

Maintien en conditions opérationnelles d'une flotte de véhicules : estimation du besoin en pièce de rechange

Patrick PAMPHILE

Equipe CELESTE Inria-Saclay
Université Paris-Saclay, CNRS,
Laboratoire de mathématiques d'Orsay,
Bat 407 91405, Orsay, France.

patrick.pamphile@universite-paris-saclay.fr

Florence Ducros

Equipe CELESTE Inria-Saclay
Université Paris-Saclay, CNRS,
Laboratoire de mathématiques d'Orsay,
Bat 407 91405, Orsay, France.

Abstract— Lors de l'achat d'une flotte de véhicules, le service après-vente comprend en général un contrat d'entretien, de réparation et de révision des véhicules : ce contrat garantit la disponibilité de la flotte pendant plusieurs années sous des contraintes d'usage. Si ce type de contrat est un argument marketing indéniable pour les constructeurs automobiles, c'est aussi un coût supplémentaire qui doit être évalué. D'autant plus que ces contrats durent bien au-delà de la durée de vie utile des équipements. Pour gérer le stock de pièces de rechange, évaluer les coûts de maintenance et de réparations, le gestionnaire du contrat doit être en mesure de prévoir le nombre de défaillances pour une liste d'équipements critiques tout au long du contrat. Il existe cependant de nombreux facteurs d'instabilité du besoin en pièces de rechange au court du temps : d'une part, les équipements peuvent présenter différents modes de vieillissement, être soumis à plusieurs causes de panne ; d'autre part l'usage des véhicules peut varier de manière significative selon le profil des missions.

L'objet de cet article est alors de prévoir les besoins en pièces de rechange d'une flotte de véhicules sur plusieurs années de contrat. Nous avons utilisé pour cela un modèle de simulation basé sur une analyse statistique des défaillances des équipements et une analyse statistique de l'usage des véhicules. En intégrant ces deux facteurs de coûts au fil des ans, nous fournissons un outil flexible de décision pour préparer ou gérer un contrat MRO pour une flotte de véhicules.

Keywords—*Contrat de maintenance, Flotte de véhicules, analyses statistiques des pannes, loi de Weibull, Modèle de lois de Weibull en concurrence, Mélange de loi de Weibull, Classification des usages des véhicules. Bayesian Sampling, Algorithme BRM*

I. INTRODUCTION

Généralement, lors de l'achat d'une flotte de véhicules, le service après-vente inclut un contrat de maintien en conditions opérationnelles (MCO) : entretien, réparation et révision des véhicules. Ce contrat garantit à l'acheteur la disponibilité de la flotte durant plusieurs années, mais sous des contraintes d'usage (cf. [1] et [2]). Le contrat MCO est un argument commercial majeur, mais c'est aussi un coût qu'il faut pouvoir évaluer. Et ce d'autant plus que ces contrats peuvent aller bien au delà de la durée de vie utile des équipements d'un véhicule. Pour répondre au besoin du

client en pièces de rechange et évaluer le coût de la maintenance, le gestionnaire du contrat MCO (le constructeur ou un tiers) doit pouvoir prévoir le nombre de défaillances d'une liste d'équipements critiques, sur toute la durée du contrat. Il existe de nombreux travaux traitant de la gestion du besoin en pièces de rechange (cf. [1] et [3] pour un bilan détaillé). Mais dans le cas du contrat MCO sur une flotte, ce problème est particulièrement difficile (cf. [4]-[6]). En effet, un produit tel qu'un véhicule automobile se compose de nombreux systèmes modulaires (le groupe motopropulseur, le châssis, le système électrique,...), d'équipements (le moteur, les roues, les batteries,...) et de milliers de composants qui sont fournis par un vaste réseau de fournisseurs. Les performances en matière de fiabilité d'un système, d'un équipement ou d'un composant sont contrôlées par les fournisseurs sur la base de leurs conceptions et de leurs qualités production. Les conditions d'utilisation des véhicules sont sous le contrôle des conducteurs, en fonction de l'environnement d'exploitation, du profil de la mission et de l'intensité d'utilisation. Le gestionnaire du contrat MCO ne dispose que des instants de pose et dépose des équipements ainsi que du cumul d'usage des véhicules. Or, la durée de vie des équipements et l'usage des véhicules varient généralement beaucoup sur une longue période. Ces diverses sources de variabilité ne sont pas contrôlées ou ne sont pas observées par le gestionnaire du contrat MCO. Mais négliger cette non-homogénéité peut conduire à des erreurs d'estimation importantes, surtout sur le long terme.

Par ailleurs, diverses mesures d'usage du véhicule peuvent être prises en compte : le nombre de kilomètres parcourus, le nombre de mois d'utilisation, le nombre d'heures-moteur pour certains utilitaires ou d'utilisation d'un système d'armes pour un véhicule militaire, etc. Le choix d'une mesure est primordial car il impacte directement le dimensionnement du contrat MCO (cf. [7]).

Dans la section II, nous présenterons le cadre du contrat MCO et la méthodologie retenue pour dimensionner le nombre d'équipements de rechange sur la durée du contrat. Une des principales contributions de ce travail est de proposer une méthode pour choisir une mesure d'usage pertinente pour le dimensionnement. Nous la présenterons

dans la section III. Nous aborderons la problématique de la modélisation des inter-occurrences de panne d'un équipement dans la section IV. Nous identifierons des profils d'usages des véhicules dans la section V. Nous présenterons les résultats obtenus sur des données réelles dans la section VI, avant de conclure dans la section VII.

II. PRÉVISION DU BESOIN EN ÉQUIPEMENTS DE RECHANGE

Le cadrage du contrat MCO pour une flotte de véhicules vise avant tout la satisfaction du client, via un niveau de disponibilité pour l'ensemble de la flotte, tout en minimisant les coûts. Par ailleurs, dans le cas d'un contrat de MCO pour un nouveau véhicule il faut être capable de construire des analogies entre les équipements en matière de taux de défaillance et de MTBF (*Mean Time Between Failure*). Par conséquent les objectifs visés sont :

- de calculer la fiabilité, le taux de défaillance et le MTBF d'un équipement ;
- d'identifier des profils d'usage des véhicules ;
- de prédire le besoin en équipement de rechange sur le court, moyen et long terme.

Le contrat MCO est établi pour le soutien d'une liste d'équipements appelés *cost drivers*. On distinguera :

- les équipements critiques : équipements dont la panne impacte fortement la disponibilité du véhicule ;
- les équipements ayant un coût d'achat et de remplacement important.

La plupart des *cost drivers* proviennent d'un vaste réseau de fournisseurs. Leurs performances en matière de fiabilité sont contrôlées par les fournisseurs sur la base de leurs conceptions et de leurs qualités production. Pour dimensionner le contrat MCO, le gestionnaire du contrat ne dispose que du RETEX Équipements contenant les dates de pose et de dépose des *cost drivers* sur un véhicule. Le RETEX Véhicules ne contient que le cumul annuel d'usage des véhicules renseigné par le client selon différentes échelles (par exemple le nombre de kilomètres parcourus, le nombre de mois d'utilisation, le nombre d'heures moteur, le nombre d'utilisation d'une fonctionnalité, d'un système d'armes,...).

L'approche retenue est décrite dans la Fig. 1. Il s'agit :

- à partir du RETEX Équipements, de modéliser les lois des inter-occurrences de panne des équipements ;
- à partir du RETEX Véhicules, d'identifier des profils de mission selon l'intensité d'usage des véhicules, à l'aide d'une classification non-supervisée.

On modélise alors le nombre de défaillances des équipements à l'aide d'un processus de renouvellement arrêté par l'usage du véhicule selon le profil de mission. La loi du processus de renouvellement n'est pas accessible. Nous proposons alors de le simuler afin d'obtenir un intervalle de confiance du besoin en équipements de rechange selon le profil d'usage du véhicule.

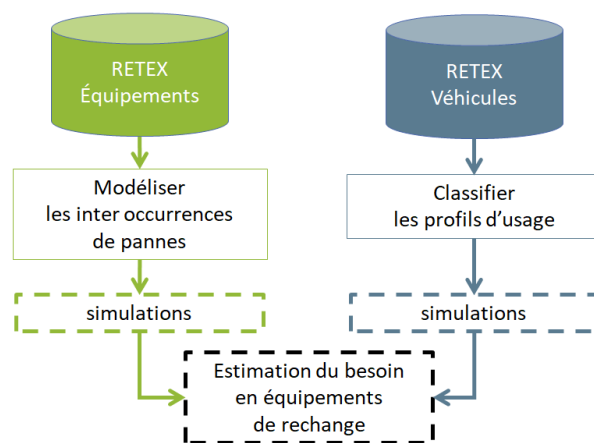


Fig. 1. Méthodologie retenue pour estimer le besoin en équipements de rechange à partir du RETEX Équipements et du RETEX Véhicules

III. CHOIX DE L'ÉCHELLE DE MESURE DES INTER-OCCURRENCES DE PANNE

Dans le secteur automobile classique, un véhicule est vendu à des millions de clients et la garantie est limitée soit à une durée après l'achat (des dizaines de mois), soit à un usage (des centaines de milliers de kilomètres), soit aux deux. Ces limites correspondent à « la durée de vie utile » des véhicules (i.e. durée avant vieillissement). Des extensions de garantie permettent éventuellement de prolonger la garantie. Pour une flotte de véhicules, une centaine de véhicules est vendue à quelques clients et les contrats sont en dizaines d'années, bien au delà de la durée de vie utile. Les véhicules sont utilisés de manière discontinue avec des périodes d'interruption plus ou moins longues. Pour la gestion d'un contrat de MCO d'une flotte de véhicules, l'usage est donc naturellement la variable dimensionnant le besoin en pièces de rechange. Les usages des véhicules sont alors recueillis régulièrement. Les fonctionnalités des véhicules étant diverses (i.e. motorisation, propulsion, transmission, production d'électricité, défense,...), plusieurs échelles de mesure d'usage ont été renseignées dans la base du RETEX Équipements. La complexité du traitement nous oblige alors à nous interroger sur le choix d'une échelle de mesure d'usage rendant au mieux compte de la défaillance de l'équipement. Si pour certains équipements le choix d'une échelle de mesure est explicite (nombre de kilomètres pour les roues, nombre d'heures pour les batteries, nombre de coups tirés pour un système d'armes, etc.) pour d'autres le choix est moins clair.

De nombreux travaux abordent l'estimation du flux de pièces de rechange avec deux variables, en général l'âge en mois et les kilomètres parcourus cf. [7]-[10]. Mais peu s'interrogent sur le choix d'une « bonne échelle ». On trouvera dans Duchesne [10], une tentative pour répondre à cette question à partir d'une étude bibliographique. Dans leur conclusion, les auteurs proposent de retenir les critères suivants : « l'échelle de mesure doit capturer la variation des données de panne et être facilement interprétable en termes de fiabilité ». Les modèles de Cox intégrant plusieurs covariables ont été utilisés (voir [11] par exemple). Si ces modèles mesurent bien la variabilité des données, ils sont difficilement interprétables en termes de vieillissement de l'équipement : par exemple ils ne permettent pas d'analogie entre divers équipements. La même remarque peut être faite

pour les modèles utilisant une échelle synthétique qui est combinaison linéaire de diverses échelles (voir [8] et [9] par exemple).

Une des contributions de ce travail est alors de proposer une méthode pour sélectionner l'échelle « expliquant au mieux » la défaillance de l'équipement. L'idée est alors d'utiliser des arbres de décision, pour sélectionner la variable la plus « importante » dans la classification « panne / non panne » des équipements. Afin d'illustrer la méthode, nous utiliserons à titre d'exemple les données d'un équipement particulier (voir Fig. 2).

Soit Y l'état de l'équipement :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si l'équipement est en panne ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons $X = (P_1, P_2, P_3)$, les trois mesures d'usage d'un équipement (voir Fig. 2). Pour des raisons de confidentialité elles ne seront pas explicitées.

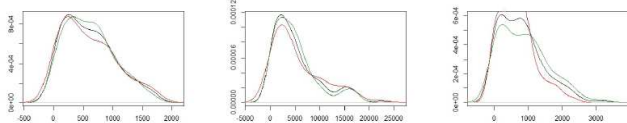


Fig. 2. Mesures d'usage d'un équipement.

L'algorithme CART (*Classification And Regression Trees*), est une méthode statistique introduite par Breiman [12]. Le principe général de CART est de partitionner récursivement les équipements de façon binaire en fonction des valeurs de X , puis de déterminer une sous-partition « optimale » des équipements en termes de Y . La partition optimale est alors un nœud de l'arbre. Le critère d'optimalité utilisé ici est la minimisation de l'indice de Gini cf. [13]: les nœuds sont les sous-partitions les plus homogènes du point de vue de la panne. Le premier nœud étant la racine et les derniers les feuilles de l'arbre. Les variables de X qui interviennent dans les premières coupes de l'arbre sont les variables les plus utiles pour expliquer Y : en effet, plus une découpe est proche de la racine plus la décroissance de l'hétérogénéité est importante. On peut définir l'importance d'une variable, selon Breiman, en évaluant, en chaque nœud, la réduction d'hétérogénéité engendrée par l'usage de la découpe de substitution portant sur cette variable puis en les sommant sur tous les nœuds. À partir de la Fig. 3, on constate que P_3 est la variable la plus importante pour expliquer la panne de l'équipement considéré.

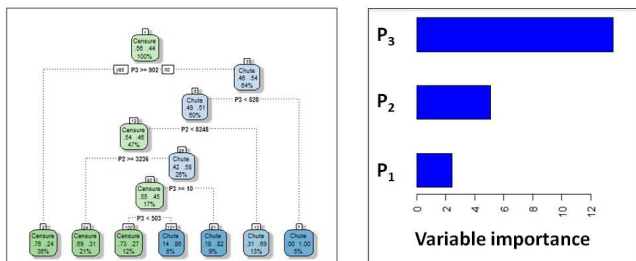


Fig. 3. Arbre CART et importance des variables

IV. MODÉLISATION DES INTERARRIVÉES DE PANNE D'UN EQUIPEMENT

Depuis plus de cinquante ans, les distributions de Weibull sont largement utilisées pour modéliser les données de durées de vie dans les applications industrielles. En effet, les

distributions de Weibull présentent un taux de défaillances décroissant, constant ou croissant, ce qui les rend adaptées à la modélisation de données de défaillance complexes (voir [14]). Ici, des véhicules ont été déployés sur le terrain pendant plusieurs années et utilisés dans des conditions très variées (pistes, terrains accidentés et en pente, ...). Par conséquent, la durée de vie des équipements aura des taux de défaillance variés. Ces diverses sources de variabilité ne sont pas observées. A partir de l'analyse de la base de données des défaillances des équipements, trois modèles sont été alors considérés :

- un modèle simple d'une loi de Weibull à deux paramètres (SW) avec une fonction de densité de probabilité :

$$F_X(x) = F_W(x|\beta, \eta) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta},$$

où β est le paramètre de forme et η est le paramètre d'échelle ;

- un modèle de deux lois de Weibull en concurrence (CRW):

$$F_X(x) = 1 - (1 - F_W(x|\beta_1, \eta_1))(1 - F_W(x|\beta_2, \eta_2))$$

la défaillance de l'équipement est due à deux causes possibles ;

- un mélange de deux lois de Weibull (MixW):

$$F_X(x) = \alpha F_W(x|\beta_1, \eta_1) + (1 - \alpha) F_W(x|\beta_2, \eta_2)$$

Pour un équipement donné il existe deux sous populations ayant des durées de vie différentes, par exemple deux versions de l'équipement.

Il nous faut alors

- estimer les paramètres du modèle ;
- sélectionner le modèle qui ajuste au mieux les données : on utilise pour cela les critères de sélection de modèles AIC et BIC.

Il faut noter que les méthodes classiques d'estimation sont difficiles à mettre en œuvre pour une loi de Weibull. Tout d'abord, il n'y a pas de calcul explicite de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre de forme β pour une simple loi de Weibull : il faut recourir à une approximation numérique (cf. [14]). D'autre part, dans notre étude les taux de censures dépassent les 70%. Par conséquent l'estimateur du maximum de vraisemblance est très fortement biaisé. Par ailleurs pour le modèle de lois de Weibull en concurrence, on ne connaît pas la cause de la panne de l'équipement. Idem, pour le mélange de lois de Weibull, on ne sait pas à quelle sous population appartient l'équipement défaillant. Dans cette situation de données fortement censurées et de données manquantes, l'algorithme EM et sa version stochastique S-EM sont alors particulièrement adaptées (cf. [15], [16] et [17]). Malheureusement le taux de censure important ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants. On peut alors avoir recours aux méthodes bayésiennes (cf. [18]). Il s'agit de se donner des informations sur les paramètres sous forme de distribution *a priori*. Il s'agit soit d'informations d'experts ou issues d'études antérieures. En utilisant la formule de Bayes, on obtient alors la loi *a posteriori* des paramètres, c.-à-d. connaissant les données. On obtient alors une estimation des paramètres en minimisant une fonction de

perte intégrée sur la loi *a posteriori*. Dans le cas des trois modèles considérés (SW, CRW et MixW), il n'existe pas de loi *a priori* permettant d'obtenir la loi *a posteriori* de manière explicite (cf. [19]). Pour obtenir une estimation des paramètres, il faut soit avoir recouru à des approximations, soit utiliser des méthodes MCMC (cf. [20]). Pour les modèles CRW et MixW, le nombre de paramètres importants et le taux élevé de censure rendent les convergences des algorithmes MCMC extrêmement longues. Nous proposons alors d'utiliser la méthode *Bayesian Restoration Maximization* (BRM). Il s'agit d'une méthode d'estimation basée sur l'échantillonnage bayésien (cf. [21]).

1. *Bayesian step* : les paramètres θ sont simulés à partir d'une loi *a priori* $\pi(\theta)$ (voir Fig. 4) ;
2. *Restoration step* : les variables manquantes Z (i.e., les données censurées, les causes de panne pour le modèle CRW et la sous-population dont est issue l'équipement défaillant pour le modèle MixW) sont simulées conditionnellement aux paramètres (θ_i) échantillonnés à l'étape précédente et aux données observées Y .
3. *Maximization step* : A l'instar de l'algorithme EM, on maximise alors la vraisemblance, complétée des données manquantes simulées précédemment. Le risque intégré selon la loi *a posteriori* est alors estimé à l'aide d'un échantillonnage préférentiel (cf. [20]). La loi empirique des estimateurs du maximum de vraisemblance complétée $L(\theta|Y,Z)$ sert alors de loi d'importance (voir Fig. 5).

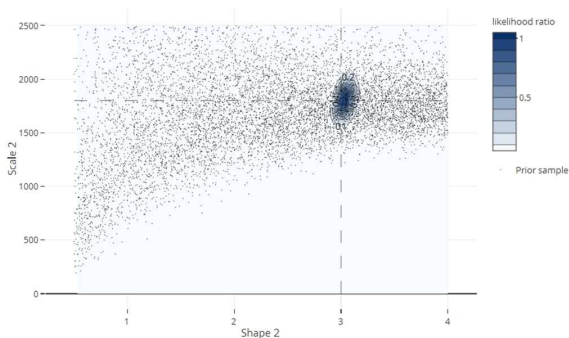


Fig. 4. Les paramètres (β, η) d'une loi de Weibull sont échantillonnés à partir de la loi *a priori* $\pi(\beta, \eta)$. Les pointillés indiquent la valeur des paramètres utilisés pour la simulation.

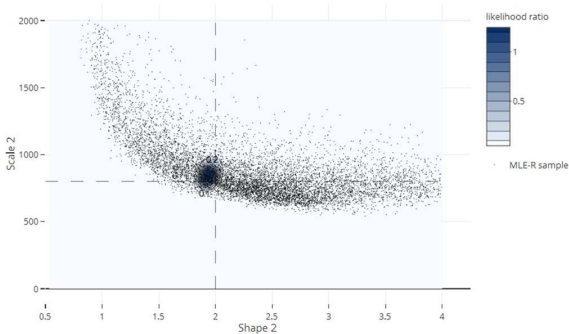


Fig. 5. La loi empirique des estimateurs de maximum de la vraisemblance complétée. Elle sert de loi d'importance pour estimer le risque intégré selon la loi *a posteriori*. Les pointillés indiquent la valeur des paramètres utilisés pour la simulation.

On trouvera dans Bacha [22] pour le modèle CRW et Ducros [23] pour le modèle MixW le détail de la mise en œuvre de la méthode BRM. Cette méthode a l'avantage d'être non-itérative et donne d'excellents résultats même avec des taux de censure élevés.

Parmi les trois modèles SW, CRW et MixW, pour sélectionner celui ajustant le mieux les données, nous utilisons ensuite les critères de vraisemblance pénalisées AIC (cf. [24] et [25]). Ces critères sélectionnent le modèle s'ajustant le mieux aux données (meilleur biais) tout en ayant le moins de paramètres à estimer (meilleure variance).

V. IDENTIFICATION DE PROFILS D'USAGE DES VÉHICULES

Parfois, certains véhicules peuvent passer d'une utilisation nominale de la flotte à une utilisation intensive, selon le profil de la mission. Ces différentes intensités d'usage ont une incidence sur la variabilité de la demande de pièces détachées et doivent être prise en compte dans l'estimation. Malheureusement, le profil de la mission n'est pas renseigné par le client dans la base de données des véhicules. Nous procédons alors à une classification des usages du RETEX Véhicules afin d'identifier des profils d'usage à l'aide d'une classification non supervisée. Nous utilisons ici la méthode des *k-means* (cf. [13]). La Fig. 6 donne une classification en deux classes : un profil d'usage nominal et d'usage intensif.

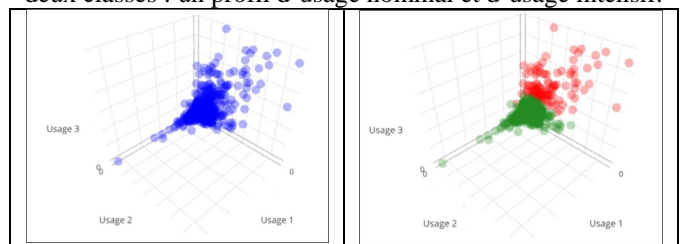


Fig. 6. Identification des profils d'usages à l'aide d'un classification non supervisée. A gauche le profil nominal et le profil intensif.

VI. ESTIMATION DU BESOIN EN PIÈCE DE RECHANGE

Pour un équipement donné, on a sélectionné une échelle de mesure et un modèle de loi pour les inter-occurrences de panne (voir Fig. 1). Pour un profil de mission donné on simule alors le nombre de défaillances sur le nombre d'années du contrat (voir algorithme Fig.7).

Algorithm 1: Failures simulation algorithm

```

Initialisation:  $N \leftarrow 0$ 
 $U \leftarrow$  vehicle usage during a period
 $X \leftarrow$  equipment usage until failure
while  $X < U$  do
   $N \leftarrow N + 1$ 
   $U \leftarrow U - X$ 
   $X \leftarrow$  equipment usage until failure
end
return  $N$ 

```

Fig. 7. Algorithme de simulation du nombre de pannes pour un équipement et un profil de mission.

On peut alors construire un intervalle de confiance *bootstrap* pour le besoin en pièces de rechange pour chaque année de contrat. A partir de données réelles sur un équipement, l'analyse de données permet de retenir un modèle de mélange : une sous-population d'équipements avec des inter-occurrences de panne distribuées selon une loi de Weibull $W(2 ; 2000)$ et une autre sous-population constituée

d'équipements moins fiables, avec une loi de Weibull $W(4;1000)$. On estime alors le besoin en pièces de rechange sur 20 ans de contrat MCO avec les deux types de profils de mission (voir Fig. 6 graphique de gauche).

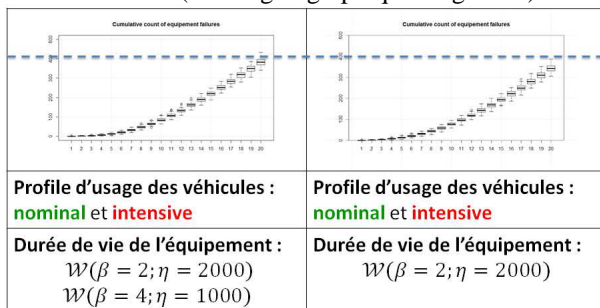


Fig. 8. Comparaison du besoin pour deux modèles de durée de vie d'un équipement.

Dans un second temps, nous avons alors évalué le besoin dans le cas où les équipements les moins fiables étaient tous remplacés. On constate une réduction du besoin (voir Fig. 8 graphique de droite). On voit ainsi qu'il est possible d'évaluer le gain d'une telle opération de maintenance préventive.

Nous avons ensuite comparé le besoin dans le cas d'un profil de mission uniquement nominal. On constate alors une réduction du besoin (voir Fig. 9). Cela permet ainsi de dimensionner un contrat MCO pour un type de profil de mission.

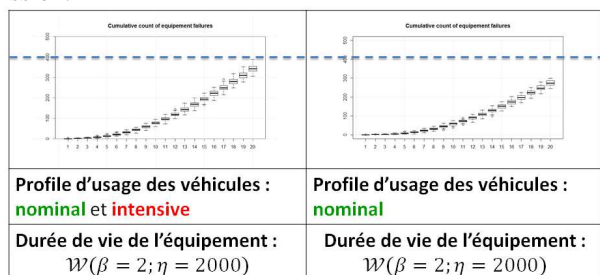


Fig. 9. Comparaison du besoin pour deux types de profils d'usage d'un véhicule.

CONCLUSION

Dans cet article, nous nous sommes intéressés au contrat de maintenance en conditions opérationnelles d'un parc de véhicules (MCO). Pendant toute la durée du contrat, une disponibilité maximale des véhicules est garantie sous des conditions d'usage. Le contrat couvre le besoin en pièce de rechange d'une liste d'équipements critiques pendant plusieurs dizaines d'années. Dans ce contexte, la gestion des stocks de pièces détachées est particulièrement difficile en raison de plusieurs facteurs d'instabilité du besoin au fil du temps. En particulier, l'hétérogénéité du vieillissement des équipements et l'hétérogénéité des profils d'usage des véhicules sont deux principaux facteurs impactant la variabilité du besoin en équipement de rechange.

Pour dimensionner le contrat, nous avons utilisé une méthode de simulation du besoin basée d'une part sur l'analyse statistique du RETEX des inter-occurrences de pannes des équipements; d'autre part sur l'analyse statistique du RETEX des usages des véhicules. Pour modéliser l'hétérogénéité des modes de défaillance trois modèles de Weibull ont été utilisés. Une loi de Weibull simple pour une population homogène d'équipements avec

un seul mode de défaillance, un modèle de lois de Weibull en concurrence lorsque les équipements présentent deux modes de défaillance, et enfin un mélange de lois de Weibull pour une population hétérogène d'équipements.

Deux profils d'usages ont été identifiés à l'aide d'une classification des données d'usages des véhicules.

L'approche basée sur la simulation permet ainsi d'obtenir des intervalles de confiance du besoin en pièces de rechange au court du temps, à partir d'hypothèses réalistes sur les défaillances des équipements et l'utilisation des véhicules. En intégrant ces deux différents facteurs de coût au fil des ans, nous fournissons un outil flexible de prise de décision pour préparer ou gérer un contrat MCO pour une flotte de véhicules.

ACKNOWLEDGMENT

Les auteurs remercient Gilles CELEUX directeur de recherche émérite à Inria, pour ces précieux conseils.

REFERENCES

- [1] Murthy, D. P., & Blischke, W. R. (2006). *Warranty management and product manufacture*. Springer.
- [2] Murthy, D.N.P., Karim, M.R., & Ahmadi, A. (2015). Data management in maintenance outsourcing. *Reliability Engineering & System Safety*, 142, 100-110.
- [3] Wu, S. (2012). Warranty data analysis: A review. *Quality and Reliability Engineering International*, 28(8), 795-805.
- [4] Srinivasan, R., Manivannan, S., Ethiraj, N., Devi, S. P., & Kiran, S. V. (2016). Modelling an Optimized Warranty Analysis methodology for fleet industry using data mining clustering methodologies. *Procedia Computer Science*, 87, 240-245.
- [5] Iskandar, B.P., Cakravastia, A., Pasaribu, U. S., & Husniah, H. (2014, August). Performance-based maintenance contract for a fleet of dump trucks used in mining industry. In *2014 2nd International Conference on Technology, Informatics, Management, Engineering & Environment* (pp. 117-122). IEEE.
- [6] Wang, W. (2010). A model for maintenance service contract design, negotiation and optimization. *European Journal of Operational Research*, 201(1), 239-246.
- [7] Krivtsov, V., & Frankstein, M. (2006). Automotive component reliability: should it be measured in time or mileage?. In *RAMS'06. Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2006*. (pp. 601-603). IEEE.
- [8] Syamsundar, A., Naikan, V. N. A., & Wu, S. (2020). Alternative scales in reliability models for a repairable system. *Reliability Engineering & System Safety*, 193, 106599.
- [9] Wang, X., & Xie, W. (2018). Two-dimensional warranty: A literature review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 232(3), 284-307.
- [10] Duchesne, T., & Lawless, J. (2000). Alternative time scales and failure time models. *Lifetime data analysis*, 6(2), 157-179.
- [11] Akbarov, A., & Wu, S. (2012). Forecasting warranty claims considering dynamic over-dispersion. *International Journal of Production Economics*, 139(2), 615-622.
- [12] Breiman, L., Friedman, J., Stone, C. J., & Olshen, R. A. (1984). *Classification and regression trees*. CRC press
- [13] Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. Springer
- [14] Murthy, D. P., Xie, M., & Jiang, R. (2004). *Weibull models*. John Wiley & Sons.
- [15] Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 39(1), 1-22.
- [16] Bacha, M. (1994). Estimation of Parameters of the Inf. of Weibull Distributed Failure Time Distributions. In *Compstat* (pp. 209-214).
- [17] Bordes, L., & Chauveau, D. (2012). EM and stochastic EM algorithms for reliability mixture models under random censoring. Unpublished

- [18] Hamada, M. S., Wilson, A., Reese, C. S., & Martz, H. (2008). *Bayesian reliability*. Springer
- [19] Soland, R. M. (1969). Bayesian analysis of the Weibull process with unknown scale and shape parameters. *IEEE Transactions on Reliability*, 18(4), 181-184.
- [20] Robert, C., & Casella, G. (2013). *Monte Carlo statistical methods*. Springer
- [21] Rubin, D. B. (1981). The bayesian bootstrap. *The annals of statistics*, 130-134.
- [22] Bacha, M., Celeux, G., Idée, E., Lannoy, A., & Vasseur, D. (1998). *Estimation de modèles de durées de vie fortement censurées*. Eyrolles.
- [23] Ducros, F., & Pamphile, P. (2018). Bayesian estimation of Weibull mixture in heavily censored data setting. *Reliability Engineering & System Safety*, 180, 453-462.
- [24] Akaike, H. (1973). Information theory as an extension of the maximum likelihood principle—In: Second International Symposium on Information Theory (Eds) BN Petrov, F. Csaki.
- [25] Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 6(2), 461-464.