



**HAL**  
open science

## Modélisation de tôles ferromagnétiques en problème inverse

Olivier Chadebec, Jean-Louis Coulomb, Jean-Paul Bongiraud, Gilles Cauffet

► **To cite this version:**

Olivier Chadebec, Jean-Louis Coulomb, Jean-Paul Bongiraud, Gilles Cauffet. Modélisation de tôles ferromagnétiques en problème inverse. *Revue Internationale de Génie Electrique (RIGE)*, 2001, 4 (1-2), pp.19-39. 10.3166/rige.4.19-39 . hal-03048147

**HAL Id: hal-03048147**

**<https://hal.science/hal-03048147>**

Submitted on 9 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Modélisation de tôles ferromagnétiques en problème inverse

Olivier Chadebec\* — Jean-Louis Coulomb\*\*  
Jean-Paul Bongiraud\* — Gilles Cauffet\*

\*Laboratoire du Magnétisme du navire  
LMN/ENSIEG,  
BP 46, F-38402 Saint-Martin-d'Hères  
olivier.chadebec@leg.ensieg.inpg.fr

\*\*Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble  
LEG INPG/UJF-CNRS UMR 5529  
LEG/ENSIEG, BP 46, F-38402 Saint-Martin-d'Hères

---

*RÉSUMÉ.* Cet article propose une méthode originale de modélisation des tôles ferromagnétiques en problème inverse. Le but de notre étude est, à partir de mesures ponctuelles de l'induction magnétique, de déterminer l'aimantation de la tôle et d'évaluer ainsi le champ où des capteurs ne peuvent être placés. L'inversion est réalisée à partir de distributions de charges ou de dipôles tangentiels, localisées sur la tôle. Elles sont construites à l'aide de mesures effectuées sur des capteurs internes à la structure et permettent ensuite la prédiction du champ à l'extérieur. Le problème étant mal posé, des méthodes de régularisation sont proposées, dont une originale. Des résultats obtenus en problèmes directs et inverses sont comparés pour des cas tests numériques. Enfin, un exemple avec des mesures réelles est présenté.

*ABSTRACT.* This paper deals with the modelling of ferromagnetic shells in inverse problem. The goal of this work is, from measurements of the magnetic induction, to rebuild a model of the magnetisation of a sheet and then to calculate the field where sensors can't be placed. The sensors are placed inside the device and allow to predict the field outside. The problem being ill posed, an original regularisation method is proposed. Results obtained by direct and inverse problem are compared for a numerical test case. An example with real measurements is presented at the end.

*MOTS-CLÉS :* éléments minces, magnétostatique, problème inverse et régularisation.

*KEY WORDS :* thin shell elements, magnetostatic, inverse problem, and regularisation method.

---

## 1. Introduction

Nous sommes particulièrement intéressés par l'anomalie magnétique générée par des tôles ferromagnétiques. De telles structures, placées dans un champ magnétique ambiant, perturbent celui-ci localement. Cette perturbation est due à l'aimantation qu'acquiert la tôle. Elle a deux origines. La première est la réaction du matériau vis-à-vis d'un champ inducteur (le champ magnétique terrestre par exemple). Le calcul de cette aimantation est actuellement bien maîtrisé et a fait l'objet de nombreux travaux [BRU 90], [KRA 93]. La deuxième est son aimantation rémanente. Cette aimantation dépend de l'histoire magnétique du matériau et fait intervenir, à la fois, des phénomènes électromagnétiques (prise en compte de l'hystérésis), thermiques et mécaniques (contraintes exercées sur la structure). La diversité des causes ainsi que leur complexité rendent toute modélisation impossible. Seule la mesure peut nous permettre d'obtenir un modèle de l'aimantation, modèle qui nous permettra ensuite d'obtenir la perturbation du champ en n'importe quel point de l'espace, en particulier là où des capteurs ne peuvent être placés.

Notre domaine d'étude privilégié est le magnétisme des navires. Les bâtiments ferromagnétiques créent des perturbations locales du champ magnétique terrestre, ce qui les rendent détectables et donc vulnérables. Notre but est, à partir de mesures du champ magnétique à l'intérieur de la coque, de retrouver son aimantation en temps réel et de prédire les répercussions en termes de perturbation à l'extérieur.

## 2. Ecriture du problème direct

### 2.1. Représentation dipolaire

Nous considérons une structure constituée de tôles ferromagnétiques. Celle-ci est placée dans un champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  statique et possède donc une aimantation induite à laquelle se superpose une aimantation rémanente non déterministe. Il est classique de séparer champ inducteur et champ perturbateur suivant l'équation :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{red}} \quad [1]$$

Soit  $V$  le volume de tôles, la relation qui relie l'aimantation totale au champ dans l'air est [BRI 97] :

$$\text{En 2D, } \mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2\pi} \iint_V \left( 2 \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^4} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Q})}{PQ^2} \right) dV \quad [2]$$

$$\text{En 3D, } \mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left( 3 \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^5} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Q})}{PQ^3} \right) dV \quad [3]$$

où  $\mathbf{P}$  est le point d'évaluation du champ dans l'air,  $\mathbf{Q}$  un point courant du volume et le vecteur  $\mathbf{M}$  l'aimantation de la tôle.

Considérons l'aimantation induite. L'épaisseur des tôles est petite devant les autres grandeurs géométriques et sa perméabilité grande par rapport à celle de l'air. Dans ces conditions, le matériau canalise le flux du champ inducteur. Le champ à l'intérieur de la tôle et donc l'aimantation induite, qui lui est proportionnelle, est alors essentiellement tangentiel et constant au passage de celle-ci. Le matériau peut être assimilé à une région magnétique mince décrite dans [BRU 90]. En ce qui concerne l'aimantation rémanente, nous considérerons qu'elle aussi est tangentielle à la tôle. Il est alors possible de simplifier les équations [2] et [3]. Définissons la surface S comme une surface moyenne équivalente géométriquement au volume V. On obtient les équations suivantes :

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{e}{2\pi} \int_S \left( 2 \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^4} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Q})}{PQ^2} \right) dS \quad [4]$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{e}{4\pi} \iint_S \left( 3 \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^5} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Q})}{PQ^3} \right) dS \quad [5]$$

où e est l'épaisseur de la tôle. À partir d'un modèle volumique, nous avons donc obtenu un modèle surfacique. Les équations [4] et [5] rappellent fortement le champ créé par une répartition surfacique de dipôles, si on pose

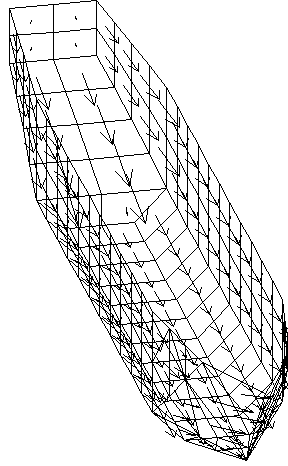
$$\mathbf{P}_S = e \mu_0 \mathbf{M} \quad [6]$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide. On obtient un modèle constitué d'une répartition surfacique dipolaire. Remarquons que les dipôles sont tangents à la surface moyenne S. Les équations en 2D et 3D sont alors les suivantes :

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2\pi\mu_0} \int_S \left( 2 \frac{\mathbf{P}_S(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^4} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{P}_S(\mathbf{Q})}{PQ^2} \right) dS \quad [7]$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \iint_S \left( 3 \frac{\mathbf{P}_S(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^5} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{P}_S(\mathbf{Q})}{PQ^3} \right) dS \quad [8]$$

Nous avons donc obtenu deux équations intégrales qui relient le champ dans l'air à une grandeur mathématique, le dipôle tangentiel, localisée sur une surface moyenne S.



**Figure 1.** Un exemple de distribution surfacique de dipôles pour une maquette de navire placée dans un champ inducteur longitudinal

## 2.2. Vers un modèle monopolaire

Considérons une surface  $S$  portant une densité de dipôles tangentiels. Aucun courant qui crée  $\mathbf{H}_{\text{red}}$  ne circule dans l'air, on a donc :

$$\text{rot}\mathbf{H}_{\text{red}} = \mathbf{0} \quad [9]$$

$\mathbf{H}_{\text{red}}$  dérive donc d'un potentiel qu'on a coutume d'appeler potentiel réduit.

$$\mathbf{H}_{\text{red}} = -\text{grad } \varphi \quad [10]$$

D'après [DUR 68], la surface  $S$  possède la propriété mathématique suivante : il y a continuité du potentiel réduit au passage de  $S$ . En d'autres termes, le potentiel sur une face est égal au potentiel sur l'autre face. Ce type de distribution superficielle est équivalent à une distribution surfacique de monopoles. Les équations [7] et [8] deviennent alors :

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = -\frac{1}{2\pi\mu_0} \int_S \rho(\mathbf{Q}) \frac{\mathbf{PQ}}{PQ^2} dS \quad [11]$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \iint_S \rho(\mathbf{Q}) \frac{\mathbf{PQ}}{PQ^3} dS \quad [12]$$

où  $\rho$  est une densité surfacique de charges. Notons que les deux distributions sont reliées par l'équation :

$$\rho = \text{div}_S \mathbf{P}_S \quad [13]$$

où  $\text{div}_S$  est l'opérateur divergence limité à la surface  $S$ , c'est-à-dire agissant sur les composantes tangentes à cette surface.

### 2.3. Intérêt des modèles obtenus

Ces formulations présentent plusieurs avantages. Elles sont tout d'abord surfaciques et ne nécessitent que des intégrations sur des géométries simplifiées. Elles présentent, de plus, un avantage sur les équations intégrales classiques. Celles-ci sont basées sur l'écriture de la formule de Green sur chaque région. Supposons que notre domaine d'étude soit composé d'une région intérieure constituée d'air, d'une région extérieure constituée, elle aussi, d'air et d'une région surfacique  $S$  représentant la matière aimantée. Le champ dans chaque domaine composé d'air peut être considéré comme étant créé par une combinaison de charges et de dipôles normaux à  $S$  et localisés sur celle-ci. Ce modèle n'est pourtant valide que dans le domaine considéré [KRA 93]. Nos deux formulations, elles, présentent une validité à la fois dans la région air extérieure et intérieure. C'est cette particularité qui va nous permettre de réaliser notre passage intérieur-extérieur.

## 3. Problème inverse

### 3.1. Ecriture du système matriciel

Nous disposons d'une structure ferromagnétique constituée de tôles séparant un domaine intérieur d'un domaine extérieur. Dans le domaine intérieur sont placés des capteurs. Notre problème inverse est donc, à partir de ces mesures de champ magnétique, de retrouver la distribution surfacique localisée sur la surface moyenne  $S$  (dipôles surfaciques ou charges). Une fois cette distribution obtenue, il sera aisé de calculer le champ à l'extérieur. Supposons que notre surface soit discrétisée en  $N_S$  éléments surfaciques de formes quelconques  $S_i$ . L'approximation de la distribution est d'ordre 0, c'est-à-dire que la grandeur considérée est constante sur chaque élément. Les équations [7] et [8] du modèle dipolaire deviennent donc :

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{N_S} p_{S_i} \int_{S_i} \left( 2 \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^4} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{u}_i}{PQ^2} \right) dS_i \quad [14]$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \sum_{N_S} p_{S_i} \int_{S_i} \left( 3 \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^5} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{u}_i}{PQ^3} \right) dS_i \quad [15]$$

où  $\mathbf{u}_i$  est un vecteur unitaire colinéaire à  $\mathbf{p}_{S_i}$ . Pour les charges, les équations [11] et [12] deviennent :

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = -\frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{N_S} \rho_i \int_{S_i} \frac{\mathbf{PQ}_i}{PQ_i^2} dS_i \quad [16]$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \sum_{N_S} \rho_i \iint_{S_i} \frac{\mathbf{PQ}_i}{PQ_i^3} dS_i \quad [17]$$

Supposons que nous disposions de  $N_M$  points de mesures. Les capteurs sont bi-axiaux en deux dimensions et tri-axiaux en trois dimensions. En trois dimensions, il y a deux inconnues par élément surfacique pour le modèle dipolaire (la distribution de dipôles est tangentielle) et une inconnue par élément pour la formulation monopolaire (la direction étant fixée). On peut alors écrire le système matriciel suivant :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad [18]$$

où est  $\mathbf{A}$  la matrice des influences des grandeurs surfaciques aux points de mesures,  $\mathbf{x}$  les inconnues et  $\mathbf{b}$  les mesures des capteurs. La matrice  $\mathbf{A}$  est de dimensions différentes suivant les cas (tableau 1).

Dimension de l'espace	2D	3D
Dipôles	$N_S \times (2N_M)$	$(2N_S) \times (3N_M)$
Charges	$N_S \times (2N_M)$	$N_S \times (3N_M)$

**Tableau 1.** Comparaison des dimensions des systèmes pour les différents modèles

### 3.2. Résolution au sens des moindres carrés

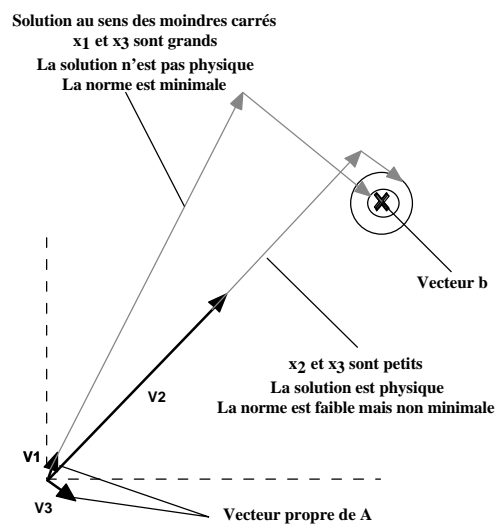
Le système est résolu au sens des moindres carrés, ce qui revient à trouver  $\mathbf{x}$  tel que la norme de la grandeur  $\mathbf{Ax}-\mathbf{b}$  soit minimum. Il faut donc résoudre :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} \quad [19]$$

La difficulté de résolution des problèmes inverses réside dans l'inversion de la matrice  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ . Le problème est la précision numérique du système obtenu. En effet, les coefficients de  $\mathbf{A}$  sont soumis à des incertitudes. Ces incertitudes viennent, d'une part, des approximations intrinsèques au modèle lui-même (la discrétisation et l'approximation effectuée sur les éléments), elles sont alors numériques. Elles sont également expérimentales, la géométrie et la position des capteurs n'étant pas

entièrement maîtrisée. Ceci se traduit par le très mauvais conditionnement de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . De plus, le vecteur  $\mathbf{b}$  est lui aussi soumis à des incertitudes (liées aux capteurs si les mesures sont effectivement réalisées ou aux modèles si elles sont simulées). La résolution du système conduit à des solutions divergentes. Le problème est alors mal posé.

Pour clarifier nos propos, considérons l'exemple simplifié suivant (figure 2). Résoudre le système  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  revient à rejoindre le point  $\mathbf{b}$  par combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  et  $\mathbf{V}_3$  (les vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ ). Ces vecteurs sont soumis à des incertitudes ainsi que  $\mathbf{b}$ . Plus ces vecteurs sont de normes petites, plus l'incertitude relative est importante. La résolution par les moindres carrés a tendance à privilégier ces directions soumises à de fortes incertitudes. Leurs composantes deviennent donc très importantes (voir même divergentes). La solution n'est pas physique, mais la norme est effectivement minimale. Toute la difficulté de résolution des problèmes inverses est de trouver une solution, en théorie moins bonne au sens des moindres carrés (*i.e.* de norme faible mais non minimale) mais qui correspond à une réalité physique.



**Figure 2.** Problématique du problème inverse

### 3.3. Techniques de régularisation : méthode de Tikhonov

La solution couramment utilisée consiste à ajouter de l'information *a priori*. La principale qualité de cette information doit être son excellent conditionnement. Cette approche a été développée par Tikhonov [THI 76] et elle revient à trouver

$$x \text{ tel que } \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| + \alpha \|\mathbf{Lx}\| \text{ soit minimum}$$



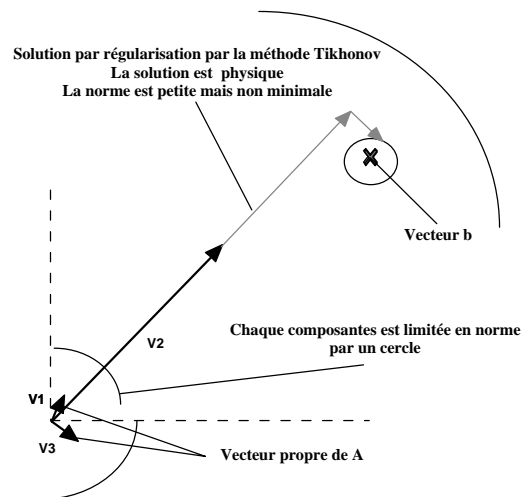
$\alpha$  étant un nombre a priori petit, définissant l'amplitude de la régularisation. Ceci revient à résoudre :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad [20]$$

Le choix de la matrice  $\mathbf{L}$  dépend du type d'informations que l'on désire ajouter.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ correspond à } \|\mathbf{x}\| \text{ minimum (régularisation à l'ordre 0)}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ correspond à } \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}\| \text{ minimum (régularisation à l'ordre 1)}$$



**Figure 3.** Régularisation à l'ordre 0 (minimisation de la norme)

Remarquons que la première matrice correspond à une minimisation de la variable  $x$  en termes de norme et la deuxième à une minimisation de sa dérivée (ceci à condition que  $x_i$  et  $x_{i+1}$  soient voisins dans la discrétisation). Des régularisations à l'ordre supérieur sont possibles en minimisant la dérivée seconde par exemple. Notons que ces deux matrices possèdent un conditionnement égal à l'unité.

### 3.4. Techniques de régularisation : troncature de la décomposition en valeurs singulières

Toute matrice peut se décomposer en valeurs singulières suivant l'équation :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V} \text{ avec } \mathbf{S} = \text{diag}(s_i) \quad [21]$$

avec  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  deux matrices orthogonales et  $\mathbf{S}$  une matrice diagonale (si  $\mathbf{A}$  est carrée). La diagonale de  $\mathbf{S}$  porte les valeurs singulières  $s_i$ . Certaines de ces valeurs singulières sont petites et donc soumises à de grandes incertitudes relatives, celles-ci rendent  $\mathbf{A}$  très proche de la singularité.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}^{-1} \text{ avec } \mathbf{S}^{-1} = \text{diag}(1/s_i) \quad [22]$$

Lorsque les petites valeurs singulières sont inversées, l'erreur et leur contribution se trouvent donc considérablement amplifiées, ce qui conduit à des divergences. L'idée est ici de tronquer la décomposition. Les valeurs inférieures à un seuil de tolérance sont éliminées en imposant leurs inverses à 0 [LAG 99]. Leur contribution est alors supprimée, ce qui améliore le conditionnement. Cette technique est relativement artificielle, mais possède l'énorme avantage d'être intrinsèque à la matrice et totalement indépendante de la physique du problème. Elle est très simple à mettre en œuvre, en particulier pour des problèmes 3D.

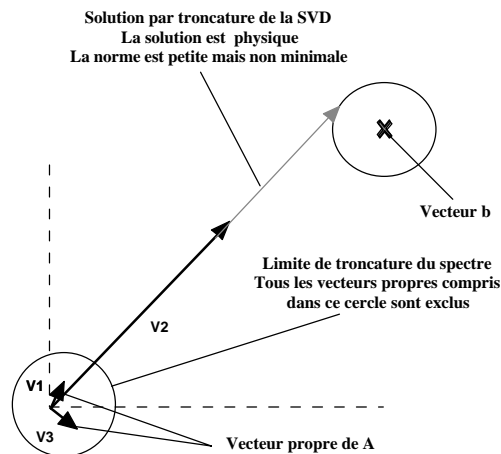


Figure 4. Régularisation par décomposition en valeurs singulières

### 3.5. Vers une nouvelle technique de régularisation, la régularisation par injection de problème direct (Direct Problem Injection : DPI)

Si les techniques de régularisation de Tikhonov se comportent globalement très bien en 2D, elles se révèlent insuffisantes pour certains cas 3D. En effet, pour un ordre supérieur à 0, elles font intervenir la notion de voisinage entre les différents éléments surfaciques. Le choix de  $L$  devient alors délicat. Si la régularisation à l'ordre 0 est généralement satisfaisante pour les charges, elle est inefficace pour l'approche dipolaire. Il faut donc régulariser avec un autre type d'informations a priori. Quel type d'informations sommes-nous capables de rajouter ? L'aimantation de la coque se divise en deux parties bien distinctes. Elle est la somme de l'aimantation induite et de l'aimantation rémanente. L'aimantation induite est parfaitement déterminée (elle dépend de la géométrie, des matériaux utilisés et du champ inducteur). De nombreuses techniques ont été développées pour la calculer. L'idée est de considérer que le comportement global de l'aimantation possède une part d'aimantation induite. Même si c'est l'aimantation rémanente qui est dominante, l'aimantation induite est toujours présente et constitue le maximum d'informations que nous sommes à même d'ajouter. Nous nous proposons donc de résoudre le problème suivant :

$$\text{Trouver } x \text{ tel que } \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \| \text{ minimum et } \alpha \| \mathbf{Cx} - \mathbf{d} \| \text{ minimum}$$

avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  définis comme précédemment.  $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$  représentant le système à résoudre pour calculer les dipôles ou les charges induites par le champ extérieur seul (le calcul du problème direct pour les aimantations induites). Remarquons que, de plus, ce système est très bien conditionné.

Le coefficient  $\alpha$  définit l'amplitude de la régularisation. Si  $\alpha = 0$ , nous résolvons le problème au sens des moindres carrés classiques, si  $\alpha$  est grand, nous calculons les induits seuls. Le choix de  $\alpha$  se situe entre les deux, c'est-à-dire un modèle qui privilégie sa validité au niveau des mesures des capteurs et qui garde un comportement global relativement proche de l'aimantation induite (ou tout du moins qui profite de son bon conditionnement).

Nous régulariserons le problème inverse avec la partie déterministe du problème direct que nous maîtrisons, ce qui revient à écrire :

$$x = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b} + \alpha \mathbf{C}^T \mathbf{d}) \quad [23]$$

Il nous faut maintenant un système qui nous permet de calculer les aimantations induites. L'expression des matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{d}$  est tirée de [VIS 93]. Le calcul des dipôles et des charges est réalisé par des méthodes de collocation de point. Les formulations sont les suivantes :

– pour les dipôles :

$$\mathbf{P}_j - \sum_{N_s} \mathbf{P}_i \int_{L_j} e(\mu_r - 1) \mathbf{grad} G_{ij} \cdot \mathbf{n}_1 dl_j = \iint_{S_j} e(\mu_r - 1) \mathbf{H}_{0s} dS_j \quad [24]$$

– pour les charges :

$$-Q_j + \sum_{N_s} Q_i \int_{L_j} e(\mu_r - 1) \mathbf{grad} G_{ij} \cdot \mathbf{n}_1 dl_j = \int_{L_j} e(\mu_r - 1) \mathbf{H}_{0s} \cdot \mathbf{n}_1 dl_j \quad [25]$$

où  $G_{ij}$  est la fonction de Green 3D écrite en  $i$  et agissant au point  $j$ .

Il suffit alors d'écrire  $N_s$  fois ces équations sur les  $N_s$  éléments pour obtenir alors les matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{d}$  désirées. Remarquons, tout de même, que dans ces deux formulations, les charges et les dipôles considérés sont ponctuels. Il faudra donc construire la matrice  $\mathbf{A}$  également avec des grandeurs ponctuelles. Les équations [15] et [17] deviennent alors :

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \sum_{N_s} 3 \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{PQ}}{PQ^5} \mathbf{PQ} - \frac{\mathbf{u}_i}{PQ^3} P_{Si} \quad [24]$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{P}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \sum_{N_s} \frac{\mathbf{PQ}_i}{PQ_i^3} Q_i \quad [26]$$

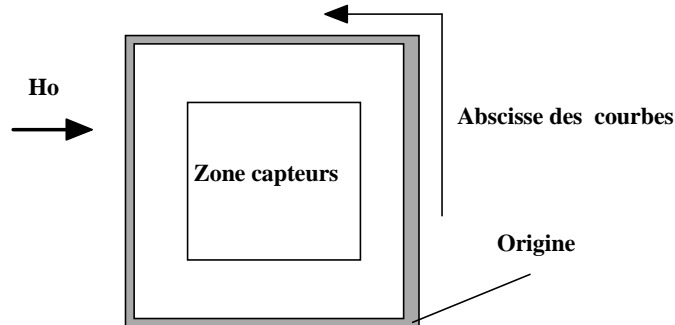
Cette répartition ponctuelle est évidemment moins satisfaisante qu'une répartition surfacique. Pourtant, le gain en simplicité d'implantation de ce type de régularisation ainsi que ses performances justifient son utilisation.

## 4. Résultats numériques

### 4.1. Inversion en 2D

Pour valider notre approche, nous considérons le problème 2D suivant. Il s'agit d'un cylindre creux infini de section carrée ( $2m \times 2m$ ). La perméabilité relative du matériau est 1 000, l'épaisseur 1 mm. La structure est plongée dans un champ inducteur de 100 A/m. Elle est discrétisée en 80 éléments linéiques. Les capteurs sont situés uniformément à l'intérieur d'un carré de 1,2 m de côté, ils sont au nombre de 50.

Remarquons que le matériau ne possède pas d'aimantation rémanente. C'est donc un problème d'identification d'aimantation induite que nous nous proposons de résoudre.



**Figure 5.** Géométrie testée

Nous avons réalisé une inversion à partir de grandeurs ponctuelles (chaque grandeur étant localisée au centre de l'élément).

Nous disposons ainsi d'une solution du problème direct en termes de dipôles et de monopoles [VIS 93]. Le système est surdimensionné (*i.e.* plus d'informations que d'inconnues). L'inversion a été testée successivement sur les dipôles puis sur les monopoles.

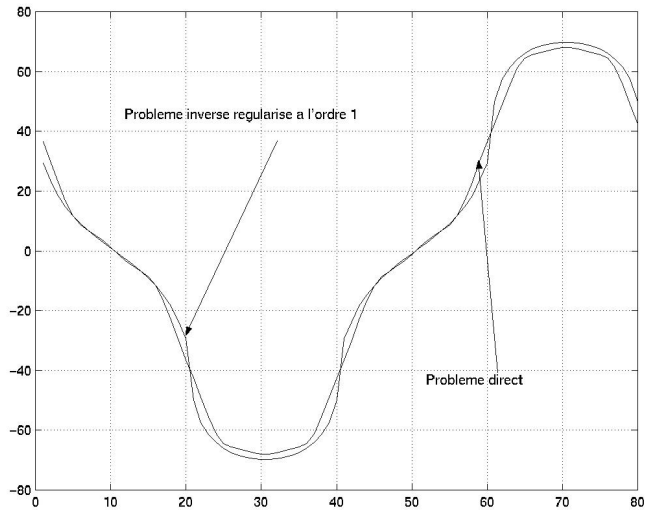
Il faut prendre garde à la validité du modèle au niveau des capteurs. Les champs étant créés par des sources ponctuelles, ceux-ci au voisinage direct des éléments tendent vers l'infini. Si une telle situation se produit, il est nécessaire, soit de s'éloigner de la tôle, soit d'augmenter le nombre d'éléments. Pour nous rapprocher de mesures réelles et donc générer un bruit aléatoire, les données des capteurs ont été simulées numériquement par la méthode des éléments finis [BRU 90].

#### 4.1.1. Inversion du modèle dipolaire

L'inversion des dipôles tangentiels est délicate. La décroissance du champ est en  $1/r^3$ , ce qui conduit à une zone de validité du modèle beaucoup plus restreinte que pour les charges.

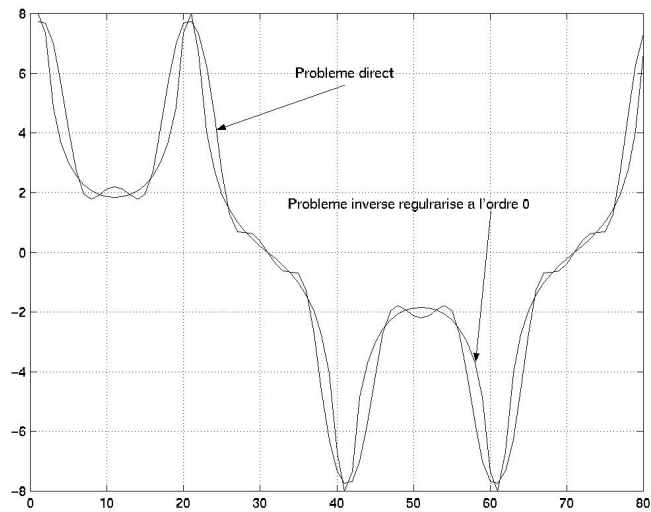
Cette forte décroissance est à l'origine de matrices qui sont globalement beaucoup moins bien conditionnées que leurs équivalentes monopolaires. La technique de régularisation choisie est la méthode de Tikhonov à l'ordre 1 (la régularisation à l'ordre 0 conduit à des divergences), l'information ajoutée impose une faible variation du module entre deux dipôles voisins.

Nous trouvons une bonne adéquation entre problème direct et reconstruction par problème inverse. Ceci nous permet de valider notre approche par dipôles tangentiels.



**Figure 6.** Densité surfacique des dipôles le long du carré (teslamètre en unités SI)  
(un point tous les 10 cm)

#### 4.1.2. Inversion du modèle monopolaire



**Figure 7.** Densité surfacique des charges le long du carré (tesla en unités SI)  
(un point tous les 10 cm)

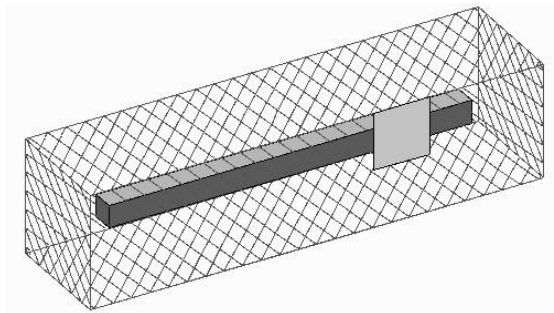
La décroissance du champ est ici en  $1/r^2$  ce qui conduit pour les raisons évoquées précédemment à des systèmes mieux conditionnés. La régularisation utilisée est l'ordre 0, c'est-à-dire imposer une norme des charges minimum. Il faut noter que l'ordre 1 conduit à des résultats légèrement meilleurs, mais pas de façon significative.

#### 4.1.3. Conclusion sur les modèles

Nous disposons donc de deux modèles qui possèdent chacun leurs particularités. Le modèle le plus physique est le modèle dipolaire. Il possède l'avantage d'être relié directement à l'aimantation. Cependant, il conduit à des systèmes deux fois plus importants que son homologue monopolaire, ce qui est son principal désavantage. En effet, le mauvais conditionnement des problèmes inverses s'accroît avec la taille des systèmes. Le modèle monopolaire conduit à un nombre beaucoup plus limité d'inconnues. Même s'il demeure très mathématique, ses avantages sont également une divergence du champ moindre à proximité de la tôle et un développement informatique beaucoup plus aisé. Sur cette géométrie 2D, nous ne présentons que des résultats issus de la régularisation par la méthode de Tikhonov. Les systèmes étant de tailles restreintes, ces méthodes sont ici suffisantes pour inverser dans de bonnes conditions.

## 5. Inversion en trois dimensions à partir de mesures numériques

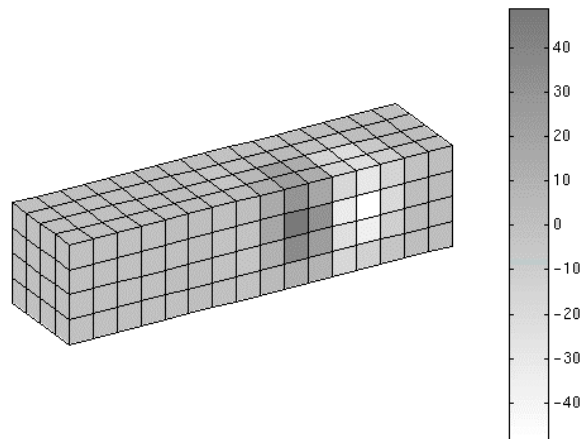
Les tests ont été effectués sur un parallélépipède de 4 m de long et de section  $1 \text{ m}^2$ , discrétisé en 288 éléments. Les mesures des capteurs ont été simulées par une formulation éléments finis. Leurs localisations apparaissent sur la figure 8 (ils sont répartis uniformément dans le parallélépipède foncé). Le champ inducteur est de  $1\,000 \text{ nT}$ , l'épaisseur  $1 \text{ mm}$  et la perméabilité relative 96. Dans une partie de la tôle, représentée en gris, nous avons ajouté une aimantation rémanente de  $0,05 \text{ T}$ .



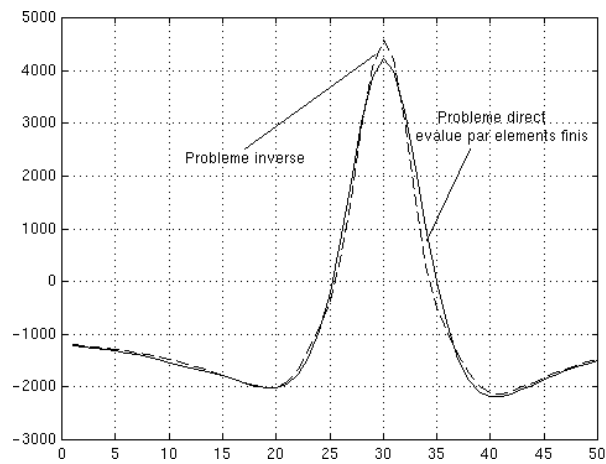
**Figure 8.** Localisation des capteurs et de la portion de tôle possédant une induction rémanente

### 5.1. Inversion du modèle monopolaire

Les éléments surfaciques portent une répartition surfacique de charges constante. La méthode de régularisation employée est la régularisation de Tikhonov à l'ordre 0, elle est ici suffisante pour ce type de problèmes. Une fois la répartition de charges obtenue, nous calculons le champ à 50 cm sous la structure, celui-ci est ensuite comparé avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis.



**Figure 9.** Répartition des charges sur la structure (tesla en unités SI)



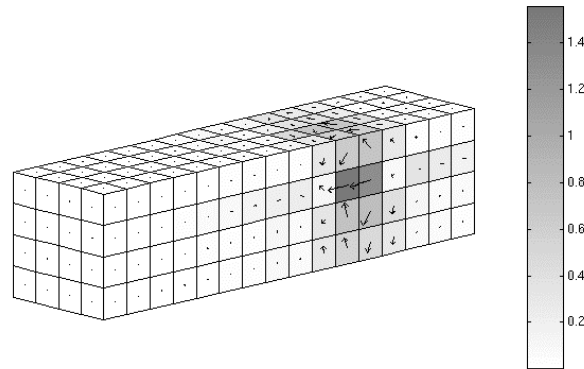
**Figure 10.** Composante verticale du champ en nanotesla à 50 cm sous la structure (ligne de 10 m de long, un point tous les 16 cm). Méthode de régularisation : Tikhonov à l'ordre 0



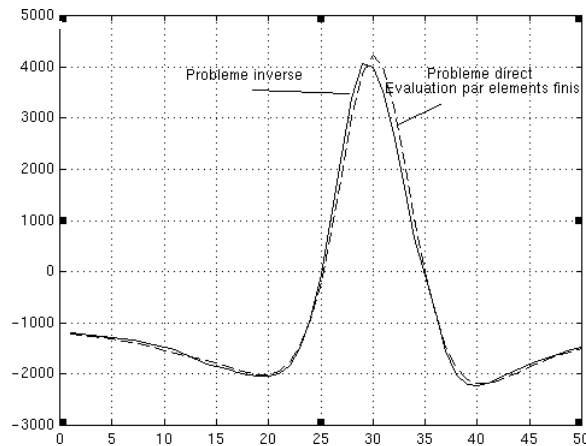
Le nombre de capteurs est de 100, ce qui nous conduit à résoudre un problème légèrement surdimensionné (trois composantes par capteur). Une diminution du nombre de capteurs dégrade considérablement les résultats.

### 5.2. Inversion du modèle dipolaire

Nous utilisons ici notre nouvelle technique de régularisation (DPI), la seule qui ait conduit à des résultats acceptables pour l'inversion du modèle dipolaire en 3D. Le problème est résolu en termes de dipôles induits seuls, grâce à l'équation [23], les matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{d}$  obtenues étant ensuite utilisées comme « régularisateur ». La structure possède les mêmes caractéristiques et la même discrétisation. Nous avons utilisé 60 capteurs, ce qui conduit à l'écriture d'un problème sous-dimensionné.



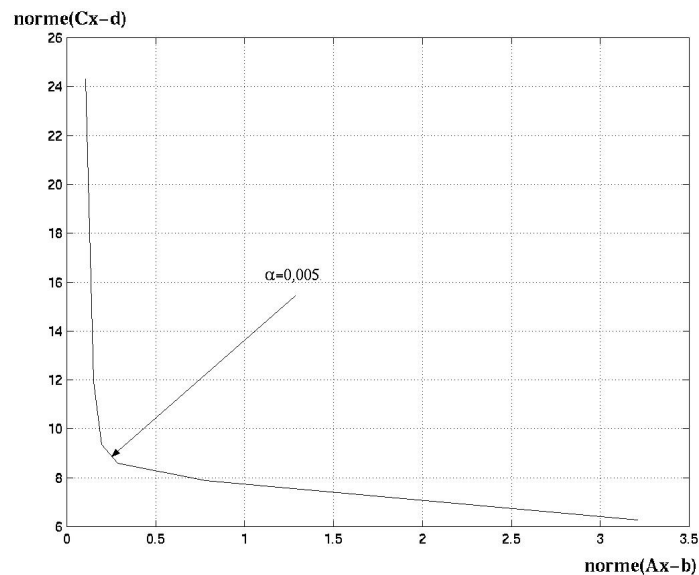
**Figure 11.** Répartition ponctuelle de dipôles (teslamètre<sup>3</sup> en unités SI)



**Figure 12.** Composante verticale du champ en nanotesla sous la structure, (ligne de 10 m de long, un point tous les 16 cm). Méthode de régularisation : *PDI*

### 5.3. Choix du paramètre $\alpha$

Le choix du paramètre est primordial. Il révèle l'importance que l'on donne à un système par rapport à l'autre. Le système à privilégier est évidemment  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Si  $\alpha$  est petit, la norme de  $\mathbf{Ax}-\mathbf{b}$  est petite et celle de  $\mathbf{Cx}-\mathbf{d}$  trop importante (ces solutions divergent, elles sont équivalentes à une simple résolution par les moindres carrés). Si  $\alpha$  est trop grand, la norme de  $\mathbf{Ax}-\mathbf{b}$  croît (les mesures ne sont plus respectées) et nous nous rapprochons de la solution des aimantations induites seules. Pour optimiser le paramètre, il suffit de tracer la courbe norme de  $\mathbf{Ax}-\mathbf{b}$  en fonction de norme de  $\mathbf{Cx}-\mathbf{d}$ . Cette courbe présente une forme de L (appelée L-curve). Le paramètre idéal se situe au niveau du coude (le point le plus proche des deux zéros) [HAN 93].

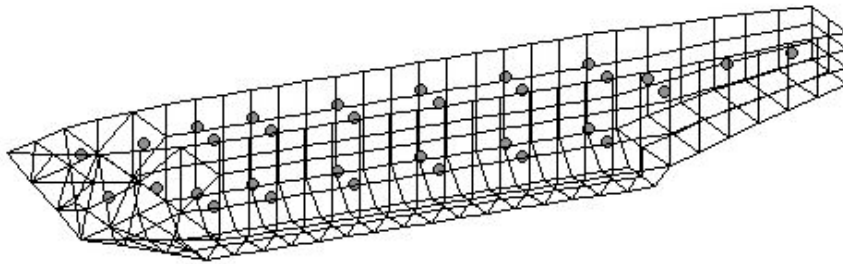


**Figure 13.** Choix du paramètre  $\alpha$  pour l'inversion dipolaire pour la méthode DPI

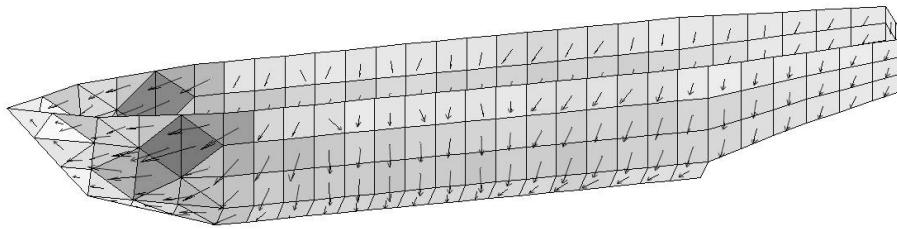
## 6. Inversion en trois dimensions à partir de mesures réelles

Nous disposons d'une maquette de navire (4,60 m de long,  $e = 1,4$  mm,  $\mu_r = 96$ ). Elle est immergée dans le champ magnétique terrestre que nous connaissons (Cap nord). Nous avons disposé à l'intérieur 32 capteurs vectoriels de champ magnétique du type fluxgate. Le but est de retrouver l'anomalie magnétique générée par cette structure à l'extérieur. Pour cela, des capteurs ont été placés à 30 cm sous la maquette, afin de comparer le champ prévu par problème inverse et le champ effectivement mesuré.

La coque a été maillée en 271 éléments (figure 14). Nous avons régularisé le problème d'identification de l'aimantation de cette structure par l'aimantation induite créée par le champ inducteur, ceci en connaissant la géométrie et la perméabilité du matériau. Le choix du paramètre  $\alpha$  est effectué grâce à la technique de la L-curve ( $\alpha = 2,10^{-3}$ ).



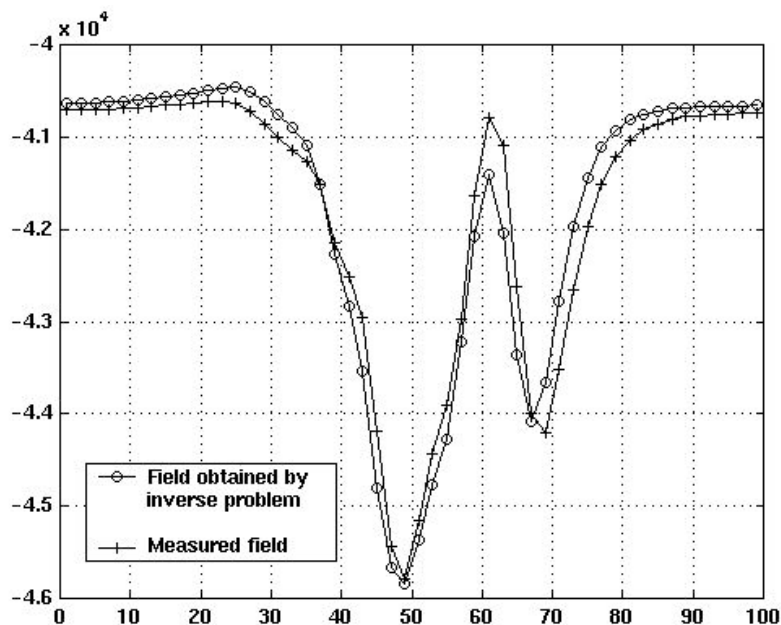
**Figure 14.** Position des capteurs et maillage de la coque



**Figure 15.** Modèle d'aimantation reconstruit par problème inverse

Le modèle d'aimantation obtenu permet alors de calculer le champ à l'extérieur de la maquette. Ce champ est alors comparé au champ mesuré par sept capteurs situés à 30 cm sous la maquette. Les composantes des champs obtenus par problème inverse et mesurés sont en bonne adéquation, ceci pour les trois composantes de l'espace (figure 16 pour la composante verticale).

Il faut noter que les mesures sont fortement bruitées (champ très faible, offset et dérive des capteurs, bruit du champ terrestre), notre approche présente donc de remarquables qualités de stabilité. De plus, un nombre peu élevé de capteurs est utilisé, ce qui rend l'approche très attractive en terme de coût (prix élevé des capteurs).



**Figure 16.** Comparaison entre les composantes verticales du champ obtenues par problème inverse et le champ mesuré en nanotesla sur une longueur de 10 m (un point tous les 10 cm) à 30 cm sous quille

## 7. Conclusion

Nous disposons de résultats concluants concernant l'inversion d'un problème magnétostatique 3D. Nous avons, de plus, développé un nouveau concept de régularisation des problèmes inverses, la régularisation par injection d'une partie déterministe du problème direct (DPI).

Cette méthode nous a permis d'obtenir des solutions physiques pour l'inversion dipolaire et ceci à peu de frais en termes de temps de calcul. Si d'autres méthodes n'ont pas été investiguées (algorithmes itératifs, par exemple), elles devraient conduire à des temps de calculs supérieurs. Cette méthode n'a pas été employée pour les charges (tableau 2). En effet, la mise au point des formulations de calcul des aimantations induites est plus fastidieuse [VIS 93] et nécessite la génération de maillages particuliers. Les systèmes engendrés par l'approche monopolaire sont de taille moindre et les méthodes classiques conduisent à des résultats satisfaisants. Pourtant le développement d'un tel algorithme pourrait apporter un gain décisif en termes de nombre de capteurs. C'est un des principaux avantages de notre méthode qui permet de résoudre des systèmes sous-dimensionnés dans de très bonnes conditions.

Notons que l'approche dipolaire peut être étendue à des géométries volumiques, l'intégration devenant volumique au lieu de surfacique. Cette nouvelle méthode de régularisation peut également s'appliquer à de tels cas.

Méthodes	Charges 2D	Charges 3D	Dipôles 2D	Dipôles 3D
Tikhonov 0	résultats bons	résultats bons	résultats mauvais	résultats mauvais
Tikhonov 1	résultats bons	difficile d'implantation	résultats bons	difficile d'implantation
SVD avec troncature	résultats bons	résultats bons	résultats mauvais	résultats mauvais
DPI	résultats bons	non testée	résultats bons	résultats bons

**Tableau 2.** Les différents cas testés

## 8. Bibliographie

- [BRI 97] BRISSONNEAU P., *Magnétisme et matériaux magnétiques*, Editions Hermès, 1997.
- [BRU 90] BRUNOTTE X., MEUNIER G., « Line element for efficient computation of the magnetic field created by thin iron plates », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, september 1990, p. 2196-2198.
- [DUR 68] DURAND E., *Electrostatique*, Masson et Cie, Paris, 1968.
- [HAN 93] HANSEN P.C., O'LEARY D.P., « The use of the L-curve in regularization if discretization of discrete ill-posed problems », *SIAM, J. Sci. Comput.*, n° 14, 1993, p. 1487-1503.
- [KRA 93] KRAHENBUHL L., MULLER D., « Thin layer in electrical engineering. Example of shell models in analyzing eddy-currents by boundary and finite element methods », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, march 1993, p. 1450-1455.
- [LAG 99] LAGIER G.-L., Application de la méthode des éléments de frontière à la résolution du problème inverse de conduction de la chaleur multidirectionnel : régularisation par troncature du spectre, Thèse de doctoral, INPG, 1999.
- [THI 76] THIKHONOV A., ARSENINE V., *Méthode de résolution des problèmes mal posés*, Edition de Moscou, 1976.
- [VIS 93] VISHENSKY A., KRASNOV I., LAPOKOV A., « Calculation of static magnetization for thin-walled constructions by boundary element method », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, September 1993, p. 2152-2155.

**Olivier Chadebec** est né en 1973. Il est diplômé de l'Ecole nationale supérieure d'ingénieur électricien de Grenoble et titulaire d'un DEA de Génie électrique depuis 1997. Il prépare actuellement un doctorat de Génie électrique au laboratoire de Magnétisme du navire. Ses principaux sujets d'intérêt sont les méthodes numériques de calculs, les problèmes inverses, les méthodes d'optimisation appliquées à l'électromagnétisme ainsi que la mesure des champs magnétiques faibles.

**Jean-Louis Coulomb** est né en 1949. Il a obtenu le diplôme d'ingénieur de l'Ecole nationale supérieure d'ingénieurs électriciens de Grenoble, en France, en 1972, un doctorat de 3<sup>e</sup> cycle en 1975 ainsi qu'un doctorat d'état en 1981 de l'Institut national polytechnique de Grenoble. Actuellement professeur à l'INPG, il mène son activité de recherche au laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble. Depuis 1998, il est directeur du laboratoire de Magnétisme du navire. Son activité de recherche porte sur les techniques numériques de calculs, les éléments finis, la génération de maillage, l'optimisation de forme et les logiciels de CAO.

**Jean-Paul Bongiraud** est né 1943. Il a obtenu un diplôme d'ingénieur en électronique de l'Institut national des sciences appliquées de Lyon en France en 1965 et un DEA en physique du solide en 1967 à l'université Grenoble. Il est responsable scientifique du laboratoire de Magnétisme du navire à l'ENSIEG.

**Gilles Cauffet** est né en 1964. Il a obtenu un DEA de génie électrique à l'université d'Orléans en 1987 et un doctorat de génie électrique de l'Institut national polytechnique de Grenoble préparé au laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble en 1992. Maître de conférences à l'Institut des sciences et techniques de Grenoble, il enseigne l'électronique analogique, les capteurs, les systèmes de mesure et la modélisation. Son activité de recherche au laboratoire de Magnétisme du navire porte sur la modélisation et les mesures en champ magnétique faible.