HAL open science

Note sur les polynômes de Kazhdan-Lusztig

Sophie Morel

To cite this version:

Sophie Morel. Note sur les polynômes de Kazhdan-Lusztig. Mathematische Zeitschrift, 2011, 10.1007/s00209-010-0685-6 . hal-03058344

HAL Id: hal-03058344

https://hal.science/hal-03058344v1

Submitted on 11 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

arXiv:math/0603519v2 [math.AG] 26 Jun 2018

Note sur les polynômes de Kazhdan-Lusztig

Sophie Morel

21 août 2018

Dans son article [B], Brenti a prouvé de manière combinatoire une formule non-récursive pour les polynômes de Kazhdan-Lusztig d'un groupe de Coxeter (cf le théorème 4.1 de [B]). Le but de cette note est de donner une interprétation géométrique de cette formule pour les groupes de Coxeter qui sont isomorphes à un groupe de Weyl. Cette interprétation utilise un résultat de [M] (théorème 3.3.5), qui exprime le prolongement intermédiaire d'un faisceau pervers pur comme "tronqué par le poids" de son image.

Donnons rapidement le plan de l'article. La section 1 rappelle la définition, due à Kazhdan et Lusztig, des polynômes de Kazhdan-Lusztig et des polynômes R. La section 2 rappelle le résultat de [M] qui sera utilisé dans l'interprétation géométrique de la formule de Brenti. La section 3 rappelle une décomposition des cellules de Bruhat due à Deodhar, et en donne une nouvelle preuve, qui utilise des calculs de Härterich. Cette décomposition sera utile dans la section 4, pour montrer que la cohomologie des cellules de Bruhat a une forme particulièrement simple. Enfin, la section 4 contient le résultat principal (théorème 4.1), c'est-à-dire la preuve géométrique de la formule de Brenti.

Je remercie Gérard Laumon de m'avoir signalé cette application de [M].

Dans toute la suite, $\mathbb{F}_q$ est un corps fini, $\mathbb{F}_q \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et ℓ est un nombre premier inversible dans $\mathbb{F}_q$.

1 Polynômes de Kazhdan-Lusztig et polynômes R

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats de Kazhdan et Lusztig (cf [KL1] et [KL2]).

Soit G un groupe algébrique réductif connexe déployé sur $\mathbb{F}_q$. Soient B un sous-groupe de Borel de G (défini sur $\mathbb{F}_q$), $T \subset B$ un tore maximal déployé sur $\mathbb{F}_q$, B^* le sous-groupe de Borel de G opposé à B (ie tel que $B \cap B^* = T$), N le normalisateur de T dans G et $W = N/T$ le groupe de Weyl. On note Φ l'ensemble des racines de T dans $Lie(G)$, Φ^+ le sous-ensemble de racines positives associé à B (c'est-à-dire l'ensemble des racines de T dans $Lie(B)$), et $\Delta \subset \Phi^+$ l'ensemble des racines simples. Enfin, on note ℓ la fonction longueur sur W associée à Δ et $\leqslant$ l'ordre de Bruhat sur W.

Rappelons que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ de W est l'algèbre sur l'anneau $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ engendrée par des éléments T_w, $w \in W$, soumis aux relations :

$$\begin{array}{ll} T_w T_{w'} = T_{ww'} & \text{si } \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w') \\ (T_s + 1)(T_s - t) = 0 & \text{si } s \text{ est la réflexion associée à une racine simple.} \end{array}$$

On définit des polynômes $R_{v,w} \in \mathbb{Z}[t]$, $v, w \in W$, $v \leqslant w$, par les formules (cf [KL1] § 2) :

$$T_w^{-1} = \sum_{v \leqslant w} (-1)^{\ell(w)-\ell(v)} R_{v,w}(t) t^{-\ell(w)} T_v.$$

$R_{v,w}$ est de degré $\ell(w) - \ell(v)$.

D'après le théorème 1.1 de [KL1] (cf aussi [KL2] § 2), il existe une unique famille de polynômes $P_{v,w} \in \mathbb{Z}[t]$, $v, w \in W$, $v \leqslant w$, avec $P_{w,w} = 1$ et $P_{v,w}$ de degré $\leqslant \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(v) - 1)$ si $v < w$, telle que : pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leqslant w$,

$$t^{\ell(w)-\ell(v)} P_{v,w}(t^{-1}) = \sum_{v \leqslant y \leqslant w} R_{v,y}(t) P_{y,w}(t).$$

Rappelons l'interprétation géométrique des polynômes $P_{v,w}$ donnée par Kazhdan et Lusztig dans [KL2].

Le choix de B détermine un isomorphisme entre la variété $\mathcal{B}$ des sous-groupes de Borel de G et le quotient G/B. On a deux stratifications de $\mathcal{B}$ par des sous-variétés localement fermées, $\mathcal{B} = \bigcup_{w \in W} X_w = \bigcup_{w \in W} X^w$, avec, pour tout $w \in W$,

$$X_w = \{B' \in \mathcal{B} | \exists g \in BwB, B' = gBg^{-1}\}$$

$$X^w = \{B' \in \mathcal{B} | \exists g \in B^* wB, B' = gBg^{-1}\}.$$

La variété X_w est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^{\ell(w)}$, et X^w est isomorphe à $\mathbb{A}^{dim(\mathcal{B})-\ell(w)}$. Pour tout $w \in W$, on note $x_w = wBw^{-1} \in X_w \cap X^w$.

L'adhérence $\overline{X}_w$ de X_w dans $\mathcal{B}$ est la variété de Schubert associée à w. C'est une variété projective irréductible de dimension $\ell(w)$, et on a

$$\overline{X}_w = \bigcup_{v \leqslant w} X_v.$$

De même, on a

$$\overline{X}^w = \bigcup_{v \geqslant w} X^v.$$

On note $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ le Frobenius. Pour tout $w \in W$, on a $F(X_w) \subset F(X_w)$, $F(X^w) \subset F(X^w)$ et $F(x_w) = x_w$. Pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leqslant w$, on note j_w et $i_{v,w}$ les inclusions de X_w et X_v dans $\overline{X}_w$, et

$$IC_{\overline{X}_w} = (j_{w!*}(\mathbb{Q}_\ell[\ell(w)]))[-\ell(w)]$$

le complexe d'intersection à coefficients constants de $\overline{X}_w$.

Kazhdan et Lusztig ont démontré le théorème suivant ([KL2], théorèmes 4.2 et 4.3) :

Théorème 1.1 *(Kazhdan-Lusztig) Soit $w \in W$. Alors le faisceau de cohomologie (ordinaire) $\mathcal{H}^i(IC_{\overline{X}_w})$ est nul si i est impair. Si i est pair et $B' \in \overline{X}_w$ est stable par une puissance F^r de F, alors les valeurs propres de $(F^r)^*$ sur la fibre $\mathcal{H}^i(IC_{\overline{X}_w})_{B'}$ sont toutes égales à $q^{ir/2}$.*

De plus, pour tout $v \leqslant w$, on a

$$P_{v,w}(t) = \sum_{i \geqslant 0} dim(\mathcal{H}^{2i}(IC_{\overline{X}_w})_{x_v})t^i.$$

2 Rappel d'un résultat de [M]

Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. On note $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ la catégorie des complexes ℓ-adiques mixtes sur $\mathbb{F}_q$. Cette catégorie est munie de la t-structure donnée par la perversité autoduale, et on note ${}^p\mathrm{H}^i$ les foncteurs de cohomologie pour cette t-structure. (Les notions de ce paragraphe sont définies dans le chapitre 5 du livre [BBD] de Beilinson, Bernstein et Deligne.)

Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, on note ${}^w\mathrm{D}^{\leqslant a}(X)$ (resp. ${}^w\mathrm{D}^{\geqslant a}(X)$) la sous-catégorie pleine de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dont les objets sont les complexes mixtes K tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le faisceau pervers ${}^p\mathrm{H}^i K$ soit de poids $\leqslant a$ (resp. $\geqslant a$). Alors ([M], proposition 3.1.1 (iv)) :

Proposition 2.1 *Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $({}^w\mathrm{D}^{\leqslant a}(X), {}^w\mathrm{D}^{\geqslant a+1}(X))$ est une t-structure sur $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$.*

On note $w_{\leqslant a}$ et $w_{\geqslant a+1} = w_{>a}$ les foncteurs de troncature pour cette t-structure. Ce sont des foncteurs triangulés (car ${}^w\mathrm{D}^{\leqslant a}(X)$ et ${}^w\mathrm{D}^{\geqslant a+1}(X)$ sont des sous-catégories triangulées de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$), et la dualité de Poincaré échange $w_{\leqslant a}$ et $w_{\geqslant -a}$.

Soit $(S_0, \ldots, S_n)$ une partition de X par des sous-schémas (localement fermés non vides) telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, S_k soit ouvert dans $X - \bigcup_{l<k} S_l$. En particulier, S_0 est ouvert dans X. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note i_k l'inclusion de S_k dans X.

Le théorème suivant découle des résultats de la section 3 de [M] :

Théorème 2.2 *Soient $a \in \mathbb{Z}$ et K un faisceau pervers pur de poids a sur S_0. Alors on a une égalité de classes dans le groupe de Grothendieck de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$:*

$$\begin{aligned}[i_{0!*}K] \quad = \quad & \sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_r < n} (-1)^r [i_{n_r!} w_{\leqslant a} i^!_{n_r} \ldots i_{n_1!} w_{\leqslant a} i^!_{n_1} i_{0!} K] \\ & + \sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_r = n} (-1)^r [i_{n_r!} w_{<a} i^!_{n_r} i_{n_{r-1}!} w_{\leqslant a} i^!_{n_{r-1}} \ldots i_{n_1!} w_{\leqslant a} i^!_{n_1} i_{0!} K].\end{aligned}$$

Démonstration. On utilise les notations de la section 3 de [M]. D'après la proposition [M] 3.4.2, on a des isomorphismes canoniques

$$w_{\geqslant (a,a+1,\ldots,a+1)} i_{0!} K = w_{\geqslant (a,a,\ldots,a)} i_{0!} K = i_{0!*} K,$$

d'où un isomorphisme canonique

$$w_{\geqslant(a,a+1,\dots,a+1,a)}i_{0!}K = i_{0!*}K.$$

De plus, le théorème [M] 3.3.5 donne pour tout $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$ tel que $a = a_0$ une égalité dans le groupe de Grothendieck de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$:

$$[w_{\leqslant \underline{a}} Ri_{0*}K] = \sum_{1\leqslant n_1<\dots<n_r\leqslant n} (-1)^r [Ri_{n_r*}w_{>a_{n_r}}i^*_{n_r} \dots Ri_{n_1*}w_{>a_{n_1}}i^*_{n_1}Ri_{0*}K],$$

d'où par dualité :

$$[w_{\geqslant \underline{a}} i_{0!}K] = \sum_{1\leqslant n_1<\dots<n_r\leqslant n} (-1)^r [i_{n_r!}w_{<a_{n_r}}i^!_{n_r} \dots i_{n_1!}w_{<a_{n_1}}i^!_{n_1}i_{0!}K].$$

Cette égalité, combinée avec l'isomorphisme ci-dessus, donne le résultat cherché.

□

3 Décomposition des X_w

Dans [D2], Deodhar a construit une décomposition des cellules de Bruhat X_w qui induit une décomposition agréable des $X_w \cap X^v$, pour $v \leqslant w$. Nous allons donner ici une autre interprétation de cette décomposition.

Soit $w \in W$. On fixe une décomposition $w = s_1 \dots s_r$ de w en réflexions simples, avec $r = \ell(w)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on note α_i la racine simple correspondant à s_i. Soit $\Gamma = \{1, s_1\} \times \dots \times \{1, s_r\}$. Pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$, on note

$$I(\gamma) = \{i \in \{1, \dots, r\} | \gamma_i = s_i\}$$

$$J(\gamma) = \{i \in \{1, \dots, r\} | \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_i(-\alpha_i) \in \Phi^+\}.$$

Pour tout $v \leqslant w$, on note

$$\Gamma_v = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma | \gamma_1 \dots \gamma_r = v\}.$$

Deodhar a montré le résultat suivant ([D2], théorème 1.1 et corollaire 1.2) :

Proposition 3.1 *(Deodhar) La cellule de Bruhat X_w s'écrit de manière canonique comme une union disjointe de sous-variétés localement fermées*

$$X_w = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma,$$

avec $Y_\gamma = \varnothing$ si $J(\gamma) \not\subset I(\gamma)$, et, pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $J(\gamma) \subset I(\gamma)$,

$$Y_\gamma \simeq \mathbb{A}^{card(I(\gamma)-J(\gamma))} \times \mathbb{G}_m^{r-card(I(\gamma))}.$$

De plus, pour tout $v \in W$ tel que $v \leqslant w$, on a

$$X_w \cap X^v = \bigcup_{\gamma\in\Gamma_v} Y_\gamma.$$

En utilisant des calculs de Härterich ([H], § 1), on peut donner une autre preuve de ce résultat :

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$ un cocaractère tel que $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. On fait agir $\mathbb{G}_m$ sur $\mathcal{B}$ via λ. Les points fixes de cette action sont les x_z, $z \in W$, et les deux décompositions de Bialynicki-Birula (cf [BB]) de $\mathcal{B}$ sont :

- la décomposition en cellules contractantes, $\mathcal{B} = \bigcup_{z \in W} X_z$;
- la décomposition en cellules dilatantes, $\mathcal{B} = \bigcup_{z \in W} X^z$.

On va décomposer X_w en utilisant la décomposition de Bialynicki-Birula de la résolution de Bott-Samelson de $\overline{X}_w$ associée à la décomposition $w = s_1 \dots s_r$.

Pour toute racine α, on note $p_\alpha : \mathbb{A}^1 \longrightarrow U_\alpha$ le sous-groupe à un paramètre associé à α. Si α est une racine simple, on note P_α le sous-groupe parabolique (minimal) de G engendré par B et par $U_{-\alpha}$.

Dans [D1], Demazure a associé à la décomposition $w = s_1 \dots s_r$ de w une résolution des singularités $\pi : BS \longrightarrow \overline{X}_w$ (appelée résolution de Bott-Samelson), où $BS = P_{\alpha_1} \times_B \cdots \times_B P_{\alpha_r}/B$ et π envoie la classe $[p_1, \dots, p_r]$ de $(p_1, \dots, p_r) \in P_{\alpha_1} \times \cdots \times P_{\alpha_r}$ dans BS sur la classe de $p_1 \dots p_r$ dans $\overline{X}_w \simeq \overline{BwB}/B$. La restriction de π à $\pi^{-1}(X_w)$ induit un isomorphisme $\pi^{-1}(X_w) \longrightarrow X_w$.

On fait agir B sur BS par multiplication à gauche sur le premier facteur. (Le morphisme π est alors B-équivariant.) En particulier, on a une action de $\mathbb{G}_m$ sur BS (via le cocaractère $\lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$), dont les points fixes sont les $[\gamma_1, \dots, \gamma_r]$, $(\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$. Dans [H], Härterich a décrit la décomposition en cellules contractantes de BS. Nous allons rappeler ses résultats.

Pour tout $(\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$, le morphisme $u_\gamma = (p_{\gamma_1(-\alpha_1)}, \dots, p_{\gamma_r(-\alpha_r)}) : \mathbb{A}^r \longrightarrow BS$ est une immersion ouverte (cf [H], § 1). On note U_γ son image. On a $U_{(s_1,\dots,s_r)} = \pi^{-1}(X_w)$ et, pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$, $U_\gamma \cap U_{(s_1,\dots,s_r)} = u_\gamma(\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r, x_i \neq 0 \ si \ \gamma_i = 1\}$.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma$. Härterich ([H], formule 1.3) montre que la cellule contractante associée à $[\gamma_1, \dots, \gamma_r]$ est

$$C_\gamma = u_\gamma(\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r, x_i = 0 \ si \ i \notin J(\gamma)\}).$$

La même méthode permet de montrer que la cellule dilatante associée à γ est

$$C^\gamma = u_\gamma(\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r, x_i = 0 \ si \ i \in J(\gamma)\}).$$

La variété BS est union disjointe des sous-variétés localement fermées C^γ, $\gamma \in \Gamma$, et le morphisme $\pi : BS \longrightarrow \overline{X}_w$ est un isomorphisme au-dessus de X_w, donc on a

$$X_w \simeq \dot{\bigcup_{\gamma \in \Gamma}} U_{(s_1,\dots,s_r)} \cap C^\gamma.$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose

$$Y_\gamma = U_{(s_1,\dots,s_r)} \cap C^\gamma.$$

Soit $\gamma \in \Gamma$. D'après les formules ci-dessus pour C^γ et $U_{(s_1,\dots,s_r)} \cap U_\gamma$, on a

$$Y_\gamma = u_\gamma(\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r, x_i \neq 0 \ si \ i \notin I(\gamma) \ et \ x_i = 0 \ si \ i \in J(\gamma)\}).$$

Donc $Y_\gamma = \varnothing$ si $J(\gamma) \not\subset I(\gamma)$ et, si $J(\gamma) \subset I(\gamma)$,

$$Y_\gamma \simeq \mathbb{A}^{card(I(\gamma)-J(\gamma))} \times \mathbb{G}_m^{r-card(I(\gamma))}.$$

Enfin, comme le morphisme π est T-équivariant, on a

$$\pi^{-1}(\overline{X}_w \cap X^v) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_v} C^\gamma,$$

d'où la deuxième formule de la proposition.

4 Calcul des polynômes de Kazhdan-Lusztig en fonction des polynômes R

Pour tout $d \in \mathbb{Q}$, on définit un endomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire $\tau_{\leqslant d}$ de l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Q}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ par :

$$\tau_{\leqslant d}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i t^{i/2}\right) = \sum_{i \leqslant d} a_i t^{i/2}.$$

Le but de cette section est de donner une preuve géométrique du résultat suivant, qui a été prouvé de manière combinatoire par Brenti (cf [B], théorème 4.1) :

Théorème 4.1 *Avec les notations de la section 1, pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leqslant w$, le polynôme $P_{v,w}$ est égal à :*

$$\tau_{\leqslant \ell(w)-\ell(v)-1}\Bigg(\sum_{v=v_1<\cdots<v_r<w} (-1)^r R_{v_1,v_2}\tau_{\leqslant \ell(w)-\ell(v_2)}(R_{v_2,v_3}\cdots$$

$$\cdots\tau_{\leqslant \ell(w)-\ell(v_{r-1})}(R_{v_{r-1},v_r}\tau_{\leqslant \ell(w)-\ell(v_r)}(R_{v_r,w}))\cdots)\Big).$$

Pour tout schéma lisse X sur $\mathbb{F}_q$, notons $\mathcal{T}(X)$ la sous-catégorie triangulée de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ engendrée par les objets isomorphes aux faisceaux $\mathbb{Q}_\ell(m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{T}(X))$ de $\mathcal{T}(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les $[\mathbb{Q}_\ell(m)]$, $m \in \mathbb{Z}$. On définit un isomorphisme de groupes $\varphi : \mathcal{T}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ par $\varphi([\mathbb{Q}_\ell(m)]) = t^{-m}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Si K est un objet de $\mathcal{T}(X)$ et $j \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout $x \in X(\mathbb{F}_{q^j})$,

$$\varphi([K])(q^j) = Tr(F^{j*}, K_x).$$

Lemme 4.2 *(i) Soit X lisse connexe sur $\mathbb{F}_q$. Pour tout objet K de $\mathcal{T}(X)$ et tout $a \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\varphi([w_{\leqslant a}K]) = \tau_{\leqslant a-dim(X)}(\varphi([K])).$$

(ii) Pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leqslant w$ et tout $K \in \mathcal{T}(X_w)$, le complexe $i^!_{v,w} j_{w!} K$ est dans $\mathcal{T}(X_v)$, on a un isomorphisme $Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$-équivariant

$$(i^!_{v,w} j_{w!} K)_{x_v} \simeq R\Gamma_c((X_w \cap X^v)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, K_{|X_w \cap X_v})$$

et $\varphi([i^!_{v,w} j_{w!} K]) = \varphi([K]) R_{v,w}(t)$.

(iii) Pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leqslant w$, le complexe $i^*_{v,w} IC_{\overline{X}_w}$ est dans $\mathcal{T}(X_v)$.

Démonstration.

(i) On peut supposer que $K = \mathbb{Q}_\ell(m)$. L'égalité est alors évidente.

(ii) On peut supposer que $K = \mathbb{Q}_\ell(m)$. Le complexe $i^!_{v,w} j_{w!} K$ est un complexe B-équivariant sur X_v. Comme B agit transitivement sur X_v et que les stabilisateurs des points de X_v sont connexes, les faisceaux de cohomologie de $i^!_{v,w} j_{w!} K$ sont constants. Il suffit donc de montrer que $(i^!_{v,w} j_{w!} K)_{x_v} \in \mathcal{T}(x_v)$.

D'après [KL2] 1.4, on a un diagramme commutatif T-équivariant

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X_w} & X_w \arrow[l, "j_w"'] \\
X_v \arrow[ur, "i_{v,w}"] \arrow[r, "(id,x_v)"'] & X_v \times (\overline{X}_w \cap X^v) \arrow[u] & X_v \times (X_w \cap X^v) \arrow[l, "(id,j)"] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des immersions ouvertes et j est l'inclusion $X_w \cap X^v \longrightarrow \overline{X}_w \cap X^v$. D'après la formule de Künneth (cf SGA 5 III 1.7), on a

$$i^!_{v,w} j_{w!} K = (id, x_v)^! (id, j)_! (\mathbb{Q}_{\ell, X_v} \boxtimes \mathbb{Q}_{\ell, X_w \cap X^v}(m)) = \mathbb{Q}_{\ell, X_v} \boxtimes (x_v^! j_! \mathbb{Q}_\ell(m)),$$

donc

$$(i^!_{v,w} j_{w!} K)_{x_v} = x_v^! j_! \mathbb{Q}_\ell(m) = x_v^! j_{w!}(K_{|X_w \cap X^v}).$$

D'après le sous-lemme 1 (qu'on peut appliquer par [KL2] 1.5), on a un isomorphisme $Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$-équivariant

$$(i^!_{v,w} j_{w!} K)_{x_v} = x_v^! j_!(K_{|X_w \cap X^v}) \simeq R\Gamma_c((X_w \cap X^v)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, K_{|X_w \cap X^v}).$$

De plus, $X_w \cap X^v$ est union disjointe de schémas de la forme $\mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_m^s$ d'après la proposition 3.1, donc on a bien $(i^!_{v,w} j_{w!} K)_{x_v} \in \mathcal{T}(x_v)$.

Enfin, l'isomorphisme ci-dessus donne, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi([i^!_{v,w} j_{w!} K])(q^j) = Tr(F^{j*}, (i^!_{v,w} j_{w!} K)_{x_v}) = Tr(F^{j*}, R\Gamma_c((X_w \cap X^v)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(m))).$$

D'après la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz (SGA 4 1/2 Rapport 1.3.2) et le sous-lemme 2,

$$\begin{aligned}
Tr(F^{j*}, R\Gamma_c((X_w \cap X^v)_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(m))) &= \sum_{x \in (X_w \cap X^v)(\mathbb{F}_{q^j})} Tr(F_x^*, \mathbb{Q}_\ell(m)) \\
&= q^{-jm} card((X_w \cap X^v)(\mathbb{F}_{q^j})) = q^{-jm} R_{v,w}(q^j).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi([i^!_{v,w} j_{w!} K])(q^j) = q^{-jm} R_{v,w}(q^j) = \varphi([K])(q^j) R_{v,w}(q^j),$$

ce qui implique la dernière égalité de (ii).

(iii) Le complexe $i^*_{v,w} IC_{\overline{X}_w}$ est un complexe B-équivariant sur X_v, donc ses faisceaux de cohomologie sont constants, et il suffit comme dans (ii) de montrer que $IC_{\overline{X}_w, x_v} \in \mathcal{T}(x_v)$. Ceci résulte du théorème 1.1.

□

Le premier sous-lemme est prouvé par Springer dans [S], § 3, proposition 1.

Sous-lemme 1 *Soit X une variété sur $\mathbb{F}_q$ munie d'une action de $\mathbb{G}_m$ qui contracte X sur un point $a \in X$ (c'est-à-dire que, pour tout $x \in X$, $\lim_{\lambda \longrightarrow 0} \lambda.x = a$). Soit K un complexe ℓ-adique $\mathbb{G}_m$-équivariant sur X. Alors le morphisme d'adjonction $a_! a^! K \longrightarrow K$ induit un isomorphisme*

$$a^! K \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X, K).$$

Le deuxième sous-lemme est une observation de Kazhdan et Lusztig ([KL1] lemmes A3 et A4, voir aussi [KL2] 4.6).

Sous-lemme 2 *Pour tout $v \leqslant w$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$R_{v,w}(q^j) = card((X_w \cap X^v)(\mathbb{F}_{q^j})).$$

Démonstration du théorème 4.1. Avec les notations ci-dessus, le théorème 1.1 implique : pour tous $v, w \in W$ tels que $v \leqslant w$, on a

$$P_{v,w}(t) = \varphi([i^*_{v,w} IC_{\overline{X}_w}]).$$

Le résultat cherché résulte alors directement du théorème 2.2 et du lemme 4.2.

□

Références

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)*, Astérique 100 (1982)

[BB] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Annals of Math. 98, n°3 (1973), p 480-493.

[B] F. Brenti, *Lattice Paths and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Journal of the AMS, Vol. 11, n°2 (avril 1998), p. 229-259.

[D1] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Annales scientifiques de l'É.N.S 4e série, tome 7, n°1 (1974), p 53-88.

[D2] V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells*, Invent. Math. 79 (1985), p. 499-511.

[H] M. Härterich, *The T-equivariant cohomology of Bott-Samelson varieties*, arXiv :math.AG/0412337 (2004).

[KL1] D. Kazhdan et G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones math. 53 (1979), p 165-184.

[KL2] D. Kazhdan et G. Luzstig, *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 36 (1980), p 185-203.

[M] S. Morel, *Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel. Le cas des variétés de Siegel*, Journal of the AMS 21 (2008), no. 1, p 23-61.

[S] T.A. Springer, *A purity result for fixed point varieties in flag manifolds*, Journal Fac. Sci. Univ. Tokyo 31 (1984), p 271-282.