beta} \rangle + \frac{1}{9\tau} \frac{1}{N_{\text{cell}}} \left( 3 \frac{\langle I_\alpha \rangle \langle \Sigma_\beta \rangle + \langle I_\beta \rangle \langle \Sigma_\alpha \rangle}{2} - \delta_{\alpha\beta} \langle \vec{I} \rangle \cdot \langle \vec{\Sigma} \rangle \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\left. \frac{d\langle \vec{I} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} = -\frac{1}{T} \langle \vec{I} \rangle + \frac{1}{3T} \frac{N_{\text{cell}}}{n_{\text{cell}}} (\langle \vec{J} \rangle - \langle \vec{K} \rangle) \quad (\text{A.7})$$

où  $\langle \vec{\Sigma} \rangle = \frac{2}{3} [\langle \vec{J} \rangle + 2\langle \vec{K} \rangle]$  est la valeur moyenne du spin électronique dans l'état métastable. On se reportera aux équations (1.37b), (1.37a), (1.39) et (1.25) de la référence [14] (en tenant compte d'un écart d'un facteur 6 sur la définition du tenseur d'alignement), ou aux équations (VIII.30), (VIII.29), (VIII.32) et (VIII.15) (en ajoutant un facteur de Kronecker  $\delta_{\alpha\beta}$  omis dans (VIII.32)). Ici  $1/\tau$  et  $1/T$ , les taux individuels des collisions d'échange de métastabilité subies par un atome dans l'état métastable et dans l'état fondamental, sont dans le rapport  $T/\tau = N_{\text{cell}}/n_{\text{cell}}$  puisque, dans l'unité de temps, un nombre égal d'atomes fondamentaux et d'atomes métastables ont subi une collision d'échange [13, 14].

*Solution stationnaire partiellement polarisée.* Dans un état stationnaire polarisé de polarisation nucléaire  $\eta \in [0, 1]$ ,

$$\langle I_x \rangle_s = \eta \frac{N_{\text{cell}}}{2} \quad ; \quad \langle I_y \rangle_s = \langle I_z \rangle_s = 0 \quad ; \quad \langle S_x \rangle_s = \frac{n_{\text{ph}}}{2} \quad ; \quad \langle S_y \rangle_s = \langle S_z \rangle_s = 0 \quad (\text{A.8})$$

l'invariance par rotation d'axe  $Ox$  contraint les spins moyens à être alignés selon  $Ox$ , et le tenseur d'alignement moyen à être diagonal dans la base cartésienne, avec des valeurs propres égales selon les directions  $Oy$  et  $Oz$ . Le système (A.1)-(A.3) admet ainsi une solution stationnaire avec comme seules moyennes non nulles dans l'état métastable :

$$\langle K_x \rangle_s = \frac{\eta}{2} \frac{1 - \eta^2}{3 + \eta^2} n_{\text{cell}} \quad ; \quad \langle J_x \rangle_s = \eta \frac{5 + \eta^2}{3 + \eta^2} n_{\text{cell}} \quad ; \quad \langle \Sigma_x \rangle_s = \frac{4\eta}{3 + \eta^2} n_{\text{cell}} \quad ; \quad \langle Q_{yy} \rangle_s = \langle Q_{zz} \rangle_s = -\frac{1}{2} \langle Q_{xx} \rangle_s = -\frac{\eta}{12} \langle \Sigma_x \rangle_s \quad (\text{A.9})$$

20. Les moyennes collectives sont en effet reliées comme suit aux moyennes à un atome  $\langle \rangle_{\text{at}}$  :  $\langle \vec{I} \rangle = N_{\text{cell}} \langle \vec{I} \rangle_{\text{at}}$ ,  $\langle \vec{J} \rangle = n_{\text{cell}} \langle \vec{J} \rangle_{\text{at}}$ ,  $\langle \vec{K} \rangle = n_{\text{cell}} \langle \vec{K} \rangle_{\text{at}}$ ,  $\langle \vec{Q} \rangle = n_{\text{cell}} \langle \vec{Q} \rangle_{\text{at}}$ ,  $\langle \vec{\Sigma} \rangle = n_{\text{cell}} \langle \vec{\Sigma} \rangle_{\text{at}}$ .

*Équations semi-classiques linéarisées.* On linéarise maintenant les équations (A.1)-(A.3) en les fluctuations classiques autour de la solution stationnaire (A.8)-(A.9) en effectuant la substitution  $\langle A \rangle \rightarrow \langle A \rangle_s + \delta A$  et en traitant  $\delta A$  au premier ordre. En nous limitant au sous-espace des fluctuations transverses, c'est-à-dire aux directions  $\alpha = y, z$  orthogonales aux spins moyens, nous obtenons un système fermé :

$$\frac{d}{dt} \delta S_\alpha = -\frac{\kappa}{2} \delta S_\alpha + \chi \delta_{\alpha y} \langle S_x \rangle_s \delta K_z \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d}{dt} \delta K_\alpha = -\frac{7}{9\tau} \delta K_\alpha + \frac{1}{9\tau} \delta J_\alpha - \frac{2\eta}{3\tau} \delta Q_{\alpha x} - \frac{1}{9T} \left( 1 + \frac{12}{n_{\text{cell}}} \langle Q_{\alpha\alpha} \rangle_s \right) \delta I_\alpha + \chi \delta_{\alpha y} \langle K_x \rangle_s \delta S_z \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d}{dt} \delta J_\alpha = -\frac{4}{9\tau} \delta J_\alpha + \frac{10}{9\tau} \delta K_\alpha + \frac{2\eta}{3\tau} \delta Q_{\alpha x} + \frac{10}{9T} \left( 1 + \frac{6}{5n_{\text{cell}}} \langle Q_{\alpha\alpha} \rangle_s \right) \delta I_\alpha \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{d}{dt} \delta Q_{\alpha x} = -\frac{2}{3\tau} \delta Q_{\alpha x} + \frac{\eta}{12\tau} \delta \Sigma_\alpha + \frac{1}{6T n_{\text{cell}}} \langle \Sigma_x \rangle_s \delta I_\alpha \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d}{dt} \delta I_\alpha = -\frac{1}{T} \delta I_\alpha + \frac{1}{3\tau} (\delta J_\alpha - \delta K_\alpha) \quad (\text{A.14})$$

*Réduction à trois spins collectifs couplés.* En posant  $\frac{d}{dt} \delta J_\alpha = 0$  dans l'équation (A.12) et  $\frac{d}{dt} \delta Q_{\alpha x} = 0$  dans l'équation (A.13), nous éliminons adiabatiquement les fluctuations du spin collectif  $\vec{J}$  et du tenseur d'alignement collectif dont les évolutions sont régies par l'échange de métastabilité uniquement :

$$\delta J_\alpha^{\text{adiab}} = 2 \frac{10 + \eta^2}{8 - \eta^2} \delta K_\alpha + \frac{12\tau}{T} \frac{5 + 2\eta^2}{(3 + \eta^2)(8 - \eta^2)} \delta I_\alpha \quad ; \quad \delta Q_{\alpha x}^{\text{adiab}} = \frac{3\eta}{8 - \eta^2} \delta K_\alpha + \frac{\tau}{T} \frac{\eta(13 + \eta^2)}{(3 + \eta^2)(8 - \eta^2)} \delta I_\alpha \quad (\text{A.15})$$

Le report des expressions adiabatiques (A.15) dans les équations (A.11) et (A.14) sur  $\delta K_\alpha$  et  $\delta I_\alpha$  conduit dans le corps de l'article au système réduit (5)-(7) couplant les fluctuations des trois spins (3), où  $\gamma_f$  et  $\gamma_m$ , les taux effectifs d'échange de métastabilité entre le spin nucléaire et le spin  $F = 1/2$  du métastable, sont donnés par l'équation (8).

## Annexe B. Solution du modèle à trois modes avec décohérence pour la détection homodyne

Nous donnons ici la solution analytique du modèle à trois modes en présence de décohérence, voir l'équation pilote (94), pour une évolution du système conditionnée à une mesure homodyne en continu du champ sortant de la cavité. La valeur des coefficients  $\gamma_\alpha$ ,  $\gamma_\beta$ ,  $\Omega_\alpha$  et  $\Omega_\beta$ , ainsi que des opérateurs d'annihilation  $\alpha$  et  $\beta$ , se déduit d'une diagonalisation de la matrice des taux (93). Les taux  $\gamma_\alpha$  et  $\gamma_\beta$  en sont les valeurs propres rangées par ordre croissant :

$$\gamma_{\alpha,\beta} = \gamma_m + \gamma_f + \gamma_0 \mp [(\gamma_m + \gamma_f + \gamma_0)^2 - 4\gamma_f\gamma_0]^{1/2} \quad (\text{B.1})$$

En termes des pulsations de Faraday  $\Omega_\alpha$  et  $\Omega_\beta$ , les vecteurs propres normalisés correspondants s'écrivent  $(\Omega_\beta/\Omega, \Omega_\alpha/\Omega)$  et  $(-\Omega_\alpha/\Omega, \Omega_\beta/\Omega)$ , si bien que  $\alpha = (\Omega_\beta a + \Omega_\alpha b)/\Omega$  et  $\beta = (\Omega_\beta b - \Omega_\alpha a)/\Omega$  avec

$$\Omega_\alpha = \frac{\Omega(\gamma_f - \gamma_\alpha/2)}{[\gamma_m\gamma_f + (\gamma_f - \gamma_\alpha/2)^2]^{1/2}} \quad ; \quad \Omega_\beta = \frac{\Omega\sqrt{\gamma_m\gamma_f}}{[\gamma_m\gamma_f + (\gamma_f - \gamma_\alpha/2)^2]^{1/2}} \quad (\text{B.2})$$

dans un choix de signe assurant que  $\alpha \rightarrow a$  et  $\beta \rightarrow b$  lorsque  $\gamma_f \rightarrow 0$  et reproduisant (25) lorsque  $\gamma_0 \rightarrow 0$ . Puisque l'opérateur de saut  $C_\alpha \propto \alpha$  décrit des processus non mesurés, nous pouvons, comme nous l'avons fait pour  $C_\beta$ , le prendre de la forme  $\sqrt{\gamma_\alpha}i\alpha$  et réutiliser l'ansatz gaussien réel (70) afin de résoudre l'équation stochastique (53) sur le vecteur d'état. Dans l'équation d'évolution sur la matrice  $\underline{u}$ , les indices  $\alpha$  et  $\beta$  jouent désormais des rôles symétriques et l'on obtient

$$\begin{aligned} du_{\alpha\alpha} &= -\Omega_\alpha dt u_{\alpha\alpha} + \gamma_\alpha dt (1 - u_{\alpha\alpha}) & du_{\alpha\beta} &= -\frac{dt}{2} [(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)u_{\alpha\beta} + \Omega_\beta u_{\alpha\alpha} + \Omega_\alpha u_{\beta\beta}] & du_{\alpha c} &= -\frac{dt}{2} [(\gamma_\alpha + \kappa)u_{\alpha c} + \Omega_\alpha u_{cc}] \\ du_{\beta\beta} &= -\Omega_\beta dt u_{\beta\beta} + \gamma_\beta dt (1 - u_{\beta\beta}) & du_{\beta\alpha} &= -\frac{dt}{2} [(\gamma_\beta + \kappa)u_{\beta\alpha} + \Omega_\beta u_{cc}] & du_{cc} &= \kappa dt (1 - u_{cc}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$



dont la solution pour la condition initiale  $\underline{u}(0) = \text{Id}$  s'écrit

$$u_{\alpha\alpha}(t) = 1 + \frac{\Omega_\alpha^2}{\gamma_\alpha(\kappa + \gamma_\alpha)} (1 - e^{-\gamma_\alpha t}) - \frac{2\Omega_\alpha^2}{\kappa^2 - \gamma_\alpha^2} (e^{-\gamma_\alpha t} - e^{-(\kappa + \gamma_\alpha)t/2}) \quad (\text{B.4})$$

$$u_{\alpha\beta}(t) = \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} \left( \frac{1}{\kappa + \gamma_\alpha} + \frac{1}{\kappa + \gamma_\beta} \right) (1 - e^{-(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)t/2}) + \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{(\kappa - \gamma_\beta)(\kappa + \gamma_\alpha)} (e^{-(\kappa + \gamma_\alpha)t/2} - e^{-(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)t/2}) \\ + \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{(\kappa - \gamma_\alpha)(\kappa + \gamma_\beta)} (e^{-(\kappa + \gamma_\beta)t/2} - e^{-(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)t/2}) \quad (\text{B.5})$$

$$u_{\alpha c}(t) = -\frac{\Omega_\alpha}{\kappa + \gamma_\alpha} (1 - e^{-(\kappa + \gamma_\alpha)t/2}) \quad (\text{B.6})$$

$$u_{\beta\beta}(t) = 1 + \frac{\Omega_\beta^2}{\gamma_\beta(\kappa + \gamma_\beta)} (1 - e^{-\gamma_\beta t}) - \frac{2\Omega_\beta^2}{\kappa^2 - \gamma_\beta^2} (e^{-\gamma_\beta t} - e^{-(\kappa + \gamma_\beta)t/2}) \quad (\text{B.7})$$

$$u_{\beta c}(t) = -\frac{\Omega_\beta}{\kappa + \gamma_\beta} (1 - e^{-(\kappa + \gamma_\beta)t/2}) \quad (\text{B.8})$$

$$u_{cc}(t) = 1 \quad (\text{B.9})$$

Le vecteur des coordonnées moyennes  $\bar{\mathbf{q}}$  obéit à l'équation stochastique

$$d\bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\gamma_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_\beta & 0 \\ \Omega_\alpha & \Omega_\beta & -\kappa \end{pmatrix} dt \bar{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} [\text{Id} - \underline{c}(t)] \begin{pmatrix} \gamma_\alpha^{1/2} d\zeta_\alpha(t) \\ \gamma_\beta^{1/2} d\zeta_\beta(t) \\ -\kappa^{1/2} d\zeta_c(t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

La moyenne non conditionnelle  $\langle P_a^2 \rangle$  valant toujours 1/4, la moyenne et la variance de  $P_a$  conditionnées au signal homodyne intégré restent données par les équations (82) et (83), en généralisant les expressions (89) des variances et covariance des variables aléatoires  $\bar{P}_a(t)$  et  $\sigma(t)$  au cas de trois processus stochastiques indépendants  $d\zeta_\alpha(t')$ ,  $d\zeta_\beta(t')$  et  $d\zeta_c(t')$  comme suit :

$$\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' \sum_{\nu \in \{\alpha, \beta, c\}} p_\nu(t, t') \sigma_\nu(t, t') \quad ; \quad \langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' \sum_{\nu \in \{\alpha, \beta, c\}} \sigma_\nu^2(t, t') \quad ; \\ \langle \bar{P}_a^2(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' \sum_{\nu \in \{\alpha, \beta, c\}} p_\nu^2(t, t') \quad (\text{B.11})$$

avec les expressions compactes des amplitudes correspondantes

$$p_\nu(t, t') = (-1)^{\delta_{\nu c}} \frac{\sqrt{\gamma_\nu}}{2\Omega} \left\{ \Omega_\beta e^{-\gamma_\alpha(t-t')/2} [\delta_{\alpha\nu} - c_{\alpha\nu}(t')] - \Omega_\alpha e^{-\gamma_\beta(t-t')/2} [\delta_{\beta\nu} - c_{\beta\nu}(t')] \right\} \quad (\text{B.12})$$

$$\sigma_\nu(t, t') = \frac{\delta_{\nu c}}{2t} + (-1)^{\delta_{\nu c}} \frac{\sqrt{\kappa\gamma_\nu}}{2t} \left\{ [\delta_{c\nu} - c_{c\nu}(t')] f_\kappa(t-t') + \sum_{\mu \in \{\alpha, \beta\}} \frac{\Omega_\mu}{\kappa - \gamma_\mu} [\delta_{\mu\nu} - c_{\mu\nu}(t')] [f_{\gamma_\mu}(t-t') - f_\kappa(t-t')] \right\} \quad (\text{B.13})$$

L'indice  $\nu$  court sur les trois valeurs  $\alpha, \beta, c$  et l'on a posé  $\gamma_c = \kappa$ . La fonction  $\delta$  est celle de Kronecker, et la fonction  $f_\lambda$  est la même que dans les équations (85)-(88).

La solution générale que nous venons d'exposer comporte les cinq taux  $\gamma_\alpha, \Gamma_{\text{sq}} = \Omega_\alpha^2/\kappa, \gamma_f$  d'une part,  $\gamma_\beta, \kappa$  d'autre part. Le régime pertinent expérimentalement est celui où les deux derniers sont « infiniment » plus grands que les trois premiers et ne contribuent qu'au travers de régimes transitoires inobservables. Mathématiquement, on accède à cette limite en faisant tendre  $\gamma_f$  vers zéro à  $\kappa, \gamma_m, \gamma_0$  et  $\Omega$  fixés et à  $\tau = \Gamma_{\text{sq}} t > 0$  fixé. Alors les trois premiers taux tendent conjointement vers zéro, c'est-à-dire dans des rapports de limite finie et non nulle  $\Gamma_{\text{sq}}/\gamma_f \rightarrow \Omega^2 \gamma_m / [\kappa(\gamma_0 + \gamma_m)^2]$  et  $\gamma_\alpha/\gamma_f \rightarrow 2\gamma_0/(\gamma_0 + \gamma_m)$ , le taux  $\gamma_\beta$  se réduit à  $\gamma \equiv 2(\gamma_0 + \gamma_m)$  et le couplage de Faraday  $\Omega_\beta$  à  $\Omega$ . Tous les transitoires exponentiels disparaissent dans les éléments de matrice (B.4)-(B.8) de  $\underline{u}$  sauf ceux relaxant au taux  $\gamma_\alpha$ . Les amplitudes

(B.12) et (B.13) sur les processus stochastiques se réduisent à

$$\frac{p_\alpha(t, t')}{\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}} = \frac{u(\tau') - 1}{2u(\tau')} \sqrt{\epsilon} e^{-\epsilon(\tau-\tau')/2} \quad \frac{\sigma_\alpha(t, t')}{\Gamma_{\text{sq}}} = \frac{u(\tau') - 1}{\tau u(\tau')} \sqrt{\epsilon} \frac{1 - e^{-\epsilon(\tau-\tau')/2}}{\epsilon} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{p_\beta(t, t')}{\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}} = \frac{\sqrt{\rho}}{(1+\rho)u(\tau')} e^{-\epsilon(\tau-\tau')/2} \quad \frac{\sigma_\beta(t, t')}{\Gamma_{\text{sq}}} = \frac{\sqrt{\rho}}{(1+\rho)\tau} \left[ \frac{2}{u(\tau')} \frac{1 - e^{-\epsilon(\tau-\tau')/2}}{\epsilon} + \rho + \frac{\gamma}{\kappa}(\rho - 1) \right] \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{p_c(t, t')}{\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}} = \frac{(1-\rho)}{2(1+\rho)u(\tau')} e^{-\epsilon(\tau-\tau')/2} \quad \frac{\sigma_c(t, t')}{\Gamma_{\text{sq}}} = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{1+\rho} \frac{1}{u(\tau')} \frac{1 - e^{-\epsilon(\tau-\tau')/2}}{\epsilon} + \frac{\rho}{1+\rho} \left( 1 + \frac{2\gamma}{\kappa} \right) \right] \quad (\text{B.16})$$

où  $\epsilon = \gamma_\alpha/\Gamma_{\text{sq}}$  comme dans la section 4.2.4, la fonction  $u(\tau)$  est donnée par l'équation (97) et la notation  $\rho = \Omega^2\kappa/[\gamma(\kappa+\gamma)^2]$  généralise celle de la note 17. Les relations (82) et (83) restent valables, avec les nouvelles expressions des variance et covariance

$$\boxed{\frac{\langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}}{\Gamma_{\text{sq}}} = \frac{\epsilon\tau - 2(1 - e^{-\epsilon\tau/2})}{\epsilon^2\tau^2} + \frac{\Gamma_{\text{sq}}}{4\tau\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}} \quad \text{et} \quad \frac{\langle \sigma \bar{P}_a \rangle_{\text{stoch}}}{\sqrt{\Gamma_{\text{sq}}}} = \frac{1 - e^{-\epsilon\tau/2}}{2\epsilon\tau}} \quad (\text{B.17})$$

et du taux de compression vrai ou généralisé

$$\boxed{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} = \left[ \frac{1}{\Gamma_{\text{sq}}} + \frac{2(\gamma_0 + \gamma_m)}{\gamma_f\gamma_m} \right]^{-1}} \quad (\text{B.18})$$

qui reproduisent les variance et covariance (101) et (102) du modèle à un mode avec décohérence lorsque  $\Gamma_{\text{sq}}/\gamma_f \rightarrow 0$  et le taux de compression généralisé (92) du modèle à trois modes sans décohérence lorsque  $\gamma_0 \rightarrow 0$ . Les nouveaux résultats peuvent être simplifiés dans la limite utile de faible décohérence ramenée  $\gamma_\alpha/\Gamma_{\text{sq}} \rightarrow 0$  par un développement à l'ordre un en  $\epsilon$ , ce qui permet de généraliser comme suit les résultats (103) sur la moyenne et la variance conditionnelles à une valeur de  $\Gamma_{\text{sq}}/\gamma_f$  non infinitésimale :

$$m(t) = \frac{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t}{1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t} - \frac{\gamma_\alpha}{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}} \frac{(3 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)(\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^2}{12(1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^2} + O[(\gamma_\alpha t)^2] \quad (\text{B.19})$$

$$\mathcal{V}(t) = \frac{1}{4(1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)} + \frac{\gamma_\alpha}{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}} \frac{(\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t + 3/2)(\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^2}{12(1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^2} + O[(\gamma_\alpha t)^2] \quad (\text{B.20})$$

Cette généralisation revient simplement à remplacer  $\tau$  par  $\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t$  et  $\epsilon$  par  $\gamma_\alpha/\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}$  dans les seconds membres de (103).<sup>21</sup> La compression optimale sur  $P_a$  est alors obtenue au bout d'un temps  $t_{\text{opt}} \sim (3/\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}\gamma_\alpha)^{1/2}$  et correspond à une variance conditionnelle  $\text{Var}_{\sigma=S}^{\text{opt}}(P_a) \sim (\gamma_\alpha/12\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}})^{1/2}$ .

## Références

- [1] J. MacFall, H. Charles, R. Black, H. Middleton, J. Swartz, B. Saam, B. Driehuis, C. Erickson, W. Happer, G. Cates, G. Johnson, C. Ravin, « Human lung air spaces: potential for MR imaging with hyperpolarized He-3 », *Radiology* **200** (1996), p. 553.
- [2] C. Gemmel, W. Heil, S. Karpuk, K. Lenz, C. Ludwig, Y. Sobolev, K. Tullney, M. Burghoff, W. Kilian, S. Knappe-Grüneberg, W. Müller, A. Schnabel, F. Seifert, L. Trahms, S. Baeßler, « Ultra-sensitive magnetometry based on free precession of nuclear spins », *Eur. Phys. J. D* **57** (2010), p. 303.
- [3] T. R. Gentile, P. J. Nacher, B. Saam, T. G. Walker, « Optically polarized <sup>3</sup>He », *Rev. Mod. Phys.* **89** (2017), 045004.
- [4] L. Pezzè, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied, P. Treutlein, « Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles », *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018), 035005.
- [5] A. Dantan, G. Réinaudi, A. Sinatra, F. Laloë, E. Giacobino, M. Pinar, « Long-Lived Quantum Memory with Nuclear Atomic Spins », *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), 123002.

<sup>21</sup> Elle vaut en fait à tous les ordres en  $\epsilon$  puisque le remplacement proposé ne change pas  $\epsilon\tau$  (toujours égal à  $\gamma_\alpha t$ ) et fait passer des équations (101) et (102) à l'équation (B.17).

- [6] G. Reinaudi, A. Sinatra, A. Dantan, M. Pinard, « Squeezing and entangling nuclear spins in helium 3 », *Journal of Modern Optics* **54** (2007), p. 675.
- [7] G. Vasilakis, H. Shen, K. Jensen, M. Balabas, D. Salart, B. Chen, E. Polzik, « Generation of a squeezed state of an oscillator by stroboscopic back-action-evading measurement », *Nature Phys* **11** (2015), p. 389.
- [8] O. Hosten, N. J. Engelsen, R. Krishnakumar, M. A. Kasevich, « Measurement noise 100 times lower than the quantum-projection limit using entangled atoms », *Nature* **529** (2016), p. 505.
- [9] M.-Z. Huang, J. A. de la Paz, T. Mazzoni, K. Ott, A. Sinatra, C. L. G. Alzar, J. Reichel, « Self-amplifying spin measurement in a long-lived spin-squeezed state », prépublication, arXiv:2007.01964 (2020).
- [10] A. Serafin, M. Fadel, P. Treutlein, A. Sinatra, « Nuclear spin squeezing in Helium-3 by continuous quantum non-demolition measurement », prépublication, hal-03058456 (2020).
- [11] O. Katz, R. Shaham, E. S. Polzik, O. Firstenberg, « Long-Lived Entanglement Generation of Nuclear Spins Using Coherent Light », *Phys. Rev. Lett.* **124** (2020), 043602.
- [12] O. Katz, R. Shaham, O. Firstenberg, « Quantum interface for noble-gas spins », prépublication, arXiv:1905.12532 (2019).
- [13] J. Dupont-Roc, « Étude de quelques effets liés au pompage optique en champ faible », Thèse, Université Paris VI, 1972.
- [14] J. Dupont-Roc, M. Leduc, F. Laloë, « Contribution à l'étude du pompage optique par échange de métastabilité dans  $^3\text{He}$ . - Première Partie », *Journal de Physique* **34** (1973), p. 961.
- [15] J. Cviklinski, A. Dantan, J. Ortalo, M. Pinard, « Conditional squeezing of an atomic alignment », *Phys. Rev. A* **76** (2007), 033830.
- [16] A. Kuzmich, L. Mandel, J. Janis, Y. E. Young, R. Eijnisman, N. P. Bigelow, « Quantum nondemolition measurements of collective atomic spin », *Phys. Rev. A* **60** (1999), p. 2346.
- [17] Y. Castin, K. Mølmer, « Monte Carlo Wave-Function Analysis of 3D Optical Molasses », *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995), p. 3772.
- [18] K. Mølmer, Y. Castin, J. Dalibard, « Monte Carlo wave-function method in quantum optics », *J. Opt. Soc. Am. B* **10** (1993), p. 524.
- [19] Y. Castin, J. Dalibard, K. Mølmer, « A Wave Function approach to dissipative processes », *AIP Conference Proceedings, Thirteenth International Conference on Atomic Physics* (édité par H. Walther, T.W. Hänsch, B. Neizert), **275** (1992).
- [20] H. M. Wiseman, G. J. Milburn, « Quantum theory of field-quadrature measurements », *Phys. Rev. A* **47** (1993), p. 642.
- [21] Yun Li, Y. Castin, A. Sinatra, « Optimum Spin Squeezing in Bose-Einstein Condensates with Particle Losses », *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008), 210401.
- [22] L. K. Thomsen, S. Mancini, H. M. Wiseman, « Continuous quantum nondemolition feedback and unconditional atomic spin squeezing », *J. Phys. B* **35** (2002), p. 4937.
- [23] N. Gisin, « Stochastic quantum dynamics and relativity », *Helv. Phys. Acta* **62** (1989), p. 363.
- [24] N. Gisin, I. Percival, « The quantum state diffusion model applied to open systems », *J. Phys. A* **25** (1992), p. 5677.
- [25] N. Gisin, « Quantum Measurements and Stochastic Processes », *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), p. 1657.
- [26] H. Tanji-Suzuki, I.D. Leroux, M.H. Schleier-Smith, M. Cetina, A.T. Grier, J. Simon, V. Vuletic, « Interaction between Atomic Ensembles and Optical Resonators: Classical Description », *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **60** (2011), p. 201.