



**HAL**  
open science

# Formulations intégrales magnétostatiques : un bilan pour l'identification de l'aimantation de tôles ferromagnétiques

Yannick Vuillermet, Olivier Chadebec, Jean-Louis Coulomb, Laure-Line Rouve, Gilles Cauffet

## ► To cite this version:

Yannick Vuillermet, Olivier Chadebec, Jean-Louis Coulomb, Laure-Line Rouve, Gilles Cauffet. Formulations intégrales magnétostatiques : un bilan pour l'identification de l'aimantation de tôles ferromagnétiques. *Revue Internationale de Génie Electrique (RIGE)*, 2006, 10, pp.287 - 302. 10.3166/rige.11.287-302 . hal-03047959

**HAL Id: hal-03047959**

**<https://hal.science/hal-03047959v1>**

Submitted on 9 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Formulations intégrales magnétostatiques

## Un bilan pour l'identification de l'aimantation de tôles ferromagnétiques

**Yannick Vuillermet — Olivier Chadebec — Jean-Louis Coulomb  
Laure-Line Rouve — Gilles Cauffet**

*G2ELAB (INPG/UJF CNRS), ENSIEG*

*BP 46*

*F-38402 Grenoble*

*{yannick.vuillermet, olivier.chadebec, jean-louis.coulomb}@g2elab.inpg.fr*

*{laure-line.rouve, gilles.cauffet}@g2elab.inpg.fr*

---

*RÉSUMÉ. Nous résumons dans cet article les performances des formulations intégrales volumiques appliquées aux tôles pour la résolution du problème inverse magnétostatique. Après avoir présenté la problématique du magnétisme du navire, nous décrivons les différents modèles possibles de représentation des sources magnétiques et leurs utilisations pour le calcul de l'aimantation induite. La dernière partie s'attache à résoudre le problème inverse d'identification d'aimantation de tôles ferromagnétiques à partir de mesures du champ magnétique rayonné afin de déterminer leur aimantation permanente.*

*ABSTRACT. In this paper, different magnetostatic integral methods are described in order to solve inverse problem applied to thin magnetic shells. Firstly, ship magnetostatic issues are explained and then some methods, using different magnetic sources, are presented to calculate induced magnetization. The last part treats the inverse problem that consists in determining the permanent magnetization from static magnetic field measurements.*

*MOTS-CLÉS: magnétostatique, identification d'aimantation, tôle ferromagnétique mince, problème inverse, potentiel scalaire, aimantation, charge.*

*KEYWORDS: magnetostatics, magnetization identification, thin magnetic shell, inverse problem, scalar potential, magnetization, charge.*

---

## 1. Introduction

Un navire à coque ferromagnétique, sous l'influence du champ magnétique terrestre et de contraintes mécaniques, s'aimante. Il crée alors une anomalie locale de ce champ, qui peut être la source de sa localisation et/ou de sa destruction (mines à influence magnétique par exemple). Au cours des dernières décennies, la discrétion magnétique des navires a été l'objet de nombreuses études. La simulation numérique, associée à des moyens de mesures de plus en plus performants, permet aujourd'hui une meilleure connaissance des phénomènes mis en jeu.

L'objectif final des études en cours consiste à élaborer un système permettant au bâtiment d'autoévaluer cette anomalie et de la compenser en temps réel. La mise au point de ce système nécessite le développement d'un outil capable de prédire l'aimantation de la coque à chaque instant. Cette aimantation se décompose en deux parties : d'une part l'aimantation induite et d'autre part l'aimantation permanente. La première partie de ce travail s'attache à présenter des méthodes numériques permettant de calculer l'aimantation induite, c'est-à-dire la réaction du matériau plongé dans un champ inducteur. La deuxième partie propose une méthode pour déterminer l'aimantation permanente. Cette aimantation dépendant de l'histoire magnétique du bâtiment (hystérésis, magnétostriktion...), un calcul déterministe n'est pas envisageable. Il est alors nécessaire de faire intervenir des mesures de champ magnétique effectuées à l'intérieur de la coque pour l'évaluer.

Parmi les différentes formulations du problème magnétostatique, peu sont adaptées aux différentes contraintes imposées, à savoir :

- un calcul du champ proche des tôles précis. En effet, il est indispensable de faire des mesures de champ proche des sources et ceci pour deux raisons : la première est que techniquement les capteurs ne peuvent pas être placés à l'extérieur du navire et la deuxième tient au fait que « l'information magnétique » décroît rapidement avec la distance. Il est ainsi illusoire d'espérer identifier un comportement local avec des mesures trop éloignées,
- inversible : c'est-à-dire qui présente un lien mathématique fort entre les sources et leurs effets.

Chaque formulation a ses avantages et ses inconvénients qui doivent être clairement identifiés. Par exemple, la méthode des éléments finis est peu adaptée pour le calcul de l'aimantation de tôles minces ; en effet, cela nécessite de mailler des volumes de dimensions très différentes suivant les directions, ce qui peut faire exploser le maillage (notons cependant que l'utilisation de certains éléments finis spéciaux permet de résoudre ce problème (Brunotte *et al.*, 1990)). En revanche, les formulations intégrales volumiques sont très efficaces pour ce type de problème puisqu'elles ne nécessitent qu'un maillage des matériaux magnétiques. Toutefois, le calcul du champ proche des tôles par les méthodes intégrales est plus délicat qu'avec les éléments finis car elles condensent artificiellement les sources du champ et créent des singularités peu en accord avec la physique.

Finalement, le point critique qui écarte (au moins temporairement) la méthode des éléments finis est son absence de relation inversible entre les sources et leurs effets. Cela rend l'inversion de cette méthode très difficile voire impossible. Alors que, d'une manière générale, les formulations intégrales présentent explicitement ce lien.

Nous proposons dans cet article un bilan des formulations intégrales que nous avons mises en œuvre pour résoudre ce problème ainsi que leurs avantages et limites. Nous rappellerons les formulations intégrales en aimantation et en charges magnétiques fictives déjà employées pour cette problématique (Chadebec *et al.*, 2002 ; Chadebec *et al.*, 2003) et nous ajoutons une formulation en potentiel scalaire.

## 2. Problème direct : calcul de l'aimantation induite

Dans cette section, nous nous intéressons au calcul de l'aimantation induite  $\vec{M}^{ind}$  d'une tôle magnétique mince en connaissant le champ extérieur  $\vec{H}_0$ , la géométrie et la physique du problème (la perméabilité réversible  $\mu_r$  en particulier). Ce type de calcul est un cas classique de problème dit direct.

### 2.1. Equation de comportement de la tôle

Considérons une tôle ferromagnétique placée dans un champ inducteur extérieur  $\vec{H}_0$  (le champ magnétique terrestre ou le champ créé par des boucles de courant par exemple). L'aimantation induite de la tôle crée une perturbation locale  $\vec{H}_{red}$  du champ inducteur qui peut être exprimée ainsi :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_{red} \quad [1]$$

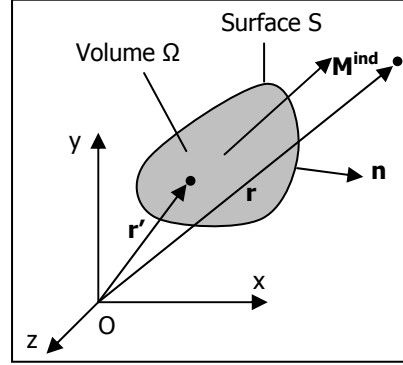
Nous écrivons ensuite l'équation représentative du comportement de la tôle en l'absence d'aimantation permanente et valable en champ faible uniquement :

$$\vec{M}^{ind} = \vec{M} = \chi_r \vec{H} \quad [2]$$

où  $\chi_r$  est la susceptibilité réversible du matériau et valant  $\mu_r - 1$ .

Ecrivons finalement l'équation reliant l'aimantation totale  $\vec{M}$  et le champ réduit  $\vec{H}_{red}$  en se référant à la figure 1 (Chadebec *et al.*, 2002) :

$$\vec{H}_{red} = -\frac{1}{4\pi} \overrightarrow{grad} \iiint_{\Omega} \vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega \quad [3]$$



**Figure 1.** Définition des symboles utilisés

Il est dès lors possible de représenter les sources du champ magnétique par différents modèles physiques ou mathématiques. Nous verrons que chaque représentation présente des avantages et inconvénients propres. Nous les décrivons dans les sous-sections suivantes.

## 2.2. Représentation intégrale des sources par une distribution d'aimantation

Le modèle le plus naturel et le plus physique de représentation des sources est bien sûr l'aimantation. Nous appelons  $e$  l'épaisseur de la tôle. L'équation qui régit le problème magnétostatique est donc la suivante en utilisant [1], [2] et [3] :

$$\vec{M}^{ind} + \frac{e\chi_r}{4\pi} \text{grad} \iiint_{\Omega} \vec{M}^{ind} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega = \chi_r \vec{H}_0 \quad [4]$$

Nous supposons désormais que notre système est maillé en  $ne$  éléments et  $nn$  nœuds. Les arêtes des éléments portent les vecteurs normaux  $\vec{n}_k$ . Une condensation adéquate des sources sur les arêtes (Chadebec *et al.*, 2002) mène alors à l'équation discrétisée suivante écrite au barycentre de l'élément  $j$  :

$$\vec{M}_j^{ind} - \frac{e\chi_r}{4\pi} \sum_{k=1}^{ne} \int_k \vec{M}_k^{ind} \cdot \vec{n}_k \cdot \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^3} dL = \chi_r \vec{H}_{0j} \quad [5]$$

L'écriture de cette équation au barycentre de chaque élément du maillage conduit à l'obtention d'un système linéaire à  $ne$  lignes et  $ne$  colonnes. Nous appelons dans la suite SM le vecteur du second membre du problème direct (*i.e.*  $\chi_r \vec{H}_0$ ) et C la matrice des interactions magnétiques entre chaque élément. La

résolution du système suivant permet de déterminer l'aimantation induite de chaque élément :

$$C.M^{ind} = SM \quad [6]$$

Le champ rayonné au point  $\vec{r}_c$  est, à l'aide de [3] :

$$\vec{H}(\vec{r}_c) = \frac{e}{4\pi} \sum_{k=1}^{ne} \int_k \vec{M}_k^{ind} \cdot \vec{n}_k \cdot \frac{\vec{r}_c - \vec{r}}{|\vec{r}_c - \vec{r}|^3} dL + \vec{H}_0(\vec{r}_c) \quad [7]$$

Nous pouvons d'ors et déjà estimer les performances en calcul du champ proche des sources de cette formulation. En effet, deux paramètres influent sur le résultat : la singularité introduite par la condensation et la singularité de l'intégrale de l'équation [7]. Concernant le second paramètre, nous sommes relativement confiants, la décroissance de l'intégrand est en  $1/r^2$ . En comparaison, les modèles de représentation dipolaire (Vishnevsky *et al.*, 1993) ont une décroissance en  $1/r^3$ , très singulière à proximité de la tôle (ce qui, de fait, exclut ce type de représentation de cet article). En revanche, la condensation des sources sur les arêtes des éléments risque de poser problème en introduisant des singularités importantes : chaque élément porte ainsi une aimantation constante. La possibilité d'utiliser des aimantations linéaires par élément a été étudiée mais le calcul du gradient de l'intégrale de l'équation [4] d'un élément sur lui-même est très complexe. Il existe pourtant un moyen d'utiliser des aimantations linéaires par élément en passant par le potentiel scalaire magnétique.

### 2.3. Représentation intégrale des sources par une distribution de potentiel scalaire

Le potentiel scalaire magnétique total  $U(r)$  peut être représenté comme la somme du potentiel des sources  $U_0(r)$  et du potentiel réduit  $U_m(r)$ , induit par l'aimantation  $\vec{M}^{ind}$  de la tôle :

$$U = U_m + U_0 \quad [8]$$

$$U_m = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{M}^{ind} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega \quad [9]$$

$$\vec{M}^{ind} = -\chi_r \overrightarrow{\text{grad}} U \quad [10]$$

En combinant [8], [9] et [10], nous obtenons l'équation qui régit le système (Kalimov *et al.*, 1998) :

$$U + \frac{\chi_r}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\overrightarrow{\text{grad}}U \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega = U_0 \quad [11]$$

Nous supposons désormais que l'aimantation est tangentielle à la tôle. En conséquence, le potentiel est constant dans l'épaisseur. Nous considérons également que le potentiel peut être approximé par des fonctions de forme  $\varphi$  linéaires ou quadratiques sur chaque élément.

$$U(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^3 U_i \varphi_i^{(k)}(\tau_1, \tau_2) \quad [12]$$

où  $\tau_1, \tau_2$  forment une base locale propre à l'élément considéré.

Remarquons que l'utilisation de fonctions de forme quadratiques impose la création de nœuds supplémentaires au milieu de chaque arête. Nous appelons  $nq$  le nombre de nœuds ajoutés.

Nous pouvons alors écrire l'équation [10] discrétisée au nœud de coordonnées  $\mathbf{r}_j$  :

$$U_j + \frac{\chi_r}{4\pi} \sum_{i=1}^{nn+nq} \sum_{k=1}^{ne} U_i \iiint_k \left( \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial \tau_1} \bar{\tau}_1 + \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial \tau_2} \bar{\tau}_2 \right) \cdot \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^3} dV = U_{ej} \quad [13]$$

L'intégrale volumique de l'équation [13], bien que convergente (Durand, 1964), est très délicate à calculer lorsque nous évaluons l'interaction d'un nœud sur lui-même. Nous avons pour cela développé une expression semi-analytique de cette intégrale.

L'écriture de cette équation en chaque nœud du maillage conduit à l'obtention d'un système linéaire à  $nn$  lignes et  $nn$  colonnes (ou  $nn+nq$  lignes et colonnes dans le cas quadratique). Nous appelons dans la suite  $SU$  le vecteur du second membre du problème direct (*i.e.* le vecteur de  $U_0$ ) et  $\Omega$  la matrice des interactions magnétiques entre chaque nœud. La résolution du système suivant permet de déterminer le potentiel induit en chaque nœud :

$$\Omega U = SU \quad [14]$$

Le champ rayonné au point  $\vec{r}_c$  est calculé, à l'aide de [15] :

$$\vec{H}(\vec{r}_c) = \frac{\chi_r}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \iiint_{\Omega} \frac{\overrightarrow{\text{grad}}U \cdot (\vec{r}_c - \vec{r})}{|\vec{r}_c - \vec{r}|^3} d\Omega + \vec{H}_0(\vec{r}_c) \quad [15]$$

Comme pour la formulation en aimantation, la décroissance du champ est en  $1/r^2$ , ce qui garantit une bonne validité du champ proche. En revanche, nous pouvons nous attendre à de meilleurs résultats en raison de la singularité plus faible de cette représentation avec l'utilisation de fonctions de forme quadratiques. Celles-ci introduisent deux propriétés importantes : la continuité du champ tangentiel d'un élément à l'autre et la linéarité de l'aimantation sur un élément (pour les fonctions quadratiques).

#### 2.4. Représentation intégrale des sources par une distribution de charges fictives

Dans cette sous-section, nous appelons  $\rho$  une distribution surfacique de charges fictives répartie sur la tôle et  $\text{div}_s$  l'opérateur divergence réduit à deux dimensions.

L'équation de comportement d'une tôle mince d'épaisseur  $e$  est donnée par la relation suivante (Krahenbuhl *et al.*, 1993 ; Brunotte, 1991) :

$$e\chi_r \text{div}_s (\vec{H}_0 + \vec{H}_{red}) = -\rho \quad [16]$$

Nous définissons la charge condensée au nœud  $j$  :

$$Q_j = \iint_{S_j} \rho dS \quad [17]$$

La discrétisation de la surface et la condensation des charges aux nœuds du maillage mènent à l'équation écrite au nœud  $j$  (Vishnevsky, 1993) :

$$-\frac{Q_j}{e\chi_r} - \sum_i^{mn} Q_i \int_{L_i} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{n}_i dL = \int_{L_j} \vec{H}_0 \cdot \vec{n}_j dL \quad [18]$$

L'écriture de cette équation en chaque nœud du maillage conduit à l'obtention d'un système linéaire à  $mn$  lignes et  $mn$  colonnes. Nous appelons dans la suite  $SQ$  le vecteur du second membre du problème direct et  $\Psi$  la matrice des interactions magnétiques entre chaque nœud. La résolution du système suivant permet de déterminer la charge fictive magnétique portée par chaque nœud :

$$\Psi \cdot Q = SQ \quad [19]$$

Le champ rayonné au point  $\vec{r}_c$  est calculé, à l'aide de [20] :



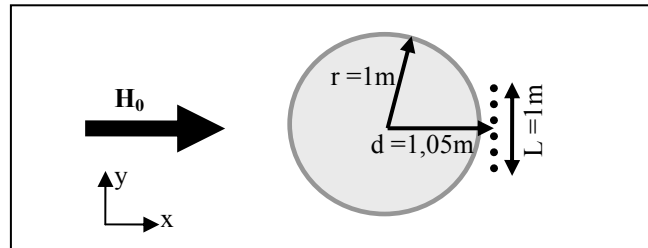
$$\vec{H}(\vec{r}_c) = \frac{1}{4\pi} \sum_j^m Q_j \frac{\vec{r}_c - \vec{r}}{|\vec{r}_c - \vec{r}|^3} + \vec{H}_0(\vec{r}_c) \quad [20]$$

De même que pour les représentations précédentes, la décroissance du champ à partir des sources est en  $1/r^2$ . Cependant, ce modèle est celui qui présente le plus de singularités : en effet, les charges sont condensées aux nœuds du système. Nous pouvons vraisemblablement nous attendre à des résultats très approximatifs près des sources maillées.

Remarquons enfin que malgré le caractère très mathématique de cette source, il est possible de lier les charges ponctuelles à la physique puisque celles-ci représentent le flux d'induction entrant dans la tôle.

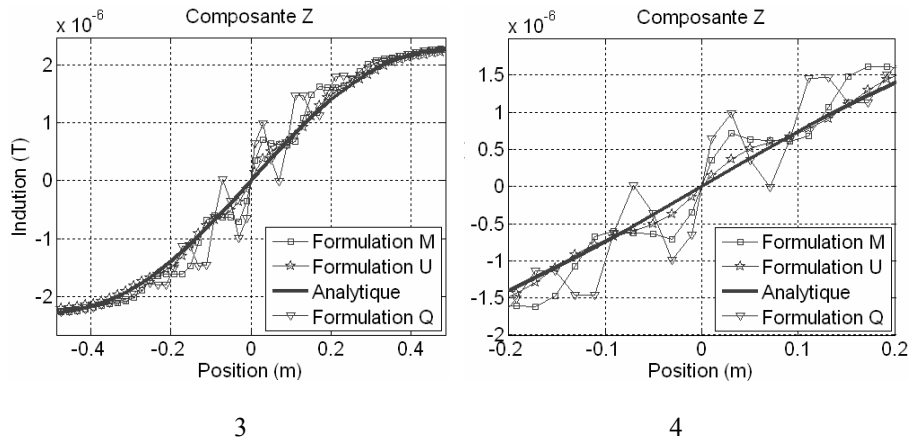
### 2.5. Test des formulations

Les formulations susceptibles de répondre aux contraintes de notre problème ont été décrites. Nous allons vérifier leurs performances pour le calcul du champ proche sur une géométrie simple. Nous considérons une sphère creuse de rayon 1 m, d'épaisseur 0,0014 m et de perméabilité réversible 96. Elle est placée dans un champ inducteur extérieur de valeur  $30 \text{ A m}^{-1}$  suivant l'axe x. Le champ magnétique est évalué sur la ligne pointillée ci-dessous (voir figure 2).



**Figure 2.** Définition du système (plan de coupe)

Les maillages utilisés sont différents selon la méthode utilisée afin de garder un nombre total d'inconnues constant. Le maillage de la formulation en aimantation comporte 576 éléments (soit 1 152 inconnues), celui de la formulation en potentiel 400 éléments (soit 1 162 inconnues) et celui en charge 1 156 éléments (soit 1 124 inconnues). Remarquons que le maillage utilisé pour la formulation en potentiel scalaire est celui qui commet la plus grande erreur géométrique. Les fonctions de forme quadratiques sont utilisées pour la formulation en potentiel.



**Figures 3 et 4.** Induction sur une ligne proche de la sphère

Nous voyons clairement apparaître sur cet exemple les avantages de la formulation en potentiel scalaire. L'erreur commise sur le champ proche est très faible par rapport aux autres formulations malgré l'erreur géométrique plus importante. Les condensations sur les arêtes des éléments et sur les nœuds du maillage, respectivement, des formulations en aimantation et en charges sont visibles sur le champ rayonné proche. Comme prévu, la formulation en charges est la moins performante.

### 3. Problème inverse : détermination de l'aimantation permanente

#### 3.1. Définition

Comme nous l'avons déjà précisé, le calcul de l'aimantation permanente est impossible, il est nécessaire de faire intervenir la mesure.

Supposons que nous disposions d'un capteur triaxe placé proche des tôles, la relation liant le champ mesuré par rapport à l'aimantation de la tôle est donnée, par exemple, par [7]. Supposons maintenant que nous placions  $p$  capteurs triaxes, nous pouvons alors écrire le système de  $3 \times p$  équations et  $2 \times n$  inconnues suivant :

$$Am.M = b \quad [21]$$

où  $Am$  est la matrice dite inverse et qui dépend de la position des capteurs, du maillage et de la géométrie et  $b$  est le vecteur des mesures.

Classiquement, résoudre un problème inverse consiste à trouver des solutions au système [21] (Igarashi *et al.*, 2000).

### 3.2. Difficultés

La résolution des problèmes inverses pose des difficultés importantes. Deux types de problèmes apparaissent : le système peut être sous-dimensionné et le système peut être mal conditionné.

Lorsqu'on dispose de peu de capteurs, le système à résoudre est très sous-déterminé, c'est-à-dire qu'il possède plus d'inconnues que d'équations (ce qui se traduit physiquement par un manque d'information). Il existe alors une infinité de solutions qui correspondent aux mesures. On peut alors être tenté de multiplier le nombre de capteurs mais cela est rarement judicieux dans notre application. En effet, les mesures étant toujours frappées d'une certaine incertitude (bruit des capteurs par exemple), il se peut que plusieurs équations proches du système admettent un second membre très différent. Le conditionnement du système devient alors médiocre et sa résolution mène à des solutions divergentes. Il en résulte un compromis sur le nombre de capteurs et sur leurs positions. Toute la difficulté des problèmes inverses est de savoir sélectionner la solution physique parmi l'infinité de solutions possibles : il s'agit de régulariser.

La méthode de régularisation de Tikhonov est classiquement utilisée (Tikhonov *et al.*, 1977). Elle s'applique pourtant difficilement à la résolution de problème inverse appliqué aux tôles minces (Chadebec *et al.*, 2002). Nous préférons régulariser en ajoutant de l'information physique (Chadebec *et al.*, 2002).

### 3.3. Régularisation par ajout d'informations physiques : équation de comportement de la tôle avec une aimantation permanente

L'équation de comportement de la tôle [2] ne tient compte que de l'aimantation induite. Il est possible de réécrire cette équation, en tenant compte de l'aimantation permanente, sous la forme des deux équations suivantes :

$$\vec{M}^{ind} = \chi_r \vec{H} \quad [22]$$

$$\vec{M} = \vec{M}^{ind} + \vec{M}^{per} \quad [23]$$

### 3.4. Application de la régularisation à la formulation en aimantation

Il s'agit de réécrire les équations [4], [5], [6] et [7] en tenant compte de cette nouvelle équation de comportement de la tôle. Par exemple, [5] et [7] deviennent :

$$\vec{M}_j^{ind} - \frac{e\chi_r}{4\pi} \sum_{k=1}^{ne} \int_k (\vec{M}_k^{ind} + \vec{M}_k^{per}) \cdot \vec{n}_k \cdot \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^3} dL = \chi_r \vec{H}_{0j} \quad [24]$$

$$\vec{H}(\vec{r}_c) = \frac{e}{4\pi} \sum_{k=1}^{ne} \int_k (\vec{M}_k^{ind} + \vec{M}_k^{per}) \cdot \vec{n}_k \cdot \frac{\vec{r}_c - \vec{r}}{|\vec{r}_c - \vec{r}|^3} dL + \vec{H}_0(\vec{r}_c) \quad [25]$$

De cette manière, nous séparons (artificiellement) la composante induite de la composante permanente. Nous avons introduit deux inconnues supplémentaires par élément du maillage et celles-ci sont représentatives des effets de l'aimantation permanente. Le système [6] peut alors être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} C & C - Id \\ Am & Am \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{ind} \\ M^{per} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SM \\ b \end{bmatrix} \quad [26]$$

où Id est la matrice identité et Am est l'écriture matricielle de [25].

Le système obtenu possède alors  $2ne + 3p$  équations et  $4ne$  inconnues. Il est résolu par pseudo-inverse (basée sur une décomposition en valeurs singulières).

### 3.5. Application de la régularisation à la formulation en potentiel scalaire

Comme pour la formulation en aimantation, il est nécessaire d'introduire une nouvelle inconnue apte à la représentation de l'aimantation permanente. La première idée consiste à introduire le potentiel scalaire permanent dans les équations [8] à [15]. Cependant cela reviendrait à supposer que l'aimantation permanente dérive d'un potentiel scalaire et, cela, rien ne le laisse croire. En effet, imposer  $\vec{\text{rot}}(\vec{M}^{per}) = \vec{0}$  est une contrainte importante. Dans le doute, nous écrivons cette formulation que nous validerons ou non par l'expérience. Par exemple, en utilisant [22] et [23], l'équation [13] devient :

$$U_j^{ind} + \frac{\chi_r}{4\pi} \sum_{i=1}^{nm+nq} \sum_{k=1}^{ne} (U_i^{ind} + U_i^{per}) \iiint_k \left( \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial \tau_1} \vec{\tau}_1 + \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial \tau_2} \vec{\tau}_2 \right) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^3} dV = U_{cj} \quad [27]$$

En appliquant ces mêmes équations de comportement de la tôle à [15], nous obtenons l'équivalent de la matrice inverse Am pour la formulation en potentiel. Nous appelons cette matrice Um. Le système [14] est ainsi transformé :

$$\begin{bmatrix} \Omega & \Omega - Id \\ Um & Um \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{ind} \\ U^{per} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SU \\ b \end{bmatrix} \quad [28]$$

Le système obtenu possède alors  $nn + nq + 3p$  équations et  $2nn + 2nq$  inconnues.

### 3.6. Application de la régularisation à la formulation en potentiel scalaire couplée à la formulation en aimantation

Nous avons vu dans la sous-section précédente que la représentation de l'aimantation permanente par des potentiels scalaires était sujette à caution. Nous l'avons pourtant écrite car elle représentait un travail mineur par rapport au problème direct. Pour résoudre un éventuel échec et disposer d'un modèle rigoureux (mais plus complexe), une formulation couplant potentiel scalaire induit et aimantation permanente a été écrite. Pour cela, [11] et [15] sont réécrites à l'aide de [22] et [23] en gardant l'inconnue aimantation permanente.

$$U + \frac{\chi_r}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\overrightarrow{grad}U \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \overrightarrow{M}^{per} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega = U_0 \quad [29]$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}_c) &= \frac{\chi_r}{4\pi} \overrightarrow{grad} \iiint_{\Omega} \frac{\overrightarrow{grad}U \cdot (\vec{r}_c - \vec{r})}{|\vec{r}_c - \vec{r}|^3} d\Omega - \\ &\frac{1}{4\pi} \overrightarrow{grad} \iiint_{\Omega} \overrightarrow{M}^{per} \cdot \frac{\vec{r}_c - \vec{r}}{|\vec{r}_c - \vec{r}|^3} d\Omega + \vec{H}_0(\vec{r}_c) \end{aligned} \quad [30]$$

Afin d'obtenir un comportement cohérent de nos sources, c'est-à-dire une aimantation induite et une aimantation permanente linéaires par élément ainsi qu'une continuité tangentielle de l'aimantation à la traversée d'un élément, les aimantations permanentes sont représentées par la relation suivante, où les fonctions de forme sont linéaires :

$$\vec{M}^{per}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^3 M_{\tau_1, i}^{per} \varphi_i^{(k)}(\tau_1, \tau_2) \cdot \vec{\tau}_1 + \sum_{i=1}^3 M_{\tau_2, i}^{per} \varphi_i^{(k)}(\tau_1, \tau_2) \cdot \vec{\tau}_2 \quad [31]$$

Les termes contenant l'inconnue aimantation permanente des équations [29] et [30] peuvent se réécrire sous forme matricielle. Nous les appelons P et ΔP. Nous obtenons le système :

$$\begin{bmatrix} \Omega & P \\ Um & \Delta P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ M^{per} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SU \\ b \end{bmatrix} \quad [32]$$

Le système obtenu possède alors nn + nq + 3p équations et 4nn + nq inconnues.

### 3.7. Application de la régularisation à la formulation en charges

Comme pour les représentations précédentes, nous transformons les équations [18] et [20] grâce aux équations [22] et [23].

$$-\frac{Q_j^{ind}}{e\chi_r} - \sum_i^{ne} (Q_i^{ind} + Q_i^{per}) \int_{Li} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{n}_i dL = \int_{Lj} \vec{H}_0 \cdot \vec{n}_j dL \quad [33]$$

$$\vec{H}(\vec{r}_c) = \frac{1}{4\pi} \sum_j^{ne} (Q_j^{ind} + Q_j^{per}) \frac{\vec{r}_c - \vec{r}}{|\vec{r}_c - \vec{r}|^3} + \vec{H}_0(\vec{r}_c) \quad [34]$$

Nous pouvons également imposer que la somme des charges soit nulle.

De même que précédemment, ces équations se mettent sous forme matricielle :

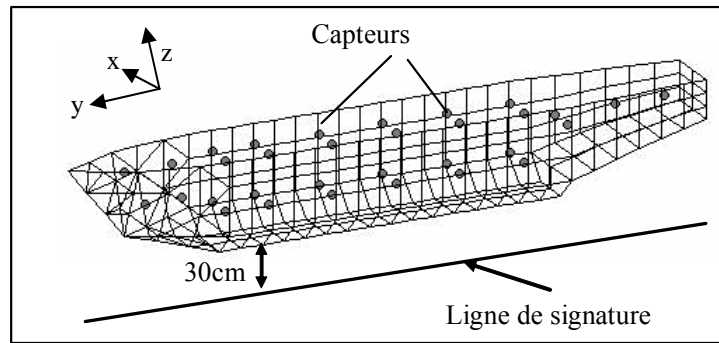
$$\begin{bmatrix} \psi & \psi - Id \\ Qm & Qm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{ind} \\ Q^{per} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SQ \\ b \end{bmatrix} \quad [35]$$

Le système obtenu possède alors nn + 3p équations et 2nn inconnues.

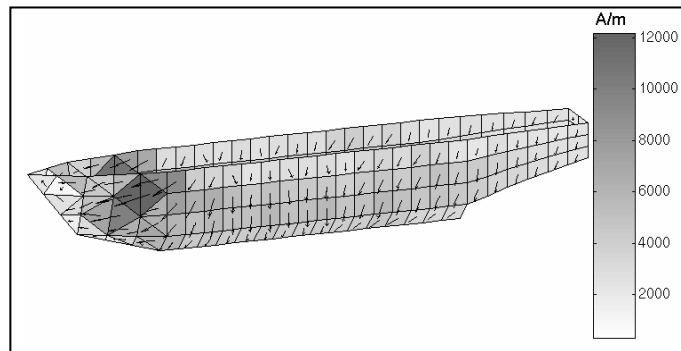
### 3.8. Test des formulations sur des mesures réelles

L'exemple réel utilisé est celui d'une maquette de coque de navire de 4,40 m constituée de tôles d'épaisseur 0,0014 m et de perméabilité réversible 96. Le champ extérieur est le champ terrestre ( $H_x = -0,44 \text{ A.m}^{-1}$ ,  $H_y = -17,94 \text{ A.m}^{-1}$ ,  $H_z = -32,36 \text{ A.m}^{-1}$ ). 32 capteurs de type fluxgate ont été utilisés (figure 5). Comme pour l'exemple de calcul d'induit, nous utilisons des maillages différents suivant les méthodes afin d'obtenir un nombre d'inconnues équivalent dans tout les cas. Le maillage comporte 339 éléments (1 356 inconnues) pour la formulation en

aimantation, 690 pour les charges (1 326 inconnues) et 339 pour le potentiel scalaire (1 313 inconnues). La qualité de l'inversion est évaluée par la précision de la reconstruction de la signature magnétique (figure 5).



**Figure 5.** *Emplacement des capteurs et position de la ligne sur laquelle le champ est prédit*



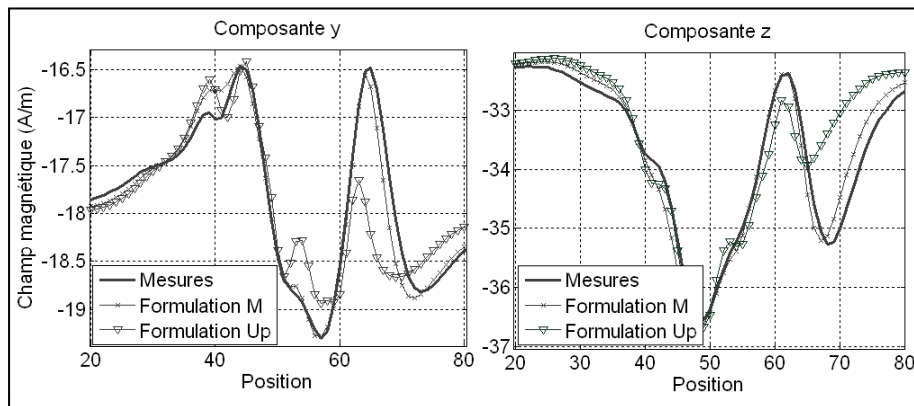
**Figure 6.** *Aimantation obtenue par l'inversion de la formulation en aimantation*

Les figures 7 et 8 représentent le champ magnétique rayonné par la maquette pour les composantes y (axe longitudinal) et z (axe vertical). Nous y indiquons les mesures réelles, le résultat du calcul issu de l'inversion de la formulation en aimantation et le résultat de la formulation en potentiel scalaire (formulation  $U_p$ ). Nous n'avons pas donné les résultats des autres méthodes car les différences avec la formulation en aimantation sont très faibles.

La première remarque concerne l'excellente prédiction du champ par les formulations en aimantation, en charges et par le couplage potentiel/aimantation. Il apparaît que la distance à laquelle ont été positionnées les capteurs ne met pas en

défaut les méthodes les plus singulières. Par conséquent, la méthode couplant potentiel et aimantation est ici inutile (car beaucoup plus consommatrice de ressources informatiques pour un même résultat). Nous avons en perspective des expériences visant à effectuer des mesures plus proches des tôles. Parmi les deux solutions restantes, la formulation en aimantation est la plus séduisante car plus proche de la physique et avec laquelle on pourra envisager un couplage avec des modèles magnétostrictifs.

La seconde remarque montre que nos craintes vis-à-vis de la formulation en potentiel pour l'inversion étaient fondées. Les résultats de cette méthode, bien que non aberrants, sont largement moins bons que ceux des autres formulations. Imposer la contrainte  $\text{rot}(\vec{M}^{\text{per}}) = \vec{0}$  semble trop brutale.



7

8

**Figures 7 et 8.** Signature rayonnée par la maquette

#### 4. Conclusion

En conclusion, un bilan des méthodes intégrales magnétostatiques pour le calcul de l'aimantation induite et de l'aimantation permanente de tôles minces a été réalisé. Nous avons montré l'intérêt de la formulation en potentiel scalaire pour le calcul du champ rayonné induit à faible distance des tôles. La méthode de régularisation par ajout d'informations physiques (équation de comportement de la tôle) a été appliquée à cette formulation avec succès, moyennant un couplage avec la formulation en aimantation. Des mesures expérimentales ont montré l'équivalence des différentes méthodes présentées pour la résolution du problème inverse. Cependant d'autres mesures à plus faible distance des tôles devront être réalisées afin de discriminer les plus adaptées.



## 5. Bibliographie

- Brunotte X., Imhoff J. F., Meunier G., « Méthodes intégrales de frontières pour les problèmes magnétiques à symétries axiales et couplage avec la méthode des éléments finis », *Revue de physique appliquée*, n° 25, 1990, p. 613-626.
- Brunotte X., Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques mince – Application à la modélisation des aimantations des navires, INPG, Thèse de doctorat, 1991.
- Chadebec O., Coulomb J. L., Bongiraud J. P., Cauffet G., Le Thiec P., “Recent improvements for solving inverse magnetostatic problem applied to thin shells”, *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 38, 2002, p. 1005-1008.
- Chadebec O., Coulomb J. L., Cauffet G., Bongiraud J. P., “How to Well Pose a Magnetization Identification Problem”, *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 39, n° 3, 2003, p. 1634-1637.
- Durand E., *Electrostatique tome I – Les distributions*, Masson, 1964.
- Igarashi H., Honma T., Kost A., “Inverse inference of magnetization distribution in cylindrical permanent magnets”, *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 36, 2000, p. 1168-1171.
- Kalimov A., Svedentsov M., “Application of a Hybrid Integrodifferential Method for Analysis of Thin Magnetic Shields”, *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 34, n° 5, 1998, p. 2453-2456.
- Krahenbuhl L., Muller D., “Thin layer in electrical engineering. Example of shell models in analyzing eddy-current by boundary and finite element methods”, *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 29, n° 2, 1993, p. 1450-1455.
- Tikhonov A. N., Arsenine V. Y., *Solution of ill-posed problem*, Washington, Wiston/Wiley, 1977.
- Vishnevsky A., Krasnov I., Lapovok A., “Calculation of Static Magnetization for Thin-Walled Constructions by Boundary Element Method”, *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 29, 1993, p. 2152-2155.