



**HAL**  
open science

## Enseigner les mathématiques au cycle 2. Guide pédagogique et didactique pour l'enseignement des mathématiques à l'école.

Thomas de Vittori

### ► To cite this version:

Thomas de Vittori. Enseigner les mathématiques au cycle 2. Guide pédagogique et didactique pour l'enseignement des mathématiques à l'école.. 2020. hal-03043638

**HAL Id: hal-03043638**

**<https://hal.science/hal-03043638>**

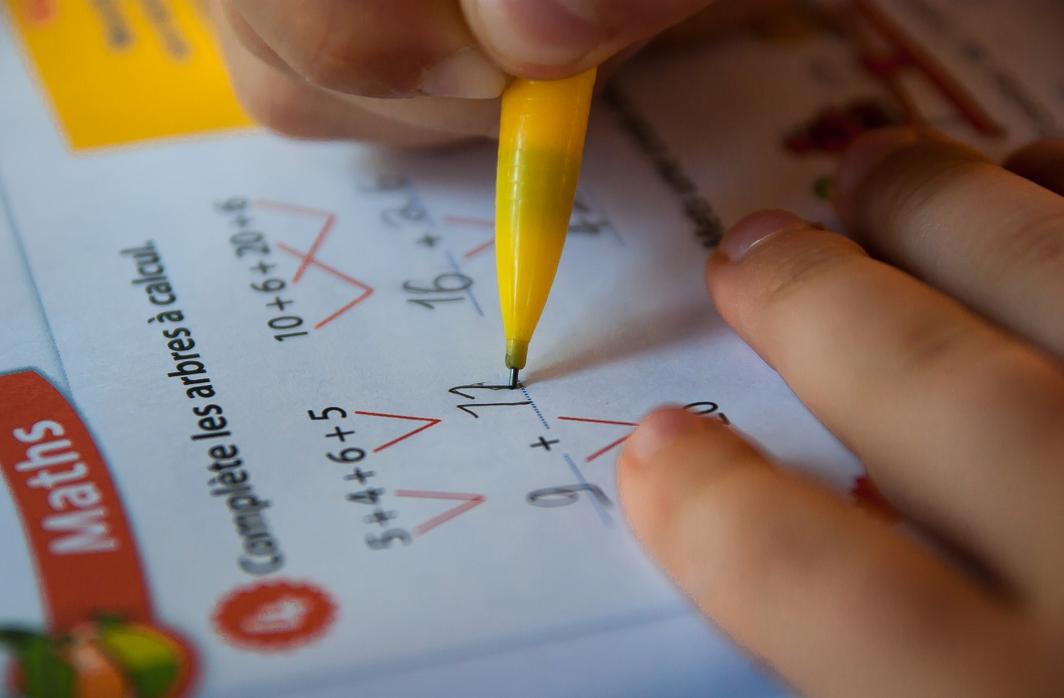
Submitted on 7 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



---

MATHÉMATIQUES / ENSEIGNEMENT

# Enseigner les mathématiques au cycle 2

Guide pédagogique et didactique pour l'enseignement des mathématiques à l'école

Thomas De Vittori

---

# **Enseigner les mathématiques au cycle 2**

Guide pédagogique et didactique pour  
l'enseignement des mathématiques à l'école

**Thomas De Vittori**

Le contenu de ce livre est avant tout la mise en forme d'éléments généralement présentés en formation initiale des professeurs des écoles. Il s'agit de la réécriture d'extraits de cours, de séances de travaux dirigés, ou de conférences, mais aussi de réflexions personnelles sur les enjeux de l'enseignement des mathématiques à l'école. Comme toutes les disciplines, les mathématiques sont vivantes et leur enseignement l'est tout autant. Ainsi, ce livre constitue l'état d'une synthèse, à un instant donné, avec toutes ses imperfections et sa subjectivité. Nous espérons cependant que le lecteur y trouvera un intérêt pour son questionnement personnel, mais aussi et surtout pour une mise en œuvre riche et fructueuse auprès des élèves.

*« Il vaut mieux viser la perfection et la manquer que viser l'imperfection et l'atteindre. » Bertrand Russell*

© Thomas De Vittori (2020)



Ouvrage mis à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'utilisation commerciale - Pas de modification 4.0 International

ISBN 978-2-9575860-0-4

*À mes étudiant.e.s*

# Table des matières

Introduction .....	7
Chapitre 1 .....	9
Quelles mathématiques à l'école ? .....	9
Chapitre 2 .....	27
Résoudre des problèmes.....	27
Chapitre 3 .....	55
Les nombres et la numération .....	55
Chapitre 4 .....	85
Le calcul et les opérations .....	85
Chapitre 5.....	151
Les grandeurs et les mesures .....	151
Chapitre 6.....	179
L'espace et les figures géométriques.....	179
Le mot de la fin.....	211
À propos de l'auteur .....	213



## Introduction

---

**D**ans cet ouvrage, sont détaillées quelques notions mathématiques incontournables du cycle 2. Après un premier chapitre général sur ce que sont les mathématiques à l'école, cinq grands thèmes sont abordés : les situations-problèmes, la numération, les opérations, les grandeurs et mesures, et enfin la géométrie. Comme la plupart des notions mathématiques enseignées traversent l'ensemble la scolarité, le choix a été fait de présenter en profondeur uniquement celles qui constituent des exemples types d'enjeux d'apprentissage du cycle 2. Le propos s'adresse à l'enseignant qui y trouvera d'abord les éléments d'une réflexion commune à l'ensemble du cycle suivie parfois d'éléments spécifiques au CP, CE1 ou CE2.

Cet ouvrage s'efforce de mettre en évidence les liens entre la compréhension de certaines notions mathématiques, les apports de la recherche en didactique et la mise en œuvre effective de séances dans une classe. On trouvera ainsi régulièrement de courtes citations de publications récentes ou de référence en didactique des mathématiques. Elles visent à éclairer le mieux possible la vie de la classe et les questionnements que les apprentissages des élèves peuvent y faire naître au quotidien. Signalés par une petite loupe , ces extraits sont présentés sous forme d'encadrés.

# Chapitre 1

## Quelles mathématiques à l'école ?

---

### Du quotidien au quotidien de l'élève.

**D**éfinir les mathématiques n'est pas une chose aisée. Selon qu'elles soient vues du philosophe, du mathématicien ou du citoyen, elles oscillent entre de nombreuses définitions. Certains les considèrent comme la mère de toutes les sciences, d'autres comme un langage, d'autres encore comme un simple outil, mais qu'en est-il dans le contexte scolaire ? Qu'apprend-on en mathématiques à l'école ? On peut se rendre compte de la

portée des apprentissages dans ce domaine à partir d'exemples très simples.

- 1) Comment dit-on à quelqu'un son année de naissance ?
- 2) Dans un supermarché, quelle offre est la plus intéressante : 3 boîtes de gâteaux pour 6€ ou 1 boîte à 2€50 avec la promotion 1 boîte achetée la seconde à moitié prix ?
- 3) Si l'on doit prendre le bus à 13h20, à quelle heure doit-on partir de chez soi sachant qu'il faut 2 min pour s'habiller et 10 min pour rejoindre l'arrêt ?

Pour pouvoir répondre à ces trois problèmes, il est nécessaire d'avoir appris des mathématiques et d'avoir ainsi acquis des connaissances et des méthodes comme l'écriture des nombres pour la première situation ci-dessus, la proportionnalité, les mesures et les nombres décimaux pour la deuxième, la mesure du temps et les calculs de durées pour la dernière. C'est bien le rôle de l'école que de rendre accessibles à tous ces raisonnements qui permettent de résoudre divers problèmes au quotidien et qui donnent tout leur intérêt, leur sens, aux mathématiques. Depuis toujours, les mathématiques ont d'abord servi à résoudre des problèmes ; ce n'est que dans un deuxième temps qu'elles se développent pour elles-mêmes soit pour

anticiper des besoins futurs (en affinant ou créant de nouvelles notions) soit pour le plaisir de la recherche. Pour les élèves, c'est la même chose, les mathématiques n'auront du sens que si elles s'intègrent dans leur quotidien. Le quotidien d'un enfant de 9 ans n'est évidemment pas celui d'un adulte et il diffère aussi de celui d'un enfant de 4 ans ou d'un autre de 11 ans. Suivant son âge, un élève peut se reconnaître dans toutes ou quelques-unes des trois situations évoquées plus haut. Par contre, quel sens y a-t-il à demander à un élève de cycle 2 de calculer le nombre de paquets de carrelage ou le nombre de rouleaux de papier peint pour refaire une pièce ? Comme nous allons le voir, la vie de classe est généralement suffisamment riche pour ne pas avoir à user de situations qui seraient, au mieux, intéressantes pour un adulte. Ces situations d'adultes peuvent avoir du sens si elles sont acceptées par l'élève au titre d'un jeu d'imitation, mais le spectre des baignoires qui se vident et des trains qui se croisent n'est jamais bien loin ; il convient donc de rester vigilant et toujours avoir à l'esprit le contexte scolaire.

### **La vie de la classe : une formidable source de situations mathématiques**

Généralement très présent au cycle 1, l'association des apprentissages à la vie de la classe et/ou de l'enfant doit rester une priorité au cycle 2 (ainsi qu'aux cycles 3 et 4,

évidemment). S'il n'est que très rarement fils de carreleur, l'élève rencontre toutefois, **dans son quotidien** , des situations qui peuvent s'avérer propices à un raisonnement mathématique que l'enseignant peut saisir et développer.

### Didactique

Au niveau international, on peut citer l'exemple de la *realistic mathematics education* dans laquelle « il s'agit d'introduire les concepts mathématiques par la résolution de problèmes concrets, de la vie courante ou au moins qui peuvent être pensés comme réels par les élèves. (...) Pour cet auteur [Hans Freudenthal], les structures mathématiques ont été inventées comme des outils pour organiser les phénomènes du monde physique, social et mental ».

*Enseigner les mathématiques*, Belin, 2019, p.411

Une classe contient de nombreux objets (crayons, feuilles, paires de ciseaux, etc.) qu'il peut être nécessaire de dénombrer avant, pendant ou après une activité. Y a-t-il assez de feuilles pour que chaque élève en ait trois ? Restera-t-il assez d'allumettes pour une prochaine séances sachant que chaque groupe en a utilisé 24 et qu'une boîte en contient 250 ? Les temps de goûter peuvent être aussi l'occasion de créer des situations de partage (distribution équitable d'une quantité de bonbons) ou de mettre en place un atelier de fabrication de gâteaux qui sera l'occasion de travailler les quantités (masse de farine ou du

sucres, nombre d'œufs), la proportionnalité (la recette étant toujours donnée pour un seul gâteau), des durées (temps de cuisson), etc. Si l'activité est de plus grande ampleur, elle peut devenir un véritable projet de classe ou d'école (sortie scolaire, aménagement de la cour ou du jardin de l'école). Dans ce cas, l'enseignant pourra développer une ou plusieurs séquences autour d'un même projet, donnant ainsi tout leur sens à des calculs ou des tracés géométriques. Cet ancrage dans la vie de la classe facilite l'appropriation du problème par les élèves. C'est en particulier par la réussite de cette première phase de **dévolution**  que l'entrée dans un nouvel apprentissage atteint son objectif.

### **Didactique**

« La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable (au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité) du résultat qu'il doit chercher. » Brousseau, Actes de l'université d'été d'Olivet 1988.

*Enseigner les mathématiques*, Belin, 2019, note 8 p.290

## Bien définir ses objectifs et adapter le problème

Lors de la construction des différentes séances d'une séquence de mathématiques, le fil directeur est toujours l'objectif d'apprentissage mathématique visé. Généralement bien décrites dans les programmes et autres documents officiels, les notions qui doivent être abordées dans le courant d'une année scolaire sont des éléments qui structurent les temps d'apprentissage et leur donnent leur cohérence. Afin d'optimiser le temps qu'il va consacrer à sa séquence, l'enseignant doit veiller à garder en vue les objectifs qu'il souhaite atteindre, ces derniers pouvant apparaître sur les préparations de cours mais aussi être annoncés et explicités aux élèves. Mais comment adapter un problème à sa classe ?

### Les variables (didactiques)

Toutes les classes sont différentes, tout comme les élèves de chaque classe, il convient donc de procéder à différents ajustements afin de rendre une activité pleinement pertinente pour la classe. Les éléments sur lesquels l'enseignant peut jouer pour modifier un énoncé, tout en conservant l'objectif d'apprentissage, sont des **variables**  dites **didactiques**.



## Didactique

« Une variable didactique est un élément de la situation fixé par le professeur et dont la modification a une incidence sur les stratégies ou les procédures de résolution mises en œuvre par les élèves. »

*Enseigner les mathématiques*, Belin, 2019, note 9 p.290

Il en existe de plusieurs types et aucune liste exhaustive ne saurait en être faite car chaque situation peut donner l'opportunité de modifications nouvelles mais voici quelques-unes des plus usuelles autour de quelques exemples.

*Exemple : Pour la sortie à la piscine, l'enseignant veut déterminer le nombre d'adultes qui doivent accompagner les élèves.*

*Objectif visé : Division-groupement.*

**Les valeurs et/ou les données à traiter** : Dans cet exemple, il est très facile d'adapter les nombres et faire ainsi varier la difficulté.

*Cas 1 : 1 classe de 24 enfants et 1 adulte pour 6 enfants.*

Ici, le calcul est aisé car 24 est un multiple de 6. Plusieurs procédures sont possibles dès le CP comme les soustractions itérées ou les groupements par six à partir d'une schématisation.

Cas 2 : 1 classe de 26 enfants et 1 adulte pour 6 enfants.

On remarquera ici que la simple modification du nombre d'enfants dans la classe change la situation mathématique. C'est une division avec reste (  $26 = 6 \times 4 + 2$  ) pour laquelle les procédures peuvent être identiques aux précédentes mais il y a désormais un risque d'erreur, par exemple, dans le dénombrement des groupements (il faut un adulte en plus, c'est-à-dire 5 et non 4). On remarque que dans les premiers temps d'apprentissage, cette situation pourrait être considérée comme visant un autre objectif (division avec reste), elle serait donc à éviter.

Cas 3 : Plusieurs classes partent en même temps avec 1 adulte pour 6 enfants.

Là encore, le choix des nombres peut faire varier considérablement la difficulté. Pour 6 classes de 24 élèves, le problème peut être fait par un élève de CP mais en remarquant que le nombre total d'élèves lui est inaccessible. Avec 6, 8 classes, ou plus, d'effectifs différents, le problème relèvera plutôt du CE1 voire du CE2 selon les nombres choisis.

**Les supports et le matériel** : Quelle que soit la situation proposée, le matériel fourni peut avoir un impact notable sur les procédures des élèves. L'enseignant peut, dans l'exemple précédent, fournir du papier et des crayons ce

qui permet de faire des schémas, donner des petits personnages ou des cubes ce qui permet représenter la situation, fournir une calculatrice ce qui incitera éventuellement certains élèves à calculer le nombre total d'élèves, etc. Dans d'autres chapitres mathématiques, comme la géométrie ou les grandeurs et mesures, le choix du matériel fourni peut s'avérer essentiel au bon déroulement d'une activité.

*Exemple : Tracer les gabarits de triangles rectangles isocèles afin de découper plusieurs exemplaires dans une feuille de papier vert pour ensuite les assembler afin de réaliser un sapin sur une carte de Noël.*

*Objectif : Revoir les propriétés des triangles rectangles.*

Dans cette activité géométrique, le choix du matériel va permettre un réinvestissement plus ou moins important des connaissances sur les triangles et des méthodes de tracé.

*Cas 1 : Les élèves ont à leur disposition du papier quadrillé.*

C'est une situation assez simple qui permet de suivre les lignes et de repérer l'angle droit à partir des carrés du support. Le quadrillage peut aussi servir pour les mesures.

*Cas 2 : Les élèves ont juste une feuille blanche et un gabarit d'angle droit ou une équerre, une règle, un compas.*

Avec ce support, le tracé des triangles requiert l'utilisation du gabarit d'angle ou de l'équerre. De plus, l'absence de carreaux oblige à mesurer les côtés ou à reporter une même longueur pour s'assurer que le triangle est isocèle.

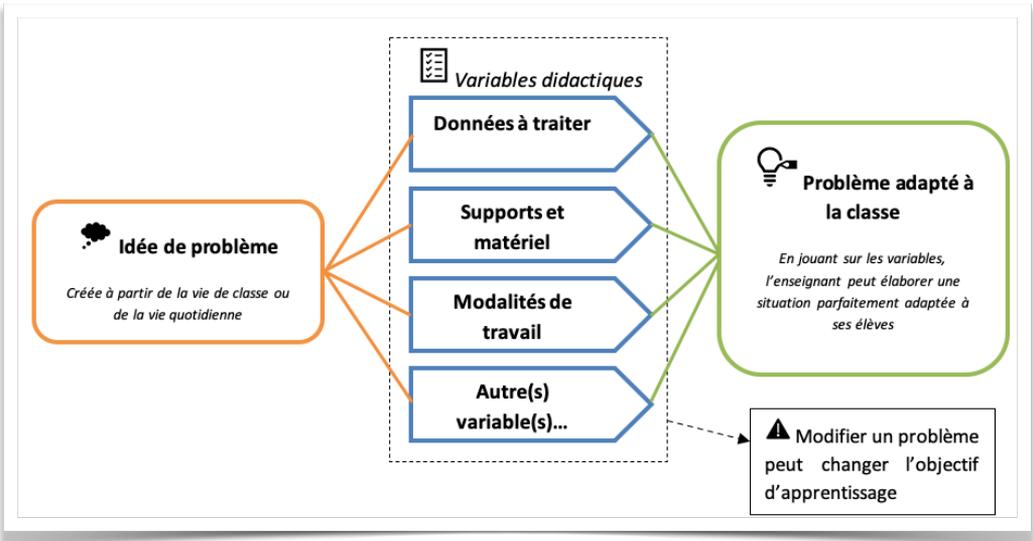
**Les modalités de travail :** Quel que soit l'apprentissage visé, en mathématiques ou dans d'autres champs, les modalités de mise en œuvre d'une activité constituent un élément à ne pas négliger. Ainsi, les élèves peuvent travailler seuls, à deux, en groupe, sur leur cahier, au tableau, sur l'ordinateur, etc. Ces différentes organisations n'ont que très rarement un impact sur la procédure proposée par un élève mais certaines peuvent s'avérer plus pertinentes que d'autre pour résoudre un problème. Par exemple, le travail par groupe peut permettre d'aborder plus facilement une tâche complexe. Certains élèves peuvent, au début, ne pas participer beaucoup, mais le travail coopératif a désormais prouvé ses vertus tout comme l'ambiance créée pour les travaux de groupes. Le

travail individuel ne doit pas être opposé à celui collectif. En effet, il permet de s'assurer que chaque élève s'interroge avec ses propres connaissances sur le problème. Cette modalité fournit ainsi une évaluation précieuse des acquis des élèves.

**Le temps, le lieu :** Les temps laissés aux élèves pour réaliser une tâche et le lieu dans lequel se déroule une activité sont aussi des variables didactiques intéressantes. Pour le temps, la mise en place d'un challenge (temps limité) permet de mettre en évidence les procédures les plus efficaces comme par exemple un calcul réfléchi plutôt qu'un calcul posé. Pour le lieu, il est souvent constructif de rompre avec l'image de l'exercice de mathématique réalisé en classe. De nombreuses situations permettent de déplacer les temps d'apprentissages hors de la classe. Par exemple, le travail sur l'alignement de points peut être fait sur une feuille A4, chaque élève à sa table, mais il prend une ampleur nouvelle si on demande l'alignement de cônes dans la cour ou sur un terrain de sport. Le changement d'espace oblige un regard nouveau sur les objets mathématiques dont certaines propriétés apparaissent plus clairement (infinité de la droite par exemple).

**Les contraintes, les règles imposées :** Comme cela a été dit précédemment, il est impossible de faire une liste complète de tous les éléments sur lesquels l'enseignant

peut jouer pour adapter une activité à ses élèves. En voici néanmoins un dernier : la contrainte. Ce type d'adaptation transparait dans des consignes comme « réalisez ce calcul sans calculatrice », « tracez cette figure uniquement à la règle non graduée et au compas », etc. En limitant les outils à disposition, on favorise certaines procédures voire on les fait émerger. Il existe de nombreuses manières d'amener ces nouvelles règles du jeu de manière ludique comme par la compétition entre le calcul avec et sans calculatrice ou la mise en place d'un système de points lors de l'utilisation des outils géométriques (un trait à la règle : 1 point, un cercle au compas : 2 points, un angle droit avec un gabarit : 5 points, l'objectif étant généralement de faire le moins de points possible pour une construction).



## Des problèmes au problème : la modélisation

Il existe une infinité de problèmes, mais la spécificité des mathématiques est de donner des outils de pensée qui permettent de ne pas avoir à trouver un raisonnement différent pour chacun d'eux. Grâce aux mathématiques et à l'abstraction qu'elles portent, il est possible dès le plus jeune âge de reconnaître des types de problèmes et donc d'avoir une seule méthode de résolution pour toute une famille de situations.

Exemple :

*Énoncé 1 : Lucie a 15 bonbons dans sa poche. Elle en donne 5 à ses amies. Combien lui en reste-t-il ?*

*Énoncé 2 : Lors d'une sortie nature, Julie a cueilli 15 pâquerettes. Elle en utilise 5 pour faire un petit bouquet qu'elle donne à sa maîtresse. Combien lui en reste-t-il ?*

Incontestablement, des bonbons ne sont pas des pâquerettes, pourtant, pour ces deux problèmes on effectuera la même opération  $15 - 5 = 10$ . Plus encore, si les données étaient différentes d'une situation à l'autre, on reconnaîtrait quand même l'opération à effectuer. Les mathématiques permettent bien de **modéliser** un problème concret pour ensuite le résoudre avec des outils mathématiques. La modélisation n'est rien d'autre que le

processus qui permet de faire entrer une situation dans l'univers des mathématiques et ainsi ouvrir la porte à des calculs, des raisonnements géométriques et, plus tard, l'application de théorèmes. En classe, il s'agit donc **d'utiliser des problèmes concrets pour accéder à des concepts abstraits** et il est important de souligner que, **pour les élèves, cela va bien dans ce sens**. En aucun cas, il s'agit de faire de l'apprentissage de la résolution de problèmes une activité abstraite qui viendrait en amont des situations. C'est au travers de la rencontre de nombreuses situations du même type que se reconnaît ensuite le modèle d'une situation-problème. La mise en évidence de ce dernier relève pleinement du rôle de l'enseignant  et **l'utilisation de référents** (affichages avec des problèmes types) est une aide précieuse pour la structuration de la pensée des élèves.

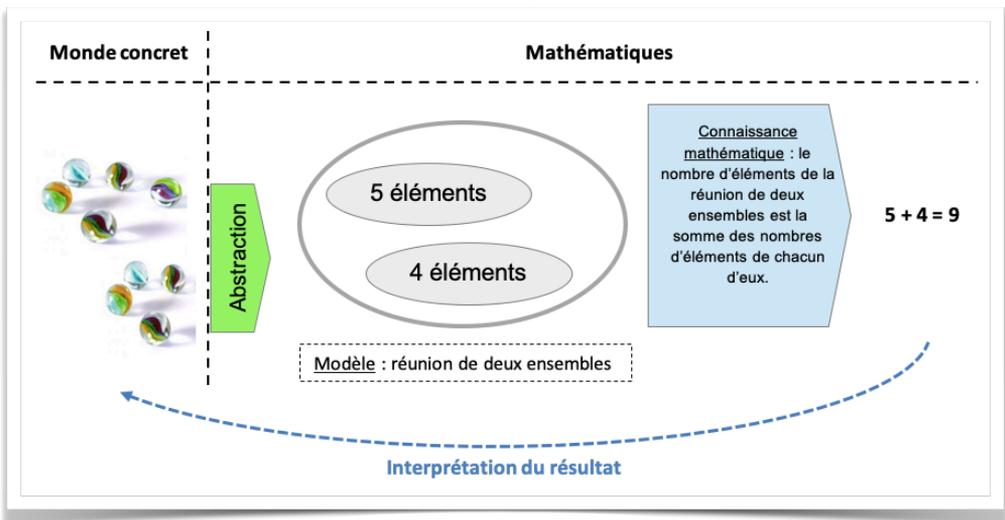


## Didactique

Dans une discussion sur les enjeux de la résolution de problèmes au collège ou au lycée, Rémi Goasdoué explique que « les très nombreuses recherches sur la résolution de problèmes traitent de cette question de la mise en formule, en calculs d'énoncés et de questions. Elles montrent l'importance des contextes évoqués dans les problèmes, favorisant ou freinant la modélisation, mais aussi toute la difficulté à trouver des aides pour orienter la résolution. » Ainsi, bien que les contenus mathématiques soient assez différents entre le premier et le second degré, la mise en place d'une modélisation pour un problème reste une tâche délicate qui requiert toute la vigilance de l'enseignant.

*Enseigner les mathématiques*, Belin, 2019, p.177

Exemple : *J'ai 5 billes, j'en gagne 4. Combien en ai-je en tout ?*



Pour résoudre un problème, on effectue en fait un aller-retour entre la situation concrète et le modèle

mathématique qui permet la résolution. Dans cet exemple, au retour, le résultat du calcul doit être interprété : « J'ai 9 billes en tout ». Remarquons que dans tous les problèmes nécessitant un calcul, le choix de l'opération pour une situation donnée n'est justifié que par sa modélisation (et donc par son entrée dans l'univers des mathématiques). Ainsi, à la fin d'un problème, une étape importante de mise en évidence de ce qui a été appris est toujours nécessaire. Seul l'enseignant peut contrôler cette phase dite **d'institutionnalisation**  qui permet de reconnaître une connaissance mathématique (ou une méthode) dans tout ce qui a pu être vécu par les élèves lors de l'activité.

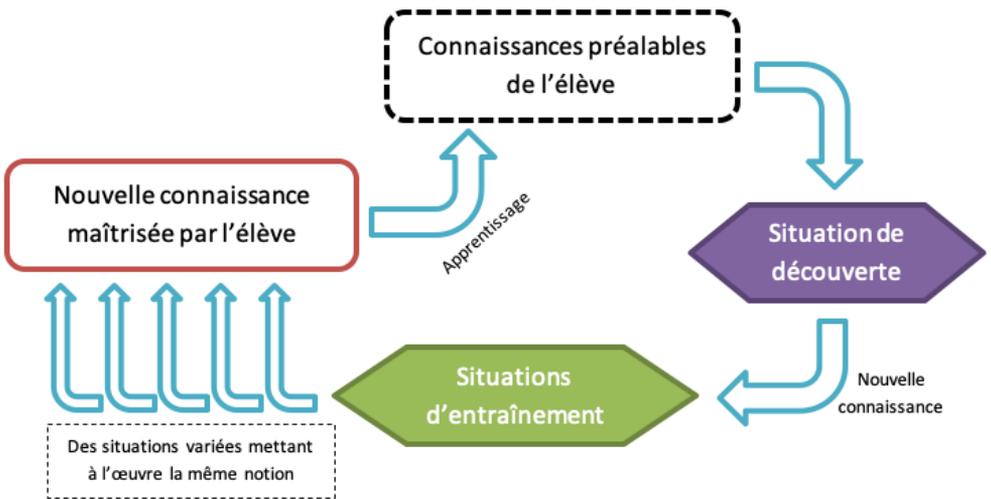
### **Didactique**

« L'institutionnalisation consiste à donner un statut culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances. Le professeur prend acte de ce que les élèves ont fait, il décrit ce qui s'est passé et met en évidence ce qui a un rapport avec la connaissance visée, il donne un statut aux résultats des élèves, identifie et rapproche ces résultats des connaissances culturellement reconnues, il indique qu'ils peuvent resservir. (Brousseau, *Actes du colloque COPIRELEM* d'Anger 1987). « Le professeur a la charge de donner un statut aux concepts qui, jusque-là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer. » »

*Enseigner les mathématiques*, Belin, 2019, note n°5 p.283

## Situations de découverte et situations d'entraînement

L'entrée dans les apprentissages par les problèmes n'élimine pas la nécessité d'un travail ultérieur sur la même notion. Une **situation de découverte** permet, comme son nom l'indique, d'apporter une nouvelle connaissance aux élèves. Cette connaissance est ensuite mobilisée dans de nombreuses autres situations afin de la fixer et de la maîtriser. Ces **situations d'entraînement** doivent porter exactement sur le même objectif d'apprentissage et c'est en cela qu'elles diffèrent d'une future situation de découverte qui, quant à elle, portera sur une autre connaissance et ainsi de suite. Quelle que soit la discipline, l'entraînement permet d'affiner une compétence et de la stabiliser dans le temps.



Ceci est particulièrement vrai pour les mathématiques qui sont avant tout des modèles et des objets abstraits assez délicats à saisir pleinement la première fois qu'on les rencontre. La connaissance visée est alors aussi ce qui guide les interventions de l'enseignant dans les moments où il apporte son **aide aux élèves** 🔍.

### **Didactique**

En référence aux études de Jean Julo, des recherches montrent que « pour l'essentiel, les travaux sur la résolution de problèmes mettant en œuvre des aides métacognitives ont conclu qu'elles étaient de peu de secours pour les élèves. Leurs difficultés [celles des élèves] viennent plus de la maîtrise de connaissances que de la conduite de la pensée. On ne peut apprendre à résoudre des problèmes en faisant abstraction des connaissances qu'ils mettent en jeu. »

*Enseigner les mathématiques*, Belin, 2019, p.197-198

## Chapitre 2

# Résoudre des problèmes

---

**D**ésormais bien connues des enseignants et des pédagogues, les classifications de Gérard Vergnaud dans le cadre de sa théorie des **champs conceptuels**  sont des outils incontournables de la programmation d'un enseignement des **situations problèmes**.

Les ressources à destination des enseignants ne l'utilisant pas toujours « explicitement », il revient à ces derniers d'avoir une lecture informée des activités ou exercices proposés.



## Didactique

(...) un champ conceptuel peut être défini comme un ensemble de situations dont le traitement relève de concepts et de théorèmes, situations correspondant à autant de tâches cognitives que les sujets peuvent avoir à résoudre.

Sylvette Maury (2001) Didactique des mathématiques et psychologie cognitive : un regard comparatif sur trois approches psychologiques, *Revue Française de Pédagogie*, n°137, pp. 85-93.

Dans sa théorie des champs conceptuels, Gérard Vergnaud distingue les problèmes relevant d'une **structure additive** (conduisant à une addition ou une soustraction) des problèmes relevant d'une **structure multiplicative** (conduisant à une multiplication ou une division). Dans le quotidien de la classe, cela se traduit par la mise en œuvre de raisonnements différents lors de la résolution de problèmes. Au travers du sens que donne l'élève à un énoncé, ce dernier le renvoie à une opération arithmétique spécifique qu'il faut ensuite gérer (les procédures mettant en jeu l'opération de manière formelle ou non).

### Les différents types de problèmes

Dans ce qui suit, nous faisons une lecture « pédagogique » des catégories de Gérard Vergnaud (un peu à l'image de celle proposée par Christian Henaff) qui met plus clairement en évidence les quatre opérations telles qu'on

les trouve dans les instructions officielles. Rappelons que la schématisation abstraite issue de cette typologie est avant tout un outil qui doit permettre à l'enseignant d'identifier les différentes situations problèmes afin de, soit les varier, soit au contraire les renforcer. **Pour l'élève**, les contextes des problèmes restent primordiaux pour en saisir le sens et c'est principalement sous la forme **d'exemples types**  qu'ils deviennent le plus facilement des outils de pensée qui peuvent être réinvestis sur d'autres situations.



### Didactique

En classe, on le voit, le moteur de l'imagination, c'est souvent l'analogie. « ça me fait penser à », « c'est comme » sont des expressions souvent utilisées par les élèves à qui la situation proposée évoque des connaissances antérieures. Si elles ne sont pas forcément justifiées, ces analogies sont de toute façon recevables à condition d'être exprimées et vérifiées en classe (...)

Pierre Brignon et Pierre Eysseric (2012) Des outils aux signes : construire des représentations arithmétiques du quotidien au CP, *Grand N*, n°89, pp. 71-102.

De ce fait, **les problèmes sont tout autant des situations particulières que des situations génériques**  dont certaines deviennent d'ailleurs prototypiques pour la construction du sens des opérations.

Il ne sera donc pas surprenant de retrouver certaines catégories de problèmes comme support à l'apprentissage

des opérations. Dans cet ouvrage, nous ne reprenons pas toutes les catégories additives et multiplicatives pour nous focaliser, à titre d'exemple que sur certaines qui occupent généralement une part plus importante sur le niveau de classe concerné. Néanmoins, il faut rappeler que, avec des contextes et des valeurs numériques adaptées, les élèves de **cycle 2** sont amenés à **travailler toute la variété des situations problèmes.**



### **Didactique**

Comme le souligne Marie-Lise Peltier évoquant les premiers travaux de Régine Douady, dans le cadre d'une résolution de problème, les connaissances peuvent avoir deux statuts différents : « statut d'outil implicite ou explicite en cours de résolution et statut d'objet dans les phases de synthèse. »

*Enseigner les mathématiques*, Belin, 2019, p.277

## Les problèmes amenant à une addition

Les situations menant à une addition font partie des premières rencontrées par les élèves. Nous en détaillons ici trois types dont la complexité est variable selon que l'opération à choisir (l'addition) s'inscrive dans la lignée des termes et expressions utilisés dans l'énoncé ou qu'au contraire elle s'y oppose. Ce décalage possible entre les mots d'un énoncé, leur signification première et l'opération requise pour mener le calcul est une difficulté récurrente pour l'ensembles des catégories. Nous y reviendrons à la fin de cette partie.

### Situation 1 : Recherche de l'état final dans une transformation positive (gain, augmentation)

*Énoncé : Au début d'un niveau de son nouveau jeu vidéo, Alicia avait 325 pièces d'or. À la fin du niveau dans son jeu vidéo, elle bâta le boss final et gagne 50 pièces d'or. Combien a-t-elle de pièce d'or à la fin de sa partie ?*

« Ce qu'on cherche » :  $325 + 50$

État initial

Gain

État final

Cette situation est un cas de ce que Gérard Vergnaud appelle **un problème faisant intervenir une transformation**. En effet, la lecture de l'énoncé permet de concevoir une certaine donnée de départ (l'état initial) qui va être modifiée par les événements (ici un gain) et aboutir à une nouvelle valeur (l'état final). Dans cette première catégorie de problèmes, on cherche l'état final. Très souvent, les situations avec transformation présentent une certaine chronologie sur laquelle on peut s'appuyer pour imaginer le déroulement de l'histoire et ainsi se construire une image mentale d'abord du problème « particulier » puis du « modèle » qu'il peut constituer au titre d'exemple générique. Dans l'exemple ci-dessus, la bonne opération est induite par le verbe « gagne » qui s'avère transparent dans ce contexte.

### Situation 2 : Recherche de l'état initial dans une transformation négative (perte, diminution)

L'intérêt de la typologie des problèmes par les structures additives et multiplicatives est de fournir une grille de lecture unique pour des situations parfois très différentes voire opposées. Dans le cas des énoncés avec transformations, il est aisé de découvrir de nombreuses formes de problèmes selon que l'on cherche l'état initial,

l'état final, ou même la transformation. L'exemple qui suit est un cas de recherche de l'état initial.

*Énoncé : Pendant ses vacances, Lily dépense 2 € 40 c pour s'acheter des cartes postales. Il lui reste 3 € 80 c dans son porte-monnaie. Combien avait-elle au départ ?*

« Ce qu'on cherche » :  $3\text{€}80 + 2\text{€}40$



La transformation est une perte ; ce qu'on comprend au travers des notions d'achat et de dépense. Pourtant, pour trouver la valeur recherchée, il faut additionner les deux données du problème, à savoir l'argent dépensé et l'argent qui reste dans le porte-monnaie. Pour un élève, cette situation est bien plus complexe que la précédente dans laquelle l'opération suivait naturellement le cours de l'histoire. Ici, il faut, en quelques sortes, rembobiner le film pour inverser la perte et comprendre qu'il faut faire une addition. Un point d'appui possible est d'utiliser pleinement le sens de la situation en demandant aux élèves si, selon eux, au départ Lily avait plus ou moins d'argent. On retrouve alors la construction même de l'addition (voir chapitre Opérations) soit par la notion d'augmentation (avant d'acheter Lily avait 2 € 40 c en plus), soit par la

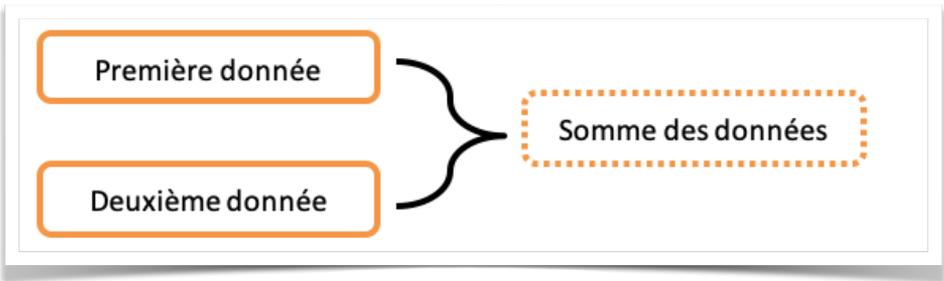
réunion (avant d'acheter, Lily avait dans son porte-monnaie les 3 € 80 c et les 2 € 40 c). Cette dernière possibilité nous amène au dernier type de situation d'addition qui, comme cela vient d'être rappelé, est aussi l'une des constructions mathématiques de cette opération.

Situation 3 : Recherche d'un tout à partir de deux données

L'addition est l'opération qui donne le nombre d'éléments de la réunion de deux ensembles. Les situations problèmes de ce type sont très fréquentes car elles interviennent dès lors que l'on met des objets ensemble et qu'on cherche à savoir combien il y en a « en tout ».

*Énoncé : Dans un paquet de bonbons, il y a 18 crocodiles rouges et 23 crocodiles verts. Combien y a-t-il de crocodiles en tout dans le paquet ?*

**« Ce qu'on cherche » :  $18 + 23$**



Les expressions « en tout », « au total », « tous ensemble », etc. sont souvent des marqueurs de la recherche d'un tout à partir de deux données. Pour ce type de situations, la schématisation et la manipulation de matériel sont aisées. On pourra, par exemple, entourer l'ensemble total, rapprocher des objets ou encore les mettre formellement dans une boîte ou un grand sac. En lien avec les apprentissages du cycle 1, l'association entre le geste et l'opération de pensée est une étape importante dans la conceptualisation.

## Les problèmes amenant à une soustraction

Contrairement à l'addition, la soustraction n'est pas commutative, donc on ne peut pas traiter les données dans l'ordre qu'on veut. Cette dissymétrie est une des principales difficultés que les élèves auront à gérer. Au-delà du sens de la situation, le traitement mathématique des nombres en jeu impose une rigueur supplémentaire. Comme dans toute résolution de problème, par des lectures multiples, des reformulations, des schématisations, etc. l'enseignant doit s'assurer de la bonne compréhension de l'énoncé et de la bonne représentation mentale de la situation par ses élèves. Ceci permet aux élèves de s'investir et de proposer des procédures intéressantes.

### Situation 1 : Recherche de l'état final dans transformation négative (perte, diminution)

Énoncé : *Au début d'un niveau de son nouveau jeu vidéo, Amine avait 400 pièces d'or. Malheureusement, il tombe dans un piège et perd 30 pièces d'or. Combien lui reste-t-il de pièces d'or ?*

**« Ce qu'on cherche » :  $400 - 30$**

État initial

Perte

État final

Cette situation soustractive est sans doute la plus simple. En effet, le contexte donne facilement à voir qu'il y a une perte (le terme « perd » est explicitement employé). L'association entre une diminution et l'opération soustraction correspond au sens premier de cette dernière.

Situation 2 : Recherche de l'état initial dans transformation positive (gain, augmentation)

*Énoncé : à la fin de l'année, Jules mesure 1 m 30 cm. Sachant qu'il a grandi de 8 cm pendant l'année, quelle taille faisait-il au début ?*

« Ce qu'on cherche » : 1 m 30 cm - 8 cm



Dans cette situation, c'est la construction de la soustraction comme opération inverse de l'addition qui est à l'œuvre. Il faut considérer l'histoire à l'envers pour comprendre que, comme il y avait eu un gain, pour retrouver l'état initial, il faut retirer cette augmentation et donc faire une soustraction. La schématisation (avec une flèche par exemple) est une aide précieuse dans ce type de situations.

### Situation 3 : Recherche d'une transformation (positive ou négative)

Pour cette nouvelle catégorie, on connaît l'état initial ainsi que l'état final mais pas ce qu'il s'est passé entre les deux ; on cherche la transformation. Ces situations de recherche de la transformation sont généralement plus difficiles pour les élèves que celles où elle est connue. En effet, seul le contexte permet de savoir qu'il s'agit d'une soustraction qu'il faut ensuite gérer en respectant l'ordre convenable des nombres.

*Énoncé : Au début de la partie, Nabil a 30 cartes Pokpokmon. À la fin de de la partie, il en a 24. Combien en a-t-il perdu ?*

**« Ce qu'on cherche » :  $30 - 24$**



Pour ce premier énoncé, le contexte familier et l'utilisation du verbe « perdre » permet aux élèves de trouver assez aisément l'opération à effectuer. Comme nous allons le voir de manière encore plus frappante dans l'exemple ci-après, la recherche d'une transformation est très proche de la détermination de l'écart entre deux valeurs. Seul le contexte donne un caractère de transformation à la situation.

Énoncé : Au début de la partie, Nabil a 24 cartes Pokpokmon.  
À la fin de de la partie, il en a 30. Combien en a-t-il gagné ?

« Ce qu'on cherche » :  $30 - 24$



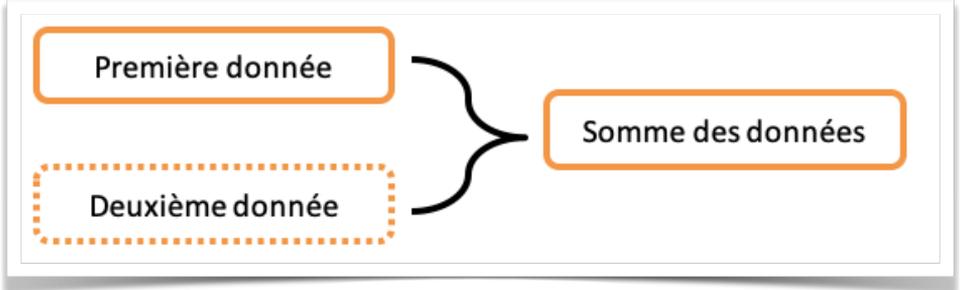
Contrairement au précédent, ce type de problème est bien plus délicat. Le contexte est toujours familier, mais la recherche de la transformation par une soustraction n'est pas naturelle. L'emploi du verbe « gagner » est un élément perturbateur pour cette catégorie qui est très proche de la situation 5 ci-après de comparaison de deux valeurs. Pour ce problème comme dans beaucoup d'autres cas un peu complexes, il est important de contrôler la vraisemblance du résultat et sa cohérence avec le texte de l'énoncé. Ici, par exemple, on pourra aider un élève à revenir sur le calcul erroné  $24 + 30 = 54$  en faisant relire la phrase « À la fin de de la partie, il en a 30. » qui implique que la valeur cherchée ne peut pas être plus grande que 30.

## Situation 4 : Recherche d'une partie à l'issue de la réunion deux données

Les problèmes dans lesquels deux données ont été réunies et dans lesquels on cherche l'une d'elles sont très proches de la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition (l'addition permettant justement de trouver la somme).

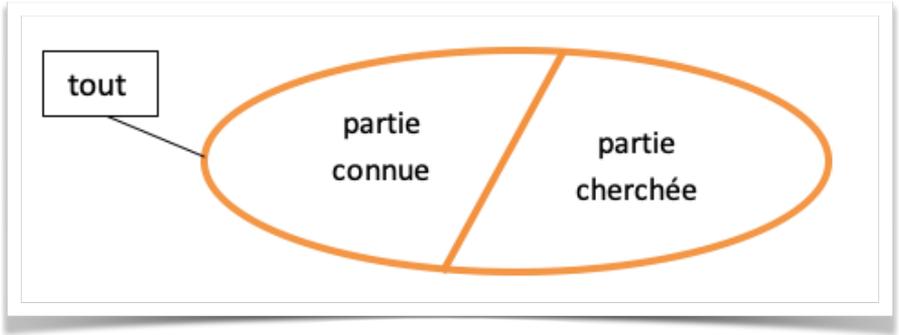
*Énoncé : Au mariage de sa tante, Camille sait qu'il y avait en tout 130 invités. Sachant qu'il y avait 67 femmes, combien y avait-il d'hommes ?*

**« Ce qu'on cherche » :  $130 - 67$**



Dans cette situation, il n'y a pas de transformation, uniquement deux ensembles (les femmes et les hommes) dont on connaît la somme des nombres d'éléments. Rechercher l'une des données, indifféremment la première ou la deuxième, oblige à faire une soustraction. Pour ce type de problèmes, une schématisation sous la forme d'un diagramme de Wenn est souvent très éclairante et permet

de bien comprendre la modélisation (« j'ai un tout dont je connais une partie ; il faut donc soustraire pour trouver l'autre partie »).

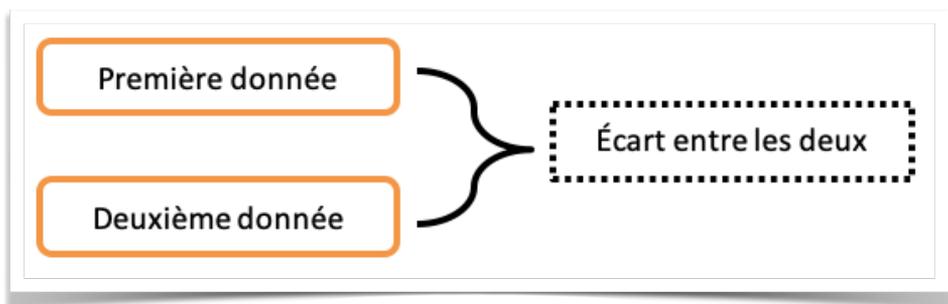


### Situation 5 : Recherche d'un écart lors de la comparaison entre deux données

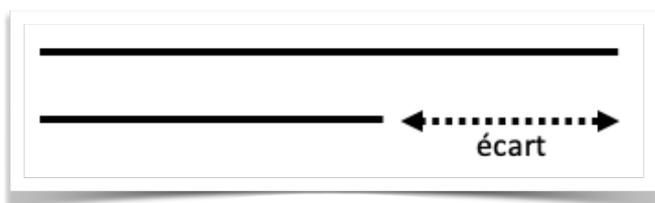
Lorsqu'on a deux données, il est parfois intéressant de connaître l'écart entre les deux. Cette situation est assez fréquente à l'école car les élèves peuvent la rencontrer au cours d'autres apprentissages comme, par exemple, en sciences pour l'étude de la croissance d'une plante, de la quantité de pluie, des variations de température, etc.

Énoncé : *Martine mesure 1 m 35 cm et Juliette mesure 1 m 28 cm. Quelle est la différence de taille entre les deux ?*

« Ce qu'on cherche » : **1 m 35 cm - 1 m 28 cm**



Comme précédemment, une schématisation peut aider à la compréhension.



On pourra par exemple, représenter les données sous la forme de segments (à l'échelle ou non) pour mettre en évidence l'écart. La principale difficulté, outre le choix de l'opération, est de prendre les données dans le bon ordre (la plus grande moins la plus petite). Le schéma permet généralement d'éviter la confusion.

## Problèmes amenant à une multiplication

Les situations amenant à une multiplication sont vues dès le CP, mais l'introduction en CE1 du formalisme (le signe  $\times$ ) puis en CE2 l'apport d'une nouvelle technique (algorithme de la multiplication posée) induisent un nouveau travail au travers des situations problèmes. On distingue principalement trois formes de problèmes qui conduisent au calcul d'une multiplication. Les deux premiers sont pleinement liés à la construction même du sens de cette opération. Ils sont donc intéressants tant comme support d'entrée dans l'apprentissage que pour le réinvestissement.

### Situation 1 : La réunion de collections équipotentes

*Énoncé* : Dans la classe il y a 6 îlots de 4 tables chacun. Combien y a-t-il de tables en tout ?

« Ce qu'on cherche » :  $6 \times 4$



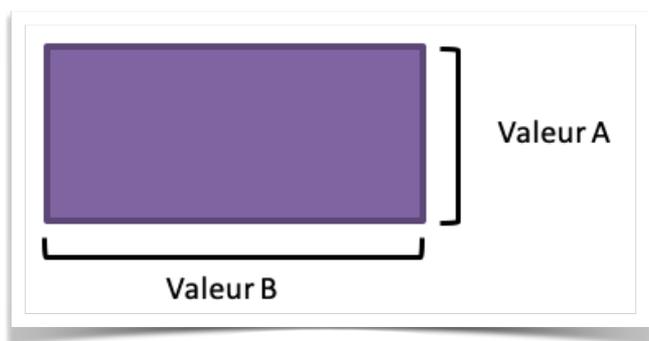
C'est dans ce type de situations que l'on rencontre l'expression « le nombre de fois ». D'abord vue sur des petits multiples (double, triple, ...), c'est au cours du cycle 2 que cette situation se généralise pour s'appliquer à des

« nombres de fois » quelconques. Pour que la situation multiplicative apparaisse clairement, la valeur A qui est répétée doit être bien mise en évidence soit par un même schéma ou un code couleur. Ainsi, lorsque c'est possible (c'est-à-dire avec des « nombre de fois » pas trop grands) l'élève peut réellement voir la multiplicité des objets ou des données. Plus tard, on pourra utiliser des points de suspension (comme ci-dessus) mais en veillant toujours, par la reformulation par les élèves par exemple, à ce qu'ils soient bien compris.

### Situation 2 : Les configurations rectangulaires

*Énoncé : Dans sa partie de Minecraft, Paul a vu que le monde dans lequel il construit fait 120 cases de long et 80 cases de large. Combien y a-t-il de cases en tout ?*

**« Ce qu'on cherche » :  $200 \times 120$**



Deuxième manière d'aborder la multiplication, les configurations rectangulaires sont très fréquentes dans les problèmes faisant intervenir des grandeurs. Souvent présente dans l'énoncé lui-même, la représentation par un rectangle est, de fait, incontournable. Les principaux risques d'erreur résident dans la confusion avec d'autres notions comme le périmètre et donc l'addition des valeurs. Au cycle 2, les élèves ne rencontrent que des produits de nombres entiers (les produits avec des décimaux n'intervenant qu'au cycle 3), si besoin, il est donc possible de revenir à des petites valeurs pour contrôler la vraisemblance d'un résultat (nombre de carrés d'une tablette de chocolat par exemple). Ceci permet d'assurer le choix de la bonne opération que les élèves ont ensuite juste à mener avec les outils dont ils disposent (calcul réfléchi, automatisé, posé, ou instrumenté).

### Situation 3 : Les produits cartésiens

*Énoncé : Pour préparer Carnaval, un élève a retrouvé des vieux habits de couleur dans son grenier. Il a 4 chapeaux différents, 3 vestes de couleurs différentes et 3 pantalons de couleurs différentes. De combien de manières différentes peut-il s'habiller ?*

**« Ce qu'on cherche » :  $4 \times 3 \times 3$**

Dernière forme de situation multiplicative que les élèves peuvent rencontrer, les produits cartésiens sont en fait présents dès le cycle 1 au travers de la représentation de choix possibles dans des tableaux à double entrée. Si le tableau à double entrée fonctionne bien pour deux critères, il n'est plus adapté pour trois ou plus. Dans ces derniers cas, il est possible d'utiliser un arbre de choix dont on cherche le nombre total de branches. Contrairement aux deux précédentes, ce type de situation est plutôt rare et elle n'a de sens que si les nombres sont suffisamment petits pour permettre une schématisation visuellement éclairante.

## Remarques sur les problèmes multiplicatifs au CP

Dans le prolongement direct des situations additives, au CP, les élèves rencontrent également des situations multiplicatives. Il s'agit cependant de cas très simples reposant sur l'addition itérée (voir la construction de la multiplication dans le chapitre Opérations).

Exemple : Dans la classe, il y a 6 pochettes de feutres. Chacune contient trois feutres verts. Combien y a-t-il de feutres verts en tout ?



$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18 \quad \text{ou} \quad \ll 6 \text{ fois } 3 \gg = 18$$

En CP, il est plus profitable de rester proche du premier sens de la multiplication qu'est l'itération d'une même quantité (le nombre de « fois »). Dans cette construction, la multiplication n'est pas intuitivement commutative contrairement au signe  $\times$  ; il n'est donc généralement pas nécessaire d'introduire ce symbole.

## Problèmes amenant à une division

à l'école, deux approches de la division coexistent toujours et lui donnent sens car elles permettent la modélisation de deux grandes familles de problèmes qu'il convient de bien identifier. Cette distinction entre une situation de partage et une situation de groupement est en fait très ancienne. On la trouve dès les premiers traités d'arithmétiques comme, par exemple, dans *L'arithmétique en sa perfection* (1781), où François Legendre écrit que « Diviser ou partager, c'est séparer un nombre en autant de parties égales qu'il y a d'unités au diviseur. Ou autrement, diviser un nombre c'est chercher combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre à diviser. » Dans le premier cas, la division permet de chercher la valeur d'une partie (valeur d'une part) et dans le deuxième cas le nombre fois qu'une certaine quantité (ou groupe) est contenu dans une autre. Tout repose sur la signification du problème. Les mots ont donc toute leur importance mais aussi et surtout la nature des choses auxquelles font référence les nombres présents dans l'énoncé. Afin de reconnaître aisément chacun des cas, nous proposons une schématisation qui permet d'en saisir, chaque fois, la spécificité. Dans ce qui suit, nous utilisons le **signe de la division** (on trouve désormais les deux signes « : » et « ÷ » dans les documents officiels) et l'écriture en ligne de celle-ci afin de rendre compte des calculs

mathématiques sous-jacents. Au CE2, les élèves apprennent ce nouveau signe mais la maîtrise du formalisme de la division relève principalement du cycle 3.

Partons de deux exemples.

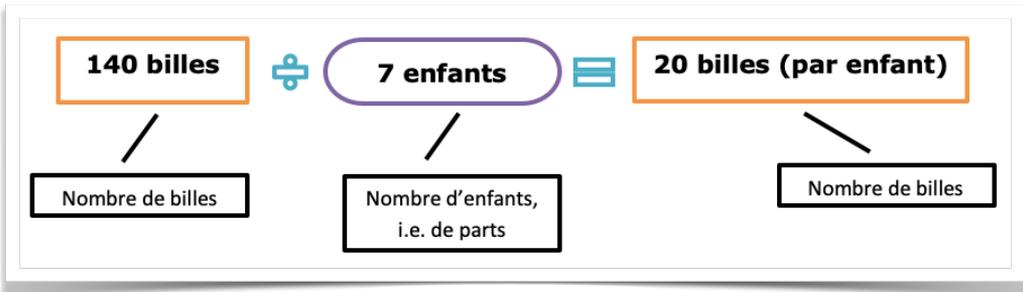
*Problème 1 : Lors d'une kermesse, un groupe de 7 enfants gagne un sac de 140 billes. Ils souhaitent se les partager équitablement. Combien chaque enfant aura-t-il de billes ?*

*Problème 2 : Les poules d'une exploitation agricole ont pondu 264 œufs. Le fermier souhaite les mettre dans des boîtes de 24 œufs. Combien doit-il prévoir de boîtes ?*

Dans le premier cas, le calcul à effectuer est  $140 \div 7 = 20$  et dans le deuxième cas  $264 \div 24 = 11$ . Il s'agit bien de problèmes relevant de la division. Comment les distinguer ?

Nous proposons d'utiliser une schématisation inspirée des classifications pour les trois autres opérations. Pour cela, nous reprenons les données de chaque problème en codant de manière identique les nombres qui renvoient à un même type d'objets.

On obtient ainsi, pour le Problème 1 :



Dans ce problème, on divise un nombre de billes par un nombre de parts, on obtient un nombre de billes c'est-à-dire la valeur de chaque part. Il s'agit d'une **situation de partage**.

Toutes les situations de partage peuvent être modélisées de la même manière. Cette proposition de schématisation permet de mettre en évidence que sur les trois nombres en jeu, deux renvoient à un même type d'objets (ici les billes) et qu'ils se trouvent de part et d'autre du signe égal.

On peut alors donner la forme générale :

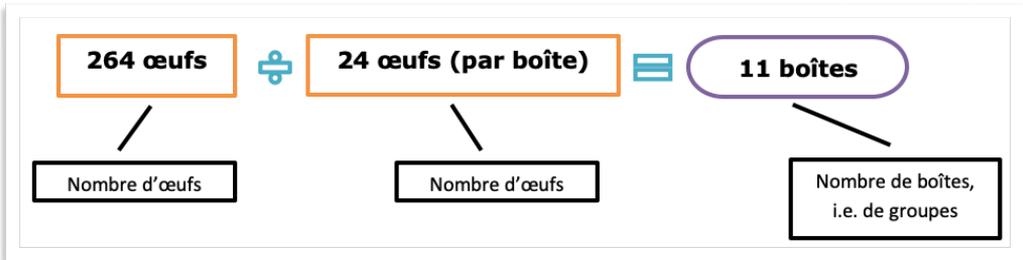
## Situations de partage



(où les nombres dans les rectangles désignent le même type de choses)

Exemple : Dans une animalerie, l'employé souhaite répartir équitablement 182 poissons dans 7 aquariums. Combien devra-t-il mettre de poissons dans chaque aquarium ?

Pour le Problème 2 :

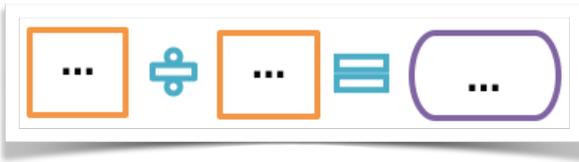


Dans ce problème, on divise un nombre d'œufs par un nombre d'œufs (par boîte), on obtient donc le nombre de boîtes, c'est-à-dire le nombre de groupes. Il s'agit d'une **situation de groupement**.

Toutes les situations de groupement peuvent, là aussi, être modélisées de la même manière. La schématisation permet de mettre en évidence que sur les trois nombres en jeu dans cet autre problème, deux renvoient ici encore à un même type d'objets (les œufs) mais ils se trouvent cette fois du même côté du signe égal.

On peut alors donner la forme générale :

## Situations de groupement



(où les nombres dans les rectangles désignent le même type de choses)

Exemple : Une animalerie vient de recevoir 182 poissons. L'employé souhaite les installer dans des aquariums pouvant en contenir 26 chacun. Combien d'aquariums doit-il aller chercher dans la réserve pour installer tous les poissons ?

Dès le CP, les élèves sont amenés à résoudre les deux types de problèmes sans toutefois utiliser le formalisme de l'écriture avec le signe : ou  $\div$ .

# Tableau synthétique des différentes situations problèmes

Problèmes menant à une :	
<b>addition</b>	Recherche de l'état final dans une transformation positive (gain, augmentation)
	Recherche de l'état initial dans une transformation négative (perte, diminution)
	Recherche d'un tout à partir de deux données
<b>soustraction</b>	Recherche de l'état final dans transformation négative (perte, diminution)
	Recherche de l'état initial dans transformation positive (gain, augmentation)
	Recherche d'une transformation (positive ou négative)
	Recherche d'une partie à l'issue de la réunion deux données
	Recherche d'un écart lors de la comparaison entre deux données
<b>multiplication</b>	La réunion de collections équipotentes
	Les configurations rectangulaires
	Les produits cartésiens
<b>division</b>	Situation de partage
	Situation de groupement

## Chapitre 3

# Les nombres et la numération

---

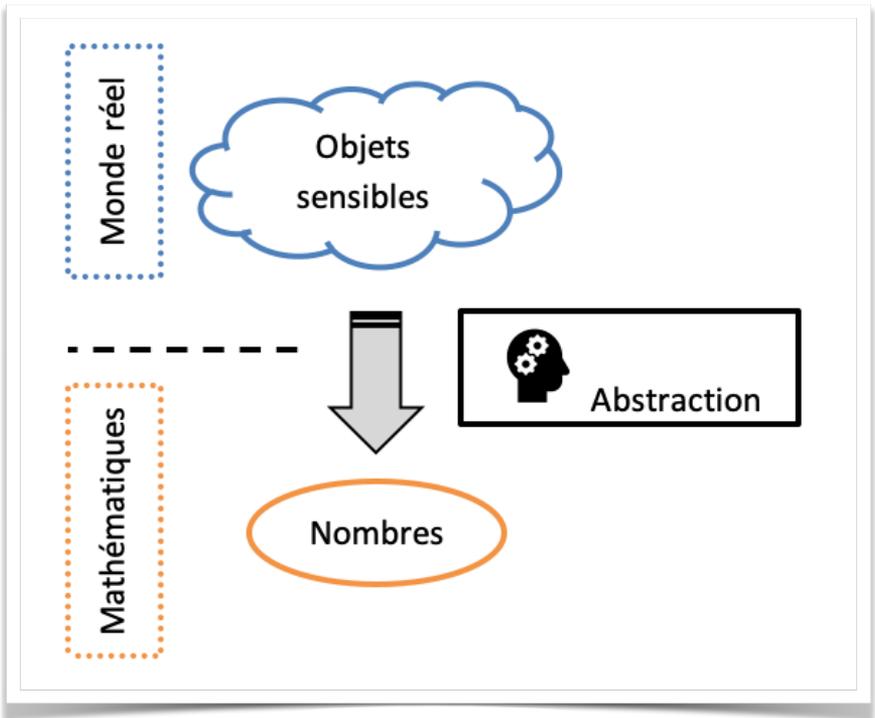
### Nombres et numération

**L**a construction du concept de nombre commence très tôt, dès le cycle 1. Au travers de jeux, de comptines, d'activités ritualisées ou spécifiquement mises en place pour ce domaine, la maternelle est le lieu des premiers apprentissages des nombres, de leur intérêt et de leurs propriétés. Pour ce qui concerne les connaissances fondamentales sur le nombre, le cycle 2 s'inscrit tout naturellement dans la continuité du cycle 1. Ainsi, à leur entrée en CP, les élèves sont déjà à même de comprendre

et de mettre œuvre plusieurs aspects essentiels de la notion de nombre. Voici, pour mémoire, quelques-unes des dimensions du nombre.

### Le nombre est abstrait

Comme toute notion mathématique, le nombre peut être vu comme le résultat d'un processus d'abstraction qui permet de mettre ensemble des objets parfois très différents.



Par exemple, une petite voiture n'est pas un train qui n'est lui-même ni une poupée ni un ours en peluche et pourtant

on peut dire qu'il y a quatre jouets. Très souvent, au cycle 1, les élèves commencent par dénombrer des collections d'éléments identiques (objets ou dessins) puis, progressivement, apprennent à faire abstraction de certaines propriétés (taille, couleur, etc.) jusqu'à la nature même des objets.

## **Le nombre est un outil**

Tant dans la vie courante que dans un contexte un peu plus scolaire, les nombres vont servir d'outils pour plusieurs catégories de tâches. À grands traits, on peut en distinguer quatre : désigner une quantité, désigner un rang dans une liste, garder la mémoire d'une quantité, anticiper un résultat. Rappelons ces fonctions du nombre autour de quelques exemples.

- *Ce paquet de gâteaux en contient 24.*
- *Il y a 13 filles dans la classe.*
- *Une baguette coûte 95 c.*
- *La longueur de la cour est de 17 m 50 cm.*

Dans les exemples ci-dessus, le nombre sert à **désigner une quantité**. Mathématiquement, cette quantité peut être « discrète » c'est-à-dire que chaque unité est indivisible, soit « continue » comme dans le cas des grandeurs. Chaque fois,

le nombre permet de signifier de manière précise, voire exacte, la quantité. C'est la **dimension cardinale** du nombre.

- *Lors du cross de l'école, Martin a fini 7<sup>e</sup> et Martine 5<sup>e</sup>.*
- *Pour aller à la piscine, il faut prendre la 3<sup>e</sup> rue à droite.*

Dans ces deux situations, le nombre permet **d'exprimer un rang** dans une liste ou un classement. Il s'agit là d'une autre propriété mathématique des nombres liée à la notion d'ordre ; on parle alors de **dimension ordinale** du nombre.

- *Pour finir d'installer le goûter, je dois aller chercher 20 assiettes.*
- *Pour construire une cabane, après prise de mesures, je sais qu'il me faut 12 planches de 2 m 50 cm.*

Dans le quotidien, le nombre s'avère très utile pour **garder la mémoire d'une quantité**. Ce n'est pas là une nouvelle propriété mathématique mais plutôt un usage concret des deux aspects précédents. Pour ces situations, la temporalité a souvent toute son importance. Par exemple, si un élève veut optimiser ses allers-retours vers le placard, il a tout intérêt à garder en mémoire le nombre d'assiettes dont il a besoin (ce qui est très différent de faire un trajet

pour chaque assiette jusqu'à obtention du résultat car, dans ce cas, la notion de nombre ne serait pas utilisée).

- *Dans mon porte-monnaie, j'ai 4 € 50 c. Aurai-je assez pour acheter 2 éclairs au chocolat à 2 € 20 c chacun ?*
- *Pour notre voyage scolaire, le bus part à 8 h du matin. Sachant que le trajet dure 5 h 30 min, à quelle heure arriverons-nous à destination ?*

Avec les nombres, s'ouvre la possibilité de faire des calculs et ainsi d'**anticiper un résultat**. Un peu présente au cycle 1 dans des cas simples, cette utilisation du nombre va prendre une grande place au cycle 2 et dans toute la suite de la scolarité des élèves. Dans cette progression, le cycle 2 est un moment clé car c'est à ce niveau que les élèves vont être amenés à affiner l'écriture des nombres (système de numération) et la résolution de calculs complexes (calcul réfléchi, opérations posées).

Une dernière manière de rencontrer les nombres réside dans leur utilisation comme **système de désignation**. Il s'agit ici de l'usage de chiffres pour donner un « numéro », une « référence » à une chose sans que le nombre n'ait une signification mathématique. Les exemples ne sont pas aussi fréquents qu'on pourrait le croire car beaucoup de références utilisent plus ou moins explicitement la notion d'ordre. Par exemple, le numéro d'un maillot d'un joueur

de football n'est pas complètement choisi au hasard de même que les numéros de bus. Ainsi, pour ces derniers, ils sont généralement numérotés à partir de 1. Le chiffre 5 n'indique rien quant au trajet du bus 5, mais on sait qu'il y a, *a priori*, au moins cinq lignes. La dimension numérale (sans signification) peut réapparaître pour des lignes numérotées à partir de 180 ou 200 comme les bus de nuit dans certaines villes ou encore pour les numéros des trains pour lesquels l'utilisateur n'a pas accès à la manière dont ils sont générés.

## Le système de numération : un enjeu majeur du cycle 2

Les nombres s'écrivent avec des chiffres. Cette courte phrase est lourdement chargée de sens et d'histoire. On appelle **système de numération**  un ensemble de symboles et de règles de syntaxe qui permettent de dire et/ou d'écrire les nombres.

### Didactique

Une numération est un système de signes qui permet de désigner les nombres (entiers naturels en ce qui concerne cet article). Le mot système fait référence à l'existence d'une syntaxe qui organise les signes entre eux. Trois aspects de ce système peuvent être étudiés : sa non redondance (deux signes différents ne peuvent désigner un même nombre), sa non ambiguïté (un même signe ne peut désigner deux nombres différents) et son exhaustivité (tous les nombres entiers peuvent y être désignés, a minima tous les nombres entiers inférieurs à une certaine borne).

Éric Mounier (2017) École et nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.36, n°3 pp. 347-396.

Dès les civilisations les plus anciennes nous ayant laissé des écrits comme les Égyptiens ou les Babyloniens, on trouve des systèmes élaborés d'écriture des nombres. Les désignations orales remontent certainement encore plus loin mais leur histoire est plus difficile à retracer. Notre

système de numération actuel est lui aussi le fruit de l'évolution des mathématiques et de leur diffusion au cours du temps. Principalement héritier du système indien par le biais d'une transmission *via* le monde arabe, l'écriture des nombres en France repose sur l'utilisation **des chiffres de 0 à 9**, chiffres dits **indo-arabes**. Il s'agit d'un **système décimal, positionnel, qui s'écrit (et se lit) de gauche à droite**. Il est intéressant de noter que, même si la graphie diffère, ce sens d'écriture est conservé en arabe littéral contrairement à tous les autres mots de cette langue (NB : par contre, la lecture et l'oralisation en arabe se fait bien quant à elle de droite à gauche, c'est-à-dire en énonçant les unités, puis les dizaines, etc.). Conformément aux notions abordées au cycle 2, nous nous restreignons ici au cas des nombres entiers. Nous reviendrons un peu plus loin sur les caractéristiques mathématiques de notre système de numération.

### **Du cycle 1 au cycle 2 : quoi de neuf ?**

Les élèves de cycle 1 connaissent les premiers nombres (jusqu'à 30 environ), ils connaissent les chiffres et savent même associer l'écriture chiffrée d'un petit nombre à celui-ci, mais on n'exige pas d'eux qu'ils sachent pourquoi treize s'écrit 13. **L'apport principal du CP**, en lien avec l'accès à l'écrit, est de **connaître et de maîtriser les règles d'écriture des nombres** 🔍.



## Didactique

« En laboratoire et par IRMf (imagerie par résonance magnétique fonctionnelle), des études ont mis en évidence que le système symbolique des nombres se développerait en prenant appui sur le système non symbolique déjà existant. Sur des tâches utilisant à la fois le nombre sous sa forme non symbolique (nuage de points) et sa forme symbolique (écriture chiffrée), les analyses des données IRMf montrent qu'il y a activation de mêmes régions cérébrales lors de ces deux types de tâches. Cela laisse penser aux chercheurs que l'établissement de liens entre les nombres non symboliques et les nombres symboliques peut faciliter l'acquisition du concept de nombre. »

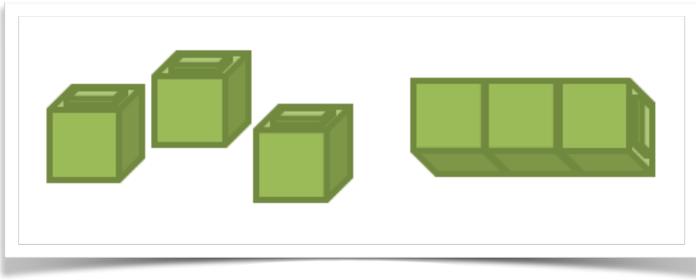
*Enseigner les mathématiques, Belin, 2019, p.242*

Cette étape est très importante car c'est aussi par elle que sont travaillées les caractéristiques de notre système de numération : base 10, position, et utilisation du zéro.

### Un système décimal

L'une des principales caractéristiques de notre système d'écriture des nombres est son fonctionnement en base 10. L'idée de regrouper dix unités pour faire une dizaine et dix dizaines pour faire une centaine n'est pas exempte de difficultés pour les élèves. L'utilisation du matériel est indispensable à ce stade. Il en existe de nombreuses variantes, des abaques aux boîtes à compter, toutes n'ayant pas les mêmes avantages et les mêmes inconvénients. En voici quelques exemples :

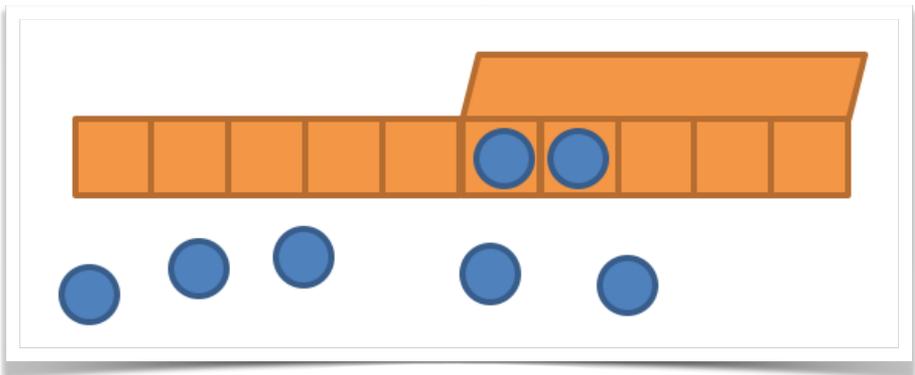
## Cubes assemblables



*Avantages : Les unités sont bien identifiées, on peut décomposer et recomposer des assemblages à sa guise ( $9 + 1 = 10 = 8 + 2$ ).*

*Inconvénients : La construction de la dizaine peut être source d'erreur car il n'y a aucun contrôle matériel sur le nombre de cubes assemblés (9 ? 11 ?), pas de construction/visualisation simple de la centaine.*

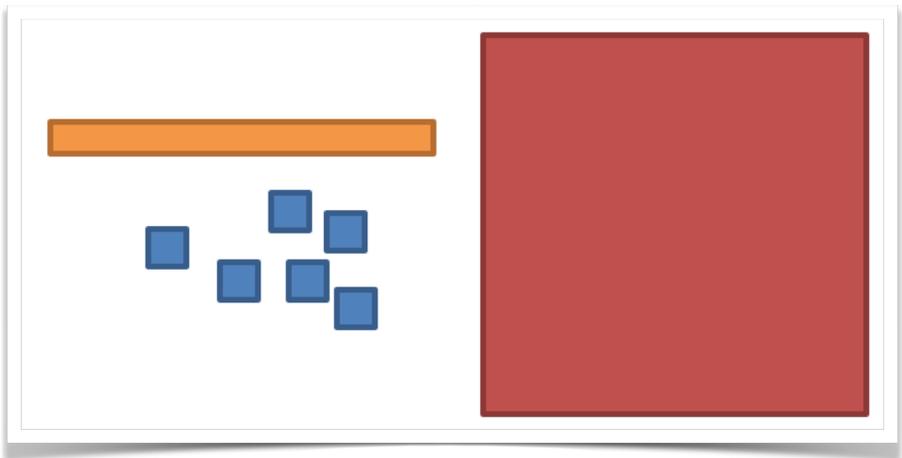
## Boîtes à jetons (refermable par 5 et 10)



*Avantages : les unités sous forme de jetons sont bien séparées, le fait de pouvoir fermer une boîte par 5 ou 10 permet de créer certains automatismes (1 boîte entière fermée = 1 dizaine ; 1 demi-boîte fermée et 2 unités = 7 comme dans l'exemple ci-dessus).*

*Inconvénients : matériel pas toujours disponible dans les écoles.*

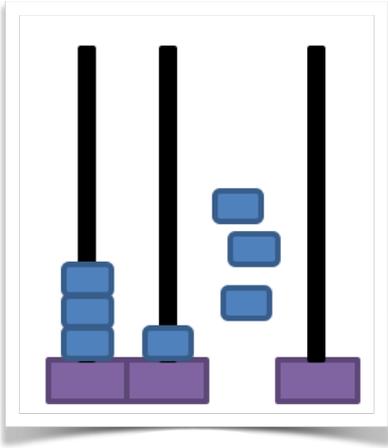
### Cubes (non assemblables), barres et plaques



*Avantages : Les unités, les dizaines et les centaines sont bien distinctes, les quantités sont contrôlées (1 barre = 10 carrés).*

*Inconvénients : Les barres et les plaques ne sont pas sécables ce qui empêche certaines manipulations (décompositions additives, transformation d'une dizaine en unités par cassage).*

## Abaques verticaux à perles ou cubes



*Avantages : Les unités sont bien séparées, chaque barre est limitée à 10 cubes en hauteur, possibilité d'ajouter autant de « colonnes » que l'on veut pour les dizaines, les centaines, etc.*

*Inconvénients : Il n'y a pas de distinction « matérielle » entre les dizaines et les centaines (ce qui pourra néanmoins devenir un avantage lors de la compréhension de l'écriture), les dizaines, centaines ne sont pas sécables (car représentées par le même cube que les unités).*

Comme on peut le voir, il n'existe pas de matériel idéal, en particulier, chacun est plus ou moins adapté selon les objectifs visés. Néanmoins, il est souvent souhaitable de ne pas trop multiplier les types de matériel lors de l'entrée dans l'apprentissage du système de numération. En effet, au-delà de l'outil, le **matériel va servir aussi de référent** pour les élèves qui pourront, même s'ils ne l'ont pas sous la main au moment voulu, l'imaginer ou le représenter sur un schéma. Dans ce contexte, un usage répété d'un matériel pédagogique identique facilite les automatismes et la création d'images mentales des situations.

Le travail sur le système de numération se fait progressivement au cours du cycle 2 puis se poursuit au cycle 3. L'objectif est d'accéder, *via* l'apprentissage et la compréhension des règles, à l'écriture de **nombres de plus en plus grands** ouvrant ainsi la porte à de nouveaux problèmes ou calculs.

## Un système positionnel : les unités de numération

Les nombres s'écrivent avec des chiffres comme les mots s'écrivent avec des lettres, mais la principale différence réside dans l'existence de règles systématiques, et finalement bien plus simples, de syntaxe. Notre système d'écriture des nombres est dit **positionnel**, c'est-à-dire que selon sa position, la signification d'un chiffre varie. Les dix chiffres de 0 à 9 sont comme les lettres, ils n'ont aucune signification en soi et leur graphie comme leur nom doit faire l'objet d'un apprentissage par cœur qui est généralement bien abordé au cycle 1. À l'entrée dans le cycle 2, on veillera néanmoins à vérifier ces acquis avant la construction du système de numération.

*245 se lit deux-cent-quarante-cinq*

La lecture et l'écriture des nombres fait intervenir de nombreux éléments dont la dimension décimale que l'on retrouve dans ce qu'on nomme **les unités de numération**



Un nombre comme 245 ci-dessus comportent trois chiffres qui renvoient chacun à une unité spécifique selon le rang dans l'écriture (la position). Pour les nombres jusqu'à 999, il y a trois unités de numération différentes : **l'unité, la dizaine et la centaine.**



## Didactique

Dans la numération orale en français, la place des mots n'indique pas l'unité de numération, et des mots comme « vingt », « trente », etc. renvoient à la fois à l'unité de numération (ici la dizaine) et au nombre de cette unité, ce qui n'est pas le cas par exemple de « cent » ou « mille ». Par ailleurs, il n'existe pas de nom pour l'unité qui vient après mille. En outre, lorsqu'on désigne un nombre à l'aide des unités de numération on peut intervertir des groupes de mots, par exemple « une centaine, deux dizaines, huit unités simples » et « deux dizaines, une centaine, huit unités simples ». Ce n'est pas le cas de la numération orale (en français) et de la numération écrite chiffrée (...)

Éric Mounier (2017) École et nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.36, n°3 pp. 347-396.

Une bonne compréhension du nombre réside souvent dans la maîtrise de ces unités. Pour ce faire, il convient de les utiliser fréquemment en particulier pour des décompositions de nombres.

*Exemple* : Une vente de gâteaux a rapporté 245 €. Combien de billets de 100 €, de 10 € et de pièces de 1 € va-t-on déposer à la banque ?

Selon la consigne et/ou le matériel, ce type d'exercice peut amener à des nombreuses décompositions du nombre dont le sens est ancré dans les propriétés de notre système.

245 € c'est 2 billets de 100 €, 4 billets de 10 €, 5 pièces de 1 €, mais c'est aussi 24 billets de 10 € et 5 pièces de 1 € ou tout autre combinaison.

L'intérêt de cet exemple est de montrer, en contexte, le fonctionnement des unités de numération. Le nombre 245 peut bien sûr est décomposé de manière dite canonique en centaines, dizaines et unités, mais il peut aussi l'être uniquement en dizaines et unités. Pour ces trois unités de numération, la **règle d'échange 1 pour 10** s'applique :

1 dizaine = 10 unités

1 centaines = 10 dizaines

**Les difficultés** dans la maîtrise de ces premières règles sont fréquentes chez les élèves. Ces derniers peuvent confondre les termes (dizaine au lieu de centaine), ne pas tenir compte de l'ordre d'écriture (2 unités et 3 dizaines écrit 23), oublier l'unité de numération concernée (en additionnant des dizaines et des unités par exemple ou en écrivant 13 au lieu de 103 pour une centaine et trois unités), ou encore écrire le nombre tel qu'on l'entend (1003 au lieu de 103 « cent-trois »).

La compréhension des premiers **rangs** est fondamentale car elle va permettre l'accès aux grands nombres.

Que se passe-t-il au-delà de 999 ? Au niveau de l'écriture des nombres, la même règle continue à s'appliquer : dès qu'on a 10, on change de rang (d'où l'intérêt d'une bonne maîtrise de ce principe dès les tout débuts d'apprentissage). Par contre, en termes d'unités de numération, une nouvelle régularité apparaît avec de nouvelles **classes** qui viennent compléter celle des unités qui a permis d'aller jusqu'à 999.

**Classe des unités simples** : unités, dizaines, centaines (d'unités simples)

**Classe des milliers** : unités de mille, dizaines de mille, centaines de mille

**Classe des millions** : unités de millions, dizaines de millions, centaines de millions

**Classe des milliards** : unités de milliards, dizaines de milliards, centaines de milliards

Même si les millions et les milliards ne sont vus qu'au cycle 3, nous les citons ici pour donner à voir la cohérence globale et les enjeux du cycle 2. Notre système d'oralisation des **grands nombres** décompose ces derniers par tranches de trois chiffres en différentes classes (unités, mille, millions, etc.) dans lesquelles on retrouve la décomposition en unités, dizaines, centaines. Contrairement aux Anglais

ou aux Américains qui écrivent par exemple 203,500,000 (deux-cent-trois-millions-cinq-cent-mille), il n'y a pas en français de marqueur pour signifier le changement de classe. Ceci complique la tâche des élèves qui doivent apprendre à recréer les **groupements de trois chiffres à partir de la droite** (une erreur fréquente étant de grouper à partir de la gauche). On comprend, dans ce contexte, l'intérêt de passer suffisamment de temps sur **les nombres inférieurs à mille** car ils **serviront par la suite à la compréhension des grands nombres** 🔍.

### Didactique

Les compositions et décompositions selon différentes unités sont des tâches incontournables dans l'apprentissage de la numération. Elles peuvent être un point d'appui pour justifier certaines techniques, comme associer l'écriture en chiffres à l'écriture en lettres, ou dénombrer une collection organisée. La variable « nombre d'unités de chaque ordre » permet de mettre en jeu les relations entre unités quand il y a plus de dix unités à certains ordres. Elle est déterminante pour permettre de développer une compréhension de la numération qui ne se limite pas à la connaissance de la valeur des chiffres en fonction de leur position mais prend en compte différentes interprétations des unités ; par exemple une centaine comme dix dizaines ou cent unités.

Frédéric Tempier (2016) Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, n° 98, pp. 67-90.

Comme pour les mesures, le travail sur les unités de numération est plus profitable si les outils tels que le tableau de numération n'est pas introduit trop tôt. On favorise ainsi une meilleure maîtrise de la règle d'échange. Le tableau de numération permet néanmoins une vision synthétique intéressante.

### **Remarques sur les apports spécifiques du CP**

Comme nous venons de le voir, l'apprentissage du système de numération permet l'accès aux nombres petits et grands mais c'est aussi une forme d'entrée dans l'écrit et l'apprentissage d'un langage (pour dire et écrire des mathématiques). Au CP, la mise en place de la suite numérique (ou file numérique) constitue l'un des moments forts dans lequel les règles d'écriture et d'énonciation des nombres se concrétisent pour, à la fois, faire sens et pour doter les élèves d'un outil pertinent dans de nombreuses situations mathématiques.

## La construction de la suite numérique

La suite numérique est presque un symbole de l'apprentissage scolaire des mathématiques. Elle court souvent le long des murs des classes et ce depuis des décennies. À la fois support de travail ou de jeux et outil ou aide pour les élèves, son omniprésence ne doit pas masquer les enjeux d'apprentissage qu'elle contient, ni les difficultés qu'elle permet de mettre en évidence.

Il existe plusieurs manières de représenter la suite numérique qui permettent de visualiser plus ou moins facilement les régularités et irrégularités de notre système.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

En plus de donner dans l'ordre les premiers entiers, le rôle du début de la file (appelée « petite suite ») est aussi de **rappeler les dix chiffres** (graphie, oralisation) qui permettent d'écrire les nombres. La maîtrise de la première dizaine est essentielle car si l'on se restreint à la seule écriture, elle contient tout ce qui est nécessaire pour désigner tous les nombres (jusqu'à 100 mais aussi jusqu'à l'infini).

L'introduction de **la dizaine est le fondement de tout le système**. Lorsqu'on a dix, on écrit 1 dizaine et 0 unité. Plusieurs dispositions spatiales sont envisageables. Dans un premier temps, le passage à la dizaine et l'écriture 10 a tout son sens dans la continuité d'une file qui va de gauche à droite, on obtient ainsi :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	-----

La construction du début de la file constitue un bon moyen pour **rappeler les noms des nombres** dans lesquels se trouvent une première difficulté après le passage à la dizaine. Contrairement à leur écriture qui est très régulière, la lecture des nombres est très vite complexe pour les élèves. En effet, s'il paraît naturel d'avoir **des noms différents pour chaque nombre de 0 à 9** (et donc chaque chiffre appelé parfois mot-nombre pour signifier ce double statut), rien en dehors de l'histoire culturelle ne justifie **l'apparition des mots onze, douze, treize, quatorze, quinze, et seize**. Souvent déjà bien travaillé au cycle 1, il convient de ne pas sous-estimer le temps nécessaire à certains élèves pour avoir une bonne maîtrise des mots en question et de l'ordre dans lequel ils apparaissent. Les **erreurs fréquentes** sont l'oubli de l'un d'eux (dix, onze, douze, quatorze, quinze, ...), l'inversion de deux mots (dix, onze, treize, douze, ...) voire leur

répétition (dix, onze, douze, douze, treize, ...). Des petits jeux comme le furet (chaque élève énonce chacun son tour l'un des nombres dans l'ordre) ou la grenouille qui saute de nombre en nombre (l'enseignant pointe les nombres dans l'ordre sur une file au tableau et de temps à autre masque l'un d'eux, on dit alors « plouf » à la place et on continue avec le suivant) permettent de s'assurer des acquis des élèves. On peut aller ainsi jusqu'à la dizaine suivante où deux options intéressantes (qui peuvent coexister dans la classe) s'offrent à l'enseignant.

*Cas 1 : disposition horizontale*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Cette première forme contribue à annoncer la permanence des règles du système pour tous les nombres que l'on pourrait écrire ainsi les uns à la suite des autres. Lorsqu'on l'arrête à 19, cette disposition (appelée « grande suite ») a aussi l'avantage de mettre en évidence une première irrégularité dans le système oral de numération. En effet, contrairement à d'autres langues plus régulières, l'oralisation des nombres en français voit se répéter le schéma de 0 à 19 pour les nombres de 60 à 79 et de 80 à 99.

## Cas 2 : disposition verticale

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

*Remarque* : on pourra centrer ou non les premiers nombres dans les cases ; l'avantage d'un alignement à droite est d'ajouter une meilleure lisibilité de la répétition des écritures des unités.

Contrairement à la première disposition qui est utile à la fois pour les règles d'écriture et d'oralisation, cette deuxième organisation vise surtout la construction des dizaines ultérieures. Dans la deuxième ligne, les élèves peuvent aisément voir la présence systématique de la dizaine et à sa droite le marqueur des unités. On met ainsi en évidence la première dizaine (parfois appelée la « famille des dix », « classe du dix » ou « maison du dix ») en annonçant visuellement que si on vient ajouter un à 19, il faudra changer de ligne et donc construire une nouvelle dizaine en appliquant correctement la règle d'échange.

Pour les nombres jusqu'à 59, le système tant écrit qu'oral est très régulier. On peut poursuivre la suite en donnant simplement **le nom de chaque nouvelle dizaine**. On peut prolonger tant la disposition horizontale et jouer avec les

nouveaux nombres, que la disposition verticale en faisant

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

apparaître les différentes dizaines.

À partir de 60 et de la même manière à partir de 80, il peut être intéressant de réutiliser la suite de 0 à 19 (la « grande suite ») afin d'aider à la mémorisation de noms de ces nombres.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29										
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39										
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49										
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59										
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	93	95	96	97	98	99

Si elle n'exclut évidemment pas la disposition horizontale usuelle, ce type de support (en particulier en grand format à destination du tableau) permet aux élèves de faire le parallèle entre les nombres comme, par exemple, 12 *douze* ou 13 *treize* et 72 *soixante-douze*, 73 *soixante-treize*, 92 *quatre-vingt-douze* et 93 *quatre-vingt-treize* 🔍.



## Didactique

La numération chiffrée est souvent utilisée dans la pratique en tant que version écrite des désignations orales qui se juxtaposeraient ou se substituerait à l'écriture avec l'alphabet de la langue. Écrire le nombre revient alors à transcrire en chiffres un mot de la comptine numérique et, réciproquement, comprendre une écriture chiffrée est un exercice de lecture, de transcription dans la langue parlée. (...) Des similitudes entre le système chiffré et les noms des nombres dans la langue vernaculaire peuvent être utilisées pour faire des liens. Par exemple, en se restreignant aux nombres inférieurs à cent et aux langues indo-européennes, une règle peut être utilisée pour la plupart des nombres : le premier chiffre peut être associé à un mot et le second à un autre. Ainsi, en français, s'il est placé en premier « 1 » peut se lire « dix », « 2 » « vingt », « 3 » « trente », etc. S'il est placé en second, « 1 » se lit « un », « 2 » « deux », « 3 » « trois », etc. Outre parfois l'ajout de certains mots comme le « et » en français dans « vingt-et-un », il s'agit ensuite de considérer à part le cas de certains noms de nombres. Ces particularités dépendent des langues : en français de France, il s'agit des noms des nombres de 11 à 16 ainsi que ceux de 70 à 99.

Éric Mounier (2017) École et nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.36, n°3 pp. 347-396.

Dans les **dernières périodes du CP**, les élèves peuvent enfin **construire la centaine** en appliquant une nouvelle fois **la règle d'échange** mais cette fois **sur des dizaines** et non des unités. Comme pour la mise en place de la

première dizaine, il convient d'anticiper cette création d'un nouveau rang dans l'écriture. Le matériel évoqué au début de ce paragraphe est alors une aide précieuse.

## Remarques sur les apports spécifiques du CE1

Contrairement au CP, au cours du CE1, les élèves manipulent désormais des nombres faisant intervenir **plusieurs centaines**. Sur ces nombres, ils peuvent réinvestir et ainsi stabiliser leurs connaissances sur le système de numération et ses règles de fonctionnement



### Didactique

Les types de tâches « composer » et « décomposer » peuvent se décliner principalement selon deux cas correspondant à des écritures différentes : en unités de numération (unités, dizaines, centaines, ...), comme par exemple 3 centaines 2 dizaines 1 unité = 321 ou en puissances de dix (1, 10, 100, 1000, ...) ce qui peut donner lieu à des écritures additives ( $300+20+1=321$ ) ou multiplicatives et additives ( $3\times 100+2\times 10+1=321$ ).

Frédéric Tempier (2016) Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, n° 98, pp. 67-90.

En lien avec la résolution de problèmes et les techniques de calculs, l'utilisation fréquente de **l'unité de numération « centaine »** permet de voir la généralité de l'écriture des

nombres et la pertinence de celle-ci, en particulier pour les algorithmes.

*56 = 5 dizaines et 6 unités*

*756 = 7 centaines, 5 dizaines et 6 unités*

L'introduction du rang des dizaines au CP et toutes les irrégularités qu'il présente dans le cadre de la numération orale (16 se lit seize alors que 17 se lit dix-sept ; 68 se lit soixante-huit alors que 73 se lit soixante-treize, etc.) n'est pas du même type que celle des centaines, bien plus régulières.

*100, 200, 300, 400, etc. : cent, deux-cents, trois-cents, quatre-cents, etc.*

L'oralisation des nombres supérieurs à 100 est moins sujette à difficultés mais il n'en demeure pas moins que la maîtrise de ces nombres dans certains cas particuliers est délicate. Le travail sur le rang des centaines fait apparaître un **risque de confusion avec le rang précédent**. Ainsi, par exemple, la présence d'un zéro dans le nombre ou une présentation des unités de numération dans un ordre différent que celui de la lecture peuvent entraîner des erreurs.

## Exemples :

*Le nombre deux-cents-cinq est parfois écrit 25 car on n'entend que l'expression des deux centaines et des cinq unités.*

*L'écriture du nombre composé de 3 unités, 6 dizaines et 5 centaines aboutit assez souvent à 365 au lieu de 563.*

Le matériel de numération et un contexte qui donne sens aux centaines permet d'aider les élèves à mieux appréhender ce nouveau rang qui va amener à une étape importante lorsque du passage à 1000. Plus encore que le passage à 100 au CP, le **passage à 1000** donne une nouvelle dimension au système de numération. Le principe de la règle d'échange reste inchangé mais la nouvelle unité de numération introduite « mille » va entraîner une première répétition des trois rangs « unités, dizaines, centaines ». Au CE1, les élèves ne construisent que le premier millier, le travail spécifique sur la classe des milliers fait l'objet du CE2

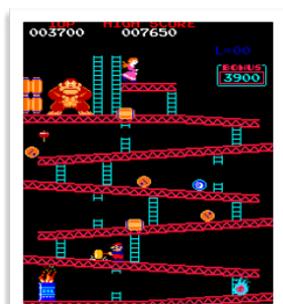
## **Remarques sur les apports spécifiques du CE2**

Les élèves de CE2 doivent comprendre et savoir utiliser les premiers milliers (jusqu'à 10000). Dans la continuité des rangs vus au CP et au CE1, il s'agit du premier temps sur une nouvelle classe, la **classe des milliers**.

Classe des milliers			Classe des unités		
centaines (de mille)	dizaines (de mille)	unités (de mille)	centaines	dizaines	unités
.	.	8	6	6	3

Les nombres restant inférieurs à 10000 au CE2, la particularité du nouveau rang en lien avec la nouvelle classe est, dans un premier temps, transparent pour les élèves. La redondance du système « cdu » n'apparaît pour la première fois que lors de la lecture du nombre 10000 « dix »-mille.

Contrairement aux premiers nombres qui sont assez faciles à illustrer par des exemples du quotidien, les milliers commencent à s'éloigner fortement du vécu des élèves 🔍. Pour éviter le dénombrement de quantité qui ne feraient pas forcément sens (nombre de pâtes ou de grains de riz dans un paquet), les contextes liés à des jeux et des scores permettent d'appréhender ces grands nombres de manière pertinente.





## Didactique

Dans l'une de leurs expérimentations Frédéric Tempier et Christine Chambris mettent « en évidence des phénomènes didactiques liés à l'usage des unités de numération dans les classes qui peuvent faire obstacle à l'émergence des connaissances prévues. (...)

[Par exemple, la] prégnance du matériel a une influence sur la taille des nombres utilisés par les enseignants : principalement des nombres ne dépassant pas les possibilités de groupements du matériel présent dans la classe, jusqu'à 3000 en général. Une enseignante s'est trouvée déstabilisée quand elle a proposé une commande de 8004 bâchettes sans groupement par millier de disponible dans le stock [NDR : nécessité d'avoir 80 sachets de 100] (...) cette remarque montre probablement un saut informationnel dans l'apprentissage des relations entre unités selon que l'on travaille avec peu de milliers (2 ou 3) et beaucoup de milliers (plus de 7 ou 8). »

Frédéric Tempier, Christine Chambris (2017) Concevoir une ressource pour l'enseignement de la numération décimale de position, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.37, n°2-3 pp. 289-332.

Outre les jeux traditionnels, les élèves sont désormais tous habitués aux jeux vidéo dont les scores font souvent apparaître de très grands nombres utiles tant au cycle 2 qu'au cycle 3.

## Chapitre 4

# Le calcul et les opérations

---

### Les opérations

**D**ès le début de leur scolarité, les élèves rencontrent les quatre opérations. En effet, dès le cycle 1, il est très fréquent qu'ils soient amenés (sur des petits nombres) à rechercher « combien cela fait en tout » (addition), trouver un complément (soustraction), déterminer implicitement un double (multiplication), résoudre une situation de partage (division). Ainsi, à l'entrée en cycle 2, les élèves ont déjà une certaine pratique des opérations dont il convient d'assurer la maîtrise, la compréhension puis l'utilisation et la formalisation. Tant au CP qu'au CE1 ou au CE2, les quatre opérations sont

étudiées ; la progressivité ne tenant principalement qu'à la taille des nombres et à l'introduction ou non du formalisme et d'un algorithme de calculs .

### **Didactique**

S'il n'y a pas de consensus sur le bienfondé ou non de l'enseignement des algorithmes, la pratique montre que, comme le soulignent certains didacticiens, les enjeux se situent peut-être ailleurs.

*Quand les outils de calculs automatiques n'étaient pas disponibles, il était nécessaire de savoir calculer « à la main » de manière sûre et rapide, et c'était un des objectifs des programmes scolaires. L'intérêt social de cette maîtrise du calcul s'est peu à peu amoindri avec la plus grande disponibilité des calculatrices. De ce fait, les programmes scolaires ont mis aussi le focus sur la compréhension de l'algorithme en lien avec la numération écrite chiffrée. On peut ainsi identifier schématiquement deux grands enjeux d'apprentissage des techniques opératoires : d'une part l'opérationnalité d'un outil de calcul qui passe par la mémorisation de gestes relatifs à l'algorithme et à sa mise en signes, et d'autre part sa justification à travers laquelle sont notamment visées des connaissances sur la numération.*

Eric Mounier et Maryvonne Priolet (2016) La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire. Le cas de l'addition et de la soustraction. *Grand N*, n°98, pp 5-26, IREM de Grenoble.

Dans cet apprentissage, c'est bien le sens des opérations, c'est-à-dire, à l'école, leur signification en contexte, qui prime et qui doit faire l'objet de toute l'attention de l'enseignant. Dans les paragraphes qui suivent, nous

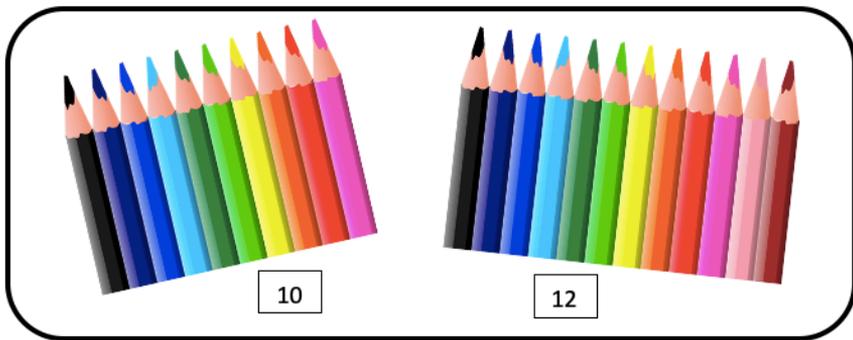
redonnons des éléments aidant à comprendre la construction des différentes opérations ainsi que quelques points de vigilance quant à leur enseignement en classe.

## Additions et décompositions additives

Mathématiquement, l'addition est une opération qui ne présente pas de difficulté intrinsèque particulière. On peut ajouter les nombres que l'on veut (pas de valeur interdite), dans l'ordre que l'on veut (commutativité), on obtient toujours le même résultat. En classe, l'**addition** apparaît surtout lors de la recherche du **cardinal** (i.e. le nombre d'éléments) **de la réunion de deux ensembles** comprenant chacun un certain nombre d'objets.

*Exemple : Paul a 10 crayons de couleur dans sa trousse et Léa, sa voisine de table, en a 12. Combien en ont-ils à eux deux ?*

Sur cet exemple, on trouve une première idée qui fonde l'**addition** : celle de la **mise en commun**, de la réunion, de plusieurs ensembles d'objets. Ce type de contexte est intéressant car il peut donner lieu à une première visualisation ou **schématisation en entourant le tout**.



**Dans le contexte des quantités discrètes (objets distincts les uns des autres) mais aussi celui des grandeurs et mesures, l'addition peut être rencontrée avec une signification proche et complémentaire, celle de la notion d'ajout.**

*Cas 1 : Jenny a 25 cartes Pokpokmon. Elle en gagne 12. Combien en a-t-elle à la fin ?*

*Cas 2 : Pour décorer un stand à la fête de l'école, les élèves placent d'abord un ruban coloré de 1 m 50 cm, puis ajoutent un autre morceau de 70 cm. Quelle longueur de stand ont-ils décoré ?*

Le premier cas est très proche de notre premier exemple, et il pourrait tout à fait être représenté de la même manière. Le second cas repose en fait sur la notion

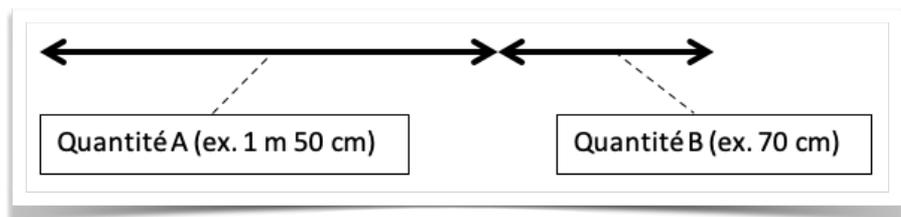
d'addition de grandeurs. Ces dernières permettent, et ce si besoin indépendamment des mesures dans un premier temps, **une autre forme de schématisation à partir de segments** qui peut s'adapter à de nombreux contextes (les durées par exemple).



ou



ou



On pourra noter que **les énoncés** des cas 1 et 2 induisent une certaine chronologie dans la situation (un gain à l'issue d'une partie, deux étapes pour la mise en place de la décoration, etc.). Cette **temporalité** est une aide précieuse pour **permettre à certains élèves de bien comprendre le sens de l'addition** dans ce type de contextes.

Comme ce sera le cas pour l'ensemble des quatre opérations, les formulations utilisées dans les énoncés ont un impact fort sur le sens que leur donneront les élèves et sur les procédures qu'ils chercheront à mettre en œuvre. Dans le cas de l'addition, **des expressions ou mots inducteurs** comme « tous ensemble », « on gagne... », « on ajoute... », etc. s'avèrent être les principaux moteurs du **donner du sens**. Même pour l'addition, il convient de toujours **s'assurer de la bonne compréhension de l'énoncé** (lectures multiples, reformulation, explicitation sous forme d'une histoire, mime, schématisation...). Les mots inducteurs peuvent induire des difficultés plus ou moins grandes que l'enseignant peut contrôler afin d'adapter le problème à ses objectifs ou au profil de ses élèves. Par exemple, l'énoncé ci-dessous peut s'avérer délicat pour des élèves de cycle 2 :

*Exemple* : À la récréation, Arthur a perdu 15 billes à la première partie, puis 5 billes à la deuxième. Combien a-t-il perdu de billes en tout ?

Ici, l'expression « en tout » aide à comprendre que la bonne opération est l'addition, mais le contexte de pertes (« perdu ») peut induire une soustraction. Cette opération est par ailleurs rendue possible par le choix des nombres (15 et 5 dans cet ordre, donc le calcul  $15-5$  est possible). Par

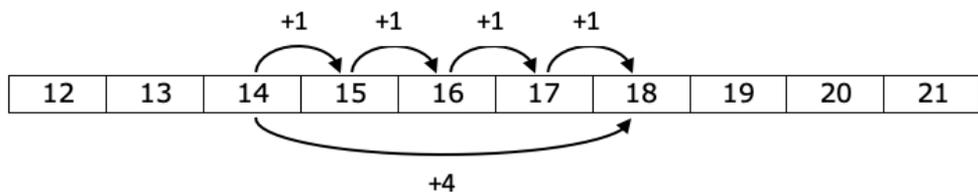
sa complexité, ce type de problème est à réserver à la fin de l'apprentissage.

### Successeur et successeur du successeur...

Précédemment, nous avons surtout l'addition comme recherche du cardinal d'un tout. Cette définition, ce « sens », est lié à la manipulation d'ensembles d'objets, mais il en existe un autre lié, quant à lui, à l'ordre présent dans les nombres entiers.

*Exemple : Au guichet de la banque, la maman le Jeanne est 4<sup>e</sup> dans la file d'attente. Une autre personne arrive. Puis le papa de Laura entre pour lui aussi faire la queue. À quelle place dans la file d'attente se trouve le papa de Laura ?*

Souvent utilisé au cycle 1 pour établir la suite des entiers, le **successeur d'un nombre** et aussi celui obtenu par **l'ajout de 1** au précédent (« deux lapins et encore un lapin, ça fait trois lapins »). Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, pour trouver le rang du papa, on peut prendre le successeur du successeur de 4, donc 6. Cette méthode qui repose sur la notion d'ordre s'avère très efficace lors du travail de l'addition à partir de la file numérique mais aussi lors d'un dénombrement par surcomptage car **ajouter un nombre, c'est aussi prendre autant de successeurs que nécessaire** et trouver le résultat dans le dernier nombre énoncé.



$$14 + 1 + 1 + 1 + 1 = 18 = 14 + 4$$

Plus tard, cette procédure « par bonds » pourra être optimisée pour ajouter des nombres de plus en plus grands dans le cadre d'un calcul réfléchi. L'élève pourra ainsi passer de comptage de 1 en 1 à des choix plus judicieux comme par exemple en faisant des bonds par dizaines ou par centaines.

## L'addition : un tremplin vers les autres opérations

Si on la replace dans une perspective plus large de continuité des apprentissages, l'addition n'est pas seulement la première opération rencontrée par élèves, elle constitue aussi une base pour la suite. Nous explicitons rapidement ici deux aspects qui montrent ses **liens pédagogiques avec la soustraction et la multiplication** (ces deux opérations font aussi l'objet de paragraphes dédiés ci-après).

### Les décompositions additives et la soustraction

Dans les exemples précédents, l'addition a surtout été utilisée comme opération agissant sur deux nombres pour en produire un troisième, la somme des deux. Cet usage est évidemment important, en particulier pour la résolution de problèmes, mais il en est un autre tout aussi intéressant : les **décompositions additives**. Une décomposition additive est simplement la recherche d'une écriture d'un nombre donné comme somme de deux (ou plus) autres nombres. La décomposition canonique en unités, dizaines et centaines en est un exemple. Le travail sur les décompositions additives peut apparaître implicitement au cycle 1 mais c'est au cycle 2 qu'il devient systématique. En particulier, les élèves découvrent et mémorisent les **compléments** (à 10 ou à la dizaine).

Exemples : 10 c'est  $6 + 4$ , mais c'est aussi  $8 + 2$  ou  $2 + 8$

60 c'est  $57 + 3$ , ou  $50 + 10$ , ...

Très utiles pour le calcul mental, ces décompositions vont aider à **préparer la soustraction**. En effet, tant en ligne que posée, la soustraction requiert fréquemment la recherche d'un complément à 10. Les élèves ayant une bonne maîtrise des diverses décompositions additives des entiers sont alors plus à même d'entrer dans l'apprentissage de la soustraction.

### L'addition de plusieurs termes (identiques) et la multiplication

Tant dans des problèmes que dans des exercices d'entraînement, les élèves sont assez rapidement amenés à **additionner plusieurs termes** à la suite. Lorsque ces termes sont identiques, apparaît naturellement **la notion de double ou de multiple**. Calculer  $12 + 12$ , c'est aussi approcher l'idée du double de 12 ; calculer  $12 + 12 + 12$  son triple, etc. Comme nous le verrons en détails plus loin, l'addition et la multiplication sont très liées. La répétition d'une addition de termes identiques constitue en effet l'une des portes d'entrée dans les situations multiplicatives.

## La soustraction et ses divers visages

Deuxième opération que les élèves rencontrent dans leur scolarité, la soustraction contient une subtilité mathématique intrinsèque qu'il est toujours bon d'avoir à l'esprit. Contrairement à l'addition, la soustraction impose un certain ordre dans l'organisation du calcul (on dit que la soustraction n'est pas commutative). Ainsi, si dans un problème, on doit soustraire 45 à 225, on ne peut effectuer que le calcul  $225 - 45$  et non  $45 - 225$  qui n'a pas de sens à l'école primaire (ce calcul n'aura un sens qu'au collège). « On soustrait toujours le plus petit nombre du plus grand ». Formulée ainsi, cette nouvelle règle est assez vite comprise par les élèves qui en font une forme de théorème-élève. Bien que correcte mathématiquement, cette expression entraîne des difficultés en particulier lors du calcul posé (par exemple :  $123 - 19$ , au rang des unités, l'impossibilité du calcul  $3 - 9$  incitent certains élèves à simplement « retourner » l'expression et calculer  $9 - 3$ ). Ainsi, loin d'écartier les cas d'impossibilité qui font partie intégrante de cette nouvelle opération, il est généralement profitable de les accepter et de les reconnaître en tant que tels dès le départ. Lorsqu'on cherche à faire une soustraction, soit c'est possible (le premier nombre est plus grand que le second), soit c'est impossible. Ces enjeux techniques précisés, venons-en au(x) sens.

à l'école, on trouve deux constructions de la soustraction, l'une comme **opération inverse de l'addition**, l'autre comme recherche du nombre d'éléments relativement à un ensemble plus grand (**cardinal du complémentaire**).

*Exemple : Dans notre classe de 26 élèves, il y a 12 garçons. Combien y a-t-il de filles ?*

12 + le nombre cherché = 26  nombre cherché = 26 - 12

On sait que pour trouver le nombre total d'élèves, on avait ajouté le nombre de garçon à celui des filles, donc il faudra faire une soustraction (opération inverse de l'addition). Ce sens de la soustraction est aussi celui qui est utilisé pour l'une des techniques de calcul posé.

Toujours pour l'exemple ci-dessus, le passage par une schématisation permet de voir l'autre construction (par complément).



Ici, l'opération est bien toujours  $26 - 12$ , mais elle est pensée comme la recherche du complément à 26 de 12. On trouve le nombre inconnu en avançant sur la file numérique : c'est l'addition à trous. Remarquons que ce travail sur les compléments est le même que celui qui sert à construire les compléments à 10, à la dizaine supérieure, puis à 100, etc. et qui est indispensable pour les algorithmes de calculs posés.

### Soustraire encore et encore : un pas vers la division

De la même manière que l'addition constitue un préalable important pour la multiplication, par sa répétition, la soustraction est l'une des approches possibles de la division. Comme la technique posée de la division relève du cycle 3, nous ne nous attarderons pas ici sur sa construction à partir des soustractions itérées. Remarquons juste que, par exemple, on peut soustraire 9 fois de suite 3 à 28 (il reste 1), ce qui permet de dire que  $28 = 3 \times 9 + 1$  (écriture de la division euclidienne de 28 par 3).

## La multiplication : deux constructions

Présente dès les petites classes, la première manière de concevoir la multiplication apparaît lorsqu'on dénombre **plusieurs ensembles contenant le même nombre d'objets identiques**. Par exemple, si quatre feuilles d'une plante hébergent chacune trois fourmis, on peut se demander combien il y a de fourmis en tout.



Dans cette situation, on a plusieurs ensembles (les feuilles) contenant chacun le même nombre d'objets (les fourmis). Pour déterminer le nombre total de fourmis, on peut commencer par additionner successivement les fourmis de chaque feuille.

$$3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

**L'addition itérée** d'un même terme donne ainsi une première entrée dans la multiplication par **l'introduction d'une nouvelle notation** qui va formaliser un raccourci de pensée. L'addition «  $3 + 3 + 3 + 3$  » est alors vue comme « quatre fois trois », c'est-à-dire la **multiplication de 3 par 4, noté «  $4 \times 3$  »**. Très proche de l'aspect concret des

situations problèmes qui nécessitent cette opération, cette construction par l'addition itérée crée une asymétrie entre les deux nombres utilisés. On peut rappeler ici l'ancienne terminologie présente dans les traités d'arithmétiques ou certains documents pédagogiques qui **distingue le multiplicateur** (le « nombre de fois ») du **multiplicande** (étymologiquement « ce qui est multiplié ») dans une multiplication. Dans l'exemple avec les fourmis, le multiplicande est le nombre de fourmis (3) et le multiplicateur celui de feuilles (4). Très souvent, le sens du problème impose cette distinction utile pour l'enseignant mais qui doit évidemment rester transparente pour les élèves. Généralement, le calcul perd tout son sens si on inverse le rôle du multiplicateur et celui du multiplicande. Quel sens aurait 3 comme multiplicateur, « trois fois quoi ? ». Dans les premiers problèmes de multiplication, cette situation est en fait très fréquente : 12 gâteaux par boîtes, 20 billes par paquets, 6 assiettes par tables, etc. À chaque fois, le contenant joue naturellement le rôle du multiplicateur et le contenu celui de multiplicande. Ce **travail sur le sens** est très intéressant pour la **construction d'une image mentale de la multiplication** et des situations ordinaires qu'elle permet d'aborder. Néanmoins, il masque dans un peu une propriété essentielle de cette opération : la commutativité.

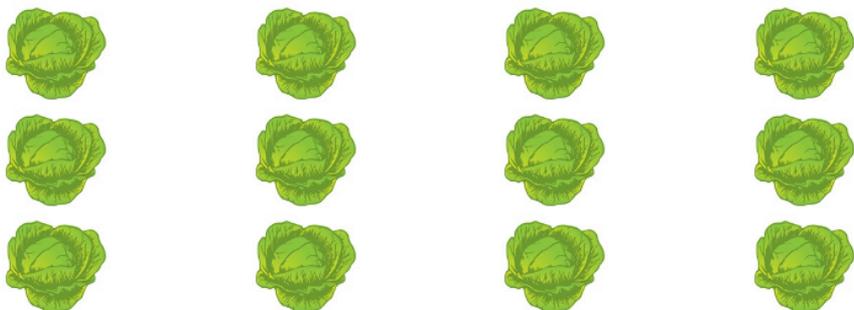
Comme l'addition, **la multiplication est commutative**, c'est-à-dire qu'on peut prendre le calcul indifféremment dans un sens ou dans l'autre (par exemple  $5 \times 6 = 6 \times 5$ ). **Une deuxième approche de la multiplication, par des configurations rectangulaires** , permet de donner corps à la commutativité.

### **Didactique**

Chez les enseignants interrogés ou observés par Clivaz, la représentation de la multiplication comme addition itérée est prédominante, voire unique. Cette constatation avait déjà été faite au Canada (Davis & Simmt, 2006, p. 299) ou au Brésil (Amato, 2004, 2005). Chez plusieurs d'entre eux, cela engendre des difficultés d'enseignement, car cette représentation ne correspond pas aux tâches proposées aux élèves, ou aux explications fournies par l'enseignant. Il y a là une connaissance mathématique spécifique à l'enseignement (...).

Stéphane Clivaz et Michel Deruaz (2013) Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N*, n°92, pp 15-23, IREM de Grenoble.

Dans l'exemple ci-dessous, on considère un champ de choux plantés de manière régulière. On cherche à connaître le nombre total de choux.



Contrairement à la situation des fourmis, cette plantation de choux ne repose pas sur la construction de la multiplication comme « nombre de paquets de ». Les lignes et les colonnes sont indistinctes car elles ne relèvent que d'un choix arbitraire d'orientation de la figure. On peut d'ailleurs, à ce stade, mettre en évidence cette convention en mettant côte-à-côte deux dispositions, l'une plutôt horizontale comme ci-dessus et une autre plus verticale. Dans tous les cas, le calcul  $3 \times 4$  paraît aussi légitime que  $4 \times 3$ . **La configuration rectangulaire modélise de très nombreuses situations multiplicatives** comme les carreaux de chocolats, les cases d'un damier, les dalles d'un carrelage, l'aire d'un rectangle, etc. Notons que cette représentation de produit par un rectangle est aussi une

manière de visualiser et de justifier l'algorithme de la multiplication posée.

### Les décompositions multiplicatives et la division

À l'image de ce qui se passe avec l'addition, la multiplication permet un nouveau type de décomposition des nombres. **Une décomposition multiplicative est la réécriture d'un nombre donné sous la forme du produit de deux nombres ou plus.** Ce nouveau regard sur les nombres permet d'en percevoir des propriétés et éventuellement de les étudier. La théorie des nombres est présente dès l'Antiquité avec des mathématiciens comme Euclide et Théon de Smyrne qui ont cherché à comprendre les nombres en distinguant les nombres carrés (produits de deux termes identiques) des nombres rectangles (produits de deux termes distincts), les nombres premiers, etc. Dans le contexte scolaire, les décompositions multiplicatives permettent d'identifier des multiples simples comme des doubles, des triples mais aussi de répondre à des situations plus complexes liées à des problèmes (par exemple,  $100 \text{ €} = 5 \times 20 \text{ €} = 5 \text{ billets de } 20 \text{ €}$ ) ou à mener des raisonnements sur la numération (par exemple,  $14\ 500 = 145 \times 100 = 145 \text{ centaines}$ ).

Avec un contexte adapté, les élèves de cycle 2 rencontrent **la division euclidienne** bien avant de voir la technique posée qui relève du cycle 3.

*Exemple : L'école a acheté un paquet de 50 stylos bleus. Pour l'activité l'enseignant souhaite placer 6 stylos par atelier. Combien d'ateliers pourra-t-il installer ?*

$50 = 6 \times 8 + 2$ , il pourra donc installer 8 ateliers et il restera 2 stylos.

Sur le plan de la terminologie, on a  $50 = 6 \times$  le **quotient** + le **reste**, où 6 est le **diviseur** et 50 le **dividende** (étymologiquement, « celui qui est divisé »). Ces mots ne sont pas utiles pour les élèves qui peuvent s'appuyer plus facilement sur le sens au travers d'expression comme « ce qu'il reste », « ce qui est divisé », « est divisé en ... parts » ou encore « il y a combien de fois ... dans ... », ce dernier n'étant rien d'autre que l'étymologie du mot quotient (du latin *quotiens*, « combien de fois »).

L'intérêt de l'écriture sous la forme d'une division euclidienne réside principalement dans la mise en évidence du reste qui sera géré de manière différente selon la consigne. Dans l'exemple ci-dessus, une variation de consigne change radicalement la valeur recherchée et son sens.

« *Combien d'ateliers pourra-t-il installer ?* » : Recherche du quotient, pas d'utilisation du reste.

« *Sachant qu'il y a 8 ateliers, combien de stylos restera-t-il ?* » : Recherche exacte du reste.

« *Combien manque-t-il de stylos pour installer le dernier atelier ?* » : Recherche du complément au diviseur du reste.

Si elle est faite sans le support de la calculatrice, la recherche d'une **décomposition multiplicative nécessite une bonne connaissance de nombreux faits numériques liés à la multiplication** (tables de multiplications, multiples courants de 2, 3, 5, 25, 50, etc.) et à notre système de numération (nombre de dizaines, de centaines, etc.).

### **La division : la construction du sens avant tout**

Sur tout le cycle 2, **la division** est uniquement vue **en contexte**. La dimension opératoire avec toutes les connaissances et techniques qui y sont associées relève du cycle 3. Ainsi, **du CP au CE2**, les élèves ne rencontreront que des **situations de partage ou de groupements** que nous traitons donc dans notre chapitre dédié aux différentes formes de problèmes.

## Remarques sur les apports spécifiques du CP

### Les signes + et -

De manière concomitante avec l'entrée dans la lecture et l'écriture des nombres grâce à l'apprentissage du système de numération, la découverte des premiers signes pour les opérations est l'un des enjeux du CP. Dans ce niveau, les élèves sont amenés à utiliser les signes + et - (les signes  $\times$  et  $:$  ne seront à maîtriser qu'en CE1 et CE2). À ces deux symboles opératoires, il convient d'ajouter le signe = dont l'utilisation correcte peut nécessiter quelques précisions. En effet, tant du côté de l'enseignant que pour les élèves, le signe « égal » se place uniquement entre des quantités qui sont réellement égales au sens mathématique. Les élèves ont parfois tendance à utiliser ce symbole comme le marqueur du déroulement de leur raisonnement.

*Exemple : Lors de son goûter d'anniversaire, Léa a mangé 3 bonbons, puis encore 4 et encore 5. Combien en a-t-elle mangé en tout ?*

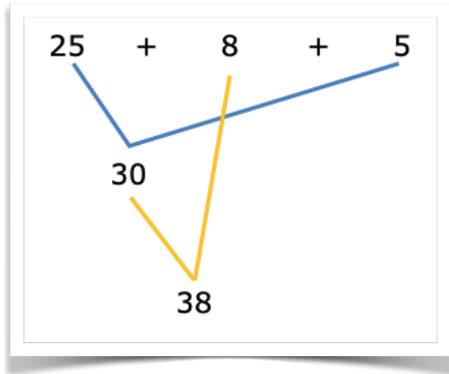
(Élève)  $3 + 4 = 7 + 5 = 12$ , écriture incorrecte car «  $3 + 4$  » n'est pas égal à «  $12$  »

(Enseignant)  $3 + 4 = 7$       ou       $3 + 4 + 7 = 12$

$$7 + 5 = 12$$

Il s'agit là d'une erreur « productive » qu'il convient de corriger avec bienveillance en réécrivant, côté professeur, toujours des expressions correctes qui inciteront les élèves à plus de rigueur les fois suivantes. Ceci n'est pas sans lien avec une résolution à l'aide d'un arbre.

*Exemple : Dylan a joué aux fléchettes à la kermesse. Il a mis une fléchette dans le 25, une dans le 8 et la dernière dans le 5. Combien a-t-il marqué de points.*



En dehors de ce qui vient d'être évoqué ci-dessus, l'utilisation du signe + ne pose pas de réelles difficultés car l'opération est commutative et toujours définie. On peut écrire  $4 + 5$ , ou  $5 + 4$ , ou même prendre des données dans le désordre s'il y a plus de deux termes  $3 + 4 + 5 = 5 + 4 + 3 = 3 + 5 + 4$ , etc.

La situation du signe - est évidemment bien différente car l'opération n'est définie que si le deuxième terme est plus petit que le premier. Des confusions peuvent apparaître chez certains élèves qui peuvent écrire indifféremment  $5 - 2$  et  $2 - 5$ . L'oralisation est alors un point de vigilance car certaines formulations peuvent accentuer cette difficulté qu'il est malheureusement presque impossible d'éviter.

« On cherche la différence entre 2 et 5 » : le mot différence n'induit aucun ordre dans la langue courant et on pourrait tout aussi bien dire « on cherche la différence entre 5 et 2 ».

« On soustrait 2 à 5 », « on enlève 2 à 5 » : dans les deux cas, l'ordre des nombres énoncés est inversé par rapport à celui d'une écriture correcte «  $5 - 2$  ».

« 5 moins 2 » : il s'agit là d'une énonciation purement formelle, donc correcte, mais qui ne donne aucun appui pour la signification de l'opération. Selon le contexte, ce sens peut être retrouvé en usant par exemple d'une périphrase « j'ai 5, je retire 2 ».

L'utilisation du signe - dans un problème faisant intervenir le retrait de plus d'une donnée pose aussi une difficulté d'écriture. S'il n'est pas faux d'écrire  $20 - 4 - 6$  pour signifier qu'on effectue ces deux opérations dans cet ordre, la présence de «  $4 - 6$  » prête à confusion. Là encore, pour

l'enseignant, mieux vaut séparer les calculs et donc les étapes du raisonnement.

Comme pour l'utilisation du signe =, les premiers temps d'apprentissage pourront nécessiter la répétition fréquente des règles de la « syntaxe mathématique ».

### Les situations multiplicatives

La maîtrise du signe  $\times$  ne relève pas du CP. Néanmoins, les élèves rencontrent des situations multiplicatives, construites en particulier à partir d'additions itérées. Or, le formalisme pour cette opération n'est travaillé plus spécifiquement qu'au CE1 donc, sauf à anticiper lorsque le contexte de classe s'y prête, on conserve au CP de préférence une formulation en toutes lettres du type « 5 + 5 + 5 + 5, c'est aussi 4 fois 5 » qui contribue à asseoir le sens de la multiplication.

### Le calcul en ligne

Avec le système de numération et les symboles opératoires, un nouveau mode de raisonnement s'offre aux élèves : le calcul en ligne.

Exemple :  $27 + 5 + 3 = 27 + 3 + 5 = 30 + 5 = 35$

D'apparence anodine, le calcul en ligne est un outil très puissant pour le calcul réfléchi ou pour des calculs

complexes. Dans de très nombreux cas en CP mais aussi sur tout le cycle 2 voire le cycle 3, un calcul en ligne peut s'avérer au moins aussi performant qu'un calcul posé. C'est particulièrement vrai pour les deux opérations commutatives que sont l'addition et la multiplication (à partir du CE1). Les stratégies pour mener à bien le calcul sont variées (réorganisations, décompositions des nombres, ...) et constituent des aides précieuses lors de la résolution de problèmes.

## Calcul mental, le mal nommé : des faits numériques aux stratégies opératoires sur les nombres

Souvent bien plus essentiel dans la vie quotidienne que d'autres compétences mathématiques, le calcul mental a aussi une place particulière dans l'enseignement. On peut **définir le calcul mental** comme une **modalité de calcul sans recours à l'écrit** si ce n'est, éventuellement, pour l'énoncé proposé par l'enseignant et la réponse fournie par l'élève. Il n'est pas exclu que la correction, elle, soit écrite pour être discutée de façon collective. Comme cela est parfois souligné dans les préambules des instructions officielles, l'expression « calcul mental » ne rend pas pleinement compte de toute la richesse de cette pratique. En effet, il ne s'agit pas tant de « calculer » (dans le sens strict de la réalisation d'une opération) que de **construire des stratégies adaptées aux nombres et aux opérations**. Soulignée par les recherches en didactique , l'élaboration de telles stratégies repose, en grande partie, sur la maîtrise d'acquis antérieurs qu'on nomme généralement « **faits numériques** » ainsi que sur une bonne compréhension de notre **système de numération** et des **propriétés des opérations**. Plus largement, le calcul mental est une activité qui permet le **développement des six compétences** fondamentales en mathématiques (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer).



## Didactique

Ces activités systématiques de calcul mental permettent aux élèves d'acquérir une plus grande maîtrise et d'explorer un domaine de faits numériques plus vastes. Les techniques élémentaires de calcul ainsi automatisées peuvent jouer le rôle de modules de calcul pouvant être mobilisés pour construire des procédures plus complexes.

Denis Butlen et Monique Pézard, Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique, revue *Grand N*, n° 79, Grenoble, 2007.

Un **fait numérique** (parfois appelé fait arithmétique ) est un résultat mathématique simple (tables d'addition ou de multiplication par exemple) que l'élève mémorise tel quel afin de ne plus avoir à le reconstruire. Cette nouvelle connaissance automatisée devient alors un outil pour la réflexion sur des situations plus complexes.

La mobilisation de faits numériques fait appel à la mémoire mais il est important de souligner que **c'est à l'enseignant d'organiser les conditions d'une bonne mémorisation** (ce travail ne saurait incomber aux familles). La construction d'un enseignement de la mémorisation est ainsi nécessaire en remarquant que pour de nombreux élèves, la répétition orale et/ou écrite ne suffit pas. Pour qu'un fait numérique soit mémorisé, il faut qu'il ait été construit, que l'élève ait compris l'intérêt de la mémorisation (ne pas avoir à retrouver sans cesse le chemin d'accès vers un résultat stable qui ne changera

jamais), que la mémoire ne soit pas surchargée (apprendre un peu mais régulièrement), et enfin qu'il y ait des réactivations régulières (condition nécessaire pour la mémoire à long terme).



### **Didactique**

Les faits arithmétiques renvoient aux opérations (additions, soustractions, multiplications) dont le résultat ne requiert pas le recours à des calculs : l'accès aux résultats est vécu intuitivement comme s'effectuant par remémoration directe. [...] Il n'existe toutefois pas de consensus pour décider quels sont les problèmes susceptibles d'être considérés comme des faits arithmétiques qui sont directement récupérés en mémoire et ne nécessitent pas de calcul. [...] L'existence de faits arithmétiques est attestée pour les additions et les multiplications, moins sûrement pour les soustractions, et surtout les divisions.

CNESCO, Rapport Conférence de consensus. Nombre et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire, 2015.

Le calcul mental est donc un domaine dans lequel vont coexister des tâches simples (mémorisation, application directe d'une propriété) et des tâches complexes (décomposition des nombres, création de plusieurs étapes dans un raisonnement). Le triptyque constitué des faits numériques, de la numération, et des opérations n'est évidemment pas spécifique du cycle 2. Il s'agit d'une dynamique générale qui commence dès le cycle 1 (connaissance des premiers nombres, cardinal d'une

réunion, ajout/retrait de petites quantités) et qui s'étend jusqu'aux cycles 3 et 4.

Avant d'entrer dans le détail de ce qui peut être travaillé au CP/CE1/CE2 et comment cela s'intègre aux séquences proposées dans cet ouvrage, analysons un exemple afin de mieux percevoir **les différentes stratégies** et les enjeux de connaissances pour un calcul d'apparence simple :  $15 + 16$

### Stratégie n°1

L'élève observe d'abord que :

$15 = 1$  dizaine et 5 unités

$16 = 1$  dizaine et 6 unités

Cette première constatation repose sur la maîtrise du **système de numération**.

Ensuite, il s'agit de traiter l'ajout des unités 5 et 6.

Ceci peut se faire soit de manière automatisée, c'est-à-dire par la connaissance directe de **faits numériques** :  $5+6=11$  ou  $5+6=5+5+1=11$  (et donc l'utilisation de la décomposition de 6 en 5+1 et la somme automatisée de 5 et 5). Il y a déjà ici un choix de stratégie qui dépend des connaissances de l'élève et de la nature des nombres.

La dernière étape consiste à regrouper les différents sous-calculs ce qui, comme les décompositions précédentes, présuppose une bonne **compréhension de l'opération** ; l'addition étant associative, on peut décomposer le calcul en autant de sous-additions que l'on veut.

$$\begin{aligned}15 + 16 &= 1 \text{ dizaine} + 1 \text{ dizaine} + 5 + 6 = 1 \text{ dizaine} + 1 \text{ dizaine} + 11 \\ &= 1 \text{ dizaine} + 1 \text{ dizaine} + 1 \text{ dizaine} + 1 \text{ unité} \\ &= 31\end{aligned}$$

L'écriture du résultat final fait intervenir, une fois encore, la maîtrise du **système de numération**.

### Stratégie n°2

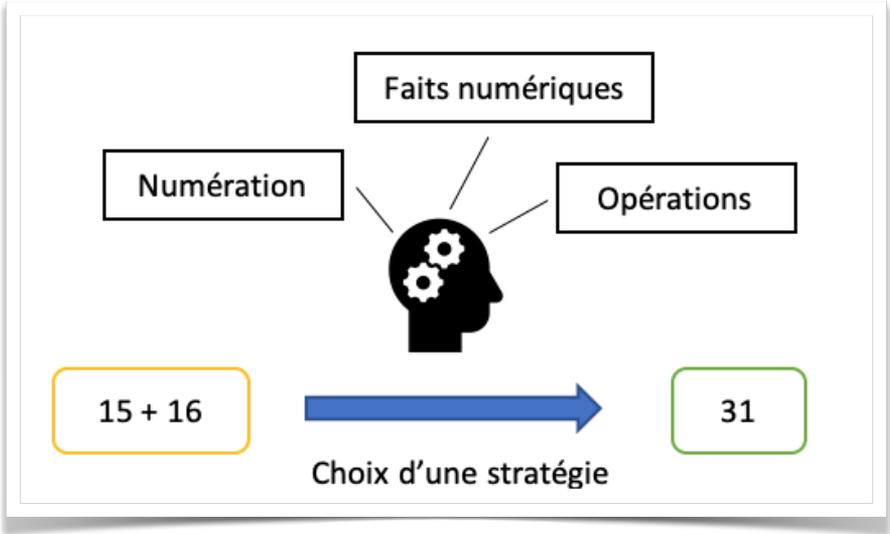
Selon les compétences et connaissances de l'élève, de nombreuses autres approches sont presque toujours possibles pour un calcul donné.

En voici une toujours pour  $15 + 16$ .

La première étape, l'élève remarque que  $16 = 15 + 1$  (connaissance du **système de numération**).

Ceci ramène le calcul de  $15 + 16$  à celui de  $15 + 15 + 1$ . (**propriétés de l'addition**).

La connaissance du **fait numérique**  $15 + 15 = 30$  permet d'obtenir rapidement le résultat  $15 + 15 + 1 = 30 + 1 = 31$  (écrit correctement grâce au **système de numération**).



Les stratégies n°1 et n°2 ont des points communs mais elles diffèrent aussi par certains aspects. Pour l'enseignant, il s'agit de souligner cette richesse et de la faire découvrir aux élèves (en particulier en valorisant les différentes approches dans la classe).

Comme on peut le voir dans ce qui précède, le calcul mental est un ensemble constitué des connaissances « brutes » (numération, faits numériques, opérations) et de stratégies (ou procédures). **Enseigner le calcul mental c'est enseigner les faits numériques et les procédures.** En contexte, aucune procédure ne s'impose *a priori* car, le plus souvent, plusieurs sont possibles. Le travail en classe doit être axé sur l'**explicitation** et la confrontation **des procédures** possibles et efficaces. L'objectif est alors de choisir parmi les différentes stratégies de calcul proposées celle qui est la plus appropriée à une configuration numérique donnée. Au-delà du résultat, c'est bien la procédure qui fait l'objet d'une institutionnalisation et dont on travaille la mémorisation (par exemple « Pour multiplier un nombre par 5, je le multiplie par 10 et je divise le résultat par 2 »)

## Structuration des apprentissages en classe

Comme nous venons de la voir, la mise en place d'un temps de calcul mental dépend fortement des acquis antérieurs des élèves. Il est, de ce fait, difficile de proposer une progression générique qui s'adapterait à toutes les classes. Dans ce qui suit, nous allons néanmoins donner quelques idées fortes qui permettent de structurer un enseignement autour du calcul mental. Il est alors assez facile de trouver dans des ressources publiées en ligne des exemples détaillés de progressions qui peuvent constituer de bonnes sources d'inspiration.

Trois types de séances : longues, courtes, de « rebrassage »

Comme toute pratique mathématique, le calcul mental est une activité qui doit s'inscrire dans la durée. Les temps de calcul mental sont ainsi fréquents mais pas nécessairement de même nature **en fonction de l'objectif d'apprentissage visé**. Lorsqu'il s'agit pour les élèves de découvrir et d'acquérir de nouveaux faits numériques, la séance sera plus longue que lorsqu'il s'agit de réinvestir et d'automatiser ces connaissances. Tant pour les faits numériques, que pour la maîtrise du système de numération ou que celle des propriétés des opérations, on peut donc distinguer d'ores et déjà deux types de séances. **Des séances longues**, d'une part, qui permettent de

travailler quelque chose de nouveau, et **des séances courtes**, d'autre part, qui permettent un réinvestissement rapide. Au fil de l'année, les élèves se constitueront ainsi un catalogue mathématique riche qu'il convient de réactiver régulièrement dans des temps de dits **de rebrassage**. Ces moments, de durée variable, peuvent prendre différentes formes. En particulier, on n'hésitera pas à utiliser des jeux (comme le furet par exemple).

Pour un objectif d'apprentissage précis, les trois types de séances peuvent être organisés ainsi :

### **Une séance longue**

C'est dans cette séance que les nouvelles connaissances sont mises en place. Pour cela, il faut laisser suffisamment de temps aux élèves et donc prévoir une séance de **30 à 45 minutes**. Même si cela peut varier beaucoup d'une classe à l'autre, un rythme moyen **d'une séance longue par semaine** est généralement pertinent. On peut y distinguer plusieurs phases. Après la **Mise en situation** dans laquelle on pose le problème, la **Phase de recherche** permet aux élèves de développer et de mettre en œuvre leurs procédures personnelles. À l'issue de ce temps individuel, l'enseignant organise **l'Explicitation et la confrontation des stratégies** utilisées (complétées ou non par des propositions faites par l'enseignant). **Une phase**

**d'institutionnalisation (ou synthèse)**  permet alors de valider les procédures les plus efficaces (conformément à l'objectif d'apprentissage visé). La trace écrite est réalisée à cette étape. Enfin, **une phase d'appropriation** permet de mettre en œuvre la nouvelle connaissance ou méthode.

### **Didactique**

Une pratique régulière de calcul mental doit ainsi avoir pour objectif d'amener l'élève non seulement à mettre en œuvre des procédures économiques mais aussi à en percevoir le domaine d'efficacité. L'institutionnalisation [...] porte à la fois sur l'économie de la procédure et sur son domaine de validité.

Denis Butlen et Monique Pézard, Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique, revue *Grand N*, n° 79, Grenoble, 2007.

Sur la construction et la mémorisation des compléments à 10 en CP par exemple, en début d'année, on peut proposer aux élèves une première situation simple : « Antoine doit acheter un livre qui coûte 10 euros, il dispose de 7 euros, combien lui manque-t-il ? » Après l'étude d'un cas comme dans l'exemple précédent, on peut élargir à la recherche de toutes les situations de compléments à 10 : « On cherche toutes les façons possibles de remplir des pots de 10 crayons avec des crayons bleus et des verts. »

## Des séances courtes

Les séances courtes s'inscrivent dans la continuité de la phase d'appropriation qui clôt la séance longue. Il s'agit dans des temps **quotidiens** de **10 à 15 minutes** d'automatiser ce qui a été appris en séance longue. Même si la durée est courte, on peut là aussi distinguer plusieurs phases. Tout d'abord une **phase de mise en route** qui permet aux élèves de remobiliser le domaine mathématique concerné. On y fera par exemple quelques calculs simples ce qui donne l'occasion de réactiver les procédures déjà travaillées (reformulation, explicitation, exemples). Enfin, **une phase d'entraînement** sur des exercices variés permet d'ancrer les connaissances . Cette dernière phase est souvent l'occasion de la mise en place d'une différenciation *via* un choix judicieux de nombres à manipuler.

Exemples : Activités flash oralement ou avec un diaporama support (« Combien j'ajoute à 8 pour faire 10 ? », «  $6 + \dots = 10$  », «  $10 - 3 = ?$  »)



## Didactique

### **Le paradoxe de l'automatisme**

Les recherches sur le calcul mental montrent [...] que la connaissance et la maîtrise d'un nombre insuffisant de procédures automatisées peuvent donc conduire l'élève à adopter en calcul un comportement automatisé (NDLR : c'est-à-dire en mobilisant une seule procédure perçue comme sûre par l'élève). [...]

Une première tentative pour dépasser ce paradoxe consiste donc en la mise en place progressive de procédures élémentaires automatisées de calcul. Il s'agit d'accroître les performances des élèves en enrichissant leurs connaissances numériques, en installant de nouveaux faits numériques avec une pratique régulière du calcul mental.

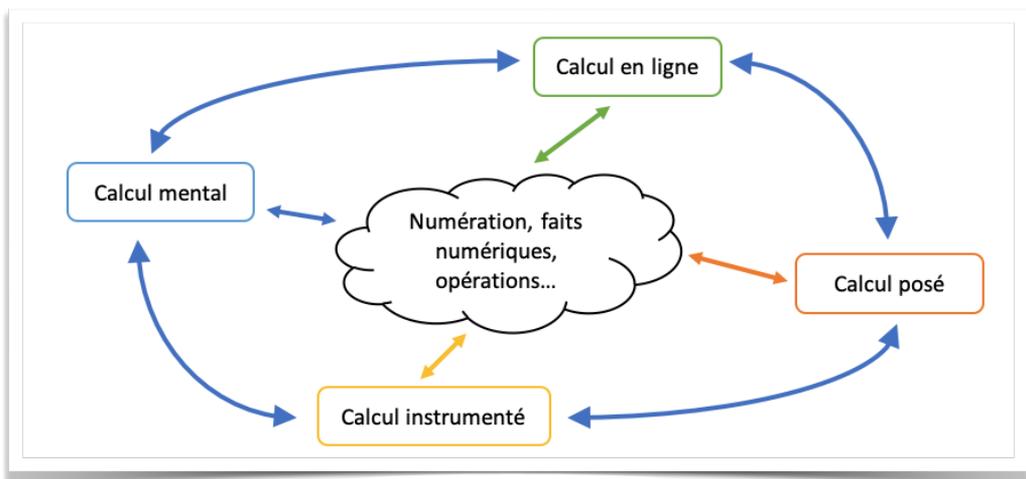
Denis Butlen et Monique Pézard, Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique, revue *Grand N*, n° 79, Grenoble, 2007.

## Des séances de rebrassage

Suivant la quantité de notions à réactiver ou à mettre en lien les unes avec les autres (tissage des connaissances), la **durée est variable**. Ces séances apparaissent **tout au long de l'année de façon filée**. Dans la pratique, après **une phase de rappel** en s'appuyant sur les traces écrites, une **phase de réinvestissement** dans des situations problèmes simples, des jeux, etc. permet de faire fonctionner un ensemble de plusieurs connaissances et d'en voir ainsi la pertinence. Les temps de rebrassage ne sont pas forcément des séances dédiées ; ils peuvent apparaître lors de la résolution de certains problèmes. Dans ce cas, l'ajout d'une nouvelle contrainte (un temps limité avec un chronomètre) permet de favoriser un calcul mental rapide et efficace. Les élèves les plus rapides seront amenés à chaque fois à expliciter leur procédure (faits mémorisés ou appui sur un affichage...).

## Le calcul en ligne et sa place dans les apprentissages

Parmi les différents types de calculs abordés à l'école (mental, en ligne, posé, instrumenté), **le calcul en ligne** a une place particulière. Se situant à la jonction entre le calcul mental et le calcul écrit, il n'en demeure pas moins **une forme à part entière de réflexion mathématique**. Comme le souligne parfois les documents d'accompagnement, le calcul en ligne peut être écrit ou partiellement écrit. Il constitue alors un lieu privilégié pour réinvestir des connaissances des nombres et des opérations vues en calcul mental, mais aussi pour découvrir de nouvelles stratégies et des nouveaux faits numériques. Ces nouveaux savoirs pourront ensuite être repris dans les différentes autres formes de calcul, mental y compris.

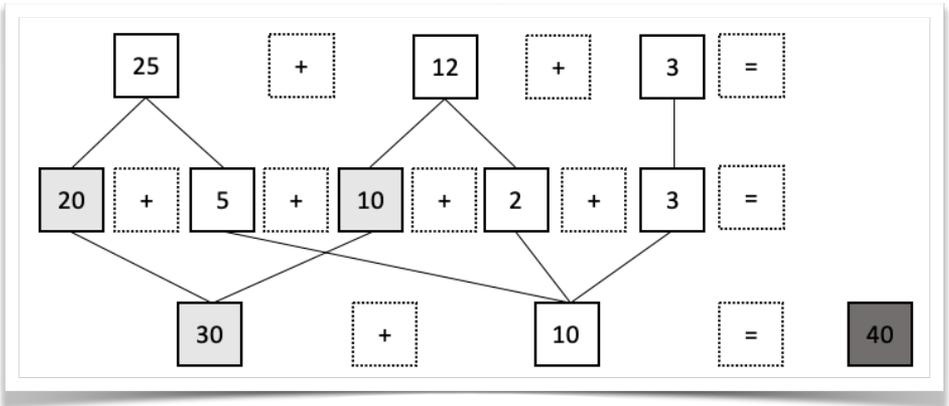


Toutes les formes de calcul se nourrissent les unes les autres et contribuent à l'acquisition de connaissances et savoirs-faire mathématiques.

Contrairement au calcul posé dans lequel l'algorithme est imposé, les étapes d'un calcul en ligne laissent **une grande liberté à l'élève**. Selon ses connaissances antérieures et son habileté à manipuler nombres et opérations, plusieurs stratégies sont généralement possibles. En plus du simple enchaînement « en ligne » de calcul, cet « écrit de travail », peut prendre la forme d'un **arbre de calcul**. Le calcul en arbre consiste à décomposer ou regrouper des nombres dans le but de simplifier la résolution d'un calcul. Pour cela, on construit des arbres de calcul qui subdivisent **l'opération en plusieurs étapes** et permettent de **bien les identifier**.

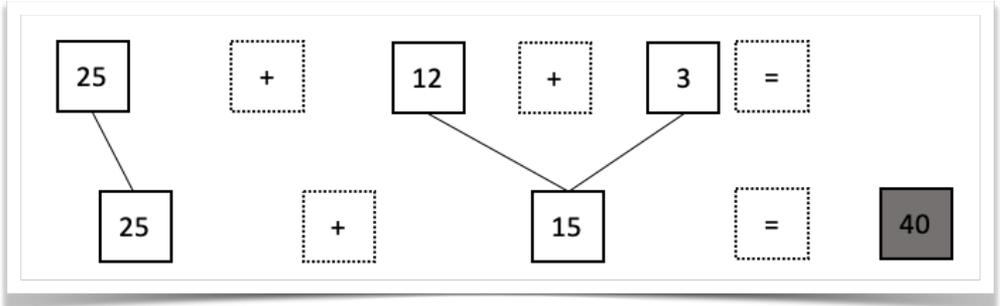
Exemple d'arbres pour le calcul de  $25 + 12 + 3$

Stratégie 1 : en décomposant complètement dizaines et unités



Remarque : Selon la complexité du calcul (nombre d'étapes), dans une pratique de classe, il est parfois utile de réécrire tous les nombres même s'ils n'ont pas subits de modification comme le nombre 3 dans l'exemple ci-dessus. Ceci permet de ne pas les « oublier » mais aussi rend l'arbre plus lisible (en évitant des liaisons spatialement trop lointaines).

Stratégie 2 : en utilisant la connaissance de faits numériques sur l'addition de multiples de 5



### Un objet d'apprentissage comme les autres

Au cours du cycle 2, les arbres de calcul vont, en particulier, permettre de travailler les décompositions des nombres en unités, dizaines en CP, en centaines au CE1, puis en milliers au CE2, et de regrouper les nombres qui sont faciles à additionner (petits nombres, multiples de 5, compléments à 10, 100, 1000, etc.)

Comme tout apprentissage mathématique, les activités de calcul en ligne, surtout lorsqu'elles ont abouti à la découverte de nouveaux savoirs ou procédures, doivent faire l'objet d'une **institutionnalisation avec la production d'une trace écrite**. Ceci facilite l'appropriation et permet de **rendre les procédures disponibles pour l'élève**. Un entraînement et un réinvestissement réguliers contribuera enfin à la stabilisation de ces connaissances.

## La technique pour l'addition

Comme c'est le cas aussi pour les trois autres opérations, le principal pilier de l'algorithme de l'addition posée est notre système de numération. À partir du sens de l'addition, il s'agit dès lors de travailler directement sur les écritures des nombres pour obtenir le résultat cherché. Exprimées ainsi, on comprend aisément les difficultés que peuvent rencontrer des élèves, qui entrent tout juste dans l'écrit, pour maîtriser un tel outil. Le travail central reste donc celui du sens et de la connaissance des règles de notre système de numération. Le calcul en ligne, généralement très efficace rappelons-le, est une étape incontournable pour faire ces liens. Pour établir une progression, il convient alors de bien comprendre ce qui est en jeu dans les différents calculs.

$$\begin{aligned}7 + 2 &= \text{sept unités et deux unités} \\ &= \text{neuf unités} \\ &= 9\end{aligned}$$

Une addition, c'est mettre ensemble, donc l'oralisation de l'écriture peut insister sur cet élément.

$$\begin{aligned}7 + 3 &= \text{sept unités et trois unités} \\ &= \text{dix unités, c'est-à-dire une dizaine et zéro unité} \\ &= 10\end{aligned}$$

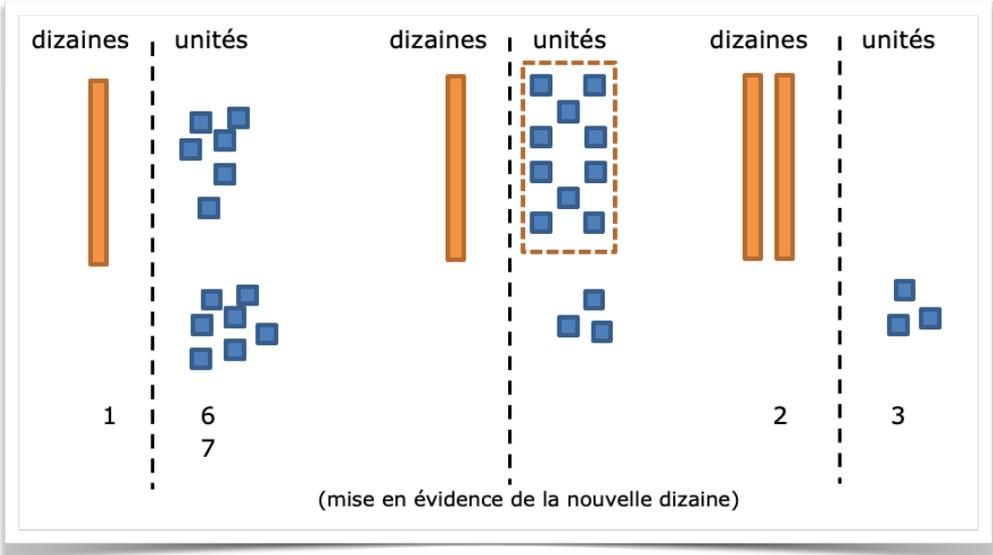
Dans ce simple calcul apparaissent les compléments à 10 et la règle d'échange qui permet d'écrire et de lire dix comme « une dizaine et zéro unité ». Ce passage à la dizaine est évidemment important car il conduira ensuite à l'écriture des retenues.

$$\begin{aligned}7 + 6 &= \text{sept unités et six unités} \\ &= \text{sept unités et sept unités et sept unités} \\ &= \text{dix unités et trois unités} \\ &= 13\end{aligned}$$

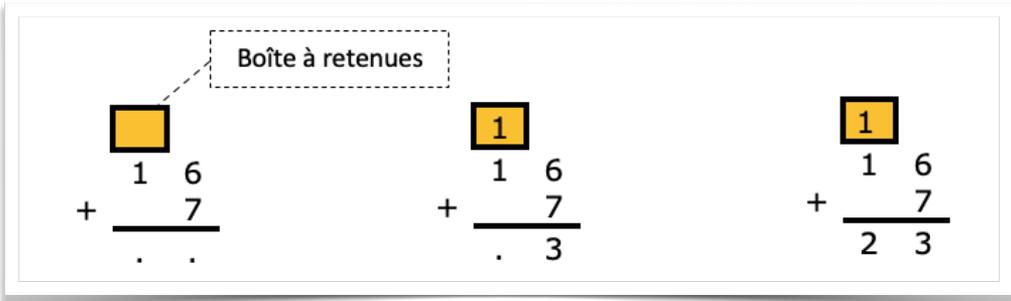
Même si les procédures peuvent varier (file numérique, schéma, tables d'additions mémorisées, ...), effectuer  $7 + 6$  repose implicitement sur une décomposition additive de 6 qui soit pertinente dans le cadre d'un complément de 7 à 10. On retrouve donc l'importance d'une bonne maîtrise, en amont, des décompositions additives.

D'abord utilisé sur cas simples, l'algorithme de **l'addition posée** est avant tout **une nouvelle organisation spatiale du calcul**. En tant que telle, elle vient en complément des outils déjà disponibles pour les élèves et ne s'y oppose ni ne s'y substitue pas. En particulier, le matériel de numération (cubes, abaques, boîtes de 10) ou sa représentation constitue un moyen pour aider les élèves à faire les liens entre la manipulation, le sens et l'écriture formelle.

Exemple :  $16 + 7$



La technique peut ensuite être optimisée en n'utilisant plus la manipulation mais directement le résultat  $6 + 7 = 13$ , à savoir 1 dizaine et 3 unités. L'écriture de la retenue pourra bénéficier dans un premier temps d'un code couleur ou d'un positionnement clairement identifié dans le calcul (boîte à retenues).



Tous les algorithmes imposent un grand soin dans la disposition et l'alignement des chiffres. L'utilisation des carreaux (un chiffre par carreau) est une possibilité pour faciliter cet apprentissage. Notons pour terminer que le choix des nombres pour les situations de mise en place de la technique posée est important car il convient d'éviter, si possible, les confusions entre les différents rangs. Ainsi, par exemple, le calcul  $15 + 6$  est peu judicieux car la somme des unités donne 11 qui ne permet pas de voir facilement la différence entre le « 1 » de la dizaine retenue et le « 1 » des unités restantes.

### **Remarques sur les apports spécifiques du CE1**

Les contenus abordés au CE1 se placent évidemment dans la continuité de ceux du CP. Au travers de divers problèmes et situations, les élèves poursuivent en particulier leur découverte des opérations. Dans le cas des situations additives, aux signes + et - et à l'algorithme de calcul de l'addition vient s'ajouter celui (ceux) de la soustraction posée dont l'apprentissage comporte plusieurs enjeux détaillés ci-après. Pour les situations multiplicatives, le CE1 voit l'introduction et l'utilisation du signe  $\times$ .

## L'introduction du signe $\times$ : économie d'écriture et un outil pour le calcul

Au départ, le signe  $\times$  est surtout vu comme une autre forme d'écriture. Au lieu d'écrire « 4 fois 5 », on écrit «  $4 \times 5$  ». Ce formalisme va permettre, par exemple, d'automatiser certains faits numériques comme les premières tables de multiplication de 3, 4 et 5. Comme tous les signes mathématiques, l'un des avantages de ce nouveau symbole est de décontextualiser l'opération (il n'est plus nécessaire de penser un « nombre de fois » un objet) et donc d'utiliser pleinement les propriétés comme la commutativité ou l'associativité.

### Exemples :

$6 \times 5 = 5 \times 6$  ; « six fois cinq, c'est la même chose que cinq fois six »

$6 \times 5 \times 2 = 6 \times 10 = 60$  ; calcul réfléchi

$24 = 6 \times 4 = 4 \times 6 = 2 \times 2 \times 6 = 4 \times 2 \times 3 \dots$  ; multiplicité des décompositions multiplicatives

Le signe permet ainsi « d'utiliser » l'opération multiplication directement dans le cadre du langage mathématique et ainsi exprimer un raisonnement et/ou un calcul.

## L'algorithme de la soustraction posée

Au travers des âges et à travers le monde, il s'avère qu'il existe de nombreux algorithmes pour la soustraction posée. De l'algorithme arabe qui part de la gauche à ceux à la russe ou de Condorcet qui s'affranchissent des retenues en ajoutant des quantités bien choisies pour maximiser les 0 ou les 9, tous visent à se doter d'un outil fiable pour mener à bien des calculs sur des nombres plus ou moins grands. La technique traditionnelle en France est dite à l'italienne ou de Fibonacci est l'une d'elles. Dans le contexte scolaire, elle coexiste souvent avec deux autres, la soustraction par emprunt et l'addition à trous (parfois appelée méthode par complément). Comme nous allons le voir, chacune de ces techniques peut être rapprochée d'une procédure de calculs de soustractions qui contribue à en éclairer le sens.

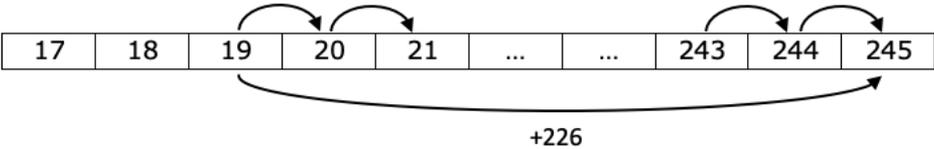
### L'addition à trous

La notion de soustraction est très proche de la **notion de complément** et il n'est donc pas étonnant de rencontrer une **procédure qui repose en fait sur l'addition**. L'addition à trous est utilisée implicitement dès lors qu'on cherche « **combien il manque ?** ». L'exemple le plus courant est le moment du rendu de la monnaie. En effet, si quelqu'un paye un objet à 11 € avec un billet de 20 €, il n'est

pas rare que le commerçant **calcule la différence en avançant** et fasse  $11 + 4 = 15$  puis  $15 + 5 = 20$ , soit 4 € en pièces et 1 billet de 5 € (9 € en tout). Comme l'addition est la première opération utilisée par les élèves, commencer par s'appuyer sur cette dernière donne une bonne entrée dans la soustraction. En particulier, dans les cas simples, l'algorithme posé pour l'addition fournit un point d'appui pour la future organisation du calcul de la soustraction posée.

*Exemple* : Le spectacle de fin d'année de l'école de danse de Juliette se déroule dans une salle qui contient 245 places. L'école de danse a offert 19 invitations gratuites. Chaque place coûte 2 €. Le jour du spectacle, la salle est pleine. Combien d'euros ont été encaissés ?

Le principe de l'addition à trous est de partir du plus petit des deux termes et de chercher à atteindre le plus grand. Dans le problème ci-dessus, pour trouver le nombre de places payantes, il convient de faire la différence entre 245 et 19.



Partant de 19, on va donc chercher « combien il manque » pour aller à 245. L'organisation sur la file numérique permet de voir que le choix des nombres dans un problème rend cette procédure plus ou moins efficace. En particulier, lorsque l'écart est grand, il faut optimiser les « bons » pour éviter un travail long avec de trop grands risques d'erreurs. Par exemple, on pourra faire  $19 + 200 = 219$ , puis  $219 + 20 = 239$  et enfin  $239 + 6 = 245$  ; la différence cherchée est  $200 + 20 + 6 = 226$ . On a pris dans ce cas les nombres dans l'ordre centaines, dizaines, unités mais d'autres calculs réfléchis intéressants seraient possibles.

**L'addition à trous posée** se déroule comme une addition dont le deuxième terme est inconnu. Dans la progression des apprentissages, il s'agit **d'une étape avant le passage à la technique de la soustraction posée**. Parfois abordée au CP, l'addition à trous posée peut être mise en œuvre s'il n'y a pas de retenue. Par exemple,  $23 + \dots = 87$  ne pose pas de difficultés car on complète facilement le 3 des unités avec 4 pour faire 7 et le 2 des dizaines avec 6 pour faire 8.

$  \begin{array}{r}  23 \\  + \quad . \quad . \\  \hline  87  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  23 \\  + \quad . \quad 4 \\  \hline  87  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  23 \\  + \quad 6 \quad 4 \\  \hline  87  \end{array}  $
--	--	--

*Il manque 64 pour aller de 23 à 87.*



d'unités, de dizaine, etc. au résultat supérieur au nombre de départ) pour aller rapidement vers la soustraction posée.

Dans toutes les situations de soustraction, **l'erreur la plus fréquente est l'inversion de l'ordre des nombres** (entre le terme connu et le résultat), en particulier lorsque la recherche du nombre manquant à un certain rang conduit à une situation « impossible » 🔍 comme ci-dessus lorsqu'il s'agit de compléter 9 pour trouver 5. Dans ce cas, certains élèves auront tendance à chercher à compléter 5 pour aller à 9 ; ce qui produit un résultat erroné.



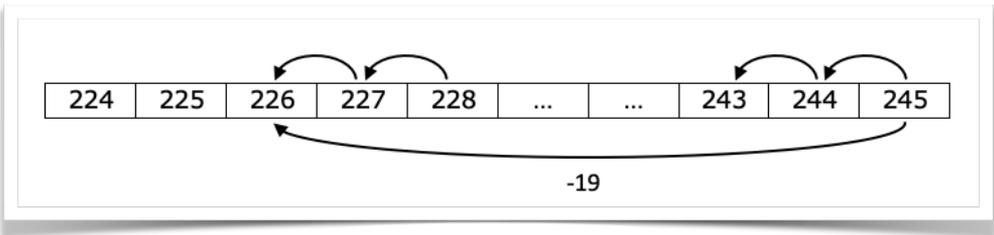
### Didactique

L'algorithme standard pour la soustraction confronte directement les élèves à des calculs du type  $a - b$  qui sont impossibles si  $a < b$ . Par facilité et parce que l'expression « différence entre a et b » est la même « différence entre b et a » dans le langage courant, les élèves se jettent dans le calcul erroné de  $b - a$  au lieu de  $a - b$ . Le chercheur Csíkos a par ailleurs montré dans une étude de 2016 que 193 est la réponse erronée la plus fréquente dans le calcul de 701 à 694.

Jean-Paul Fischer & al. (2018) Should we continue to teach standard written algorithms for the arithmetical operations? The example of subtraction, *Educational Studies in Mathematics*, Volume 101, Issue 1, pp 105-121, Springer. (Notre traduction).

## Remarques communes aux deux algorithmes de soustraction

Comme cela a été précisé un peu plus haut, la soustraction peut être vue soit comme la recherche d'un complément (en particulier via l'addition à trous), soit comme l'opération inverse de l'addition. Les algorithmes posés relèvent de cette deuxième approche au cours de laquelle il s'agit de « retirer » une certaine quantité. Contrairement à la procédure précédente, cette fois on part du plus grand nombre pour aller vers le plus petit.



Une recherche de la différence par bons plus ou moins optimisés est toujours possible. Un travail préalable de ce type avec les élèves permet de structurer l'ordre des nombres et offre une éventuelle procédure de contrôle si les algorithmes sont mal maîtrisés. L'addition à trous avance sur la file alors que la soustraction au sens strict recule et, pour un élève, il n'y a rien d'évident dans le fait que les deux méthodes soient équivalentes. L'entraînement sur des problèmes variés permet de s'en convaincre tout

comme l'appui par des traces écrites qui mettent en parallèle les deux méthodes .

### **Didactique**

(...) les procédures multiples, en particulier la procédure comprenant au moins une procédure complémentaire à l'algorithme en colonnes, semblent très efficaces. La procédure complémentaire (la file numérique par exemple) fournit aux élèves un moyen de trouver l'opération arithmétique et, ensuite, l'algorithme en colonnes fournit un moyen de réaliser correctement le calcul.

Jean-Paul Fischer & al. (2018) Should we continue to teach standard written algorithms for the arithmetical operations? The example of subtraction, *Educational Studies in Mathematics*, Volume 101, Issue 1, pp 105-121, Springer. (Notre traduction)

Dans toute l'histoire des mathématiques, les algorithmes « posés » pour les différentes opérations (les quatre opérations vues à l'école, mais aussi, historiquement, d'autres comme l'extraction de la racine carrée par exemple) ont toujours été élaborés pour calculer vite et sans erreur. L'arrivée des calculatrices a, de nos jours, réduit cette nécessité ce qui tend à faire des techniques opératoires posées aussi le support d'un travail sur la numération ou le sens des opérations. Pour la soustraction, voyons successivement les deux techniques les plus courantes à l'école.

## La méthode par emprunt

La méthode par emprunt est une technique posée qui évite les retenues par une utilisation habile du système de numération. Dans une soustraction, la principale difficulté réside dans la gestion à certains rangs de situations impossibles où l'on tente de retirer un nombre plus grand que celui de départ. Dans l'exemple de problème précédent, dès le rang des unités, le calcul  $5 - 9$  amène à ce type d'impossibilité.

The image shows three stages of a subtraction problem:  $245 - 19$ .  
1. The first stage shows the initial setup:  $245 - 19$ . The digits 5 and 9 are in the units column, and 4 and 1 are in the tens column. A horizontal line is drawn under the 9. The digits 5, 9, 4, and 1 are highlighted in grey.  
2. The second stage shows the borrowing process. A dashed arrow points from the 4 in the tens column to the 5 in the units column. The 4 is crossed out and replaced by 3, and the 5 is replaced by 15. The expression is  $2\ 3\ 15 - 1\ 9$ . The 15 and 9 are highlighted in grey.  
3. The third stage shows the final result:  $2\ 3\ 15 - 1\ 9 = 2\ 2\ 6$ . The digits 6 and 9 are in the units column, 2 and 1 are in the tens column, and 2 and 3 are in the hundreds column. The digits 6, 9, 2, and 1 are highlighted in grey.

L'oralisation « cinq moins neuf, on ne peut pas », permet de rendre explicite la nécessité d'une étape supplémentaire pour mener à bien le calcul. N'ayant pas suffisamment d'unités au rang des unités, on en emprunte au rang suivant, ici une dizaine, ce qui permet d'ajouter 10 à 5. Le nombre de dizaines restantes est noté. Au rang des unités, le calcul devient  $15 - 9$ , ce qui donne 6. Comme on peut le voir sur le calcul posé ci-dessus, la technique par emprunt oblige l'élève à une **alternance de raisonnements**

**verticaux (sur un même rang) et horizontaux (sur deux rangs différents) ;** ce qui rappelle la nécessité d'une excellente maîtrise de la numération avant l'entrée dans les techniques posées.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 15 \\
 - \quad 1 \quad 9 \\
 \hline
 . \quad . \quad 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 15 \\
 - \quad 1 \quad 9 \\
 \hline
 . \quad 2 \quad 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 15 \\
 - \quad (0) \quad 1 \quad 9 \\
 \hline
 2 \quad 2 \quad 6
 \end{array}$$

Pour l'opération 245 - 19, une fois les unités traitées, la suite du calcul ne pose pas de difficultés. On peut, ou non, faire apparaître un zéro pour le traitement des centaines.

Le principal avantage de la technique par emprunt est qu'elle **permet de s'appuyer sur la manipulation du matériel de numération**. Ainsi, en parallèle du calcul, l'enseignant peut donner à voir la procédure d'emprunt en déplaçant concrètement une barre de dizaine pour la décomposer ensuite en dix unités. Ce n'est rien d'autre qu'une utilisation de la règle d'échange, fondamentale dans notre système de numération. Avant de passer à l'explicitation du deuxième algorithme (dit traditionnel), une mise en garde s'impose. En effet, si la technique par emprunt est généralement pertinente sur le plan pédagogique, le choix de certains nombres présentant des

zéros dans le premier terme (aux rangs des dizaines, centaines, etc.) peut la rendre assez délicate à mener.

*Exemple : cas particulier avec présence d'un zéro au rang des dizaines*

$\begin{array}{r} 403 \\ - 25 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \end{array}$	$\begin{array}{r} \cancel{4}30_{+10}3 \\ - 25 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \end{array}$	$\begin{array}{r} \cancel{4}3\cancel{1}09_{3+10} \\ - 25 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \end{array}$	$\begin{array}{r} 3913 \\ - 25 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \end{array}$
--	--	---	---

Dans cet exemple, l'absence de dizaines dans le premier terme oblige à aller décomposer d'abord une centaine en dix dizaines, puis de prendre une de ces dizaines pour obtenir dix unités... Le type de nombres est une variable sur laquelle il convient d'être toujours vigilant.

## L'algorithme usuel

La technique posée traditionnelle (en France) repose sur **la conservation des écarts** .

### Didactique

L'élément théorique sur lequel s'appuie la technique, la propriété de conservation des écarts, n'apparaît pas dans les programmes comme une connaissance exigible. De plus, la transformation d'égalités numériques n'est pas un objectif déclaré du primaire. Cette capacité peut cependant être travaillée en parallèle en numération et en calcul mental. La propriété de conservation des écarts (écart invariant par translation de dix, cent, mille etc. sur la droite numérique) apparaît comme indispensable dans la justification des retenues.

Anne-Marie Rinaldi (2013) Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée, *Grand N*, n°91, pp 93-119, IREM de Grenoble.

Cette propriété importante de la soustraction va permettre, comme à sa manière la méthode par emprunt, de gérer les cas d'impossibilité dans le calcul.

$$\begin{aligned}245 - 19 &= (245 + 10) - (19 + 10) \\ &= (245 + 1 \text{ dizaine}) - (19 + 1 \text{ dizaine})\end{aligned}$$

Dans le cadre d'un calcul réfléchi, on pourrait tout à fait optimiser cette approche et obtenir par exemple  $245 - 19 = (245 + 1) - (19 + 1) = 246 - 20 = 226$ . D'autres algorithmes anciens ou étrangers reposent exactement sur ce principe qui permet soit de maximiser le nombre de zéros au

deuxième terme, soit le nombre de neufs au premier. Dans les deux cas, on élimine ainsi les calculs impossibles et donc les « retenues ». Ce n'est malheureusement pas le cas de notre algorithme usuel français. Pour ce dernier, on se contente d'ajouter une dizaine (ou centaine) aux deux nombres et la gestion de cet ajout oblige les élèves à **travailler simultanément sur deux rangs pour les deux termes.**

$$\begin{array}{r}
 245 \\
 - 19 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2415 \\
 - 19 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2415 \\
 - 19 \\
 \hline
 \phantom{24}6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2415 \\
 - 129 \\
 \hline
 \phantom{24}6
 \end{array}$$

Il y a ici une manipulation astucieuse des unités de numération (unités et dizaines). Pour le premier terme, la dizaine ajoutée est placée au rang des unités en utilisant directement les règles d'écriture du système de numération, à savoir « cinq unités plus une dizaine égale quinze unités ». La soustraction  $15 - 9$  devient possible. Pour le deuxième terme, la dizaine ajoutée reste au rang des dizaines. La suite du calcul peut alors se faire soit *via* la réécriture du nombre de dizaines obtenues ( $1 + 1$ , comme ci-dessus), soit, lorsque c'est possible comme ici, par soustractions itérées en effectuant  $4 - 1 - 1$ . **Le placement cohérent des retenues** est utile pour ne pas confondre l'ajout de 1 dizaine d'unités au rang des unités du premier

terme (un petit 1 à gauche du nombre d'unités initial) et l'ajout de 1 dizaine au rang des dizaines au deuxième terme (un petit 1 en dessous du nombre de dizaine initial).

S'il est moins aisé de faire référence au matériel de numération avec cet algorithme, il a l'avantage d'être assez robuste dans le sens où il n'y a pas de problème avec les zéros au premier terme comme dans la méthode par emprunt. Par contre, la gestion des 9 au deuxième terme est à anticiper car l'ajout de la retenue fait passer à 10 le rang concerné.

On pourra remarquer que tant pour la technique par emprunt qu'avec la technique traditionnelle, les algorithmes obligent à écrire des nombres à deux chiffres aux rangs où apparaissent les retenues, ce qui vient contredire les premières consignes où on impose un seul chiffre par rang ou colonne s'il s'agit d'un tableau de numération. Cette difficulté est malheureusement incontournable et elle peut être explicitée oralement si les élèves en ressentent le besoin.

## Remarques sur les apports spécifiques du CE2

Dernière classe du cycle 2, le CE2 est l'occasion à la fois de consolider les acquis du CP et du CE1 et d'aborder des techniques et outils qui seront encore développés au cycle 3 (surtout par l'arrivée des nombres décimaux au CM1). L'addition et la soustraction sont désormais possibles tant par leur sens que par leur technique, cette dernière devant, néanmoins, souvent être encore travaillée. La connaissance des nombres de plus en grands permet de réinvestir des raisonnements et des méthodes de calculs vus précédemment sur des petits nombres (inférieurs à 100 au CP et inférieurs à 1000 au CE1). En particulier, la présence fréquente des rangs des centaines et des milliers dans les données manipulées par les élèves de CE2 va permettre d'apprécier pleinement la pertinence des algorithmes posés de l'addition et de la soustraction. La technique de la multiplication posée constitue la principale nouveauté dans ce domaine. Dans le cadre de la résolution de problèmes, la présence de nombres au-delà de 1000, rend vite certaines procédures longues et/ou fastidieuses (dénombrement un à un par exemple) ce qui justifie la recherche de décompositions additives ou multiplicatives pertinentes. À cette fin, les tables sont un outil précieux qui, par la suite, s'avère indispensable pour la mise en œuvre de l'algorithme posé de la multiplication 🔍.



## Didactique

(Les) explications basées sur les conceptions de la multiplication, sur les propriétés de la multiplication et sur celles du système de numération constituent à notre avis la principale raison d'enseigner l'algorithme de la multiplication en colonnes alors même que celui-ci ne sera presque jamais utilisé par l'élève.

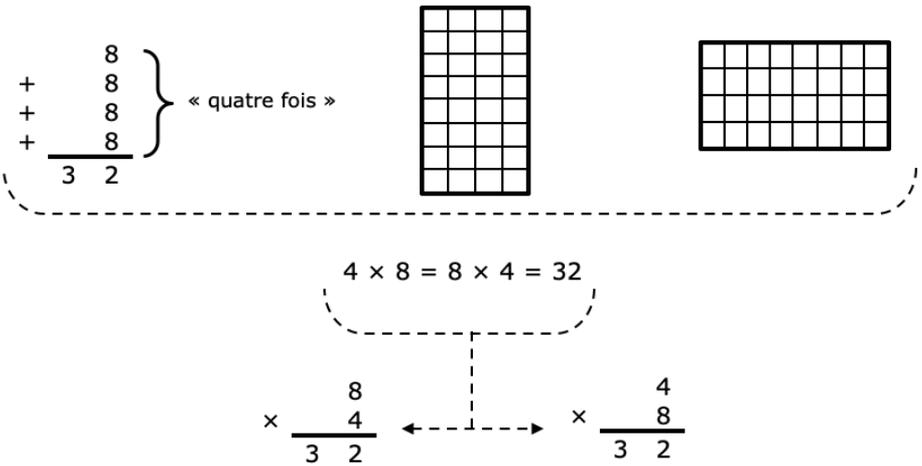
Tout d'abord, la compréhension des propriétés en jeux lors de l'algorithme de la multiplication en colonnes permet de ne pas séparer celui-ci du calcul réfléchi et de considérer l'algorithme comme une forme d'écriture d'un calcul réfléchi.

Mais surtout, comme nous l'avons vu, l'apprentissage de cet algorithme fournit une occasion de travailler la représentation de la multiplication comme aire d'un rectangle ou comme produit cartésien et de sensibiliser les élèves à cette multiplication d'un type différent puisque son résultat n'est pas de la même dimension. Ces deux types de multiplications reviendront d'ailleurs au moment de la géométrie vectorielle sous la forme du produit par un scalaire et du produit scalaire de deux vecteurs.

Stéphane Clivaz et Michel Deruaz (2013) Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N*, n°92, pp 15-23, IREM de Grenoble.

## L'algorithme de la multiplication posée

Vu d'abord avec le produit de deux nombres à un chiffre, l'algorithme de la multiplication posée est au départ juste un jeu d'écriture. Que cette dernière soit donnée à partir d'une addition itérée ou à partir d'une configuration rectangulaire simple, la nouvelle disposition du calcul n'apporte, dans un premier temps, que peu de choses (on retrouve néanmoins la commutativité). Cette étape sert surtout à introduire les règles de disposition des nombres.



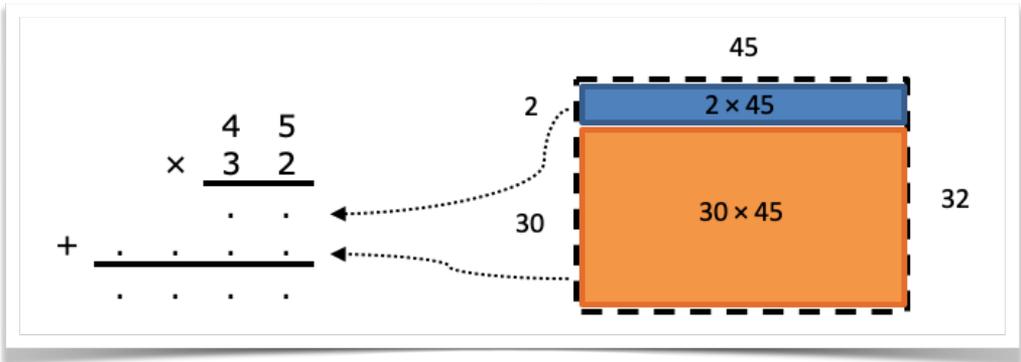
*Nouvelle écriture du calcul avec un alignement correct des différents rangs*

La technique va trouver tout son intérêt lors du travail avec des nombres plus grands, en particulier lors de la multiplication de deux nombres à deux chiffres. Notre

**algorithme de multiplication posée** est fondé sur la **décomposition canonique** du deuxième nombre et la propriété de **distributivité** de la multiplication sur l'addition.

$$45 \times 32 = 45 \times (30 + 2) = 45 \times 30 + 45 \times 2$$

Une visualisation sous forme de la décomposition d'une configuration rectangulaire permet de mieux comprendre la disposition du calcul.



Dans l'algorithme usuel, **on commence à droite par le rang des unités**. On pourra remarquer que la décomposition canonique et la commutativité de l'addition n'impose en rien cet ordre (NB : dans certains Länder en Allemagne, le calcul, posé un peu différemment, s'organise en partant de la gauche, donc en commençant par le rang le plus élevé, en suivant le sens de lecture). Dans les premiers temps d'apprentissage, **il est fréquent que les élèves fassent l'inversion et commencent par la gauche**.

Le calcul n'étant pas faux, il convient juste de rappeler la convention.

$  \begin{array}{r}  45 \\  \times 32 \\  \hline  90 \\  \hline  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  45 \\  \times 32 \\  \hline  90 \\  \hline  1350 \\  \hline  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  45 \\  \times 32 \\  \hline  90 \\  \hline  1350 \\  \hline  1440 \\  \hline  \end{array}  $
---	--	---

L'algorithme fonctionne rang après rang en s'appuyant sur le produit d'un nombre par un nombre à un chiffre et, à la fin, sur l'addition posée de nombres à plusieurs chiffres. L'ajout formel d'un zéro lors du calcul au rang des dizaines permet d'éviter l'oubli du « décalage » et contribue à donner du sens à l'algorithme. On retrouve aussi l'alignement des dizaines du deuxième nombre avec le résultat du produit  $45 \times 30$  ou plus exactement  $45 \times 3$  dizaines.



# Chapitre 5

## Les grandeurs et les mesures

---

### Objets, grandeurs, mesures

**A**vec les premiers nombres, le concept de grandeur est l'une des premières notions mathématiques que les élèves rencontrent. En effet, dès le cycle 1, les élèves peuvent comparer la taille de plusieurs objets, les classer, entrant ainsi, par la manipulation, dans le domaine des grandeurs. Par la suite, au cours des cycles 2 et 3, les élèves sont amenés à affiner cette notion et ce, tout particulièrement à l'entrée du cycle 2.

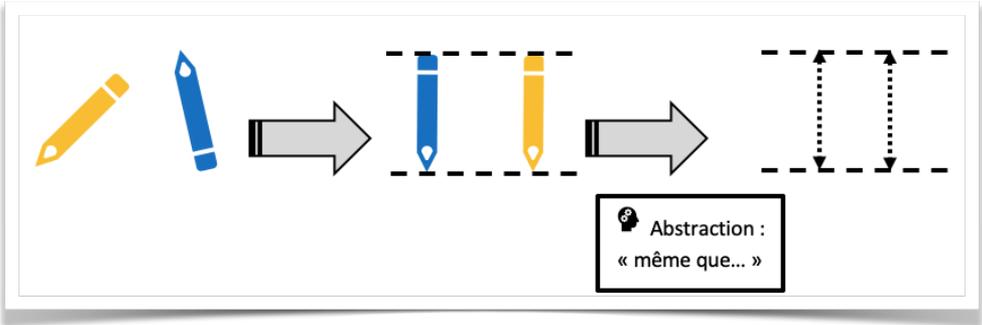
## Construction et définition des grandeurs

Pour comprendre les enjeux de l'enseignement du chapitre grandeurs et mesures, il est important de préciser les contours de ce domaine mathématique. Tant pour la construction théorique de la notion de grandeur que pour la mise en œuvre pédagogique dans la classe, le point de départ est le monde réel. Dans notre quotidien se trouvent de nombreux objets qui possèdent chacun différents caractères qui les rendent distincts des autres et donc uniques. Par exemple, les deux crayons ci-dessous sont deux objets différents, l'un est orange, l'autre est bleu.



Les caractères qui sont susceptibles de varier d'un objet à l'autre peuvent donner une première définition des grandeurs, mais elle s'avère peu opératoire et pas toujours claire dans le contexte de l'école. En effet, ici la couleur varie d'un crayon à l'autre, mais ce caractère ne peut devenir une grandeur que lorsqu'on lui associe le phénomène physique des longueurs d'ondes lumineuses, ce qui est évidemment hors de propos au cycle 2. Une

meilleure manière pour construire les grandeurs consiste à partir, non de ce qui diffère, mais de ce qu'il y a de commun. Si nous reprenons l'exemple des deux crayons, il s'agit de deux objets distincts pourtant, ils semblent avoir quelque chose en commun.



Par un processus d'abstraction que l'on peut introduire *via* l'expression « même que... », on construit un nouveau concept 🔍. On peut alors regrouper dans une même catégorie tous les objets (crayons, bâtons, fourchettes, etc.) qui sont « même que... » nos deux crayons relativement au caractère considéré (ici la longueur). Mathématiquement, une grandeur ainsi définie est ce qu'on nomme une classe d'équivalence sur un ensemble d'objets (ce qui signifie simplement qu'on les regroupe et qu'on ne garde comme information que leur caractère commun). Une grandeur est donc une notion qui permet de passer, par abstraction, du monde réel (les objets sensibles) à l'univers mathématique (voir schéma général en fin de chapitre p.163).



## Didactique

À partir de la distinction générale introduite par Régine Douady entre les dimensions outil et objet des concepts mathématiques, Nathalie Anwandter-Cuellar propose une organisation du savoir relatif aux grandeurs autour de deux dimensions principales :

« - Premièrement, les grandeurs ont une dimension outil, car elles servent de moyens pour résoudre des problèmes émergeant de plusieurs contextes : la vie quotidienne, les mathématiques et des disciplines autres que les mathématiques.

- Deuxièmement, les grandeurs constituent un objet d'étude pour les mathématiques, car elles forment un ensemble structuré autour d'objets, d'opérations et de comparateurs dotés de propriétés, de modes de traitement (règles algébriques, découpage-recollement, etc.), de modes de représentations permettant ces traitements (figures, nombres concrets, graphiques, etc.). »

Nathalie Anwandter-Cuellar (2016) Conditions et contraintes relatives à l'enseignement des grandeurs, *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 36(3), pp 307-345, La pensée sauvage.

On notera que cette approche par construction de classes d'équivalences est l'un des fondements épistémologiques des mathématiques. On la retrouve très souvent comme par exemple lors de la construction des entiers (le cardinal est ce qu'il y a de commun entre plusieurs ensembles ayant la même quantité d'objets) ou pour la définition des polygones (un triangle est une figure qui partage le fait d'avoir trois côtés avec d'autres formes).

## Travailler avec les grandeurs

Comme nous venons de le voir, une grandeur est le résultat d'un processus d'abstraction dont il ne faut pas minimiser l'importance ni la difficulté pour les élèves. Dès le cycle 1, les élèves travaillent la notion de grandeur, en particulier la longueur. Par exemple, à partir d'un matériel manipulable, des élèves peuvent être amenés à placer des personnages de différentes tailles pour leur permettre d'atteindre un ballon situé en haut d'un mur (voir ci-dessous).



Les premières activités de classe visent donc à donner du sens aux grandeurs (longueur, masse, aire, contenance, durée) au travers de petites situations problèmes qui reposent d'abord sur la comparaison.

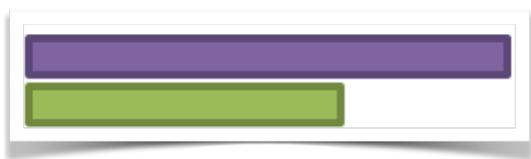
## Comparer des grandeurs

Il est très facile de trouver ou créer des situations de comparaison de grandeurs car ce sont toutes celles qui

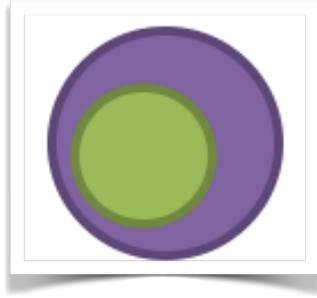
permettent les questions comme « Lesquels de ces objets ont la même taille ? (i.e. la longueur) », « Quel objet est le plus lourd ? (i.e. la masse) », « Quel objet est le plus étendu ? (i.e. l'aire) », etc. L'utilisation de matériels variés permet de faire comprendre aux élèves qu'on ne compare pas les objets, mais une grandeur adaptée au contexte du problème. On peut distinguer trois procédures principales pour la comparaison des grandeurs :

**La comparaison directe** : Il s'agit simplement dans ce cas de juxtaposer des objets (longueur), de les superposer (aires, angles), d'effectuer un transvasement d'un récipient à l'autre (contenance), de sous peser ou d'utiliser une balance de Roberval (masse), de constater ce qui s'arrête en premier (durée).

Exemples :



*La bande violette est plus grande que la bande verte.*



*Le disque vert est plus petit que le disque violet.*

**La comparaison indirecte** : Il n'est pas toujours possible ou souhaitable de comparer directement des grandeurs, dans ce cas, on peut utiliser un objet intermédiaire qui servira d'**étalon**.

*Exemple : On veut ranger dans une boîte en bois placée dans l'armoire les crayons de couleur devenus trop petits et laisser sur des pots sur les tables les autres. On peut alors utiliser un crayon (ou une barre en bois, ou une bande de papier, etc.) ayant juste la longueur de la boîte afin de trier les crayons avant d'aller les remiser dans l'armoire.*

**La transformation d'objets pour les rendre comparables** : Selon la nature des objets, les deux procédures précédentes ne sont parfois pas possibles. On peut néanmoins réussir dans certains cas à transformer l'un des objets pour le rendre comparable à un autre. Il

peut s'agir, par exemple, du déroulement d'un objet souple (longueur) ou d'un découpage (aire).

*Exemple : Pour Noël, on veut décorer le haut d'un petit tableau avec une guirlande juste de la bonne longueur, or les guirlandes disponibles sont roulées en boule dans un sac. Il convient donc de commencer par les dérouler afin de pouvoir les comparer soit directement (avec le bas du tableau par exemple), soit indirectement sur une bande (ou une ficelle) de la bonne longueur que l'enseignant aura préalablement préparée.*

À partir de la comparaison, on peut alors construire une **notion d'ordre**. Il s'agit là de l'une des principales caractéristiques mathématiques des grandeurs vues à l'école que l'on retrouve dans de nombreuses activités. Par exemple, ranger des crayons du plus petit au plus grand n'est rien d'autre qu'une suite de comparaisons qui, de proche en proche, permettent d'aboutir au résultat souhaité. On notera que cette relation d'ordre est **transitive** car si un objet C est plus lourd (par exemple) qu'un objet B qui lui-même est plus lourd qu'un objet A, alors l'objet C est plus lourd que A. Cette propriété est très utile pour résoudre des problèmes dont la question introduit l'expression « le plus », comme dans « Qui est le plus grand ? »

## Ajouter, soustraire, multiplier, diviser : les opérations sur les grandeurs

Au-delà de la simple comparaison, l'intérêt de la grandeur comme notion mathématique est qu'elle ouvre à d'autres types de manipulations qui peuvent s'avérer très utiles lors de situations problèmes. Par exemple, si une personne n'est pas assez grande pour changer l'ampoule de son salon, en montant sur une chaise, elle peut le faire. Dans cette simple situation, la hauteur de la chaise s'ajoute à celle de la personne. En toute rigueur mathématique, on peut **ajouter** des longueurs, tout comme des aires, des contenances, des masses ou des durées. Ces grandeurs sont, à ce titre, qualifiées de sommables. La plupart des grandeurs rencontrées par les élèves sont sommables, on notera néanmoins l'exception de la température qui ne l'est pas (le mélange de deux bouteilles d'un litre d'eau chacune à 20°C ne fait pas deux litres d'eau à 40°C ; les contenances s'ajoutent, mais pas les températures). L'ajout de grandeurs de même nature l'une à l'autre permet, en particulier, la construction de **multiples**. En effet, si un élève met bout à bout plusieurs allumettes, il pourra construire une longueur double, triple, etc. de celle d'une allumette. Cette procédure sera utilisée plus tard pour introduire la notion de mesure comme nous allons le voir ci-après. Des notions d'addition et de multiplication par entier, il est aisé de

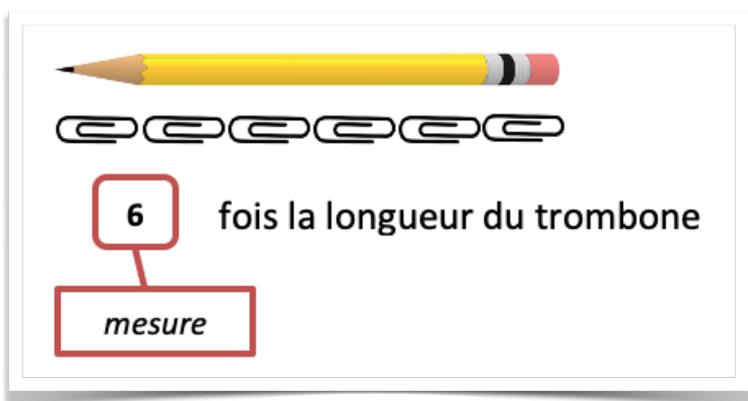
percevoir les opérations inverses qui sont tout aussi légitimes sur des grandeurs. Par exemple, couper une bande de papier pour l'ajuster à la longueur d'un objet revient à **soustraire** ce qui dépasse à la longueur initiale. De même, pour réaliser plusieurs petits pains à partir d'une boule de pâte, on peut **diviser** la masse initiale en autant de pâtons que souhaité.

Le travail sur les grandeurs, en tant que telles, est très riche et fondamental pour la bonne maîtrise de la notion. Il est intéressant de noter que les procédures à partir des grandeurs sont très efficaces et accessibles à une majorité d'élèves. Par exemple, comparer les périmètres de deux figures polygonales irrégulières en reportant (au compas ou avec une ficelle) bout à bout les longueurs des différents côtés est rapide et sûr.

### **Le passage des grandeurs aux mesures**

Une fois les grandeurs bien comprises par les élèves, la notion de mesure se construit facilement par le simple **choix d'une grandeur unité**. Il est important de noter que ce choix est arbitraire et n'a aucune incidence mathématique. Les unités vues par les élèves à l'école relèvent du système international (mètre, seconde, kilogramme) mais d'autres unités, dérivées ou non de ce système, continuent de coexister dans la vie quotidienne

comme les pouces, les ares, les stères, etc. En classe, même si c'est bien le système international qui est visé, il n'est pas inutile dans un premier temps de construire des mesures à partir de grandeurs unités proches du quotidien des élèves. Ainsi, la longueur d'une trousse peut d'abord être mesurée en reportant autant de fois que nécessaire la longueur d'une allumette ou d'un trombone choisis comme unité. **Le nombre** de répétitions de l'unité **est la mesure** de la grandeur de l'objet selon cette unité.



Dans l'exemple ci-dessus, il faut reporter 6 fois la longueur du trombone pour obtenir une longueur égale à celle du crayon, la mesure de la longueur du crayon, selon l'unité trombone, est donc 6. La précision du vocabulaire est ici très importante pour bien mettre en place le fait que **la mesure est un nombre**. La valeur de ce nombre, et donc la mesure, dépend de l'unité choisie. Progressivement, les unités du système métrique sont introduites et utilisées.

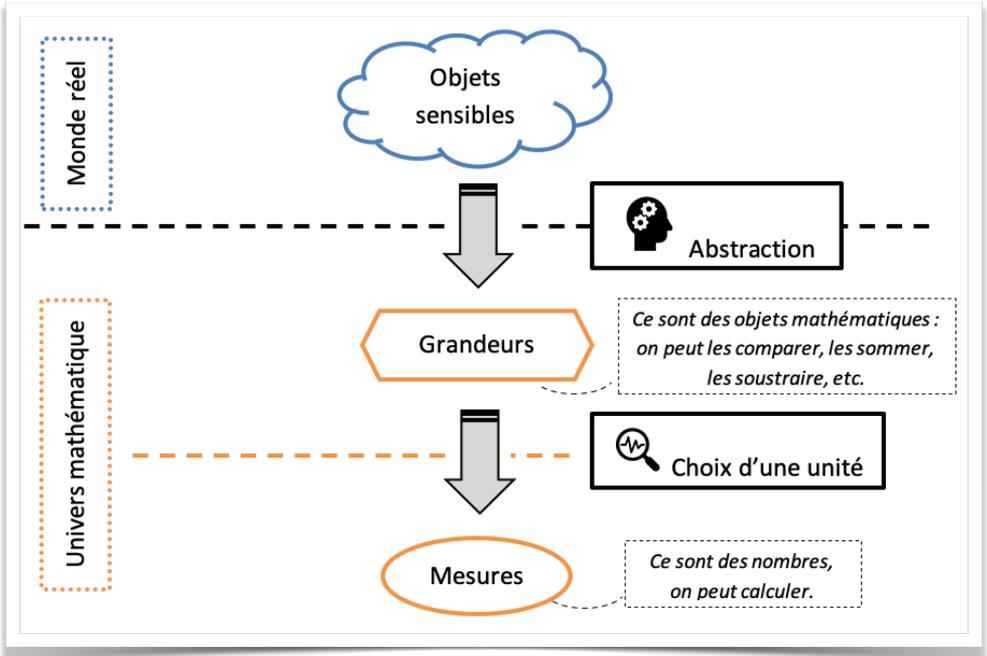
Notons que de nombreuses confusions liées au langage courant peuvent apparaître lors de la mise en mots de certains résultats. Ainsi, par exemple, la phrase « la mesure de ce crayon est 3 cm » est incorrecte car elle ne donne pas à lire la juste organisation des notions (objets, grandeurs, mesures). Une meilleure formulation serait « la mesure de la longueur du crayon est 12 en cm. » L'intérêt est de mettre en évidence le rôle des **mesures** comme **nombres** avec lesquels il devient aisé **de faire des calculs**. Cette rigueur du vocabulaire est une étape utile à l'enseignant pour fixer les idées mais elle ne saurait exclure certaines formulations qui peuvent s'avérer facilitantes pour les élèves. Ainsi, l'expression « la hauteur de cet arbre est 5 m » est mathématiquement correcte si on considère « 5 m » comme un seul et même terme relevant des grandeurs (5 itérations de l'unité de longueur mètre, ce qui est bien une longueur comme nous l'avons vu précédemment dans le paragraphe sur les additions de grandeurs). Une longueur (la hauteur de l'arbre) est donc bien égale à une longueur (les 5 mètres). Ce maintien de **l'association entre une mesure et son unité** contribue à **préserver le sens** et permet souvent aux élèves de ne pas se perdre dans les résolutions de problèmes portant sur des grandeurs. Ainsi, si on demande la hauteur totale obtenue lorsqu'une cigogne est perchée au sommet de l'arbre, on peut écrire le calcul suivant :

$$5 \text{ m} + 112 \text{ cm} = 500 \text{ cm} + 112 \text{ cm} = 612 \text{ cm}$$

Cette rédaction est non seulement correcte, mais elle peut permettre d'éviter l'oubli de la conversion des mètres en centimètres. La mise en œuvre de calculs décontextualisés, c'est-à-dire sur les mesures seules, pourra intervenir plus tard dans le cadre de la modélisation de problèmes (choix de l'opération par exemple).

## Schéma général de la construction des grandeurs et des mesures

On peut résumer ce qui vient d'être présenté par un schéma général valable pour n'importe quelle grandeur.



Les deux grandes étapes que constituent le passage des objets aux grandeurs et le passage des grandeurs aux mesures permettent de structurer les connaissances sur ces notions. Dès le départ, le processus d'abstraction nous place dans le champ des mathématiques dans lequel ensuite tout va se construire, des premières comparaisons de grandeurs aux calculs avec des mesures. Cette organisation des concepts n'est pas sans lien avec l'organisation des apprentissages ce qui permet aussi de tracer les grandes lignes d'une progression type.

## Une progression type

Pour toutes les grandeurs vues au cycle 2 (longueur, masse, capacité, durée, prix) et même au cycle 3 (aire, angle), on peut plus ou moins élaborer une progression commune et ce, quel que soit le niveau de classe où elles sont introduites.

- a) Comparaison directe : Dans ce premier temps d'apprentissage, de nombreuses séances peuvent être consacrées à la mise en place d'une grandeur par la comparaison directe. L'avantage de cette forme de comparaison est qu'elle permet de garder le contact avec les objets réels. Le processus d'abstraction est d'autant plus facilité que les situations sont adaptées aux enfants et inscrites dans la vie de la classe.
  
- b) Comparaison indirecte à l'aide de gabarits : Cette deuxième phase vise à se décrocher progressivement des objets qui ont porté la situation initiale pour aller vers des situations plus génériques. L'utilisation du gabarit permettra de glisser facilement vers la notion d'étalon car elle donne un premier sens à une grandeur prise comme référence.

- c) Mesurage avec un seul étalon que l'on reporte : Cette troisième étape est celle de la mise en place de la notion d'unité. Comme cela a déjà été rappelé plusieurs fois, cette phase nécessite une bonne maîtrise de la notion de grandeur. L'idée de mesure ne doit donc pas intervenir prématurément. Autour de situations problèmes bien choisies, les élèves pourront construire l'idée de mesure et même percevoir assez rapidement que le nombre obtenu dépend de l'unité choisie (la mesure du crayon est 6 en unité trombone, mais 5 en unité allumette). Ce dernier travail prépare la vigilance nécessaire pour les calculs décontextualisés.
- d) Mesurage en référence à des unités : Cette dernière étape est en fait purement conventionnelle (découverte des unités usuelles du système international, métrique en particulier). Si les phases précédentes se sont bien déroulées, les élèves n'ont ici rien de conceptuellement nouveau à apprendre ; ils réinvestissent simplement leurs acquis sur de nouvelles unités et sous-unités pour lesquelles ils acquièrent le vocabulaire spécifique.

## Autres unités, changement d'unités

Même si le choix d'une unité est arbitraire, les échanges et les pratiques scientifiques tendent à stabiliser, au fil de l'histoire, certaines unités plus commodes. De nos jours, c'est le Bureau International des Poids et Mesures ([bipm.org](http://bipm.org)) qui est chargé d'actualiser de bonnes définitions de certaines grandeurs unités comme la seconde, le mètre, le kilogramme, ou le Kelvin, par exemple. Pour le système métrique enseigné à l'école, son intérêt réside dans la construction décimale des sous-unités et sur-unités. Un décamètre, c'est dix mètres, un décimètre, c'est un dixième de mètre, etc. ce qui n'était pas du tout le cas pour d'anciennes unités comme les toises ou les coudées. Récemment rappelée par les travaux des didacticiens, cette parenté entre les unités de mesure et le système de numération est un outil tout à fait pertinent pour les apprentissages. Ainsi, les travaux de conversion entre unités peuvent s'appuyer avec profit sur les connaissances des élèves en numération. En particulier, les relations simples entre sous-unités proches et les rapports  $\times 10$  ou  $\div 10$  qui y apparaissent peuvent être automatisés de la même manière que la compréhension du nombre de dizaines ou de centaines dans un nombre. Mesure et numération se nourrissent ainsi l'une l'autre et contribuent à donner de la cohérence aux procédures des élèves.

## Estimer et se construire un référentiel

Nous l'avons vu, l'introduction des mesures déplace des connaissances du champ des grandeurs vers celui des nombres. Si elles sont pratiques pour les calculs, les données chiffrées peuvent néanmoins être sources de confusion pour les élèves. Des résultats absurdes à la fin d'un problème sont souvent le signe d'une perte de sens. Il convient donc d'aider l'élève à se construire des référents mentaux qui lui permettront un contrôle sur son raisonnement mathématique. Les premiers référents sont évidemment les unités elles-mêmes et elles peuvent faire l'objet d'un travail spécifique. Un mètre, c'est la longueur de la règle du tableau, un centimètre, c'est à peu près la taille d'une fourmi, un kilogramme, la masse d'une boîte de sucres en morceaux, un litre c'est la contenance d'une brique de lait, etc. Pour les unités les plus grandes, on pourra s'appuyer sur le vécu individuel ou de la classe. Les enfants peuvent se faire une image du kilomètre si cela correspond à une distance connue (école-salle de sport, école-boulangerie, etc.). Par la suite, d'autres référents peuvent être construits à partir d'objets du quotidien comme un pack de six bouteilles d'eau minérale (9 kg) ou la hauteur sous-plafond (2 m et 50 cm). Ces nouveaux référents ont alors la double fonction de points de repère pour certaines quantités et d'incarnations des diverses

grandeurs, par nature abstraites, dans des choses connues. Dès lors, l'estimation pertinente devient possible et elle peut même servir de point de départ pour la résolution d'un problème.

### **Une source de bons problèmes**

Très proches du quotidien de tout un chacun, les grandeurs et mesures sont une source inépuisable de situations problèmes pertinentes pour les élèves. En effet, les notions vues au cycle 2 (longueur, masse, durée, etc.) sont souvent rencontrées hors de la classe comme lors de la mesure d'une performance en dans un club de sport (temps, longueur), lors de la réalisation de gâteaux (masse, contenance), ou lors d'achats en supermarché (prix, mais aussi masse et contenance). Les problèmes proposés en classe peuvent donc s'appuyer sur cette première connaissance sociale tout en veillant à ce qu'elle soit bel et bien partagée par l'ensemble des élèves. Centrées sur la vie de la classe, de nombreuses situations fonctionnelles ou spécifiquement créées peuvent donner du sens aux grandeurs considérées. Décorations de la classe, réalisation d'une recette, achats pour une sortie ou un goûter, réalisation d'objets en bois ou en carton, etc. toutes ces activités prennent sens car elles s'inscrivent dans un vécu scolaire commun. On évitera, si possible, les situations artificielles ou trop éloignées des centres d'intérêt de

enfants. Repeindre un plafond ou installer du carrelage n'a de sens que si l'on s'assure que les élèves appréhendent ces situations au même titre qu'un jeu d'imitation (c'est-à-dire, en imaginant « faire comme les grands »).

### **Les erreurs des élèves sur les grandeurs**

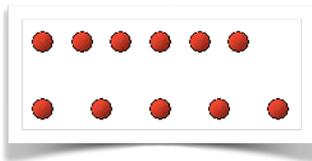
Si une bonne progressivité est respectée, les erreurs des élèves dans ce chapitre au cycle 2 sont assez rares car les élèves côtoient peu de grandeurs différentes. Ce sera moins vrai au cycle 3 où les confusions entre les différentes notions deviendront beaucoup plus fréquentes (confusion entre aire et périmètre par exemple). Néanmoins, l'apprentissage des grandeurs se heurte parfois à des intuitions qui peuvent s'avérer mauvaises conseillères. L'exemple le plus connu est certainement la difficulté, tant pour les adultes que les enfants, à dissocier certaines grandeurs qui paraissent naturellement corrélées. Voici deux exemples.

Exemple 1 : La contenance n'est pas la masse.



Variante du kilogramme de plumes et du kilogramme de plomb, on peut faire constater aux élèves qu'un grand carton vide peut être plus léger qu'une boîte de sucre en poudre. Il s'agit ici de lutter contre une intuition naturelle qui suggère qu'un objet de grande taille est forcément plus lourd qu'un plus petit (et ce, d'autant plus que l'écart en taille est perceptible).

Exemple 2 : La longueur n'est pas la quantité.



*Dans quelle ligne y a-t-il le plus de points ?*

Cette situation a été particulièrement étudiée par la psychologie et les neurosciences 🔍. Il est désormais démontré que ce biais de pensée est partagé par l'ensemble

des êtres humains ; il est donc naturel de le rencontrer dans les procédures des élèves.

 **Didactique**

Cette expérience avec des jetons alignés a été réalisée dès 1941 par Piaget et Szeminska.

*Enseigner les mathématiques* (2019), Belin, p.261.

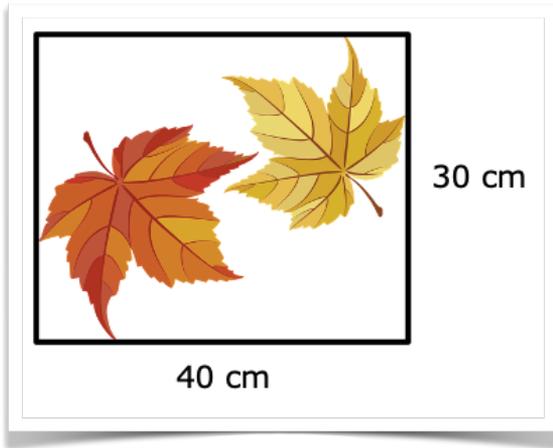
## Le périmètre

Bien qu'elles puissent être travaillées pour elles-mêmes, certaines grandeurs gagnent encore en signification lorsqu'elles sont associées à d'autres domaines. C'est le cas, par exemple, de la longueur qui, dans le cadre d'activités géométriques, permet de définir la notion de **périmètre**. Comme son étymologie l'indique, le périmètre (περι peri « autour » - μετρον metron « mesure ») n'est autre que la **mesure du pourtour d'une figure**. Tant pour l'arpentage (mesure du périmètre du chemin autour d'une parcelle par exemple) que pour de petits travaux de décoration (mettre un ruban autour d'un objet), la connaissance du périmètre est souvent indispensable au quotidien. À l'école, cette notion est très intéressante car elle permet de lier les connaissances sur les grandeurs avec celles sur les figures géométriques.

## Quelques procédures

Partons d'un exemple pour détailler quatre procédures courantes permettant de trouver le périmètre d'une figure.

*Exemple : à l'issue d'une sortie « nature » les élèves ont réalisé un herbier qu'ils souhaitent encadrer. L'herbier est un rectangle de largeur 30 cm et de longueur 40 cm. Quelle longueur de baguette doivent-ils demander d'acheter à leur enseignant ?*



### Procédure 1 : avec une ficelle

En revenant au sens premier du mot périmètre, les élèves peuvent faire le tour de l'herbier avec une ficelle qu'ils couperont à la bonne longueur. Cette ficelle, une fois déroulée permet de visualiser directement le périmètre sous la forme d'un segment. Il est intéressant de noter que, si on imagine que les élèves ont déjà à leur disposition une baguette assez grande, cette procédure permet de reporter directement la longueur désirée sans passer par la notion de mesure. Comme cela a été dit au début de ce chapitre, les grandeurs peuvent être un bon outil en tant que tel, bien avant l'introduction d'une mesure.

### Procédure 2 : par report de longueurs

L'herbier de cette situation-problème étant matériellement présent dans la classe, les élèves peuvent reporter la longueur de chaque côté (avec une bande de papier par exemple ou en posant directement les différents côtés l'herbier) et obtenir ainsi une ligne représentant le périmètre. Là encore, les mesures ne seront utiles qu'à la fin pour répondre à la question « quelle longueur commander ? ».

### Procédure 3 : par l'addition des mesures des longueurs de tous les côtés

Pour toutes les figures polygonales dont on connaît les mesures des longueurs des côtés, le périmètre peut être obtenu par le calcul. Ici, on a :

$$30 \text{ cm} + 40 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 40 \text{ cm} = 140 \text{ cm} = 1 \text{ m } 40 \text{ cm}$$

Procédure 4 : par l'utilisation d'un calcul lié aux propriétés de la figure

Dès le cycle 2, les élèves peuvent commencer à utiliser les propriétés particulières de figures géométriques connues pour optimiser leurs calculs. Ainsi, comme le rectangle a ses côtés opposés de même longueur, on peut écrire :

$$30 \text{ cm} + 40 \text{ cm} = 70 \text{ cm}$$

$$70 \text{ cm} \times 2 = 140 \text{ cm} = 1 \text{ m } 40 \text{ cm}$$

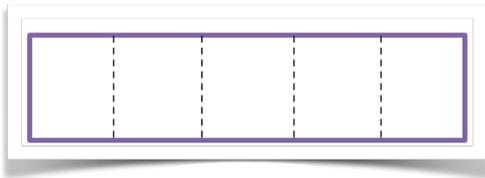
*Remarque* : l'utilisation des parenthèses ne relève pas du cycle 2, donc avec les élèves on mettra en évidence les deux étapes (calcul du demi-périmètre puis multiplication par 2).

### **Périmètres et aires**

Au cycle 2, les élèves ne rencontrent que des unités de grandeur unidimensionnelles. Ainsi, sont étudiés, le mètre, le kilogramme, ou le litre, mais pas le mètre carré ou le mètre cube qui ne seront abordés qu'au cycle 3. En particulier, les mesures d'aires ne sont pas abordées ce qui peut s'expliquer par la difficulté de cette notion et les risques de confusion avec le périmètre par exemple. Mathématiquement, dans le cas général, il n'y a d'ailleurs pas de lien entre le périmètre et l'aire. Deux figures de même aire peuvent avoir deux périmètres différents, de

même, deux figures de périmètres égaux peuvent avoir deux aires différentes. Les élèves verront plus tard aux cycles 3 et 4 quelques formules de calculs de périmètres et d'aires en fonction de la nature de la figure géométrique considérée (carré, rectangle, triangle, disque, etc.). Au CE1/CE2, certaines situations permettent néanmoins de commencer à approcher l'idée de la pertinence d'un calcul sur des longueurs pour traiter de problèmes géométriques liés à des aires.

Cas particulier mathématiquement intéressant : le découpage régulier d'une figure de forme connue



Si on découpe perpendiculairement le grand côté de ce rectangle de manière régulière, on obtient 5 petits rectangles de même aire. Comme au cycle 1, si on réalise cette figure sur du papier, on peut constater par superposition que les petits rectangles sont identiques. On pourra, si on le souhaite, calculer le périmètre du petit rectangle à partir des mesures du grand. La mesure de l'aire n'apparaît pas ici, elle n'est d'ailleurs pas nécessaire, mais la régularité du découpage permet un travail sur l'égalité d'aires 🔍.



## **Didactique**

L'étude des aires en tant que grandeur, de manière à faire vivre le domaine grandeurs et mesures, demande la construction d'une organisation mathématique relativement complète où la grandeur aire serait étudiée à l'aide de problèmes qui permettent de différencier, d'une part, la notion d'aire de celle de surface et, d'autre part, la notion d'aire de celle de mesure.

Nathalie Anwandter-Cuellar (2016) Conditions et contraintes relatives à l'enseignement des grandeurs, *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 36(3), pp 307-345, La pensée sauvage.

# Chapitre 6

## L'espace et les figures géométriques

---

### Espace et géométrie

**A**u cycle 1, les élèves ont commencé un processus d'abstraction qui leur permet de passer de l'espace vécu, à l'espace perçu, puis à l'espace représenté pour appréhender le monde qui les entoure. Le cycle 2 poursuit ce travail en augmentant progressivement la taille des espaces que les élèves ont à concevoir. En didactique, on distingue trois types d'espaces : le micro-espace, le meso-espace (espace moyen) et le macro-espace.

## Micro-espace, meso-espace, macro-espace

On doit la typologie des différents types d'espaces au didacticien Guy Brousseau .

### Didactique

Le jeu des variantes et des variables de la situation fondamentale de l'espace permet de déterminer au moins trois conceptions de l'espace et par conséquent trois milieux spatiaux correspondants : le micro-espace, le meso-espace, et au moins trois macro-espaces. (...)

Pour des raisons ergonomiques et à cause des techniques différentes qu'elles imposent, la conception des objets de la géométrie est différente dans chacun de ces milieux. La "droite" peut être déterminée, dans le micro-espace par le glissement qu'elle permet ou par l'intersection de deux plans, dans le meso-espace, par un alignement visuel, dans le macro espace, par le prolongement à l'aide d'un angle plat... Dans le micro-espace les distances sont des longueurs d'objets, les angles des formes ou des rotations ; les mesures de longueurs y sont beaucoup plus économiques que les mesures d'angles, dans le macro-espace c'est l'inverse.

Guy Brousseau (2000) Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire ; l'étude de l'espace et de la géométrie, Séminaire de Didactique des Mathématiques, Réthymnon, Grèce, pp 67-83.

Nous la reprenons ici car elle éclaire les enjeux d'apprentissage du cycle 2.

### Le micro-espace

Exemple : L'espace de la feuille, de la table de l'élève

Ce premier espace est proche et l'élève se situe à l'extérieur de l'espace. La constitution d'une image mentale n'est pas nécessaire.

### Le meso-espace

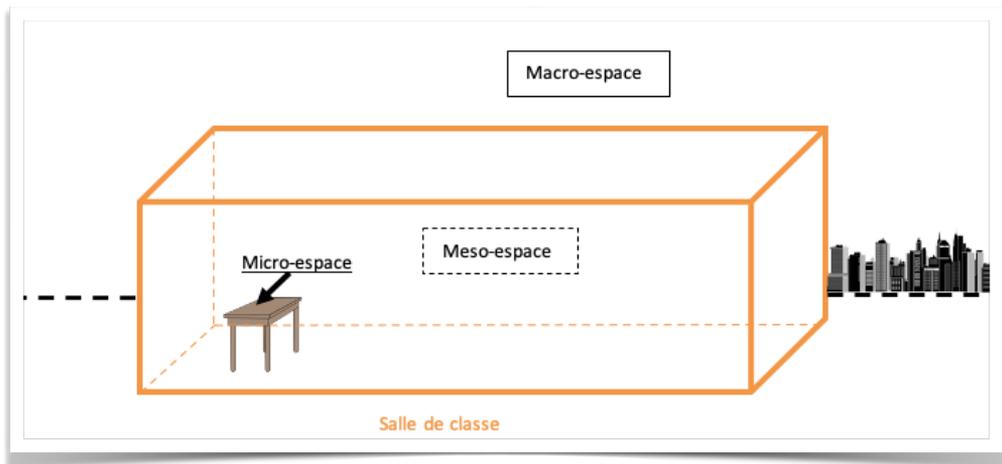
*Exemple* : La classe, la cour (si elle n'est pas trop grande)

Ce deuxième type d'espace est accessible par une vision globale et l'élève est à l'intérieur. Il peut s'y déplacer et ainsi l'observer selon différents points de vue. La conceptualisation commence à devenir utile ; elle peut venir s'appuyer sur la construction d'une maquette ou la lecture/création d'un plan.

### Le macro-espace

*Exemple* : L'école (s'il y a plusieurs classes), le quartier, le village, le pays, etc.

Ce dernier espace ne peut être vu que localement (pas de vision globale) et l'élève, situé à l'intérieur de l'espace, doit ainsi travailler avec des informations partielles. La constitution d'une image mentale est indispensable pour s'y déplacer efficacement ; les plans et les cartes sont les principaux outils de ce type d'espace.



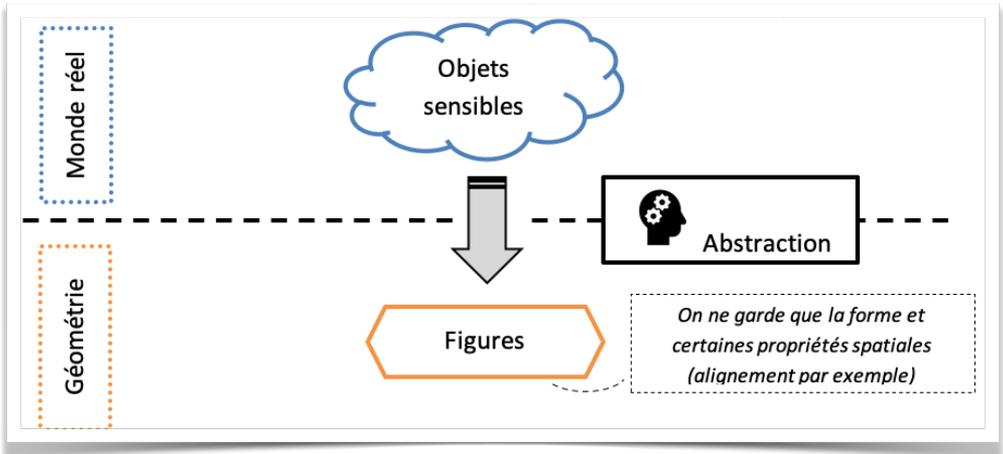
Pour un élève, la réflexion dans le meso-espace, et plus encore dans le macro-espace, est très différente de celle dans le micro-espace. En effet, ce dernier, qu'il soit constitué par une feuille de papier ou par des objets manipulables sur une table, est entièrement sous contrôle. L'élève en a, en permanence, une vue d'ensemble donc toutes les informations sont disponibles. **Dès le meso-espace** (la salle de classe, cour de récréation), la recherche de propriétés géométriques comme l'alignement ou la perpendicularité requiert **une plus grande abstraction** et souvent des outils différents (cordes, visés). C'est généralement là que l'enseignant peut relever des lacunes dans la maîtrise de certaines notions géométriques. **Des retours fréquents au micro-espace** permettent de mettre les élèves dans une situation qu'ils contrôlent et sur laquelle ils peuvent s'appuyer pour étendre leurs connaissances à des espaces plus grands.

## S'orienter dans l'espace

En haut, en bas, dessus, dessous, devant, derrière, etc. toutes ces orientations et positions relatives d'objets dans l'espace sont présentes dès les premiers apprentissages. Structurer l'espace, c'est aussi structurer sa pensée. Du CP au CE2, ces notions sont à la fois reprises et dépassées. « Reprises » car le codage de déplacement d'abord dans le micro/meso-espace, puis dans le macro-espace permet de réutiliser les notions comme en avant, en arrière, à droite, à gauche, dans des espaces de plus en grands. En particulier, au cycle 2, les élèves vont principalement rencontrer les meso- et macro-espaces qui requièrent une abstraction plus grande que le déplacement d'objets sur une table. Le quotidien de l'élève permet généralement de trouver des situations qui donnent sens à ces notions (par exemple : trouver le plus court chemin pour aller à la piscine ou au gymnase) en favorisant une alternance concret/abstrait (le concret d'un déplacement réel / l'abstraction d'un tracé sur une feuille).

## Les figures et la géométrie

Si par son étymologie la géométrie s'entend comme « mesure de la Terre », mathématiquement, il s'agit plus de la science de(s) l'espace(s) et des objets qui s'y trouvent. Comme pour les grandeurs, l'entrée dans les notions géométriques se fait par un **processus d'abstraction ancré dans le monde sensible**.



Dès l'école maternelle, les élèves manipulent des objets concrets tout en commençant à utiliser une terminologie qui tend à créer des familles abstraites de formes 🔍.



## Didactique

Sur le modèle de Granger repris par Tisseron, nous considérons que les objets matériels (dessins, objets manipulables, etc.), pour être utilisés par les élèves, sont inséparables des connaissances à leur sujet et des schèmes d'action permettant de s'en servir. (...) Un objet peut ainsi donner lieu à différents discours significatifs, selon l'ontologie dans laquelle nous nous plaçons. Faire entrer les élèves dans la géométrie à l'école primaire peut alors être vu comme une acculturation, consistant en une modification profonde des systèmes dans lesquels s'insèrent les objets de la situation, vers des manières de voir, d'agir, de parler conformes au cadre de pensée de la géométrie. Ce cheminement ne peut s'opérer que dans un mouvement de va-et-vient entre monde matériel et monde de la géométrie, à travers une succession d'interactions entre l'élève et des milieux matériels (au sens de Margolinas) qui ont été choisis.

Anne-Cécile Mathé (2012) Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol.32.2, pp.195-228.

Le « cube » du jeu de construction (jaune, qui tient dans la main, en bois peint, assez lourd, ...) devient progressivement le « cube » mathématique. Le mot est le même mais dans le premier cas il désigne l'objet matériel alors que dans le second il renvoie à une « idée de cube », une abstraction. C'est cette abstraction qui permettra ensuite de reconnaître cette forme cubique dans de nombreuses situations, sans la présence du cube en bois initial. Comme pour la plupart des notions mathématiques, concevoir la généralité abstraite d'un concept n'est pas

chose aisée et il est important que les élèves puissent **manipuler des référents matériels** aussi longtemps que possible. Ces derniers peuvent être trouvés parmi le matériel pédagogique de la classe, mais, dans le cas de la géométrie, on peut trouver de nombreux objets (par exemple certains emballages) qui sont tout aussi pertinents. Si besoin, l'enseignant peut réaliser, ou mieux encore, faire réaliser par ses élèves, des référents de solides ou de figures planes en papier ou en carton.

### **Les instruments et les tracés**

Il est d'usage de penser la progression générale des apprentissages en géométrie du cycle 1 au cycle 4 comme allant d'une géométrie perceptive à une géométrie des propriétés. Dans ce schéma, les cycles 2 et 3 constituent une jonction qui amène les élèves à repenser leurs connaissances sensibles des formes au travers d'instruments de tracé (on parle alors de géométrie instrumentée). La manipulation de la règle, du compas, d'un gabarit d'angle ou de figure, n'est pas innée et elle constitue un enjeu important des apprentissages du cycle 2.

Exemple :



*Trait droit*

*Segment (ou droite) tracé(e) à la règle*

Par la manipulation des instruments, les élèves commencent à découvrir certaines propriétés mathématiques des objets géométriques. Par exemple, au tracé à la main d'un cercle qui en fait une forme fermée « ronde » (i.e. à courbure constante), l'utilisation du compas ou d'une ficelle ajoute l'existence d'un centre et l'équidistance de tout point à ce dernier. Ces nouvelles propriétés ne servent pas encore à des démonstrations comme ce sera le cas au cycle 4, mais elles sont constitutives de la définition de la figure. L'activité de tracé participe ainsi à la compréhension des notions.

## Les figures géométriques : une « déconstruction dimensionnelle »

Dans la continuité des travaux de Raymond Duval, de nombreux didacticiens soulignent que passer d'une géométrie perceptive à une géométrie des propriétés s'accompagne nécessairement de l'élaboration progressive d'une **multiplicité des regards** sur les figures .

### Didactique

Dans ses recherches, la didacticienne Anne-Cécile Mathé met en évidence « le rôle essentiel que les interactions langagières sont susceptibles de jouer dans le processus de construction de connaissances en classe de géométrie. Partie prenante de l'action matérielle qu'elles accompagnent, les interactions langagières (...) [permettent] aux élèves d'interroger la manière de voir et d'agir sur les objets matériels en géométrie et ainsi leur interaction avec le milieu, tout en commençant à construire les concepts géométriques, enjeux d'apprentissage. »

Anne-Cécile Mathé (2012) Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol.32.2, pp.195-228.

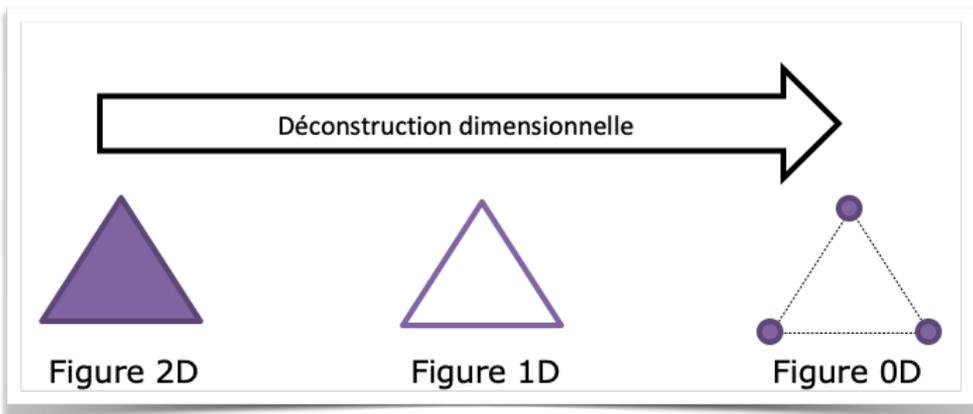
L'un des enjeux du cycle 2 est la stabilisation d'une définition correcte pour les figures usuelles comme le carré, le rectangle, le cercle, certains solides, etc. Pour ce faire, l'élève doit accepter d'ajouter à sa connaissance perceptive des figures un nouveau regard focalisé sur des

objets constituant la figure de plus en plus élémentaires. Par exemple, le rectangle du cycle 1, d'abord conçu comme une figure en deux dimensions (ce qui est déjà une abstraction car le matériel manipulé a une épaisseur) devient un ensemble de quatre côtés (segments) qui possèdent certaines propriétés caractéristiques (égalité en longueur deux à deux, parallélisme, perpendicularité). Mieux encore, ledit rectangle peut être utilisé uniquement par l'intermédiaire de ces quatre sommets qui suffisent à le définir. Ce processus est appelé **déconstruction dimensionnelle**  car on procède généralement des plus grandes dimensions vers les plus petites.

### Didactique

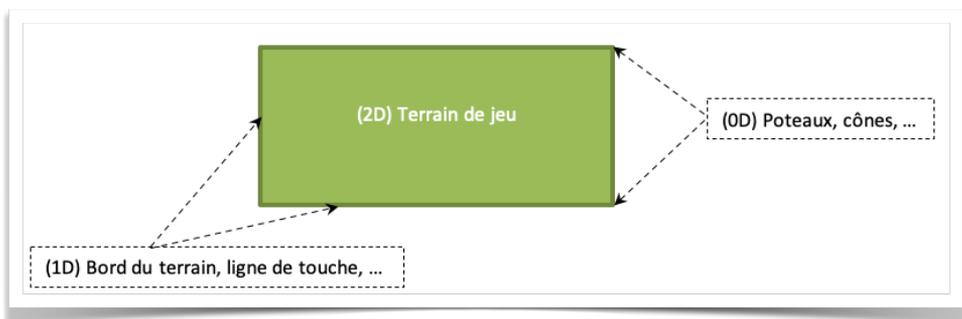
(...) la plupart des concepts géométriques visés au cycle 3 puis au collège s'expriment par des relations entre des lignes et / ou des points (relation d'incidence, alignement, parallélisme, perpendicularité, égalité de longueur de segments, milieu d'un segment, etc.). S'approprier ces concepts, les utiliser, nécessite d'être en mesure de faire émerger les sous-éléments des figures qui sont en relation, sous-éléments de dimension 2 (des surfaces, plans, on notera ici « 2D »), de dimension 1 (des lignes, segments ou droites, on notera « 1D »), voire de dimension 0 (des points, on notera « 0D »). C'est l'idée de la déconstruction dimensionnelle, Duval et Godin (2005), Perrin-Glorian et al. (2013).

Thomas Barrier, Christophe Hache, et Anne-Cécile Mathé (2014) Droites perpendiculaires au CM2 : restauration et activité des élèves, *Grand N* n°93, pp 13-37.



*On peut identifier trois niveaux de conceptualisation pour ce triangle. D'abord la figure plane en deux dimensions (2D) telle qu'elle peut être vue sur une feuille ou par un gabarit l'objet (dont on néglige l'épaisseur), puis la figure 1D on l'on s'intéresse uniquement aux segments qui la composent et enfin les trois sommets (0D) qui suffisent eux aussi pour définir le triangle.*

Plus proche d'un contexte de classe, l'exemple d'un terrain de football ou pour un jeu s'avère un exemple assez éclairant.



Si les élèves ont à réaliser un terrain pour une activité d'EPS, ils utiliseront successivement ces multiples regards sur la figure. La règle du jeu impose de jouer « dans » le terrain (regard 2D) et, si on peut, on le délimite par des lignes (regard 1D). Parfois, seuls quatre piquets sont placés (regard 0D). Au-delà de cette mise en évidence de différents niveaux de conceptualisation des figures géométriques, la déconstruction dimensionnelle permet aussi de rendre compte des liens qui existent entre les instruments de tracé et les propriétés mathématiques sous-jacentes. Au CP, puis au CE1 et au CE2, les élèves vont ainsi progressivement apprendre à manipuler règle, équerre, compas, et affiner leur habilité à réaliser des tracés corrects .

### Didactique

Une idée - force est qu'il existe un lien fondamental entre les instruments utilisés dans les tâches géométriques et le regard que l'on porte sur les figures. On peut par exemple utiliser des « instruments 2D » permettant de tracer ou reproduire des surfaces (gabarits de polygones divers, gabarits d'angles, etc.) ou des « instruments 1D » permettant de tracer des lignes (la règle par exemple).

Thomas Barrier, Christophe Hache, et Anne-Cécile Mathé (2014) Droites perpendiculaires au CM2 : restauration et activité des élèves, *Grand N* n°93, pp 13-37.

Pour terminer, notons que, parmi les figures vues à l'école, le cercle est un cas un peu particulier car il existe un terme spécifique pour la figure 2D (le disque) et pour la figure 1D (le cercle). La distinction existe aussi entre la boule 3D et la sphère 2D, mais, dans la pratique, elle est peu présente au cycle 2.

## Les droites à l'école : des objets complexes

Les récentes recherches en neurosciences ont montré que, parmi les rares compétences mathématiques qui semblent innées, la perception de certains axes (en particulier verticaux et horizontaux) est présente chez les êtres humains dès le plus jeune âge. Malheureusement, cette pré-connaissance s'avère vite insuffisante pour aborder sereinement et efficacement la géométrie. Les principaux objets géométriques que les élèves vont rencontrer au cycle 2 sont des points, des segments et des droites, des figures polygonales, des lignes courbes et le cercle, des angles, quelques solides (polyèdres et solides de révolution). Dans ce qui suit nous allons nous intéresser plus particulièrement au cas des droites et aux enjeux d'apprentissage qui s'y rattachent.

### C'est quoi une droite ? C'est grand comment ?

Dans le contexte scolaire, il faut se satisfaire d'une définition de la droite un peu *ad hoc*, dans le sens où elle va correspondre à ce qu'on attend de cet objet en termes de propriétés remarquables.

Une droite est une ligne : Cette affirmation permet de ranger les droites parmi les objets de dimension 1. Il y a alors un processus d'abstraction dont il convient de ne pas négliger la difficulté pour un élève. En effet, sur sa feuille, la

droite « tracée » a une certaine épaisseur mais il faut faire abstraction de la largeur du train et la considérer comme « sans épaisseur » ou « aussi fine que l'on veut ».

Une droite ne présente aucune courbure : Le simple fait de dessiner avec un stylo sur une feuille crée des représentations de lignes de dimension 1. Si on se restreint à la feuille, ou plus généralement, à une géométrie plane à deux dimensions, on peut définir la droite comme « celle qui réalise le chemin le plus court entre deux points ». Cette propriété, abstraite, est équivalente à « l'absence de courbure » dans le sens où, pour aller le plus rapidement d'un point à une autre, il ne faut pas faire de détours.

Une droite est infinie : Contrairement au segment qui présente les deux caractères précédents mais qui est limité par deux points, la droite est considérée comme « infinie » ou « aussi grande que l'on veut ». Comme pour l'absence d'épaisseur, il y a ici un processus d'abstraction qui rend très délicate la compréhension de cet objet par les élèves.

A-t-on une bonne définition ? Mathématiquement non, car même si elle est proche de certaines qui ont longtemps été présentes dans les traités savants, cette définition de la droite (unidimensionnelle, sans courbure et infinie) entraîne de nombreuses difficultés bien vite relevées au fil des siècles. Les mathématiciens ont donné d'autres

définitions (comme sous-espace de dimension 1 par l'algèbre ou comme géodésique dans des géométries dites non euclidiennes) mais qui s'avèrent bien trop complexes pour l'école. La définition « scolaire » de la droite est peu rigoureuse mais elle porte néanmoins en elle des concepts quant à eux bien mathématiques. Penser un objet de dimension 1 (uniquement), concevoir l'alignement parfait (jamais réalisable avec des objets concrets), imaginer une ligne s'étendre au-delà de la partie représentée relèvent du même type de processus intellectuel que, par exemple, la construction de nombres (qui sont aussi des abstractions). À ce titre, il s'agit réellement d'un travail mathématique qui a toute sa place à l'école.

### **Une droite, des droites, des relations**

Comme nous venons de le voir, la droite est, en soi, un objet complexe. Elle peut être utilisée seule comme pour la construction d'un segment ou la vérification d'un alignement mais très vite apparaissent des configurations en faisant intervenir deux voire plus .



## Didactique

Les propriétés d'incidence (intersection, appartenance d'un point à une droite...) qui sont des propriétés projectives sont essentielles et toute la géométrie s'appuie sur elles. Au collège, elles sont en général considérées comme déjà là ; or l'observation des élèves de sixième montre que ce n'est pas nécessairement le cas. Nous faisons l'hypothèse que c'est un maillon manquant dans l'enseignement (...)

Christine Mangiante-Orsola et Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2014) Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres, *Grand N*, n°94, pp 47-77, IREM de Grenoble.

Toutes ces situations peuvent s'avérer complexes pour un élève en début d'apprentissage ce qui permet d'identifier quelques difficultés récurrentes. Liées à la définition même de l'objet mathématiques considéré, ces difficultés sont parfois qualifiées **d'obstacles épistémologiques** .



## Didactique

(...) la notion d'obstacle apparaît comme fondamentale pour poser le problème de la connaissance scientifique. Il faut se référer à Bachelard (1938) qui, le premier a mis en avant cette idée. (...)

Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes.

Guy Brousseau (1998) Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. *La théorie des situations didactiques*, pp.115-160.

### Difficulté 1 : L'alignement et la dimension 1.

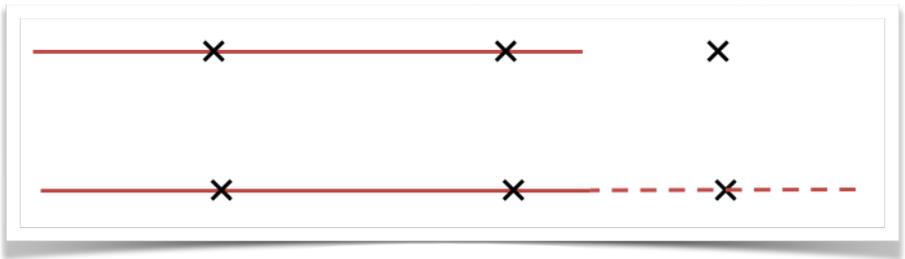
Dans certaines activités, les élèves sont amenés à vérifier un alignement et parfois, le cas échéant, de tracer la droite passant par les points considérés. Comme pour toute construction géométrique, il faut être très soigneux pour rendre visible ce type de propriétés. Contrairement aux objets mathématiques, les traits, les croix qui marquent la position de points, ont une épaisseur et occupent un certain espace. Ci-dessous une erreur prévisible d'élève :



Dans cette situation, l'un des points n'est pas aligné mais la croix qui le désigne est bien coupée par la droite. Les quatre points ne sont pas alignés. Dans la pratique, il est en fait impossible d'être certain d'un alignement car il y aura toujours une épaisseur de trait. En classe, à partir d'exemples, il convient surtout de s'assurer que les critères de tolérance sont communs pour l'enseignant et ses élèves. En fonction des besoins de l'activité, l'enseignant validera ou non une construction.

## Difficulté 2 : L'alignement et l'infini.

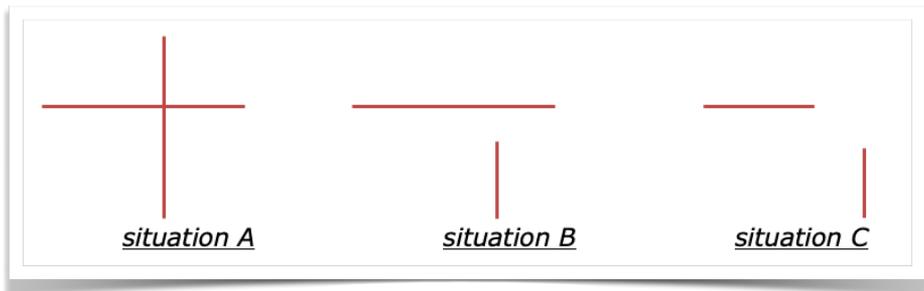
Comme nous l'avons dit précédemment, penser un objet infini n'est pas simple. Comme pour la première caractéristique, l'infini peut poser quelques difficultés en début d'apprentissage. En particulier, comprendre la droite comme « aussi grande que l'on veut » nécessite d'imaginer un tracé qui n'est pas sur la feuille.



Pour de nombreux élèves, les trois points ne sont pas alignés car le segment qui représente la droite ne passe pas par l'un des points. Si le besoin s'en fait sentir, on pourra visualiser la droite en prolongeant le segment ou, s'il ne faut pas surcharger une figure, placer une règle pour convaincre les élèves.

## Difficulté 3 : Perpendicularité et infini.

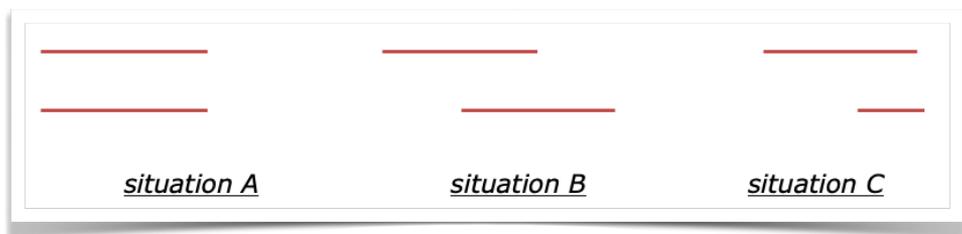
Les élèves peuvent rencontrer trois configurations différentes concernant les droites perpendiculaires. La situation A ne pose généralement pas de difficulté, par contre les situations B et C ne donnent pas à voir



immédiatement la présence de l'angle droit. Ces deux derniers cas sont assez fréquents lorsqu'on demande à des élèves de compléter une figure à partir d'une amorce. Les quelques lignes déjà présentes doivent être prolongées pour permettre la construction et/ou l'étude de propriétés. Comme tout obstacle épistémologique, il n'est pas possible de l'éviter, néanmoins on peut aider la compréhension des élèves en s'efforçant de **représenter les droites par des segments suffisamment grands** relativement au support. En présence d'une ligne de 20 cm sur une feuille ou de 1 m au tableau, l'élève sera plus à même d'imaginer un objet in(dé)finiment étendu que s'il est toujours confronté à des segments de petite longueur. Pour une bonne perception de la droite, un travail dans la cour ou, *a minima*, à l'échelle de la salle de classe est une approche intéressante. On pourra, par exemple, réaliser des alignements de plots pour une séance d'EPS, vérifier l'alignement des différentes rangées de tables si la classe est ainsi disposée, ou encore aligner des affichages au mur de productions d'élèves à l'aide d'un cordeau bien tendu.

Difficulté 4 : Parallélisme, infini et positionnement prototypique.

Même si la notion ne relève pas explicitement du cycle 2, les élèves rencontrent néanmoins des figures présentant des côtés parallèles comme les carrés ou les rectangles. Au cours du cycle 3, des difficultés proches de celles liées à la perpendicularité vont apparaître tant par la présence de l'infini que l'usage de situations trop souvent prototypiques de droites parallèles.



La première situation, que les droites soient horizontales, verticales ou obliques, est généralement utilisée pour représenter des droites parallèles. Si elle peut convenir pour comprendre cette notion dans le cas de côtés parallèles, elle s'avère limitée dans d'autres situations. Comme pour la perpendicularité, l'enseignant vigilant n'hésitera pas à proposer à ses élèves des situations comme B ou C qui permettent d'aborder toute la richesse du parallélisme.

## Remarques sur les apports du CP

Le chapitre « Espace et géométrie » est riche de nombreux apports spécifiques au CP. Le repérage dans l'espace, les connaissances des figures, leur tracé, etc. constituent des outils dont la maîtrise sera approfondie au cours du cycle 2 et qui seront la base de l'apprentissage de la géométrie au cycles suivants.

### Déplacements et codages

Comprendre son environnement, c'est aussi savoir s'orienter et se déplacer avec assurance. En lien avec les premiers apprentissages de maternelle (découverte du monde), le CP permet d'affiner la compréhension de l'espace, des positionnements des objets dans ce dernier, et les déplacements. L'un des principaux outils introduits est le quadrillage. Ce codage est très utilisé dans la vie courante car il apparaît dans des jeux (bataille navale) et sur des plans à petite échelle (plan de ville) ou grande échelle (pays, Terre). En classe, l'alternance d'activités dans le meso-espace où l'élève se déplace réellement et le micro-espace où il modélise un parcours permet ce passage de la découverte du monde au codage de déplacements.

## Les instruments : la règle non graduée

La règle non graduée est le premier instrument de tracé géométrique que les élèves rencontrent .

### Didactique

Articulation langage, gestes et concepts géométriques

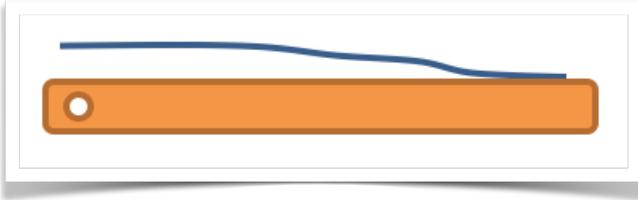
Dans l'enseignement de la géométrie en classe, le langage intervient à double titre : comme moyen de l'activité mathématique et comme moyen de l'activité didactique. De plus, particulièrement en géométrie en primaire voire au début du collège, le discours accompagne souvent des actions sur des objets matériels (y compris les tracés sur des figures) et s'accompagne de gestes. Ces discours et ces gestes sont ce que Bosch et Chevallard appellent des ostensifs et sont en relation avec des non ostensifs (concepts géométriques notamment mais pas seulement) qui les gouvernent.

Christine Mangiante-Orsola et Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2014) Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres, *Grand N*, n°94, pp 47-77, IREM de Grenoble.

Sa découverte et sa maîtrise relève principalement de la classe de CP au cours de laquelle les élèves vont apprendre à manier ce nouvel outil pour tracer des segments, des droites et pour vérifier des alignements. Le maniement correct de la règle nécessite une bonne motricité et de l'entraînement. Dans les premiers temps, les élèves peuvent rencontrer des difficultés qui vont rendre les tracés peu esthétiques voire incorrects sur le plan mathématique.

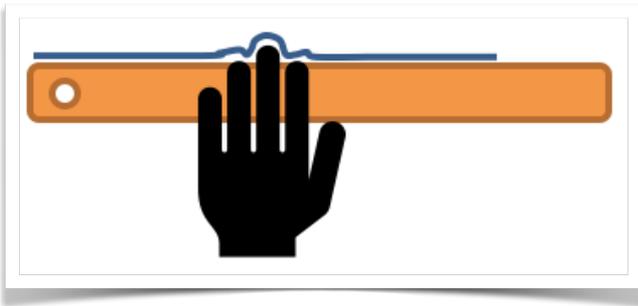
Voici deux exemples de mauvaises manipulations qu'on rencontre régulièrement chez les élèves :

Cas 1 : *La règle qui glisse.*



Sous la pression du stylo ou du crayon, la règle glisse vers le bas ce qui produit ce type de lignes. Le maintien ferme de l'outil sur la feuille fait partie des consignes à souvent rappeler en début d'apprentissage.

Cas 2 : *Les doigts qui dépassent.*



L'élève a généralement vu l'enseignant tracer les segments d'un rapide balayage de gauche à droite avec un crayon ou une craie, il cherchera donc assez naturellement à reproduire ce geste au risque de rencontrer des obstacles (en particulier ses propres doigts) sur le passage. Cette

situation est malheureusement aussi parfois la conséquence de la volonté de bien bloquer la règle pour éviter la difficulté précédente. Un tracé de qualité peut prendre du temps. Mieux vaut tracer lentement et correctement qu'obtenir des figures qui ne permettent pas le travail des propriétés mathématiques.

### **La ficelle, le cordeau**

Instrument de tracé très ancien, la ficelle peut s'avérer très efficace pour tracer des droites en particulier à grande échelle. En effet, au-delà d'un mètre environ, il est assez difficile de construire une règle parfaitement droite et suffisamment rigide pour ne pas se déformer sous son propre poids. Au sol, dans la cour par exemple, une ficelle bien tendue permet de matérialiser une portion de droite et de tracer éventuellement des figures de grandes dimensions. Ce travail géométrique à une autre échelle (**méso-espace**) que la feuille (**micro-espace**) contribue à donner du sens aux droites, mais aussi à toute autre figure que l'élève peut rencontrer.

## La visée



*Trois cônes de chantier alignés*

Comment aborder les droites sans aucun instrument ? Si on s'intéresse aux méthodes anciennes en astronomie ou pour l'arpentage, la visée à l'œil nu y apparaît comme le premier outil utilisé par l'homme pour faire des relevés ou construire des bâtiments. Dans le contexte scolaire, l'usage de la visée est très intéressant car elle **rend perceptible l'infini** présent dans la définition de la droite. On peut par exemple délimiter un terrain de jeu ou créer une ligne droite dans un parcours pour vélos en alignant, sur plusieurs dizaines de mètres si besoin, des plots ou des piquets.

## Remarques sur les apports du CE1 et du CE2

Pour la géométrie, la principale nouveauté du CE1 est l'introduction de nouveaux outils : l'équerre et le compas. Nous avons rapidement évoqué le cas des cercles dans la partie précédente, nous nous attachons ici plutôt aux angles droits et la perpendicularité.

### L'utilisation d'un gabarit d'angle droit ou de l'équerre

Le mot perpendiculaire vient du latin *perpendicularis* (perpendiculaire) qui lui-même est dérivé du mot *perpendicularum* qui signifie « fil à plomb ». Lorsqu'on l'utilise correctement, le fil à plomb permet d'obtenir une direction (verticale) perpendiculaire au sol (horizontal). Ces quelques éléments d'étymologie rappellent l'ancrage de la notion de perpendicularité dans les pratiques des bâtisseurs. Ainsi, notre environnement quotidien recèle de nombreuses situations qui donnent à voir des droites perpendiculaires comme l'arête d'un mur par rapport au sol, un poteau planté bien droit, mais aussi des dalles carrées sur le sol ou les angles aux coins du tableau. L'enseignant pourra à tout moment y faire référence pour rendre concrète la perpendicularité.

à l'école, les droites perpendiculaires sont généralement vues en même temps que l'introduction de l'angle droit 🔍.

### 🔍 Didactique

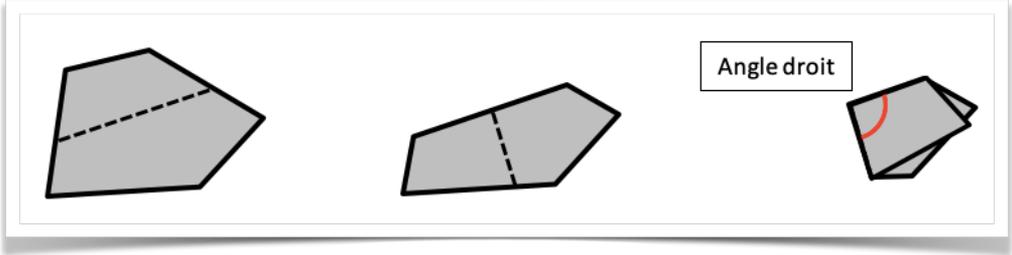
À l'école, l'angle droit est le plus souvent implicitement introduit comme un secteur angulaire particulier, c'est-à-dire un élément de surface vérifiant une propriété spécifique. Vérifier si un angle est droit consiste, par exemple, dans de nombreuses tâches, à vérifier si un gabarit d'angle droit donné (équerre ou autre) se superpose ou non avec le secteur angulaire concerné (...) le concept d'angle droit s'analyse alors comme une propriété d'objet 2D. Le concept de droites perpendiculaires met en jeu des objets différents en nature et en nombre. Percevoir une perpendicularité nécessite l'identification d'une relation particulière entre deux objets rectilignes. Le concept de droites perpendiculaires s'analyse donc comme une relation binaire entre deux objets 1D.

Thomas Barrier, Christophe Hache, et Anne-Cécile Mathé (2014) Droites perpendiculaires au CM2 : restauration et activité des élèves, *Grand N* n°93, pp 13-37.

Mathématiquement, l'angle droit est l'angle qui partage un angle plat en deux angles égaux.



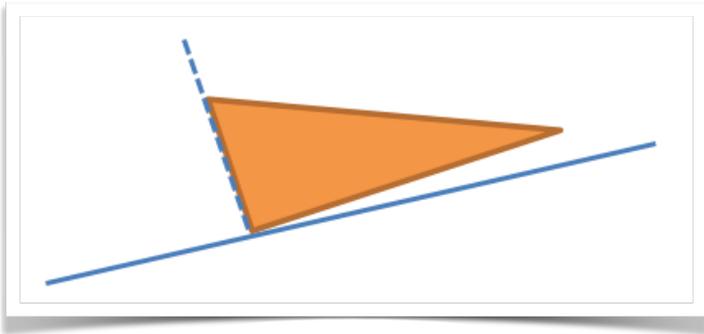
Cette définition permet de justifier l'obtention d'un gabarit d'angle droit en pliant n'importe quel morceau de papier en deux puis une seconde fois le long du premier pli.



Pour fournir rapidement des gabarits d'angles droits aux élèves, on peut aussi découper de manière irrégulière les quatre coins d'une feuille A4 de couleur.

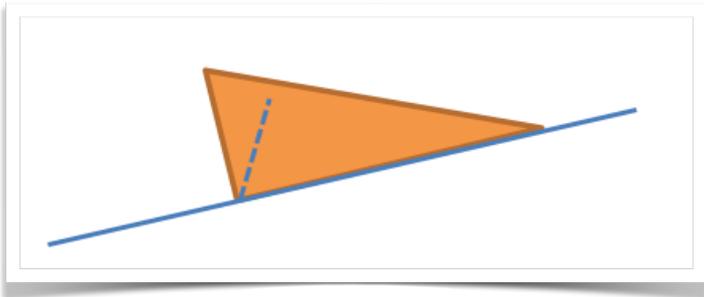
Que ce soit pour le gabarit d'angle, qu'on utilisera principalement pour vérifier des angles droits, ou pour l'équerre, plus rigide, qu'on privilégiera pour les tracés, les erreurs de manipulation sont assez courantes. La principale est l'oubli du placement correct le long de l'une des lignes de la figure ou de l'objet dont on étudie les propriétés.

Cas 1 : L'équerre qui « décolle »



Cette situation est très fréquente dans lors des premières manipulations. Il convient d'insister sur la précision du positionnement car ce type d'approximation va entrainer des mauvais tracés ou une mauvaise analyse d'une figure.

Cas 2 : Les traits masqués



Parfois lors de l'utilisation d'un gabarit d'angle ou d'une équerre faite dans un matériau opaque, l'un des segments de la figure est masqué par l'outil ce qui ne pas permet d'obtenir l'information voulue. Il est bon dans ce cas, soit d'utiliser une équerre transparente, soit, lorsque c'est

possible, de revenir à la définition et de vérifier « de l'autre côté » (à gauche du segment en pointillés sur notre figure).

Au cycle 2, les élèves n'étudient que l'angle droit, les angles dans toute leur généralité seront traités aux cycles 3 (angles aigus et obtus) et 4 (mesure des angles en degrés).

## Le mot de la fin

---

**C**'est ici que se termine notre voyage dans l'enseignement des mathématiques et ses enjeux au cycle 2. Nous n'avons certes pu traiter ni de toutes les notions ni de toutes les questions mais la méthode importe finalement plus que le contenu. Réfléchir sur l'enseignement des mathématiques, penser ce qu'on propose aux élèves nécessite à la fois une bonne connaissance des notions, un étayage didactique, une connaissance précise des élèves et de l'école, et une expérience de pratique réelle. Tous ces aspects, et sans doute d'autres encore, contribuent à une réflexion qui se prolonge tout au long d'une carrière. Plus encore que ses élèves, l'enseignant apprend chaque jour et nous espérons

que ce livre aura pu contribuer un peu à cet enrichissement. Au fil des pages nous n'avons qu'effleuré certaines difficultés, pistes pédagogiques, recherches didactiques, etc. mais nous avons essayé de fournir des références qui permettront à ceux qui veulent prolonger leur réflexion d'aller consulter d'autres ouvrages ou articles et ainsi poursuivre leur cheminement.

*« Un enfant, un professeur, un livre, un crayon peuvent changer le monde. » Malala Yousafzai*

## À propos de l'auteur

---



**A**près des études de mathématiques et un doctorat en épistémologie et histoire des mathématiques, Thomas De Vittori se consacre désormais entièrement à la formation initiale et continue des enseignants du premier et du second degré. Maître de conférences, auteur de plusieurs articles et ouvrages, ses travaux de recherche articulent ces deux dimensions au travers de l'analyse didactique de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement et en formation.

[www.thomasdevittori.net](http://www.thomasdevittori.net)

ISBN 978-2-9575860-0-4