



HAL
open science

Action de groupe et semi-stabilité du produit tensoriel

Gaël Rémond

► **To cite this version:**

Gaël Rémond. Action de groupe et semi-stabilité du produit tensoriel. *Confluentes Mathematici*, 2019, 11 (1), pp.53-57. 10.5802/cml.55 . hal-03041911

HAL Id: hal-03041911

<https://hal.science/hal-03041911v1>

Submitted on 5 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Action de groupe et semi-stabilité du produit tensoriel

Gaël RÉMOND

juin 2019

Abstract. — We prove a conjecture of Coulangeon and Nebe which is a special case of a conjecture of Bost. Given two semi-stable metrized vector spaces over a number field we show that their tensor product is also semi-stable whenever there is a group acting on one of the spaces in a multiplicity-free way.

1 Résultat

Nous démontrons dans cette note un cas particulier d’une conjecture de Bost. Nous utilisons le langage des espaces adéliques rigides sur une extension algébrique de \mathbb{Q} , introduit dans [GR] (voir les rappels ci-dessous). Il serait complètement équivalent de parler de fibrés vectoriels hermitiens sur $\text{Spec}\mathcal{O}_K$ comme Bost ou de \mathcal{O}_K -réseaux comme Coulangeon et Nebe [CN] pour un corps de nombres K .

Théorème 1.1 *Soient K une extension algébrique de \mathbb{Q} et E, F deux espaces adéliques rigides sur K . On suppose qu’il existe un groupe G agissant sur l’espace adélique $E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$ de sorte que $E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$ soit la somme directe de sous- $\overline{\mathbb{Q}}$ -espaces vectoriels G -irréductibles deux à deux non isomorphes. Alors*

$$\mu_{\max}(E \otimes F) = \mu_{\max}(E) + \mu_{\max}(F).$$

La conjecture de Bost prédit que ceci devrait être vrai sans aucune hypothèse d’action de groupe. Nous renvoyons à [CN] pour plus de contexte et d’autres résultats connus sur cette conjecture. Notre énoncé établit la conjecture 2 de [CN] et généralise le résultat principal de cet article qui prouvait l’égalité de pentes en supposant de plus que

- (a) E et F sont définis sur un corps de nombres CM,
- (b) il existe une seconde action d’un groupe H sur $F \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$ vérifiant la même condition,
- (c) $E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$ est somme d’au plus deux composantes irréductibles.

Après des rappels et préparatifs dans la partie suivante, nous montrons le théorème dans la partie 3. L’hypothèse sur G sert uniquement, comme dans le texte de Coulangeon et Nebe dont nous utilisons la proposition 2.2, à établir que le sous-espace déstabilisant de $E \otimes F$ s’écrit (après extension des scalaires) sous la forme

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i \quad \text{où} \quad E = \bigoplus_{i=1}^n E_i \quad \text{et} \quad F_1, \dots, F_n \subset F.$$

Le reste de la démonstration consiste à minorer (par récurrence) la hauteur d’un tel sous-espace du produit tensoriel : en termes de pentes, nous montrons (voir corollaire 3.2) pour tous sous-espaces E_i et F_i comme ci-dessus

$$\mu\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i\right) \leq \mu_{\max}(E) + \mu_{\max}(F).$$

2 Préliminaires

Nous rappelons les définitions de la partie 3 de [GR] reprises dans le paragraphe 2.2 de [Ga] (voir aussi le paragraphe 3.2 de ce second texte pour les pentes).

Soient K une extension algébrique de \mathbb{Q} , $V(K)$ l'ensemble de ses places et \mathbb{A}_K ses adèles. Un espace adélique sur K est un couple $(E, (\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)})$ formé d'un espace vectoriel E sur K de dimension finie et d'une collection de normes $\|\cdot\|_v$ sur $E \otimes K_v$ pour tout $v \in V(K)$. Par abus de notations, nous notons E ce couple. L'espace adélique standard K^n ($n \geq 1$) est donné par les normes

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{K^n, v} = \max(|x_1|_v, \dots, |x_n|_v) \quad \text{si } v \text{ est ultramétrique et}$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{K^n, v} = (|x_1|_v^2 + \dots + |x_n|_v^2)^{1/2} \quad \text{si } v \text{ est archimédienne.}$$

Un espace adélique E de dimension $n \geq 1$ est dit rigide s'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ et une base e_1, \dots, e_n de E de sorte que pour tout $v \in V(K)$ et tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in K_v^n$ on a

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_{E, v} = \|A_v X\|_{K^n, v}.$$

Il y a une notion naturelle d'extension des scalaires pour les espaces adéliques rigides : si $K \subset L$ et si E est un espace adélique rigide sur K , on définit des normes sur $E \otimes_K L$ en utilisant la même formule pour une base (e_1, \dots, e_n) de E et une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$. Comme toute telle matrice adélique est à coefficients dans les adèles d'un corps de nombres, tout espace adélique rigide est l'extension d'un espace sur un corps de nombres K_0 (on dit aussi que E est défini sur K_0).

Nous définissons maintenant la hauteur d'un espace adélique rigide E sur K . Fixons pour cela un corps de nombres K_0 sur lequel E est défini et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{K_0})$ une matrice adélique correspondante. On pose

$$H(E) = \prod_{v \in V(K_0)} |\det A_v|_v^{[(K_0)_v : \mathbb{Q}_v] / [K_0 : \mathbb{Q}]}.$$

On vérifie directement que ceci est indépendant du choix de K_0 et A et que l'on obtient une notion stable par extension des scalaires. Lorsque E est non nul, nous introduisons sa hauteur réduite

$$H_r(E) = H(E)^{1/\dim E}$$

puis sa hauteur (réduite) minimale

$$H_{\min}(E) = \inf\{H_r(F) \mid 0 \neq F \subset E\}.$$

On montre que cet infimum est atteint et qu'il existe même un unique sous-espace F de dimension maximale vérifiant $H_r(F) = H_{\min}(E)$. On l'appelle sous-espace déstabilisant de E (voir le lemme 14 de [Ga]). Ici l'unicité permet de montrer que $H_{\min}(E)$ est invariant par extension des scalaires. De même, si un groupe G agit sur l'espace adélique E (ce qui signifie que pour tout $g \in G$ l'action de g sur $E \otimes K_v$ est une isométrie), alors le sous-espace déstabilisant est stable sous l'action de G .

Les hauteurs définies ci-dessus ont des avatars logarithmiques traditionnellement notés $\deg = -\log H$ (degré d'Arakelov), $\mu = -\log H_r$ (pente) et $\mu_{\max} = -\log H_{\min}$ (pente maximale).

Si A est un sous-espace vectoriel d'un espace adélique rigide E , il hérite par restriction de normes d'une structure adélique rigide (déjà utilisée pour définir $H_{\min}(E)$ ci-dessus). De même les normes d'opérateur donnent une telle structure sur le dual E^\vee et, par restriction, sur $A^\perp = \{\ell \in E^\vee \mid \ell(A) = 0\}$. Enfin, si F est un second espace adélique rigide, le produit tensoriel $E \otimes F$ hérite lui aussi d'une structure adélique rigide. Nous utilisons les propriétés élémentaires suivantes de ces constructions.

Lemme 2.1 Soient E et F des espaces adéliques rigides sur K et soient A et B des sous-espaces vectoriels de E .

- (1) $H(E \otimes F) = H(E)^{\dim F} H(F)^{\dim E}$.
- (2) $H(A^\perp) = H(A)/H(E)$.
- (3) $H(A + B)H(A \cap B) \leq H(A)H(B)$.

Démonstration. Voir les propositions 5 et 6 de [Ga]. □

La formule (1) s'écrit aussi $H_r(E \otimes F) = H_r(E)H_r(F)$. Ainsi le sous-espace de $E \otimes F$ obtenu par produit tensoriel des sous-espaces déstabilisants de E et de F a pour hauteur réduite $H_{\min}(E)H_{\min}(F)$. En particulier, nous avons immédiatement $H_{\min}(E \otimes F) \leq H_{\min}(E)H_{\min}(F)$ et la conjecture de Bost affirme qu'il y a égalité.

Nous aurons également besoin du fait suivant qui dit qu'il y a égalité dans (3) pour des sous-espaces particuliers du produit tensoriel.

Lemme 2.2 Soient E et F des espaces adéliques rigides sur K et $A \subset E$, $B \subset F$ des sous-espaces vectoriels. Alors

$$H(E \otimes B)H(A \otimes F) = H(E \otimes B + A \otimes F)H(A \otimes B).$$

Démonstration. Dans le dual $(E \otimes F)^\vee \simeq E^\vee \otimes F^\vee$, nous avons

$$(E \otimes B + A \otimes F)^\perp = (E \otimes B)^\perp \cap (A \otimes F)^\perp = (E^\vee \otimes B^\perp) \cap (A^\perp \otimes F^\vee) = A^\perp \otimes B^\perp.$$

Les formules (1) et (2) du lemme précédent donnent

$$\begin{aligned} H(E \otimes B + A \otimes F) &= H(E \otimes F)H(A^\perp \otimes B^\perp) \\ &= H(E)^{\dim F} H(F)^{\dim E} (H(A)/H(E))^{\dim B^\perp} (H(B)/H(F))^{\dim A^\perp} \\ &= H(E)^{\dim B} H(F)^{\dim A} H(A)^{\dim B^\perp} H(B)^{\dim A^\perp}. \end{aligned}$$

En utilisant encore la formule (1), il vient

$$\begin{aligned} H(E \otimes B + A \otimes F)H(A \otimes B) &= H(E)^{\dim B} H(B)^{\dim E} H(F)^{\dim A} H(A)^{\dim F} \\ &= H(E \otimes B)H(A \otimes F). \end{aligned}$$

□

3 Conclusion

Soient E et F deux espaces adéliques rigides. Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$. Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de F et $F_0 = \{0\}$.

Proposition 3.1 Dans le cadre ci-dessus, nous avons

$$H\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i\right) \geq \prod_{i=1}^n H\left(\bigoplus_{j=i}^n E_j\right)^{\dim F_i - \dim F_{i-1}} \prod_{i=1}^n H(F_i)^{\dim E_i}.$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, les deux membres sont égaux par la formule (1). Si $n \geq 2$, nous utilisons l'inégalité (3) avec

$$A = \bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i \quad \text{et} \quad B = \bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_i.$$

Cela donne que le membre de gauche de l'énoncé est supérieur à

$$H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_i\right) H\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i + \bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F\right) H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F\right)^{-1}.$$

En appliquant maintenant le lemme 2.2 avec $A = E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ et $B = F_1$, cette quantité vaut

$$H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_i\right) H(E \otimes F_1) H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_1\right)^{-1}$$

puis

$$H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i \otimes F_i\right) H(E)^{\dim F_1} H\left(\bigoplus_{i=2}^n E_i\right)^{-\dim F_1} H(F_1)^{\dim E_1}$$

par la formule (1). Il suffit alors de minorer le premier terme grâce à l'hypothèse de récurrence pour obtenir l'inégalité souhaitée. \square

Corollaire 3.2 *Sous les mêmes hypothèses, nous avons*

$$H_r\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i\right) \geq H_{\min}(E) H_{\min}(F).$$

Démonstration. Quitte à permuter les indices, nous pouvons supposer $\dim F_i \geq \dim F_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$. Il suffit alors de minorer $H_r(\bigoplus_{j=i}^n E_j) \geq H_{\min}(E)$ et $H_r(F_i) \geq H_{\min}(F)$ pour $1 \leq i \leq n$ dans la minoration de la proposition. \square

Plaçons-nous finalement sous les hypothèses du théorème 1.1. Comme H_{\min} est invariant par extension de corps, nous pouvons supposer $K = \overline{\mathbb{Q}}$. Notons alors $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ l'unique décomposition en somme de sous-espaces G -irréductibles. Si $U \subset E \otimes F$ est le sous-espace déstabilisant, il est stable sous l'action de G donc il existe des sous-espaces F_1, \dots, F_n de F avec

$$U = \bigoplus_{i=1}^n E_i \otimes F_i$$

(proposition 2.2 de [CN]). Le corollaire donne donc

$$H_{\min}(E \otimes F) = H_r(U) \geq H_{\min}(E) H_{\min}(F)$$

puis l'égalité puisque nous avons toujours $H_{\min}(E) H_{\min}(F) \geq H_{\min}(E \otimes F)$. Le théorème 1.1 est ainsi établi.

Références

- [CN] R. Coulangeon et G. Nebe. Slopes of Euclidean lattices, tensor product and group actions. *Israel J. Math.* à paraître. [arXiv:1806.04984v2](https://arxiv.org/abs/1806.04984v2)
- [Ga] É. Gaudron. Minima and slopes of rigid adelic spaces. 2018. 26 pages. <http://math.univ-bpclermont.fr/~gaudron/art18.pdf>
- [GR] É. Gaudron et G. Rémond. Corps de Siegel. *J. reine angew. Math.* 726. 2017. p. 187–247.

Gaël Rémond
 Institut Fourier, UMR 5582
 CS 40700
 38058 Grenoble Cedex 9
 France
Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr