



HAL
open science

LA PARAMÉTRISATION DE FAMILLES DE FONCTIONS HOLOMORPHES SUR LE DISQUE

Jean-Pierre Otal

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Otal. LA PARAMÉTRISATION DE FAMILLES DE FONCTIONS HOLOMORPHES SUR LE DISQUE. 2020. hal-03060390

HAL Id: hal-03060390

<https://hal.science/hal-03060390>

Preprint submitted on 14 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA PARAMÉTRISATION DE FAMILLES DE FONCTIONS HOLOMORPHES SUR LE DISQUE

JEAN-PIERRE OTAL

Introduction

Soit \mathcal{M} l'ensemble des fonctions méromorphes sur le disque unité \mathbb{D} . Rolf Nevanlinna a introduit un sous-ensemble \mathcal{N} de \mathcal{M} — la classe de Nevanlinna — dont les éléments sont définis par une propriété de croissance de leur *fonction caractéristique*. Il a montré un théorème de factorisation pour les fonctions de \mathcal{N} et en a déduit que ces fonctions étaient déterminées par la donnée de leurs zéros, de leurs pôles et d'une mesure de Radon signée sur le cercle unité. Le but de cet article est d'expliquer en détail une construction de Mkhitar Dzhrbashyan. Dans [D1, D2], il définit pour tout réel $\alpha > -1$ une classe \mathcal{N}_α de fonctions méromorphes sur \mathbb{D} caractérisées cette fois par une propriété de croissance de *l'intégrale fractionnaire d'ordre α* de $\log |f|$. Il a démontré *un théorème de factorisation* des fonctions dans cette classe \mathcal{N}_α qui est l'analogue du théorème de factorisation de Nevanlinna, et qui a comme conséquence que les fonctions de la classe \mathcal{N}_α sont paramétrées à une constante multiplicative près par leurs zéros, leurs pôles et une mesure de Radon signée sur le cercle unité.

Dans la première section, nous allons rappeler le théorème de factorisation de Nevanlinna. Nous nous restreindrons aux fonctions holomorphes. En effet, son énoncé est plus simple — l'une des notions introduites par Nevanlinna, celle de *caractéristique d'une fonction méromorphe* a une définition plus directe pour une fonction holomorphe que pour une fonction méromorphe générale — mais les idées majeures de la démonstration apparaissent déjà toutes dans ce cas. Bien que ce résultat soit très classique et soit démontré dans de nombreux ouvrages (cf. [Du],[Ru]), nous en donnerons la démonstration car celle de Dzhrbashyan suit vraiment le même schéma directeur.

Les espaces \mathcal{N}_α de Dzhrbashyan dépendent d'un paramètre réel $\alpha > -1$. Ils sont construits en termes d'*intégrales fractionnaires d'ordre α* de fonctions sur le disque, plus précisément en termes d'intégrales fractionnaires de fonctions $\log |f|$, avec f méromorphe. Dans la section 2, nous rappelons la définition de *l'intégrale de Riemann-Liouville* dans le cas des fonctions d'une variable réelle. Nous présenterons ensuite l'opérateur d'intégration fractionnaire de Dzhrbashyan $h \mapsto h_\alpha$ dans le cas des fonctions holomorphes, puis des fonctions harmoniques et finalement dans le cas des fonctions de la forme $\log |f|$ avec f méromorphe. Ces opérateurs ont une action remarquablement simple sur certaines fonctions utilisées par Dzhrbashyan : les noyaux de Cauchy, de Poisson et de Herglotz d'ordre α . Ces propriétés seront vérifiées dans la section 2.

Pour sa démonstration, Dzhrbashyan a introduit de nouveaux outils qui sont *des théorèmes de reproduction*. Il a donné d'abord *une généralisation de la formule de Cauchy* qui exprime une fonction holomorphe h en un point z en termes des valeurs de son intégrale fractionnaire d'ordre α h_α sur une courbe fermée entourant z . Il a aussi donné *une généralisation de la formule de Poisson* qui exprime une fonction harmonique u en un point z en termes des valeurs de la fonction u_α sur un cercle entourant z . Il en déduit une généralisation de *la formule de Herglotz*. Ces théorèmes de reproduction seront démontrés dans la section 3.

Dans la section 4, nous introduisons pour tout réel $\alpha > -1$ la classe de Dzhrbashyan \mathcal{N}_α . Une fonction holomorphe f est dans \mathcal{N}_α si et seulement si les moyennes de $(\log |f|)_\alpha$ sur les cercles de rayon $r < 1$ sont bornées. Dzhrbashyan a défini la classe \mathcal{N}_α comme ensemble des fonctions méromorphes sur \mathbb{D} dont la caractéristique d'ordre α est bornée. Nous ne donnons la condition que pour les fonctions holomorphes car la caractéristique est plus facile à définir dans ce cas (comme pour la classe de Nevanlinna habituelle). Toutefois, toutes les idées nécessaires pour montrer la factorisation dans le cadre méromorphe, apparaissent déjà dans l'étude des fonctions holomorphes dans \mathcal{N}_α . Nous donnerons la propriété fondamentale de l'ensemble des zéros $\mathcal{Z} =$

$\{z_1 \leq \dots \leq z_i \leq \dots\}$ d'une fonction holomorphe dans \mathcal{N}_α , à savoir la *propriété de Blaschke-Dzhrbashyan d'ordre α* : $\sum (1 - |z_i|)^{\alpha+1} < \infty$. Cette propriété permet de construire une fonction holomorphe (un produit, fini ou infini) $A_\alpha(z, (z_i)) \in \mathcal{N}_\alpha$ dont l'ensemble des zéros est exactement \mathcal{Z} . Cette fonction que nous appellerons *le produit de Blaschke-Dzhrbashyan construit sur la suite \mathcal{Z}* , joue le même rôle que joue le produit de Blaschke pour la factorisation d'une fonction holomorphe dans la classe de Nevanlinna. C'est un outil essentiel pour la démonstration du théorème de factorisation de Dzhrbashyan : l'énoncé de ce théorème et sa démonstration seront donnés dans la section 4, en admettant la construction du produit de Blaschke-Dzhrbashyan.

La construction du produit repose sur la construction d'une fonction "canonique" dans \mathcal{N}_α qui s'annule uniquement en un point $u \in \mathbb{D}$, *le facteur de Dzhrbashyan $A_\alpha(z, u)$* . La définition de cette fonction —que nous avons passé beaucoup de temps à comprendre— sera donnée dans la section 4, et nous essaierons de la motiver. Toutefois la vérification de ses propriétés, comme montrer qu'elle appartient à \mathcal{N}_α , estimer sa norme sup sur les compacts de \mathbb{D} , ou majorer sa caractéristique de Dzhrbashyan, reposent sur des calculs pas difficiles mais un peu longs et seront donnés plus loin, pour ne pas surcharger le texte, dans la section 5.

1. LE THÉORÈME DE FACTORISATION DE NEVANLINNA

Si h est une fonction à valeurs réelles, on note h^+ la fonction égale à h où $h \geq 0$, et nulle sinon.

Définition 1. Une fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est dans la classe de Nevanlinna \mathcal{N} si et seulement si la fonction $T :]0, 1[\rightarrow]0, \infty[$ définie par

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$$

est bornée sur l'intervalle $]0, 1[$.

La fonction T ci-dessus est appelée *la caractéristique de Nevanlinna*.

1.1. Les produits de Blaschke.

Le théorème de factorisation de Nevanlinna fait intervenir des *produits de Blaschke, finis ou infinis*. Soit $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2 \dots\}$ un ensemble discret de points dans le disque ouvert \mathbb{D} , éventuellement répétés mais avec une multiplicité finie. Posons $B(z, z_i) = \frac{|z_i|}{z_i} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z}$ si $z_i \neq 0$ et $B(z, 0) = z$. Il est classique que le produit (fini ou infini)

$$(1) \quad \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}(z) = \prod_i B(z, z_i)$$

converge uniformément sur les compacts du disque si et seulement si *la condition de Blaschke*

$$(2) \quad \sum_i (1 - |z_i|) < \infty$$

est vérifiée. En effet, les fonctions $B(z, z_i)$ vérifient, pour tout z tel que $|z| \leq \rho < 1$:

$$|1 - B(z, z_i)| \leq \frac{2}{1 - \rho} (1 - |z_i|).$$

1.2. Propriétés des zéros des fonctions dans la classe de Nevanlinna.

Le fait d'appartenir à la classe de Nevanlinna pour une fonction holomorphe impose des conditions sur l'ensemble de ses zéros.

Soit $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2 \dots\}$ l'ensemble des zéros de f , répétés autant de fois que leur multiplicité. Près de l'origine, f s'écrit sous la forme $f(z) = az^m + O(z^{m+1})$ pour un entier $m \geq 0$ et $a \neq 0$. Pour tout $r < 1$, la formule de Jensen [Ru] donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \sum_{0 < |z_i| < r} \log \frac{r}{|z_i|} + \log(|a|r^m).$$

On en déduit que si $f \in \mathcal{N}$, la série à termes positifs $\sum_i \log \frac{1}{|z_i|}$ est convergente, et par conséquent, la série $\sum_i (1 - |z_i|)$ aussi. On obtient ainsi la propriété importante de la classe de Nevanlinna \mathcal{N} : si $f \in \mathcal{N}$, la série $\sum_i (1 - |z_i|)$ est convergente. En particulier le produit de Blaschke $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ est bien défini.

1.3. Le théorème de Nevanlinna.

Considérons alors la fonction holomorphe sans zéros $F = \frac{f}{\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}}$. Montrons que $F \in \mathcal{N}$. Soit $r \in]0, 1[$. Puisque $\log^+(ab) \leq \log^+(a) + \log^+(b)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}(re^{i\theta})} \right| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta - \int_0^{2\pi} \log |\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}(re^{i\theta})| d\theta \end{aligned}$$

car $|\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'autre part, $\int_0^{2\pi} \log |\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}(re^{i\theta})| d\theta$ est supérieur ou égal à $2\pi \log |ar^m|$ d'après la formule de Jensen. On en déduit que $F \in \mathcal{N}$.

Puisque F ne s'annule pas, il existe une fonction holomorphe $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $F = \exp g$. La partie réelle de g est la fonction harmonique $\log |F|$. L'hypothèse que $F \in \mathcal{N}$ signifie que la fonction $r \mapsto \int_0^{2\pi} \Re g^+(re^{i\theta}) d\theta$ est majorée supérieurement. La formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques dit que $\Re g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta$ pour tout r . Donc la fonction $r \mapsto \int_0^{2\pi} \Re g^-(re^{i\theta}) d\theta$ est minorée et finalement $r \mapsto \int_0^{2\pi} |\Re g(re^{i\theta})| d\theta$ est majorée ; en d'autres termes les mesures $|\Re g(re^{i\theta})| d\theta$ ont une masse totale majorée indépendamment de r . Soit alors μ une mesure de Radon réelle sur le cercle unité qui est valeur d'adhérence faible des mesures $\Re g(re^{i\theta}) d\theta$ lorsque $r \rightarrow 1$. D'après la formule de Poisson,

$$\Re g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) d\mu(\theta).$$

Comme μ est une mesure réelle,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) + iC$$

avec $C \in \mathbb{R}$ et par suite

$$F(z) = e^{iC} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right)$$

On a ainsi démontré la partie directe du théorème de Nevanlinna :

Théorème 2. *Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{N}$, il existe une mesure de Radon signée μ sur le cercle unité et $c \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(z) = e^{ic} \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}(z) \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right),$$

où $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ est le produit de Blaschke construit sur les zéros de f .

2. L'INTÉGRATION FRACTIONNAIRE

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $\Re\alpha > 0$. Soit $h : [0, r] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On définit, pour $x \in [0, r]$, une fonction mesurable I_α , l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de h en posant

$$I^\alpha h(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x h(t)(x-t)^{\alpha-1} dt.$$

D'après Fubini,

$$\int_0^r |I^\alpha h(x)| dx \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^r |h(t)|(r-t)^{\Re\alpha} dt.$$

Donc $I^\alpha h$ est intégrable si h l'est.

En particulier, pour tout réel $\gamma > -1$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re\alpha > 0$, on a :

$$(3) \quad I^\alpha \left(\frac{x^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \right) = \frac{x^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}.$$

Soit $h : [0, l[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable avec une dérivée intégrable ; une intégration par parties donne

$$I^\alpha h(x) = I^{\alpha+1} h'(x) + h(0) \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Le membre de droite dans cette égalité est bien défini pour tout α avec $\Re\alpha > -1$ ce qui permet de définir $I^\alpha h$ pour ces valeurs de α . On a en particulier $I^0 h = h$. On définit par récurrence $I^\alpha h$ pour toute fonction h de classe C^k lorsque $\Re\alpha > -k$: c'est une fonction holomorphe de α . Dans la suite, on supposera le plus souvent que $\Re\alpha > -1$.

2.1. Intégration fractionnaire des fonctions holomorphes.

Soit \mathbb{D}_ρ le disque de rayon ρ centré à l'origine. Soit $h : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z \neq 0$ un point du disque \mathbb{D}_ρ et soit c un chemin plongé de classe C^1 par morceaux, joignant l'origine à z . Il existe un seul chemin avec ces propriétés à isotopie près fixant les extrémités (on peut choisir par exemple le segment euclidien).

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re\alpha > 0$. On pose

$$I^\alpha h(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c h(\zeta)(z-\zeta)^{\alpha-1} d\zeta.$$

Pour définir $(z-\zeta)^{\alpha-1}$ le long de c , on définit l'argument du nombre complexe $(z-\zeta)$ en choisissant d'abord l'argument de z : ceci détermine de manière unique par continuité l'argument de $z-\zeta$ pour $\zeta \in c$. Par la formule de Cauchy, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du chemin c . Si on choisit comme chemin le segment $t \mapsto tz$ paramétré par $[0, 1]$, on trouve :

$$(4) \quad I^\alpha h(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^\alpha \int_0^1 h(tz)(1-t)^{\alpha-1} dt.$$

On voit ainsi que $I^\alpha h$ est une fonction holomorphe au voisinage de tout point de $\mathbb{D}_\rho \setminus \{0\}$ et la fonction $z \mapsto \frac{I^\alpha h(z)}{z^\alpha}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}_\rho \setminus \{0\}$. Dans un voisinage de 0, on peut écrire : $h(z) = h(0) + zh'(0) + to_1(z)$ avec $o_1(z) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow 0$. On en déduit que

$$\frac{I^\alpha h(z)}{z^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} h(0) \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} dt + o_2(z)$$

où $o_2(z) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow 0$. Donc pour $\Re\alpha > 0$, la fonction $\frac{I^\alpha h(z)}{z^\alpha}$ se prolonge continûment en 0 en y prenant la valeur $\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}h(0)$; elle est donc holomorphe sur \mathbb{D}_ρ .

Si $\Re\alpha > -1$, on raisonne comme dans le cas réel pour définir $I^\alpha h$ en utilisant la relation $I^\alpha h(z) = I^{\alpha+1}h'(z) + h(0)\frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ (valide lorsque $\Re\alpha > 0$). La relation (4) est toujours vérifiée.

Définition. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re\alpha > -1$. Soit $h : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On définit une fonction holomorphe $h_\alpha : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{C}$, appelée *l'intégrale fractionnaire d'ordre α de h* en posant :

$$h_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)z^\alpha} \int_c h(\zeta)(z-\zeta)^{\alpha-1} d\zeta$$

où c est un chemin C^1 par morceaux joignant 0 à z .

Remarque. D'après l'équation (3), on a :

$$\left(\frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \right)_\alpha = \frac{z^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

Plus généralement, l'opérateur $h \mapsto h_\alpha$ agit au niveau des coefficients de Taylor d'une fonction holomorphe h sur \mathbb{D}_ρ comme un *multiplicateur de Fourier* : si $h(z) = \sum_0^\infty h_k z^k$, alors

$$(5) \quad h_\alpha(z) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} h_k z^k.$$

2.2. Intégration fractionnaire des fonctions harmoniques.

Soit $u : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique. L'intégrale d'une fonction harmonique le long d'un chemin ne dépend pas que de la classe d'homotopie à extrémités fixes du chemin comme celle d'une fonction holomorphe et il faut d'abord préciser le chemin d'intégration.

On suppose $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$.

Soit $z = re^{i\theta}$ un point $\neq 0$. On utilise comme chemin le *segment* joignant 0 à z , et on définit $I_\alpha u(re^{i\theta})$ comme la valeur au point r de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction $t \mapsto u(te^{i\theta})$, c'est-à-dire :

$$I_\alpha u(re^{i\theta}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r u(te^{i\theta})(r-t)^{\alpha-1} dt.$$

On montre comme dans le cas holomorphe, que cette fonction a une singularité en r^α à l'origine et que la fonction $u_\alpha : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$u_\alpha(re^{i\theta}) = \frac{1}{r^\alpha} I_\alpha u(re^{i\theta}).$$

est continue. D'autre part, soit $h : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dont la partie réelle est u . Puisque $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Gamma(\alpha) \in \mathbb{R}$ et on remarque que $u_\alpha = \Re(h_\alpha)$ (c'est-à-dire que la partie réelle de h_α ne dépend pas du choix de h).

Définition. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Soit $u : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique et $h : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe de partie réelle u . On définit *l'intégrale fractionnaire d'ordre α de u* par :

$$u_\alpha = \Re(h_\alpha) = \Re \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)z^\alpha} \int_c h(\zeta)(z-\zeta)^{\alpha-1} d\zeta \right).$$

2.3. Intégration fractionnaire du logarithme du module des fonctions holomorphes.

Dans la suite, on aura besoin d'appliquer l'opérateur d'intégration fractionnaire à des fonctions du type $\log |F|$ où F est une fonction méromorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenant 0. Le cas où F est holomorphe et ne s'annule pas est un cas particulier du cas précédent puisque la fonction $\log |F|$ est alors harmonique. Nous supposons maintenant que l'ensemble \mathcal{Z} formé de zéros et des pôles de F n'est pas vide.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ $\Re \alpha > -1$. Supposons dans un premier temps que le point 0 n'est pas dans \mathcal{Z} . Soit $z \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$ et $c : [0, 1] \rightarrow \Omega$ un chemin de 0 à z disjoint de \mathcal{Z} . On choisit une branche de $\log F$ le long de c et on pose :

$$(6) \quad I_\alpha^c \log F(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c \log F(\zeta) (z - \zeta)^{\alpha-1} d\zeta.$$

Remarquons que ceci définit une fonction holomorphe au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$. En effet, soit c_0 un chemin de 0 à z_0 disjoint de \mathcal{Z} . Alors, si z est suffisamment voisin de z_0 , le chemin $t \mapsto \frac{z}{z_0} c_0(t) = c_z(t)$ est un chemin contenu dans $\Omega \setminus \mathcal{Z}$ qui joint 0 et z . La fonction $\log F$ est définie dans un voisinage de c_0 donc le long de c_z pour tout z suffisamment proche de z_0 . Par définition de $I_\alpha^c \log F$, on a alors :

$$I_\alpha^c \log F(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^\alpha \int_0^1 \log F\left(z \frac{c_0(t)}{z_0}\right) \left(1 - \frac{c_0(t)}{z_0}\right)^{\alpha-1} \frac{c_0'(t)}{z_0} dt,$$

expression qui dépend de z de façon holomorphe lorsque z est suffisamment proche de z_0 . Rappelons que le revêtement universel $\widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$ s'identifie au quotient de l'espace des chemins $c : [0, 1] \rightarrow \Omega \setminus \mathcal{Z}$ par la relation d'équivalence qui identifie les chemins homotopes à extrémités fixes. C'est une surface de Riemann pointée en 0, qui revêt $\Omega \setminus \mathcal{Z}$ par l'application $[c] \mapsto c(1)$ et la fonction $\log F$ y est définie de manière unique une fois qu'on a choisi $\log F(0)$. Les différentes fonctions $I_\alpha^c \log F$ associées aux différentes classes d'homotopie de chemin, définissent une fonction $I_\alpha \log F$ holomorphe globale. On pose pour $z \in \widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$, $z \neq 0$:

$$(\log F)_\alpha(z) = \frac{1}{z^\alpha} I_\alpha^c \log F(z).$$

C'est une fonction holomorphe qui se prolonge continûment en 0 d'après un argument déjà utilisé, définissant une fonction holomorphe sur $\widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$.

Supposons maintenant que $0 \in \mathcal{Z}$, c'est-à-dire que 0 est un pôle ou un zéro de F . On écrit $F(z) = z^k h(z)$, avec $k \neq 0$ est $h(0) \in \mathbb{C}$. Nous allons définir $(\log F)_\alpha$ comme fonction holomorphe sur $\widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$. Nous allons d'abord donner une façon de décrire ce revêtement. Fixons un chemin plongé de classe C^1 , $\kappa : [0, 1] \rightarrow \Omega$ avec $\kappa(0) = 0$ et $\kappa]0, 1]$ disjoint de \mathcal{Z} : ce chemin va jouer le rôle de point base. Considérons l'ensemble \mathcal{C} des chemins $c : [0, 1] \rightarrow \Omega$ de classe C^1 par morceaux tels que

- (1) $c(t) = \kappa(t)$ pour tout t dans un voisinage de 0 et
- (2) $c]0, 1]$ est disjoint de \mathcal{Z} .

On dit que deux chemins c_0 et c_1 appartenant à \mathcal{C} sont *équivalents* lorsqu'ils sont homotopes à travers une homotopie $(c_s)_{s \in [0, 1]}$, $c_s : [0, 1] \rightarrow \Omega$ telle que

- (1) $s \mapsto c_s(1)$ est constant,
- (2) $c_s]0, 1]$ est disjoint de \mathcal{Z} pour tout s et
- (3) pour tout t dans un voisinage de 0, $c_s(t) = \kappa(t)$ pour tout s .

Lorsqu'on munit \mathcal{C} de la topologie de la convergence uniforme, l'espace des classes d'équivalence est homéomorphe au revêtement universel de $\Omega \setminus \mathcal{Z}$, la projection de revêtement $[c] \mapsto c(1)$ est holomorphe.

Le chemin κ se relève naturellement dans $\widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$ et si on se donne une détermination de $\log z$ le long de ce chemin, on en déduit une détermination de $\log z$ sur tout le revêtement $\widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$. On définit d'abord $(\log \cdot)_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re \alpha > 0$ comme précédemment. Soit $c : [0, 1] \rightarrow \Omega$ un chemin

appartenant à \mathcal{C} avec $c(1) = z$. On pose :

$$I_\alpha^c(\log \cdot)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c \log \zeta (z - \zeta)^{\alpha-1} d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log c(t) (z - c(t))^{\alpha-1} c'(t) dt,$$

l'intégrale étant bien définie car l'intégrande est équivalent à $\log t$ au voisinage de 0, et car $\Re \alpha > -1$. On calcule cette intégrale en écrivant : $c(t) = \frac{c(t)}{z} \cdot z$. On a alors pour tout $t \neq 0$ $\log c(ct) = \log z + \log \frac{c(t)}{z}$. Donc

$$\begin{aligned} I_\alpha^c(\log \cdot)(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\log z + \log \frac{c(t)}{z}) z^{\alpha-1} (1 - \frac{c(t)}{z})^{\alpha-1} c'(t) dt. \\ &= \frac{z^\alpha \log z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \frac{c(t)}{z})^{\alpha-1} \frac{c'(t)}{z} dt + \frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log \frac{c(t)}{z} (1 - \frac{c(t)}{z})^{\alpha-1} \frac{c'(t)}{z} dt \\ &= \frac{z^\alpha \log z}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log t (1-t)^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

L'intégrale dans le membre de droite est égale à $\int_0^1 t^{\alpha-1} \log(1-t) dt = -\kappa_\alpha$ avec $\kappa_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+\alpha)}$. Donc

$$(7) \quad (\log \cdot)_\alpha(z) = \frac{1}{z^\alpha} I_\alpha^c(\log \cdot) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log z - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \kappa_\alpha.$$

Par prolongement analytique, la formule reste valable pour tout α , $\Re \alpha > -1$ car κ_α est méromorphe avec pôles aux entiers strictement négatifs.

Revenons à la fonction $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = z^k h(z)$, avec k entier $\neq 0$, et $h(0) \neq 0$. On avait déjà défini h_α comme fonction holomorphe sur le revêtement universel du complémentaire de son lieu de zéros ; on gardera la même notation h_α pour le relevé de celle-ci à $\widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$. On a défini $(\log \cdot)_\alpha$, directement comme fonction holomorphe sur $\widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$ (on aurait pu définir directement $(\log \cdot)_\alpha$ sur le revêtement universel de $\Omega \setminus \{0\}$ et ensuite relever celle-ci à $\widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$). On pose

$$(8) \quad (\log F)_\alpha = k (\log \cdot)_\alpha + (\log h)_\alpha.$$

On pourrait aussi raisonner de la manière suivante et obtenir le même résultat quand $\Re \alpha > 0$. Soit $z \in \widetilde{\Omega \setminus \mathcal{Z}}$, identifié à l'extrémité d'un chemin $c \in \mathcal{C}$. On a, comme ci-dessus une détermination de $\log z$ le long de c , déterminée à partir d'une détermination de $\log z$ le long de κ . Une détermination de $\log F$ est donc la fonction $k \log \cdot + \log h$. L'expression (8) est aussi égale à :

$$(\log F)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) z^\alpha} \int_c \log F(\zeta) (z - \zeta)^{\alpha-1} d\zeta,$$

l'intégrale étant absolument convergente en 0 puisque l'intégrande est équivalent à $\log t$ au voisinage de 0. On a ainsi défini $(\log F)_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re \alpha > -1$. C'est une fonction holomorphe sur le revêtement universel de $\Omega \setminus \{\mathcal{Z}\}$.

Maintenant, nous allons définir $(\log |F|)_\alpha$ mais cette fois comme *fonction sur \mathbb{D}* .

Nous supposons α réel, $\alpha > -1$.

L'intégrale fractionnaire d'ordre α $(\log \cdot)_\alpha$ de la fonction \log est la fonction holomorphe sur le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ donnée par (7) : en particulier, sa partie réelle passe au quotient en une fonction sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et on définit

$$(\log | \cdot |)_\alpha(z) = \Re (\log \cdot)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log |z| - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \kappa_\alpha.$$

Donc, c'est une fonction harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Plus loin, nous définirons la fonction $(\log |\cdot - u|)_\alpha$ pour $u \in \mathbb{D}$, $u \neq 0$. Mais, elle ne sera pas la partie réelle de $(\log \cdot - u)_\alpha$: ce sera une fonction continue sur $\mathbb{D} \setminus \{u\}$, harmonique dans le complémentaire du segment $[u, \frac{u}{|u|}]$.

Nous allons d'abord donner la définition de $(\log |F|)_\alpha$ mais en supposant que $F(0) \neq 0$. Soit c un chemin dans $\Omega \setminus \mathcal{Z}$ entre 0 et z . Une intégration par parties dans (6) donne alors :

$$I_\alpha^c \log F(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_c \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} (z-\zeta)^\alpha d\zeta + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log F(0) z^\alpha.$$

Si on raisonne comme dans le cas des fonctions harmoniques sur \mathbb{D} , on peut bien définir une fonction harmonique sur $\widetilde{\Omega \setminus \{\mathcal{Z}\}}$ en posant : $(\log |F|)_\alpha = \Re((\log F)_\alpha)$ et on aura

$$(9) \quad (\log |F|)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Re \left(\frac{1}{z^\alpha} \int_c \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} (z-\zeta)^\alpha d\zeta \right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log |F(0)|.$$

Mais cette fonction ne passe pas toujours au quotient en une fonction sur $\Omega \setminus \mathcal{Z}$ car l'intégrale du membre de droite dépend du chemin choisi c . En effet, soient c_1 et c_2 deux chemins plongés qui joignent 0 à z ; on peut supposer que c_1 et c_2 sont en position transverse et que $c_1 \cup (-c_2)$ est le bord d'une 2-chaîne à support compact $\Delta \subset \mathbb{D}$. La différence

$$\frac{1}{z^\alpha} \left(\int_{c_1} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} (z-\zeta)^\alpha d\zeta - \int_{c_2} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} (z-\zeta)^\alpha d\zeta \right)$$

est donnée par le théorème des résidus : elle est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus de la fonction $\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} (1 - \frac{\zeta}{z})^\alpha$ en ceux de ses pôles qui sont contenus dans Δ . Elle vaut donc la somme finie $2i\pi \sum \epsilon_i k_i (1 - \frac{z_i}{z})^\alpha$, où z_i est un zéro ou un pôle de F sur lequel la chaîne Δ a un degré non nul ϵ_i et où $k_i \in \mathbb{Z}$ est l'ordre de z_i . Comme la partie imaginaire de $\sum \epsilon_i k_i (1 - \frac{z_i}{z})^\alpha$ est en général non nulle, la partie réelle de l'intégrale dans le deuxième membre de (9) dépend du chemin c . Toutefois, supposons que tous les zéros z_i sont situés sur le segment $[0z]$. Comme nous avons supposé $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{z_i}{z} \in \mathbb{R}$ de sorte que l'expression (9) est indépendante de c . Considérons les chemins c entre 0 et z qui vérifient la condition (*) suivante : *ils sont isotopes à extrémités fixes dans le complémentaire de \mathcal{Z} à un chemin proche du segment $[0z]$* . Alors l'intégrale définie par le deuxième membre de (9) ne dépend pas du chemin c . On notera

$$(10) \quad (\log |F|)_\alpha(z) = \Re \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{z^\alpha} \int_c \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} (z-\zeta)^\alpha d\zeta \right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log |F(0)|,$$

mais en tenant compte de la restriction faite ci-dessus sur les chemins c .

Signalons toutefois que Dzhrbashyan définit directement (voir [D1, p. 580]) :

$$(\log |F|)_\alpha(z) = \Re \left(\frac{z}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 \frac{F'(tz)}{F(tz)} (1-t)^\alpha dt \right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log |F(0)|.$$

Dans cette formule, puisque $t \mapsto \frac{F'(tz)}{F(tz)} (1-t)^\alpha$ n'est pas intégrable aux points t_i tels que $t_i z$ est un zéro ou un pôle de F , il faut préciser le sens donné à l'intégrale du membre de droite. C'est celui de *valeur principale*, c'est-à-dire qu'on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{F'(tz)}{F(tz)} (1-t)^\alpha dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{t_1-\epsilon} \frac{F'(tz)}{F(tz)} (1-t)^\alpha dt + \int_{t_1+\epsilon}^{t_2-\epsilon} \frac{F'(tz)}{F(tz)} (1-t)^\alpha dt + \dots + \int_{t_k+\epsilon}^1 \frac{F'(tz)}{F(tz)} (1-t)^\alpha dt \right), \end{aligned}$$

où on a noté $t_1 \leq \dots \leq t_k$ les t_i tels que $t_i z$ est un zéro ou un pôle de F . On vérifie en utilisant la formule de Cauchy que la définition de Dzhrbashyan coïncide avec (9). La fonction ainsi définie est continue sur $\widetilde{\Omega \setminus \{\mathcal{Z}\}}$ et harmonique dans le complémentaire dans Ω de la réunion des demi-droites $[0, \infty[z_i$ pour $z_i \in \mathcal{Z}$.

Lorsque 0 est un zéro ou bien un pôle de F , on écrit $F = z^k h$, avec $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ et h une fonction méromorphe méromorphe sur \mathbb{D} telle que $h(0) \in \mathbb{C}$, $h(0) \neq 0$. On définit alors $(\log |F|)_\alpha = (\log |\cdot|)_\alpha + (\log |h|)_\alpha$.

2.4. Les noyaux de Cauchy, d'Herglotz et de Poisson d'ordre α .

Dzhrbashyan introduit des déformations des noyaux de Cauchy, de Poisson et de Herglotz, paramétrées par $\alpha \in \mathbb{C}$ ([D2], p. 576).

Pour z et $\zeta \in \mathbb{C}$, avec $|z| < |\zeta|$, le noyau de Cauchy d'ordre α est la fonction holomorphe définie par

$$C_\alpha(\zeta, z) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})^{1+\alpha}}.$$

On peut aussi le définir comme $C_\alpha(\zeta, z) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\zeta^\alpha}{(\zeta - z)^{1+\alpha}}$ (on définit les puissances d'ordre α ou $\alpha + 1$ qui apparaissent dans cette expression à partir de la détermination de l'argument de $(\zeta - z)$ au dénominateur obtenue par continuité à partir de l'argument de $(\zeta - 0)$ égal à l'argument de ζ choisi au numérateur). C'est une *déformation* du noyau de Cauchy classique : $C_0(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z} = C(\zeta, z)$.

Remarquons que du développement en série :

$$\frac{1}{(1 - z)^{\alpha+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} z^k,$$

on déduit que

$$(11) \quad C_\alpha(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(n + 1)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n.$$

On introduit le noyau d'Herglotz d'ordre α

$$S_\alpha(\zeta, z) = 2C_\alpha(\zeta, z) - C_\alpha(\zeta, 0)$$

qui pour $\alpha = 0$, vaut $S_0(\zeta, z) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z}$, c'est-à-dire le noyau S qui apparaît dans la formule de reproduction, due à Herglotz, des fonctions holomorphes sur le disque à partir de la valeur au bord de leur partie réelle lorsque celle-ci est positive.

Et on introduit finalement le noyau de Poisson d'ordre α

$$P_\alpha(\zeta, z) = \Re(\zeta S_\alpha(\zeta, z)),$$

qui coïncide pour $\alpha = 0$ avec le noyau de Poisson

$$P_0(\zeta, z) = \Re\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = P(\zeta, z).$$

Définition. Soit μ une mesure de Radon sur le cercle de rayon ρ . On appelle *transformée de Herglotz d'ordre α de μ* la fonction $\mathcal{H}_\alpha(\mu)(z) = \int_0^{2\pi} S_\alpha(\cdot, z) d\mu$, holomorphe sur \mathbb{D}_ρ .

2.5. Les noyaux d'ordre α et l'intégration fractionnaire.

Les noyaux d'ordre α de Cauchy, d'Herglotz et de Poisson d'ordre α sont reliés aux noyaux de Cauchy, d'Herglotz et de Poisson usuels par l'intégrale fractionnaire d'ordre α .

Par exemple, sur le disque $\mathbb{D}_{|\zeta|}$ de rayon $|\zeta|$, $z \mapsto C_\alpha(\zeta, z)$ possède le développement en série (11). On peut donc écrire, d'après la remarque (5) :

$$(C_\alpha(\zeta, \cdot)_\alpha(z) = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k = C_0(\zeta, z),$$

ce que l'on notera

$$(C_\alpha)_\alpha = C_0 = C.$$

On en déduit :

$$(S_\alpha)_\alpha = S_0 = S,$$

et, puisque $P_\alpha = \Re(S_\alpha)$:

$$(12) \quad (P_\alpha)_\alpha = \Re(S_0) = P_0 = P.$$

3. LES THÉORÈMES DE REPRODUCTION

Pour tout $\rho \leq 1$, on notera C_ρ le cercle de rayon ρ centré en l'origine, orienté comme bord du disque \mathbb{D}_ρ de rayon ρ . Les résultats de cette section sont ceux du Théorème 9.1 de [D2].

3.1. Reproduction des fonctions holomorphes.

Lemme 3. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $\Re \alpha > -1$. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\rho \leq 1$ et $z \in \mathbb{D}$, $|z| < \rho$. On a :*

$$(13) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} C_\alpha(\zeta, z) f_\alpha(\zeta) d\zeta,$$

intégrale sur le circuit représenté par le bord orienté du disque \mathbb{D}_ρ . De plus, pour $|z| < \rho < 1$,

$$(14) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) \Re f_\alpha(\zeta) d\zeta + \Im f(0)$$

$$(15) \quad = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(\rho e^{i\theta}, z) \Re f_\alpha(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} d\theta + \Im f(0)$$

Démonstration. Il suffit de vérifier la première équation sur les monômes. Le résultat en découlera pour les polynômes, puis pour les fonctions holomorphes par densité. Soit z^p un monôme tel que $p \geq 0$. Alors

$$(z^p)_\alpha = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} z^p.$$

D'autre part,

$$C_\alpha(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} C_\alpha(\zeta, z) \zeta^p d\zeta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right) \zeta^p \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{C_\rho} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \zeta^p \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, seul le terme d'indice $k = p$ est non nul. On en déduit (13).

Le même raisonnement donne : $\frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} C_\alpha(\zeta, z) \bar{\zeta}^p d\zeta = 0$ sauf quand $p = 0$, de sorte que

$$(16) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} C_\alpha(\zeta, z) \overline{f_\alpha(\zeta)} d\zeta = \overline{f(0)}$$

En additionnant (16) et (13), on obtient :

$$(17) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} 2C_\alpha(\zeta, z) \Re f_\alpha(\zeta) d\zeta = f(z) + \overline{f(0)}.$$

En revenant à l'expression de $C_\alpha(\zeta, 0)$, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} C_\alpha(\zeta, 0) \Re f_\alpha(\zeta) d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2i\pi} \int_{C_\rho} \Re f_\alpha(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \Gamma(\alpha + 1) \Re f_\alpha(0)$$

d'après la formule de la moyenne appliquée à $\Re f_\alpha$. Donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} C_\alpha(\zeta, 0) \Re f_\alpha(\zeta) d\zeta = \Re f(0).$$

Finalement, en retranchant cette égalité à (17) membre à membre, on obtient (14). □

3.2. Reproduction des fonctions harmoniques.

On supposera $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Soit $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Soit $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $u = \Re h$. D'après (14), on a :

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(\rho e^{i\theta}, z) \Re h_\alpha(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} d\theta + \Im f(0).$$

Par définition de l'intégrale fractionnaire d'une fonction harmonique, $u_\alpha = \Re h_\alpha$. On a donc :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \Re \left(\int_0^{2\pi} S_\alpha(\rho e^{i\theta}, z) u_\alpha(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} d\theta \right).$$

Donc, d'après la définition du noyau de Poisson d'ordre α , $P_\alpha(\zeta, z) = \Re(\zeta S_\alpha(\zeta, z))$, on a la formule de reproduction des fonctions harmoniques :

Proposition 4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Soit $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Alors pour tout $\rho < 1$ et pour tout z tel que $|z| < \rho$, on a :*

$$(18) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\alpha(\rho e^{i\theta}, z) u_\alpha(\rho e^{i\theta}) d\theta.$$

On en déduit la généralisation suivante du théorème d'Herglotz.

Proposition 5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors pour tout $\rho < 1$ et pour tout z tel que $|z| < \rho$, on a :*

$$(19) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\Re f)_\alpha(\zeta) d\zeta + \Im f(0).$$

4. LES CLASSES \mathcal{N}_α DE DZHRBASHYAN

Nous allons étudier la classe de Dzhrbashyan \mathcal{N}_α . Comme annoncé dans l'introduction, nous donnerons seulement la condition pour qu'une fonction *holomorphe* sur le disque

Notation. Si g est une fonction $\mathbb{D} \rightarrow [-\infty, \infty]$, on définit la fonction $g^+ : \mathbb{D} \rightarrow [0, \infty[$ par $g^+ = g$ sur l'ensemble $g^{-1}\{[0, \infty]\}$, et $g^+ = 0$ sur $g^{-1}\{-\infty, 0\}$.

Définition. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > -1$. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On appelle *caractéristique d'ordre α de f* la fonction $[0, 1[\rightarrow [0, \infty[$ définie par :

$$T_\alpha(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |f|)_\alpha^+(r e^{i\theta}) d\theta.$$

On dit que f appartient à la classe \mathcal{N}_α si sa caractéristique d'ordre α est bornée, c'est-à-dire si

$$m_\alpha(f) = \sup_{r < 1} T_\alpha(r, f) < \infty.$$

4.1. Zéros des fonctions de la classe \mathcal{N}_α .

Une propriété importante des fonctions dans la classe \mathcal{N}_α est que leurs zéros vérifient une condition du même type que la condition de Blaschke satisfaite par les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna.

Théorème 6. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ et soit $f \in \mathcal{N}_\alpha$ une fonction holomorphe. On note $\mathcal{Z} = \{z_i, i = 1, \dots\}$ l'ensemble des zéros non nuls de f ordonnés en une suite croissante $|z_i| \leq |z_{i+1}|$ et répétés avec multiplicité. Alors la série*

$$(20) \quad \sum_1^\infty (1 - |z_i|)^{\alpha+1}$$

est convergente.

Définition. On dira qu'une suite $(z_i, i = 1, \dots)$ de points de \mathbb{D} qui vérifie (20) satisfait la condition de Blaschke-Dzhrbashyan d'ordre α .

Démonstration. On a déjà rappelé que le résultat analogue pour la classe de Nevanlinna repose sur la formule de Jensen. Pour la classe \mathcal{N}_α , l'argument repose sur une généralisation due à Dzhrbashyan de la formule de Jensen.

Soit $0 < \rho < 1$; supposons que f ne s'annule pas sur le cercle de rayon ρ . On note z_1, \dots, z_k ceux des zéros dans \mathcal{Z} qui sont contenus dans le disque \mathbb{D}_ρ de rayon ρ . On suppose que f s'annule à l'ordre $m \geq 0$ en l'origine avec un développement en série $f(z) = cz^m + \dots$, $c \neq 0$. Alors la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)}{z^m \prod_1^k (1 - \frac{z}{z_i})}$$

est holomorphe et ne s'annule pas. On choisit une détermination de $\log F$. C'est une fonction holomorphe sur le disque \mathbb{D} , sa partie réelle est la fonction harmonique $\log |F|$. La théorème de reproduction d'Herglotz (19) dit que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|z| < \rho$, on a :

$$(21) \quad \log F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |F|)_\alpha(\zeta) d\zeta + \Im \log c.$$

Par ailleurs les logarithmes des fonctions F , f , $(1 - \frac{z}{z_i})$ et z ne sont pas bien définis mais chacun l'est dans le complémentaire des zéros, modulo un nombre imaginaire appartenant à $2i\pi\mathbb{Z}$. On écrira pour tout z dans le complémentaire des zéros :

$$(22) \quad \log F(z) = \log f(z) - m \log z - \sum_1^k \log(1 - \frac{z}{z_i})$$

mais en comprenant que la différence entre les deux membres appartient à $2i\pi\mathbb{Z}$. Par ailleurs, on a défini l'opérateur $u \mapsto u_\alpha$, pour les fonctions u de la forme $\log |g|$ où g est holomorphe sur \mathbb{D} et cet opérateur vérifie $(uv)_\alpha = u_\alpha + v_\alpha$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |F|)_\alpha(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |f|)_\alpha(\zeta) d\zeta \\ &- \frac{m}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |\cdot|)_\alpha(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \sum_1^k \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{z_i}|)_\alpha(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

La fonction $(\log |\cdot|)_\alpha$ a été calculée (cf. (7)) ; elle vaut :

$$(\log |\cdot|)_\alpha(z) = \Re (\log \cdot)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log |z| - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \kappa_\alpha$$

pour la constante $\kappa_\alpha = \sum_1^\infty \frac{1}{k(k+\alpha)}$.

En faisant $z = 0$ dans (21) et en utilisant l'expression de $(\log |\cdot|)_\alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^k \int_{C_\rho} \left(\log \left| 1 - \frac{\cdot}{z_i} \right| \right)_\alpha (\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} (\log |f|)_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{m}{2i\pi} \int_{C_\rho} (\log |\cdot|)_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} - \log |F(0)| \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} (\log |f|)_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} - m \left(\frac{\log \rho}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{k_\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) - \log |c|. \end{aligned}$$

Cette formule est une généralisation de la formule de Jensen en ce sens qu'elle donne une relation entre la moyenne de $(\log |f|)_\alpha$ sur le cercle de rayon ρ et les zéros de f de module $\leq \rho$. Nous étudierons en détail la fonction $\left(\log \left| 1 - \frac{\cdot}{z_i} \right| \right)_\alpha$ dans la prochaine section et donnerons en particulier l'équivalent suivant de ses moyennes circulaires (33) :

$$c_1 \left(1 - \frac{z_i}{\rho} \right)^{\alpha+1} \leq \int_{C_\rho} \left(\log \left| 1 - \frac{\cdot}{z_i} \right| \right)_\alpha (\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \leq c_2 \left(1 - \frac{z_i}{\rho} \right)^{\alpha+1}$$

pour des constantes c_1 et c_2 qui ne dépendent que d'un minorant non nul de $|z_i|$.

On en déduit que

$$c_1 \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{|z_i|}{\rho} \right)^{\alpha+1} \leq \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} (\log |f|)_\alpha (\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - m(\log \rho - \Re k_\alpha) - \log |c|.$$

Comme $f \in \mathcal{N}_\alpha$, le membre de droite est majoré indépendamment de ρ . En faisant tendre $\rho \rightarrow 1$, on obtient le résultat cherché : $\sum_1^\infty (1 - |z_i|)^{\alpha+1} < \infty$. □

4.2. Factorisation des fonctions de la classe \mathcal{N}_α .

Le résultat principal de Mkhitar Dzhrbashyan dans [D1, D2] est *un théorème de factorisation pour les fonctions dans la classe \mathcal{N}_α* qui est l'analogie du théorème de Nevanlinna : toute fonction $f \in \mathcal{N}_\alpha$ s'écrit de manière unique comme le produit d'une fonction $\mathcal{A}_\alpha(z, (z_i)) \in \mathcal{N}_\alpha$ qui s'annule exactement aux zéros de f et d'une fonction qui est l'exponentielle de la transformée de Herglotz d'ordre α d'une mesure de Radon sur le cercle $\partial\mathbb{D}$. La fonction $\mathcal{A}_\alpha(z, (z_i))$ est l'analogie du *produit de Blaschke*, fini ou infini, associé à une suite de points dans \mathbb{D} qui vérifie la condition de Blaschke. Dzhrbashyan la définit comme un produit fini ou infini de fonctions élémentaires $A_\alpha(z, z_i)$; la fonction $A_\alpha(z, z_i)$ qui appartient à \mathcal{N}_α et s'annule uniquement en z_i , est ainsi l'analogie du *facteur de Blaschke*. Pour cette raison, on l'appellera *le facteur de Blaschke-Dzhrbashyan*. L'une des difficultés principales des articles [D1, D2] est la construction des fonctions $A_\alpha(z, z_i)$ et l'étude de leurs propriétés.

Nous donnerons l'énoncé précis du théorème de factorisation pour la classe \mathcal{N}_α un peu plus loin. Pour le moment, nous allons essayer de motiver la définition des facteurs $A_\alpha(z, z_i)$: lorsqu'on écrit la formule de reproduction d'Herglotz d'ordre α exprimant f à partir des valeurs de $(\log |f|)_\alpha$ sur le cercle de rayon ρ , on voit apparaître des facteurs $A_\alpha^\rho(z, z_i)$. Ces facteurs seront des approximations des facteurs de Blaschke-Dzhrbashyan. Venons-en aux détails et reprenons les notations introduites dans le paragraphe précédent. En utilisant (21) et (22), on a pour tout $z, |z| < \rho$:

$$(23) \quad \log f(z) = m \left(\log z - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |\cdot|)_\alpha (\zeta) d\zeta \right)$$

$$(24) \quad + \sum_1^k \left(\log \left(1 - \frac{z}{z_i} \right) - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) \left(\log \left| 1 - \frac{\cdot}{z_i} \right| \right)_\alpha (\zeta) d\zeta \right)$$

$$(25) \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |f|)_\alpha (\zeta) d\zeta,$$

toujours au sens que la différence des deux membres est un nombre $\in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Nous allons étudier les fonctions holomorphes qui apparaissent dans le membre de droite de cette expression.

Pour la première intégrale du membre de droite, on a déjà vu que $(\log |\cdot|)_\alpha(z) = \frac{\log |z|}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ pour la constante $\kappa_\alpha = \sum_1^\infty \frac{1}{k(k+\alpha)}$ (cf. (7)). Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |\cdot|)_\alpha(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{\log \rho}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \int_{C_\rho} \left(\frac{2}{(1-\frac{z}{\zeta})^{\alpha+1}} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{\log \rho}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

On en déduit que la première ligne du membre de droite ci-dessus vaut

$$m \left(\log z + \frac{\log \rho}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right).$$

La deuxième ligne est plus difficile à calculer et son étude repose sur des estimées qui seront faites dans le prochain chapitre.

Définition. Soit $u \in \mathbb{D}$, $u \neq 0$. Soit $\rho > |u|$. On définit d'abord une fonction holomorphe sur \mathbb{D}_ρ par :

$$(26) \quad v_\alpha^\rho(z, u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) d\zeta.$$

On définit une fonction holomorphe sur \mathbb{D}_ρ par :

$$(27) \quad A_\alpha^\rho(z, u) = \left(1 - \frac{z}{u}\right) \exp(-v_\alpha^\rho(z, u)) = \left(1 - \frac{z}{u}\right) \exp\left(-\frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) d\zeta\right).$$

Lorsque $\rho \rightarrow 1$, on vérifie facilement en utilisant la continuité de $\left(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|\right)_\alpha$ sur un voisinage de C_1 (Lemme 11) que $A_\alpha^\rho(\cdot, u)$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{D} vers la fonction $A_\alpha^1(\cdot, u)$. On notera pour simplifier

$$A_\alpha(\cdot, u) = A_\alpha^1(\cdot, u) = \left(1 - \frac{z}{u}\right) \exp\left(-\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) d\zeta\right).$$

Remarque. La fonction $A_\alpha(\cdot, u)$ a un zéro simple en $z = u$. Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{D} telle que $|u_i| \rightarrow 1$ quand $i \rightarrow \infty$; la suite $(A_\alpha(\cdot, u_i))$ converge alors uniformément sur les compacts vers la fonction constante $\equiv 1$ d'après le Lemme 13. La fonction $(A_\alpha(\cdot, u))$ va jouer le rôle des facteurs de Blaschke dans le théorème de Nevanlinna. On vérifie d'ailleurs que pour $\alpha = 0$, c'est le facteur de Blaschke classique : $A_0(z, u) = \frac{u - z}{1 - \bar{u}z} \frac{|u|}{u}$. On appellera $(A_\alpha(\cdot, u))$ *facteur de Blaschke-Dzhrbashyan*.

Revenons à l'expression de $\log f$ sur \mathbb{D}_ρ (23). En prenant l'exponentielle des deux membres de cette expression on obtient une première factorisation de f : pour tout $z \in \mathbb{D}_\rho$, on a :

$$(28) \quad f(z) = \rho^{\frac{m}{\Gamma(\alpha+1)}} \kappa_\alpha^{\frac{\Gamma(\alpha)}{m}} z^m \left(\prod_{i=1}^k A_\alpha^\rho(z, z_i) \right) \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |f|)_\alpha(\zeta) d\zeta\right).$$

La fonction $\left(\prod_{i=1}^k A_\alpha^\rho(z, z_i)\right)$ joue le rôle d'un *produit de Blaschke fini*; nous allons d'abord

montrer tout de suite que lorsque $\rho \rightarrow 1$, les fonctions $\left(\prod_{|z_i| < \rho} A_\alpha^\rho(z, z_i)\right)$ convergent uniformément sur les compacts de \mathbb{D} vers une fonction holomorphe $A_\alpha(z, (z_i)) \in \mathcal{N}_\alpha$ qui s'annule exactement aux points z_i .

Quant au terme dans l'exponentielle, l'hypothèse $f \in \mathcal{N}_\alpha$ entraîne qu'il converge vers la transformée de Herglotz d'une mesure de Radon sur $\partial\mathbb{D}$. Nous donnerons les détails un peu plus loin.

Nous allons d'abord construire les *produits infinis de Blaschke-Dzhrbashyan*. Leur construction repose sur des estimées sur les fonctions $(\log | \cdot - u |)_\alpha$. Ces estimées, fines mais pas difficiles, seront démontrées dans les chapitres suivants.

Proposition 7. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Soit $(u_i)_{i=1}^\infty$ une suite dans \mathbb{D} telle que $\sum_{i=1}^\infty (1 - |u_i|)^{\alpha+1} < \infty$. Alors,*

- (1) *la suite des produits $\prod_{|u_i| \leq \rho} A_\alpha(z, u_i)$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{D} lorsque $\rho \rightarrow 1$. La fonction holomorphe limite sera notée $A_\alpha(z, (u_i))$.*
- (2) *la suite $(\prod_{|u_i| < \rho} A_\alpha^\rho(z, u_i))$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{D} vers $A_\alpha(z, (u_i))$ lorsque $\rho \rightarrow 1$.*

Définition. L'ensemble des zéros de $A_\alpha(z, (u_i))$ est exactement (u_i) . La fonction holomorphe $A_\alpha(z, (u_i))$ est appelée le *produit de Blaschke-Dzhrbashyan associé à la suite (u_i)* . Pour $\alpha = 0$ c'est le produit de Blaschke habituel.

Démonstration. Nous utiliserons les lemmes (13) et (14) qui seront démontrés plus loin. Rappelons que pour tout $\rho \leq 1$,

$$A_\alpha^\rho(z, u) = \left(1 - \frac{z}{u}\right) \exp\left(-\frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) d\zeta\right).$$

Soit $\rho' < 1$. D'après l'hypothèse $\sum_{i=1}^\infty (1 - |u_i|)^{\alpha+1} < \infty$, le Lemme (13) entraîne que la suite des

produits $\prod_{\rho' < |u_i| \leq \rho} A_\alpha^\rho(z, u_i)$ est uniformément de Cauchy sur $\mathbb{D}_{\rho'}$ lorsque $\rho \rightarrow 1$. Donc la suite

$\prod_{|u_i| \leq \rho} A_\alpha^\rho(z, u_i)$ restreinte à $\mathbb{D}_{\rho'}$ converge uniformément lorsque $\rho \rightarrow 1$.

La démonstration de (2) est très proche. Pour $\rho'' > \rho'$, on considère les quotients

$$\frac{\prod_{\rho'' < |u_i| \leq \rho} A_\alpha^\rho(z, u_i)}{\prod_{\rho'' < |u_i| \leq \rho} A_\alpha(z, u_i)} = \prod_{\rho'' < |u_i| \leq \rho} \frac{A_\alpha^\rho(z, u_i)}{A_\alpha(z, u_i)}.$$

Si on choisit ρ'' suffisamment proche de 1, on pourra rendre tous ces quotients arbitrairement proches de 1 uniformément sur $\mathbb{D}_{\rho'}$, d'après le Lemme (14). Quant au produit fini

$\prod_{|u_i| \leq \rho''} \frac{A_\alpha^\rho(z, u_i)}{A_\alpha(z, u_i)}$, il tend vers 1 lorsque $\rho \rightarrow 1$, toujours d'après le Lemme (14). Donc les quotients

$\frac{\prod_{|u_i| \leq \rho} A_\alpha^\rho(z, u_i)}{\prod_{|u_i| \leq \rho} A_\alpha(z, u_i)}$ tendent vers 1 avec ρ . □

Proposition 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Soit $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite dans \mathbb{D} telle que $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |u_i|)^{\alpha+1} < \infty$. Alors $A_{\alpha}(\cdot, (u_i))$ et $\frac{1}{A_{\alpha}(\cdot, (u_i))}$ appartiennent à \mathcal{N}_{α} .

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du résultat correspondant pour les facteurs de Blaschke-Dzhrbashyan qui sera démontré plus loin (Lemme 15) : pour tout $u \in \mathbb{D}$, $|u| \geq \rho' > 0$, $A_{\alpha}(\cdot, u)$ et $\frac{1}{A_{\alpha}(\cdot, u)}$ appartiennent à \mathcal{N}_{α} et leurs caractéristiques d'ordre α sont toutes les deux majorées par $c(1 - |u|)^{\alpha+1}$ pour une constante c qui ne dépend que de ρ' . \square

4.3. Le théorème de factorisation de Dzhrbashyan.

Nous ne donnerons l'énoncé de ce théorème que dans le cas des fonctions holomorphes.

Théorème 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Soit $f \in \mathcal{N}_{\alpha}$ une fonction holomorphe. Alors, il existe $c \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, et une mesure de Radon réelle μ sur le cercle C_1 telle que

$$(29) \quad f(z) = cz^m A_{\alpha}(z, (z_i)) \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{\alpha}(e^{i\theta}, z) e^{i\theta} d\mu(\theta) \right),$$

où $A_{\alpha}(z, (z_i))$ est le produit de Blaschke-Dzhrbashyan associé aux zéros non nuls de f . De plus il existe une unique mesure de Radon μ sur le cercle ayant cette propriété.

Démonstration. Faisons tendre $\rho \rightarrow 1$ dans l'expression (28). Pour tout $\rho > 0$, on définit une mesure absolument continue μ_{ρ} sur le cercle en posant :

$$d\mu_{\rho} = (\log |f|)_{\alpha}(\rho e^{i\theta}) d\theta.$$

On utilise la décomposition de μ_{ρ} en partie positive et partie négative : $\mu_{\rho} = \mu_{\rho}^{+} - \mu_{\rho}^{-}$, où $\mu_{\rho}^{\pm} = (\log |f|)_{\alpha}^{\pm}(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$. Puisque $f \in \mathcal{N}_{\alpha}$, la partie positive de cette mesure $\mu_{\rho}^{+} = (\log |f|)_{\alpha}^{+}(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$ a une masse totale bornée supérieurement indépendamment de ρ . Montrons que la masse totale de la partie négative est aussi bornée indépendamment de ρ . On considère la fonction holomorphe sans zéros F telle que $f = cz^m A_{\alpha}(z, (z_i)) F$. Comme F ne s'annule pas, $\log |F|$ est harmonique et donc pour tout $\rho \leq 1$, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |F|)_{\alpha}^{+}(\rho e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |F|)_{\alpha}^{-}(\rho e^{i\theta}) d\theta = (\log |F|)_{\alpha}(0) = \log |F|(0).$$

Donc $F \in \mathcal{N}_{\alpha}$ si et seulement si $\frac{1}{F} \in \mathcal{N}_{\alpha}$. Or $F \in \mathcal{N}_{\alpha}$: en effet, $F = f \frac{1}{cz^m A_{\alpha}(z, (z_i))}$ où $f \in \mathcal{N}_{\alpha}$ par hypothèse et où $\frac{1}{A_{\alpha}(z, (z_i))} \in \mathcal{N}_{\alpha}$ d'après la Proposition 8. Donc $\frac{1}{F} \in \mathcal{N}_{\alpha}$. Par le même argument, en écrivant $\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \frac{1}{cz^m A_{\alpha}(z, (z_i))}$, on trouve que $\frac{1}{f}$ appartient aussi à \mathcal{N}_{α} ce qui équivaut à dire que la masse totale de μ_{ρ}^{-} est bornée indépendamment de ρ . Donc, il existe une suite (ρ_i) tendant vers 1 et une mesure de Radon réelle μ sur C_1 telle que (μ_{ρ_i}) converge faiblement vers μ . Cette mesure vérifie la formule (29) du théorème.

Pour montrer l'unicité de la mesure μ , on suppose que μ_1 et μ_2 sont deux mesures de Radon qui vérifient (29). Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que la mesure de Radon $\nu = \mu_1 - \mu_2$ vérifie pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$(30) \quad \int_0^{2\pi} S_{\alpha}(e^{i\theta}, z) e^{i\theta} d\nu(\theta) = 2i\pi k$$

Donc $\int_0^{2\pi} \Re \left(S_{\alpha}(e^{i\theta}, z) e^{i\theta} \right) d\nu(\theta) = \Re \left(\int_0^{2\pi} S_{\alpha}(e^{i\theta}, z) e^{i\theta} d\nu(\theta) \right) = 0$, c'est-à-dire, d'après la définition du noyau de Poisson d'ordre α , $\int_0^{2\pi} P_{\alpha}(e^{i\theta}, z) d\nu(\theta) = 0$. En appliquant l'opérateur

d'intégration d'ordre α aux deux membres et en utilisant (12), on en déduit que $\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) d\nu(\theta) =$

0, autrement dit, que la transformée de Poisson (usuelle) de la mesure μ est la fonction nulle. Ceci signifie que μ est la mesure nulle. \square

Dans le même article, Dzhrbashyan démontre aussi la réciproque du Théorème 9.

Théorème 10. *Soit (z_i) une suite dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ qui vérifie la condition de Blaschke-Dzhrbashyan d'ordre α , soit μ une mesure de Radon réelle sur C_1 , soient $c \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, alors la fonction holomorphe*

$$f(z) = cz^m A_\alpha(z, (z_i)) \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{i\theta}, z) e^{i\theta} d\mu(\theta) \right)$$

appartient à \mathcal{N}_α .

Démonstration. Puisque la classe \mathcal{N}_α est stable par multiplication, que z^m et, sous notre hypothèse, $A_\alpha(z, (z_i))$ appartiennent à \mathcal{N}_α , il suffit de vérifier que la fonction

$$g(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{i\theta}, z) e^{i\theta} d\mu(\theta) \right)$$

appartient aussi à \mathcal{N}_α . Or

$$\log |g|(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re \left(S_\alpha(e^{i\theta}, z) e^{i\theta} \right) d\mu(\theta)$$

et donc

$$(\log |g|)_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) d\mu(\theta).$$

Écrivons la décomposition $\mu = \mu^+ - \mu^-$ comme différence de deux mesures de Radon positives. Alors, pour tout $r < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |g|)_\alpha^+(re^{i\psi}) d\psi &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, re^{i\psi}) d\mu^+(\theta) d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\mu^+(\theta). \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{N}_\alpha$ \square

Une conséquence des deux derniers théorèmes est qu'on peut paramétrer les fonctions holomorphes dans \mathcal{N}_α avec un énoncé analogue au théorème de paramétrisation de Nevanlinna.

5. QUELQUES CALCULS

Le but de cette section est de démontrer les résultats techniques que nous avons admis dans la section précédente dans l'étude des fonctions holomorphes appartenant à \mathcal{N}_α . Dans les deux premiers paragraphes, nous étudierons la fonction $(\log | \cdot - u |)_\alpha$ qui est à la base de la définition de $v_\alpha^\rho(\cdot, u)$. Dans le premier paragraphe, nous étudierons son comportement au voisinage de u . Dans le second, nous calculerons ses moyennes sur les cercles centrés à l'origine. Nous donnerons en particulier l'encadrement (33) que nous avons utilisé pour montrer que les zéros des fonctions holomorphes de \mathcal{N}_α vérifient la condition de Dzhrbashyan d'ordre α . Ensuite, nous étudierons les facteurs de Blaschke-Dzhrbashyan $A_\alpha^\rho(z, u)$ et $A_\alpha(z, u)$. Nous montrerons les lemmes 13 et 14 qui estiment la vitesse à laquelle ces facteurs tendent vers 1 uniformément sur les compacts de \mathbb{D} lorsque $|u| \rightarrow 1$. Dans le quatrième paragraphe, nous montrerons (Lemme 15) qu'ils appartiennent à \mathcal{N}_α en donnant un majorant explicite de leur caractéristique de Dzhrbashyan d'ordre α .

5.1. Étude de la fonction $(\log |\cdot - u|)_\alpha$.

L'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction \log a été donnée dans (7). Nous supposons toujours dans la suite $u \neq 0$.

Lemme 11. *Soit $u \in \mathbb{C}$, $0 < |u| \leq 1$. Alors*

- (1) *si $\alpha > 0$, $(\log |\cdot - u|)_\alpha$ est continue sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$;*
- (2) *si $-1 < \alpha < 0$, $(\log |\cdot - u|)_\alpha$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{u\}$ et $|(\log |\cdot - u|)_\alpha(z)| \leq C|z - u|^\alpha$ pour une constante C qui ne dépend que d'un minorant > 0 de $|u|$;*
- (3) *$(\log |\cdot - u|)_\alpha$ est harmonique dans le complémentaire du segment $[u, \frac{u}{|u}|[$;*
- (4) *lorsque $\alpha > 0$, $(\log |\cdot - u|)_\alpha$ est sous-harmonique.*

Démonstration. La fonction $(\log(\cdot - u))_\alpha$ est holomorphe sur $\widetilde{\overline{\mathbb{D}} \setminus \{u\}}$. Considérons la surface à bord $\overline{\mathbb{D}_u}$ définie comme l'adhérence dans $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{u\}$ d'une composante de la préimage de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{[u, \frac{u}{|u}|[$, le complémentaire du segment $[u, \frac{u}{|u}|[$ dans $\overline{\mathbb{D}}$; $\overline{\mathbb{D}_u}$ est homéomorphe à la réunion de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{[u, \frac{u}{|u}|[$ et de deux copies du segment $]u, \frac{u}{|u}|[$. Si z est un point de $[u, \frac{u}{|u}|[$, on notera z^+ et z^- ses deux relevés dans $\overline{\mathbb{D}_u}$. Choisissons l'indexation z^+ ou z^- de sorte que la variation de $\log(\cdot - u)$ entre z^+ et z^- soit égale à $2i\pi$. On compare les valeurs de $(\log(\cdot - u))_\alpha$ en deux points équivalents z^+ et z^- au-dessus d'un point $z \neq u$ en revenant à la définition de l'intégrale d'ordre α (pour $\alpha > 0$ et aussi pour $\alpha > -1$). On trouve :

$$(31) \quad (\log(\cdot - u))_\alpha(z^+) - (\log(\cdot - u))_\alpha(z^-) = \frac{1}{z^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_u^z 2i\pi(z - \zeta)^{\alpha-1} d\zeta = \frac{2i\pi}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(1 - \frac{|u|}{|z|}\right)^\alpha.$$

Donc la partie réelle, $\Re(\log(\cdot - u))_\alpha$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{u\}$: c'est la fonction $(\log |\cdot - u|)_\alpha$ qui est donc harmonique (on aurait pu démontrer ce point avant, mais on aura besoin plus loin de connaître la valeur exacte de la variation de $(\log(\cdot - u))_\alpha$).

Pour démontrer les points (1) et (2), on considère d'abord $z \neq 0$ tel que $z \notin [u, \frac{u}{|u}|[$. Après un changement de variables et une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} (\log(\cdot - u))_\alpha(z) &= \frac{1}{z^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^z \log(tz - u)(z - tz)^{\alpha-1} z dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \log(-u) + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t - \frac{u}{z}} dt \end{aligned}$$

modulo $2i\pi\mathbb{Z}$. Lorsque $z \in]u, \frac{u}{|u}|[$, on a la même relation, l'intégrale étant prise au sens de valeur principale (toujours modulo $2i\pi\mathbb{Z}$). Donc pour tout $z \neq 0$ et $\neq u$, on a :

$$(\log |\cdot - u|)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \log |u| + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \Re \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t - \frac{u}{z}} dt \right),$$

en convenant que lorsque $z \in]u, \frac{u}{|u}|[$, l'intégrale est au sens de valeur principale.

Pour simplifier les notations, on définit une fonction ω_α pour tout $\alpha > -1$ en posant pour $\xi \in \mathbb{C}$:

$$\omega_\alpha(\xi) = \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{\xi - t} dt$$

l'intégrale étant au sens de valeur principale lorsque $\xi \in]0, 1[$. Si $\alpha \geq 0$, cette intégrale est définie pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$ et si $-1 < \alpha < 0$, elle est définie pour tout $\xi \neq 0$ et $\neq 1$. Ainsi

$$(\log |\cdot - u|)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \log |u| - \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \Re \left(\omega_\alpha\left(\frac{u}{z}\right) \right)$$

Soit $\alpha > 0$. Nous allons montrer que ω_α est continue au point 1, ce qui entraînera le point (1) du Lemme. Soit $\xi \neq 1$; choisissons une branche du logarithme sur un ouvert simplement

connexe bien choisi de \mathbb{C}^* et tel que $\log(1 - \xi) + \log\left(\frac{1}{1 - \xi}\right) = 0$. On aura alors :

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(\xi) &= \int_0^1 \frac{s^\alpha}{s - (1 - \xi)} ds \\ &= (1 - \xi)^\alpha \int_0^{\frac{1}{1 - \xi}} \frac{\sigma^\alpha}{\sigma - 1} d\sigma \end{aligned}$$

et aussi :

$$\omega_\alpha(1) = \frac{1}{\alpha} = (1 - \xi)^\alpha \int_0^{\frac{1}{1 - \xi}} \sigma^{\alpha - 1} d\sigma.$$

Donc

$$\omega_\alpha(\xi) - \omega_\alpha(1) = (1 - \xi)^\alpha \int_0^{\frac{1}{1 - \xi}} \frac{\sigma^\alpha}{\sigma(\sigma - 1)} d\sigma.$$

On en déduit que, pour tout ξ suffisamment proche de 1, $\Re(\omega_\alpha(\xi) - \omega_\alpha(1)) \leq C|\xi - 1|$ avec une constante C indépendante de ξ .

On a utilisé ici la condition $\alpha > 0$ pour garantir l'intégrabilité de $\sigma^{\alpha - 1}$ près de 0. Si $-1 < \alpha < 0$, on écrit

$$\omega_\alpha(\xi) = (1 - \xi)^\alpha \left(\int_0^{\xi_2} \frac{\sigma^\alpha}{\sigma - 1} d\sigma + \int_{\xi_2}^{\frac{1}{1 - \xi}} \frac{\sigma^\alpha}{\sigma - 1} d\sigma \right),$$

où ξ_2 est le point du rayon $[0, \frac{1}{1 - \xi}]$ à distance 2 de l'origine. Alors l'intégrale $\int_0^{\xi_2} \frac{\sigma^\alpha}{\sigma - 1} d\sigma$ est majorée en module indépendamment de ξ ; et $\int_{\xi_2}^{\frac{1}{1 - \xi}} \frac{\sigma^\alpha}{\sigma - 1} d\sigma$ est $O\left(\frac{1}{|\xi - 1|^\alpha}\right)$. On en déduit que lorsque ξ est proche de 1, $\Re(\omega_\alpha(\xi)) \leq C|\xi - 1|^\alpha$ avec une constante C indépendante de ξ . Le point (2) du Lemme en découle.

Pour le point (3), rappelons qu'une fonction semi-continue supérieurement $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est *sous-harmonique* si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{D}$, pour tout $r \geq 0$ tel que le disque de rayon r centré en z est contenu dans \mathbb{D} , on a : $h(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + re^{i\theta}) d\theta$. Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $z \mapsto \log|tz - u|$ est sous-harmonique. D'autre part, pour $\alpha > 0$, on a :

$$(\log|\cdot - u|)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log|tz - u|(1 - t)^{\alpha - 1} dt.$$

Donc $(\log|\cdot - u|)_\alpha$ étant une moyenne de fonctions sous-harmoniques est elle-même sous-harmonique. \square

5.2. Étude des moyennes de $(\log|\cdot - u|)_\alpha$.

Les moyennes de $(\log|\cdot - u|)_\alpha$ sur les cercles centrés en 0 sont données par le résultat suivant. C'est le lemme suivant.

Lemme 12. *Soit $u \neq 0 \in \overline{\mathbb{D}}$. Soit $\alpha > -1$. Alors, pour tout $\rho \leq 1$, on a :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log|\cdot - u|)_\alpha(\rho e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \log|u| + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_{\frac{|u|}{\rho}}^1 \frac{(1 - t)^\alpha}{t} dt.$$

Démonstration. Soit $\rho \leq |u|$. Alors $(\log|\cdot - u|)_\alpha$ est harmonique sur le disque de rayon ρ et la formule de la moyenne donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log|\cdot - u|)_\alpha(\rho e^{i\theta}) d\theta = (\log|\cdot - u|)_\alpha(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \log|u|.$$

Supposons $\rho > |u|$. Rappelons que la fonction $(\log(\cdot - u))_\alpha$ est holomorphe sur le revêtement universel $\mathbb{C} \setminus \{u\}$ de $\mathbb{C} \setminus \{u\}$. On note C'_ρ la préimage du cercle de rayon ρ dans la surface $\overline{\mathbb{D}_u}$; comme $\rho \geq |u|$, c'est un arc joignant les points $\rho \frac{u^-}{|u|}$ et $\rho \frac{u^+}{|u|}$.

On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log|\cdot - u|)_\alpha (\rho e^{i\theta}) d\theta = \Re \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\rho} (\log(\cdot - u))_\alpha (z) \frac{dz}{z} \right).$$

D'après la définition de $(\log(\cdot - u))_\alpha$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\rho} (\log(\cdot - u))_\alpha (z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\rho} \frac{1}{\Gamma(\alpha) z^\alpha} \int_0^z \log(\zeta - u) (z - \zeta)^{\alpha-1} d\zeta \frac{dz}{z},$$

où \int_0^z désigne l'intégration le long de la préimage dans $\overline{\mathbb{D}_u}$ du segment $[0z]$. Rappelons que si $\alpha > 0$, l'intégrale $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z \log(\zeta - u) (z - \zeta)^{\alpha-1} d\zeta$ désigne l'intégrale au sens usuel, mais que si $-1 < \alpha < 0$, elle est définie par prolongement analytique.

Soit $z \in \mathbb{D}$, $|z| > |u|$. Pour $\alpha > 0$, un changement de variables donne :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha) z^\alpha} \int_0^z \log(\zeta - u) (z - \zeta)^{\alpha-1} d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log(tz - u) (1 - t)^{\alpha-1} dt.$$

Pour $-1 < \alpha < 0$, la même formule est vérifiée (à nouveau par prolongement analytique).

D'autre part, si $\alpha > 0$, le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\rho} (\log(\cdot - u))_\alpha (z) \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\rho} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log(tz - u) (1 - t)^{\alpha-1} dt \frac{dz}{z} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\rho} \log(tz - u) \frac{dz}{z} \right) (1 - t)^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

car l'intégrale double est absolument convergente. Quand $-1 < \alpha < 0$, on montre que la même formule est encore valide, en revenant à la définition de l'intégrale fractionnaire ou par prolongement analytique.

Posons pour $r \leq 1$:

$$I(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'_r} \log(\zeta - u) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

de sorte que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\rho} (\log(\cdot - u))_\alpha (z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 I(t\rho) (1 - t^{\alpha-1}) dt.$$

Lorsque $r \leq |u|$, $\frac{1}{\zeta} \log(\zeta - u)$ est méromorphe sur le disque de rayon r avec un unique pôle en 0. Le théorème des résidus donne : $I(r) = \log(-u)$.

Pour calculer I_r lorsque $r > |u|$, on considère la surface à bord obtenue en prenant la préimage du disque de rayon r \mathbb{D}_r dans $\overline{\mathbb{D}_u}$ et on applique la formule de Cauchy à $\log(\cdot - u)$. Le bord de cette surface est le circuit orienté C''_r obtenu en parcourant C'_r dans le sens trigonométrique à partir du point $\frac{r}{|u|} u^+$ jusqu'au point $\frac{r}{|u|} u^-$, puis en rajoutant un aller-retour le long du segment $[u, \frac{r}{|u|} u]$, c'est-à-dire $[\frac{r}{|u|}, 1] u^-$ puis $[1, \frac{r}{|u|}] u^+$. Le théorème des résidus appliqué à ce nouveau circuit donne

$$I(r) = \log\left(\frac{r}{|u|}\right) + \log(-u).$$

On en déduit, en reportant cette valeur, puis en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{C'_\rho} (\log(\cdot - u))_\alpha(z) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{|u|}{\rho}} (1-t)^{\alpha-1} \log(-u) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{|u|}{\rho}}^1 (1-t)^{\alpha-1} \left(\log\left(\frac{t\rho}{|u|}\right) + \log(-u) \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log(-u) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{|u|}{\rho}}^1 (1-t)^{\alpha-1} \log t dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \log \frac{\rho}{|u|} \int_{\frac{|u|}{\rho}}^1 \alpha(1-t)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \log(-u) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{\frac{|u|}{\rho}}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t} dt. \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle des deux membres, on obtient le résultat cherché. □

Si au lieu de considérer $|\cdot - u|$ on considère la fonction $|1 - \frac{\cdot}{u}|$, on a donc, pour tout $\rho \geq |u|$:

$$(32) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\rho e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{\frac{|u|}{\rho}}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t} dt.$$

On en déduit un équivalent pour les moyennes circulaires qu'on utilisera dans le paragraphe suivant. Pour tout $\rho \geq |u|$, on a :

$$(33) \quad c_1 \left(1 - \frac{|u|}{\rho}\right)^{\alpha+1} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\rho e^{i\theta}) d\theta \leq c_2 \left(1 - \frac{|u|}{\rho}\right)^{\alpha+1},$$

où les constantes $c_1 > 0$ et c_2 ne dépendent que d'un minorant non nul pour $|u|$.

5.3. Étude de la fonction v_α^ρ .

Soit $\alpha \geq -1$. Soit $\rho \leq 1$. Soit $u \in \mathbb{C}$, $|u| \leq 1$. Pour tout $z \in \mathbb{D}_\rho$, on a défini (cf (26)) :

$$\begin{aligned} v_\alpha^\rho(z, u) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{\left(1 - \frac{z}{\rho e^{i\theta}}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\rho e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Lorsque $\rho < |u|$, $\log(1 - \frac{\cdot}{u})$ est holomorphe sur \mathbb{D}_ρ . Donc d'après la formule d'Herglotz généralisée, on a :

$$v_\alpha^\rho(z, u) = \log\left(1 - \frac{z}{u}\right).$$

Pour tout ρ , $v_\alpha^\rho(\cdot, u)$ est holomorphe : en effet, la fonction $\zeta \mapsto (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta)$ est intégrable sur le cercle de rayon ρ d'après le Lemme 11 et $z \mapsto \frac{2}{\left(1 - \frac{z}{\rho e^{i\theta}}\right)^{\alpha+1}}$ est holomorphe sur \mathbb{D}_ρ . Dans ce paragraphe, nous allons étudier $v_\alpha^\rho(z, u)$ plus particulièrement lorsque $\rho > |u|$.

Lemme 13. *Soit $0 < \rho' < 1$. Il existe une constante $c_{\rho'}$ qui ne dépend que de ρ' ayant la propriété que pour tout $u \in \mathbb{D}$ tel que $|u| > \rho'$, pour tout ρ tel que $1 - \rho \leq \frac{1 - \rho'}{2}$, on a, pour tout $z \in \mathbb{D}_{\rho'}$:*

$$\left| v_\alpha^\rho(z, u) - \log\left(1 - \frac{z}{u}\right) \right| \leq c_{\rho'} (\rho - |u|)^{1+\alpha}.$$

Démonstration. On écrit :

$$(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) = \frac{1}{2} \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta) + (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\bar{\zeta}) \right).$$

Donc

$$v_\alpha^\rho(z, u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) d\zeta = I_1(\rho) + I_2(\rho)$$

avec

$$I_1(\rho) = \frac{1}{4i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta) d\zeta$$

et

$$I_2(\rho) = \frac{1}{4i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log(1 - \frac{\cdot}{\bar{u}}))_\alpha(\bar{\zeta}) d\zeta.$$

Pour démontrer le lemme, nous allons majorer séparément $I_1(\rho) - \log(1 - \frac{z}{u})$ et $I_2(\rho)$.

On calcule d'abord $I_1(\rho)$ en raisonnant comme dans la démonstration de l'équivalent (33). Si $r \leq |u|$, la fonction $(\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha$ est holomorphe sur \mathbb{D}_r . En particulier, d'après la démonstration de la première partie du Lemme (3) et en tenant compte du fait que $\log(1 - \frac{\cdot}{u})$ s'annule en 0, on a pour tout $z \in \mathbb{D}_r$:

$$I_1(r) = \frac{1}{4i\pi} \int_{C_r} S_\alpha(\zeta, z) (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta) d\zeta = \log(1 - \frac{z}{u}).$$

Dans le cas général, les fonctions $\log(1 - \frac{\cdot}{u})$ et $(\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha$ sont holomorphes dans le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{D} \setminus \{u\}}$ de $\mathbb{D} \setminus \{u\}$. On considère leurs restrictions à la surface à bord $\overline{\mathbb{D}_u}$. Pour calculer $I_1(\rho)$, quand $\rho \geq |u|$, on utilise le circuit C_ρ'' défini dans le paragraphe précédent, obtenu en parcourant C_ρ' dans le sens trigonométrique depuis le point $\frac{\rho}{|u|}u^+$ jusqu'au point $\frac{\rho}{|u|}u^-$ puis en rajoutant un aller-retour le long de $[u, \rho \frac{u}{|u|}]$, c'est-à-dire en rajoutant d'abord d'abord le segment $[\frac{\rho}{|u|}, 1]u^+$ puis $[1, \frac{\rho}{|u|}]u^-$. Le circuit C_ρ'' est homologue dans $\overline{\mathbb{D}_u}$ à la courbe C_r pour tout r , $|z| < r < |u|$. Donc

$$\begin{aligned} & \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta) d\zeta - \int_u^{\rho \frac{u}{|u|}} S_\alpha(\zeta, z) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta^-) \right) d\zeta \\ &= \int_{C_r} S_\alpha(\zeta, z) (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

D'après l'égalité (31) et puisque, sous les hypothèses du lemme, $|S_\alpha(\zeta, z)|$ est majoré par une constante qui ne dépend que de ρ' , on en déduit que

$$\begin{aligned} I_1(\rho) &= I_1(r) + \int_u^{\rho \frac{u}{|u|}} S_\alpha(\zeta, z) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta^-) \right) d\zeta \\ &= \log(1 - \frac{z}{u}) + O((\rho - |u|)^{\alpha+1}). \end{aligned}$$

Pour le calcul de $I_2(\rho)$ on écrit :

$$\begin{aligned} I_2(\rho) &= \frac{1}{4i\pi} \int_{C_\rho} \left(\frac{2}{(1 - \frac{z}{\zeta})^{\alpha+1}} - 1 \right) (\log(1 - \frac{\cdot}{\bar{u}}))_\alpha(\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{C_\rho} \left(\frac{2}{(1 - \frac{z}{\rho e^{i\theta}})^{\alpha+1}} - 1 \right) (\log(1 - \frac{\cdot}{\bar{u}}))_\alpha(\rho e^{-i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

soit, en prenant les conjugués :

$$\begin{aligned} \overline{I_2(\rho)} &= \frac{1}{4\pi} \int_{C_\rho} \left(\frac{2}{(1 - \frac{z}{\rho e^{-i\theta}})^{\alpha+1}} - 1 \right) (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\rho e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{4i\pi} \int_{C_\rho} \left(\frac{2}{(1 - \frac{z\zeta}{\rho^2})^{\alpha+1}} - 1 \right) (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

La fonction $\zeta \mapsto \frac{2}{(1 - \frac{z\zeta}{\rho^2})^{\alpha+1}}$ est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}_\rho}$ dans \mathbb{D} , donc son relevé à $\overline{\mathbb{D}_u}$ est holomorphe sur un voisinage de la préimage de \mathbb{D}_ρ . La fonction $(\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_\alpha$ est

holomorphe sur $\overline{\mathbb{D}_u}$ et s'annule en l'origine. Donc d'après le théorème de Cauchy, on a pour tout $r \leq |u|$:

$$\int_{C_r} \left(\frac{2}{\left(1 - \frac{z\zeta}{\rho^2}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right) (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$$

En utilisant comme ci-dessus le fait que le circuit C_{ρ}'' est homologue à C_r , on en déduit que

$$\overline{I_2(\rho)} = -\frac{1}{4i\pi} \int_u^{\rho \frac{u}{|u|}} \left(\frac{2}{\left(1 - \frac{z\zeta}{\rho^2}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^-) \right) d\zeta.$$

Sous les hypothèses du lemme, $\left| \frac{2}{\left(1 - \frac{z\zeta}{\rho^2}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right|$ est majoré par une constante qui ne dépend que de ρ' quand $|z| < \rho'$. On en déduit que $\overline{I_2(\rho)} = O((\rho - |u|)^{\alpha+1})$. Finalement, en additionnant les estimations de $I_1(\rho)$ et de $I_2(\rho)$, on obtient :

$$\left| v_{\alpha}^{\rho}(z, u) - \log(1 - \frac{z}{u}) \right| \leq c_{\rho'} (\rho - |u|)^{\alpha+1}$$

pour une constante $c_{\rho'}$ qui ne dépend que de ρ' . □

Lemme 14. *Soit $\rho' < 1$. Il existe une constante $d_{\rho'}$ qui ne dépend que de ρ' ayant la propriété que : pour tout $u \in \mathbb{D}$ tel que $1 - |u| \leq \frac{1 - \rho'}{2}$, pour tout ρ avec $|u| \leq \rho \leq 1$ et pour tout $z \in \mathbb{D}_{\rho'}$, on a :*

$$\left| \int_{C_1} S_{\alpha}(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_{\alpha}(\zeta) d\zeta - \int_{C_{\rho}} S_{\alpha}(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_{\alpha}(\zeta) d\zeta \right| \leq d_{\rho'} (1 - |u|)^{\alpha+1} \frac{1 - \rho}{1 - |u|}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour $i = 1$ et $i = 2$, il existe une constante c_i qui ne dépend que de ρ' telle que $|I_i(1) - I_i(\rho)| \leq d_{\rho'} (1 - |u|)^{\alpha} (1 - \rho)$. Pour I_1 , on écrit

$$I_1(1) - I_1(\rho) = \int_{\rho \frac{u}{|u|}}^{\frac{u}{|u|}} S_{\alpha}(\zeta, z) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^-) \right) d\zeta.$$

On conclut en utilisant (31) et le fait que, sous les hypothèses du Lemme, $|S_{\alpha}(\zeta, z)|$ est majoré par une constante qui ne dépend que de ρ' . On utilise un argument similaire pour I_2 :

$$\begin{aligned} \overline{I_2(\rho)} &= -\frac{1}{4i\pi} \int_u^{\rho \frac{u}{|u|}} \left(\frac{2}{\left(1 - \frac{z\zeta}{\rho^2}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^-) \right) d\zeta \\ &= -\frac{1}{4i\pi} \int_u^{\rho \frac{u}{|u|}} \left(\frac{2}{(1 - z\zeta)^{\alpha+1}} - 1 \right) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^-) \right) d\zeta \\ &\quad - \int_u^{\rho \frac{u}{|u|}} (1 - \rho) g(\zeta) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^-) \right) d\zeta \end{aligned}$$

pour une fonction $g(z, \zeta)$ bornée par une constante qui ne dépend que de ρ' . Donc

$$\begin{aligned} \overline{I_2(1)} - \overline{I_2(\rho)} &= -\frac{1}{4i\pi} \int_{\rho \frac{u}{|u|}}^{\frac{u}{|u|}} \left(\frac{2}{\left(1 - \frac{z\zeta}{\rho^2}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^-) \right) d\zeta \\ &\quad - (1 - \rho) \int_u^{\rho \frac{u}{|u|}} g(\zeta) \left((\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^+) - (\log(1 - \frac{\cdot}{u}))_{\alpha}(\zeta^-) \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que chaque terme du membre de droite est majoré en module par $d_{\rho'} (1 - |u|)^{\alpha} (1 - \rho)$ où $d_{\rho'}$ ne dépend que de ρ' . □

5.4. Étude des facteurs de Blaschke-Dzhrbashyan.

Définition. Soit $u \in \mathbb{D}$, $u \neq 0$. Soit $\rho \leq 1$. On a défini dans (27) une fonction holomorphe A_α^ρ sur \mathbb{D}_ρ en posant :

$$A_\alpha^\rho(z, u) = \left(1 - \frac{z}{u}\right) \exp \left(-\frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) d\zeta \right).$$

Rappelons que pour $\rho = 1$, la fonction $A_\alpha^1(z, u)$ est appelée *facteur de Blaschke-Dzhrbashyan*. Le résultat suivant correspond au Lemme 9.13 de [D2]

Lemme 15. Soit $u \in \mathbb{D}$. Pour tout $\alpha > -1$, $A_\alpha(\cdot, u) \in \mathcal{N}_\alpha$. Plus précisément :

- (1) si $\alpha \geq 0$, sa caractéristique de Dzhrbashyan m_α vérifie : $m_\alpha(A_\alpha(\cdot, u)) = 0$;
- (2) si $|u| \geq \rho' > 0$, il existe une constante $c(\rho')$ qui ne dépend que de ρ' telle que

$$m_\alpha(A_\alpha(\cdot, u)) \leq c(\rho')(1 - |u|)^{\alpha+1}$$

- (3) si $|u| \geq \rho' > 0$, il existe une constante $c'(\rho')$ qui ne dépend que de ρ' telle que

$$m_\alpha\left(\frac{1}{A_\alpha(\cdot, u)}\right) \leq c(\rho')(1 - |u|)^{\alpha+1}$$

$$m_\alpha\left(\frac{1}{A_\alpha(\cdot, u)}\right) \leq c'(\rho')(1 - |u|)^{\alpha+1}.$$

Démonstration. Soit $\alpha > -1$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, $z \neq u$, on a l'égalité suivante modulo $2i\pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \log A_\alpha(z, u) &= \log\left(1 - \frac{z}{u}\right) - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} S_\alpha(\zeta, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(\zeta) d\zeta \\ &= \log\left(1 - \frac{z}{u}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} S_\alpha(e^{i\theta}, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

et donc, d'après la définition du noyau de Poisson d'ordre α :

$$\log |A_\alpha(z, u)| = \log \left|1 - \frac{z}{u}\right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\alpha(e^{i\theta}, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta}) d\theta.$$

Par conséquent, en appliquant l'opérateur d'intégration d'ordre α et utilisant que $(P_\alpha)_\alpha = P$ (cf. (12)), on a :

$$\begin{aligned} (\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) &= (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_\alpha(e^{i\theta}, \cdot))_\alpha(z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta}) d\theta \\ &= (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Remarquons que $z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta}) d\theta$ est la transformée de Poisson de la fonction $\theta \mapsto (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})$ qui est intégrable sur $\partial\mathbb{D}$ d'après le Lemme 11. Lorsque $|u| < 1$, $(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})$ est même continue. Il est classique que la transformée de Poisson d'une fonction continue converge radialement vers cette fonction : pour tout $\psi \in [0, 2\pi]$,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, re^{i\psi}) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta}) d\theta = (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\psi}).$$

Puisque $(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha$ est continue sur un voisinage de $\partial\mathbb{D}$ (cf. Lemme 11), on a donc, pour tout $\psi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} (\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(re^{i\psi}) &= \\ \lim_{r \rightarrow 1} \left((\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(re^{i\psi}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, re^{i\psi}) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta}) d\theta \right) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons $\alpha > 0$. Alors $(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha$ est sous-harmonique d'après le Lemme 11 et donc $(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha$ l'est aussi, car la différence entre ces deux fonctions, c'est-à-dire

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, re^{i\psi})(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})d\theta$, est harmonique. Donc d'après le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques, on a pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) < 0.$$

En particulier, $(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha^+ \equiv 0$. Ainsi $T_\alpha(r, A_\alpha(\cdot, u)) = 0$ pour tout $r \leq 1$, $m_\alpha(A_\alpha(\cdot, u)) = 0$ et donc $A_\alpha(\cdot, u) \in \mathcal{N}_\alpha$.

Supposons maintenant $-1 < \alpha < 0$. La fonction $(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z)$ n'est pas partout négative. Dzhrbashyan montre par un argument délicat qu'elle prend des valeurs négatives dans le complémentaire d'un voisinage du segment $[u, \frac{u}{|u|}]$. L'intersection de ce voisinage et du cercle de rayon r est un intervalle de longueur $O(1 - |u|)$, ce qui permettra de conclure en utilisant l'estimation de la fonction $\log |1 - \frac{\cdot}{u}|_\alpha$ donnée au Lemme (13). Plus précisément, on part de l'expression

$$\begin{aligned} (\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) &= (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z)(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log |1 - \frac{tz}{u}|(1-t)^{\alpha-1}dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log |1 - \frac{te^{i\theta}}{u}|(1-t)^{\alpha-1}dt \right) d\theta. \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$ qui n'appartient pas au segment $[u, \frac{u}{|u|}]$, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \log |1 - \frac{tz}{u}|(1-t)^{\alpha-1}dt = \Re \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{tz-u} e^{i\theta} dt \right).$$

donc

$$(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Re \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{tz-u} z dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{te^{i\theta}-u} e^{i\theta} dt \right) d\theta \right)$$

Nous allons d'abord justifier qu'on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale double ci-dessus. Soit $\arg u$ l'argument de u . On approxime l'intégrale sur le cercle C_1 par une intégrale par rapport à $\theta \in [\arg u + \epsilon, \arg u + 2\pi - \epsilon]$, $\epsilon > 0$. On applique alors le théorème de Fubini au carré $[\arg u + \epsilon, \arg u + 2\pi - \epsilon] \times [0, 1]$:

$$\int_{\arg u + \epsilon}^{\arg u + 2\pi - \epsilon} P(e^{i\theta}, z) \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{te^{i\theta}-u} e^{i\theta} dt \right) d\theta = \int_0^1 \left(\int_{\arg u + \epsilon}^{\arg u + 2\pi - \epsilon} \frac{P(e^{i\theta}, z)}{te^{i\theta}-u} e^{i\theta} d\theta \right) (1-t)^\alpha dt$$

qui converge lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ vers $\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{P(e^{i\theta}, z)}{te^{i\theta}-u} e^{i\theta} d\theta \right) (1-t)^\alpha dt$. On a donc :

$$(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Re \left(\int_0^1 \left(\frac{z}{tz-u} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) \frac{e^{i\theta}}{te^{i\theta}-u} d\theta \right) (1-t)^\alpha dt \right).$$

Pour $t \leq \frac{|u|}{|z|}$, $\frac{z}{tz-u}$ est holomorphe sur \mathbb{D} , donc $\frac{z}{tz-u} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) \frac{e^{i\theta}}{te^{i\theta}-u} d\theta$. C'est vrai en particulier pour $t \leq |u|$; on en déduit que

$$(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Re \left(\int_{|u|}^1 \left(\frac{z}{tz-u} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) \frac{e^{i\theta}}{te^{i\theta}-u} d\theta \right) (1-t)^\alpha dt \right).$$

Comme $P(\zeta, z) = \Re \left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z} \right)$, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) \frac{e^{i\theta}}{te^{i\theta}-u} d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{1}{t\zeta-u} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{\bar{\zeta}+\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} \frac{1}{t\bar{\zeta}-u} d\bar{\zeta} \right).$$

D'après le théorème des résidus, la première intégrale vaut :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{1}{t\zeta-u} d\zeta = \frac{2z}{tz-u} + \frac{u+tz}{t(u-tz)} = \frac{1}{t}$$

et la deuxième :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{\bar{\zeta} + \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \frac{1}{t\zeta - u} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{1 + \zeta\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z}} \frac{1}{t\zeta - u} d\zeta = \frac{1}{t} \frac{t + u\bar{z}}{t - u\bar{z}}.$$

En additionnant membre à membre les deux égalités, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) \frac{e^{i\theta}}{te^{i\theta} - u} d\theta = \frac{1}{t - u\bar{z}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \Re \left(\int_{|u|}^1 \left(\frac{z}{tz - u} - \frac{1}{t - u\bar{z}} \right) (1-t)^\alpha dt \right) \\ &= \frac{1 - |z|^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \Re \left(\int_{|u|}^1 \frac{u}{(tz - u)(t - u\bar{z})} (1-t)^\alpha dt \right) \\ &= - \left(\frac{1 - |z|^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \int_{|u|}^1 \Re \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{tz}{u}\right) \left(1 - \frac{u\bar{z}}{t}\right)} \right) \frac{(1-t)^\alpha}{t} dt. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \Re \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{tz}{u}\right) \left(1 - \frac{u\bar{z}}{t}\right)} \right) &= \frac{1}{\left|1 - \frac{tz}{u}\right|^2 \left|1 - \frac{u\bar{z}}{t}\right|^2} \Re \left(\left(1 - \frac{tz}{u}\right) \left(1 - \frac{u\bar{z}}{t}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\left|1 - \frac{tz}{u}\right|^2 \left|1 - \frac{u\bar{z}}{t}\right|^2} \left(1 + |z|^2 - \Re \left(\frac{tz}{u} + \frac{u\bar{z}}{t} \right) \right). \end{aligned}$$

Écrivons $\arg z = \arg u + \phi$, avec $\phi \in [-\pi, \pi[$. Alors,

$$\left(1 + |z|^2 - \Re \left(\frac{tz}{u} + \frac{u\bar{z}}{t} \right) \right) = \left(1 + |z|^2 - |z| \left(\frac{|u|}{t} + \frac{t}{|u|} \right) \cos \phi \right).$$

Si $|\phi| \geq \frac{\pi}{2}$, $\cos \phi \geq 0$, et donc $\log |A_\alpha(\cdot, u)|_\alpha(z) > 0$. Si $\cos \phi \geq 0$, le minimum du membre de droite pour $t \in [|u|, 1]$ est atteint quand $t = 1$ et $\phi = 0$; il vaut

$$\left(1 + |z|^2 - |z| \left(\frac{1}{|u|} + |u| \right) \right) = |z - \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{\bar{u}} \right)|^2 - \frac{1}{4} \left(|u| - \frac{1}{|u|} \right)^2.$$

Le membre de droite est l'équation du cercle de centre $\frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{\bar{u}} \right)$ et de rayon $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{|u|} - |u| \right)$. Il résulte de ce qui vient d'être dit que les points $z \in \mathbb{D}$ tels que $(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) > 0$ sont dans le disque $D(u)$ bordé par ce cercle. On remarque que ce disque est disjoint des cercles C_r , $r < |u|$ et qu'il intersecte les cercles C_r avec $r \geq |u|$ en un arc de cercle formé des points $re^{i\theta}$ pour $\theta \in [\arg u - \phi_r, \arg u + \phi_r]$ où

$$(34) \quad \phi_r = O(1 - |u|)$$

pour des constantes qui ne dépendent que d'un minorant non nul de $|u|$. On en déduit d'abord que la caractéristique de Dzhrbashyan $T_\alpha(r, A_\alpha(\cdot, u))$ est nulle pour $r \leq |u|$. Pour $r \geq |u|$, elle vérifie :

$$T_\alpha(r, A_\alpha(\cdot, u)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha^+(re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\arg u - \phi_r}^{\arg u + \phi_r} (\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha^+(re^{i\theta}) d\theta.$$

On va majorer $(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha^+(re^{i\theta})$ quand $re^{i\theta} \in D(u)$ en utilisant l'expression

$$(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z) = (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta}) d\theta.$$

D'après le Lemme 11 (2), $|(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})| \leq c_1 |z - u|^\alpha$ et donc, puisque $-1 < \alpha < 0$, pour tout θ on a :

$$|(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})| \leq c_2 (1 - |u|)^\alpha$$

pour une constante c_2 qui ne dépend que d'un minorant non nul de $|u|$. Ceci entraîne que

$$(35) \quad \left| \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z)(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})d\theta \right| \leq c_2(1 - |u|)^\alpha.$$

D'autre part, on remarque que $|re^{i\theta} - u| \geq c_3|\phi|$ pour une constante c_3 qui ne dépend que d'un minorant > 0 de $|u|$ (par exemple en projetant $re^{i\theta}$ sur le cercle $C_{|u|}$). Donc

$$(36) \quad |(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(re^{i\theta})| \leq c_4|\phi|^\alpha.$$

Les inégalités (35) et (36) donnent $|(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(z)| \leq c_4|\phi|^\alpha + c_2(1 - |u|)^\alpha$ puis en intégrant pour $\theta \in [\arg u - \phi_r, \arg u + \phi_r]$,

$$\int_{\arg u - \phi_r}^{\arg u + \phi_r} |(\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(re^{i\theta})|d\theta \leq c_5(\phi_r^{\alpha+1} + (1 - |u|)^\alpha\phi_r).$$

D'après l'équivalent (34), cette inégalité termine la démonstration du point (2) du Lemme 15.

Pour le point (3), on écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(re^{i\theta})d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(re^{i\theta})d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, re^{i\psi})(\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})d\theta d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(re^{i\theta})d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |1 - \frac{\cdot}{u}|)_\alpha(e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

La valeur de ce deux intégrales est donnée par l'égalité (32). Pour tout $r \leq 1$, on a :

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_{|u|}^1 \frac{(1 - t)^\alpha}{t} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log |A_\alpha(\cdot, u)|)_\alpha(re^{i\theta})d\theta \leq 0$$

On en déduit, en utilisant le point (2) du Lemme 15 que

$$m_\alpha\left(\frac{1}{A_\alpha(\cdot, u)}\right) \leq c(\rho')(1 - |u|)^{\alpha+1}$$

pour une constante $c(\rho')$ qui ne dépend que de ρ' .

□

RÉFÉRENCES

- [Du] Peter Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and applied mathematics, vol. 38, Academic Press, New York (1970).
- [D1] Mkhitar Dzhrbashyan, *The parametric representation of some general classes of meromorphic functions in the unit circle*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 157, (1964),1024–1027; Soviet Math. Dokl. 5, (1964), 1058–1062.
- [D2] Mkhitar Dzhrbashyan, *Integral transforms and representations of functions in the complex domain*, “Nauka”, Moscow, 564–671 (chapitre d'un livre en russe), (1966).
- [Ru] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw Hills, New York, (1970).