



HAL
open science

**Fragments d'un questionnement amoureux : la rigueur
en musique et philosophie interrogée par un
mathématicien,**

Thierry Paul

► **To cite this version:**

Thierry Paul. Fragments d'un questionnement amoureux : la rigueur en musique et philosophie interrogée par un mathématicien,. Thierry Paul, Michael Schmidt. RIGUEUR, Spartacus, 2021. hal-03039042

HAL Id: hal-03039042

<https://hal.science/hal-03039042>

Submitted on 3 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**FRAGMENTS D'UN QUESTIONNEMENT AMOUREUX :
LA RIGUEUR EN MUSIQUE ET PHILOSOPHIE
INTERROGÉE PAR UN MATHÉMATICIEN**

par

Thierry PAUL

Résumé. — Le mathématicien souffre et jubile dans la rigueur. Le “dernier petit lemme pour la route” qui mène à la construction finale du beau Théorème peut résister longtemps, sans garantie d’ailleurs qu’il existe vraiment. Mais lorsqu’il apparaît enfin, c’est toute une voûte qui se cabre et qui, alors, donne pleinement satisfaction. Le non-mathématicien ne voit souvent que cet énoncé final, et perçoit rarement la peine et la jubilation qui vont avec l’éclosion du lemme salvateur. De son côté, le mathématicien en souffrance regarde avec envie le discours philosophique et musical, combien de fois tenté par ces “passer-outre” qui font la fierté du philosophe et du compositeur. Et de se demander, transi : mais comment diable font-ils ?

Que la rigueur soit le réel en mathématique est la base d’une vision non-platonicienne. Mais différentes occurrences de la rigueur en musique et en philosophie la ferons se rapprocher de plus en plus à nos yeux d’une certaine idée de réalisme. L’identification sera même totale pour nous en ce qui concerne la mécanique quantique, permettant de clore à nos oreilles tout débat sur son interprétation.

La rigueur nous apparaît donc in fine comme le réel du mathématicien, du musicien, du philosophe, et, puisqu’il est quantique, du monde même.

Table des matières

1. Une anecdote	1
2. Poincaré, les résultats négatifs et le membre de droite non égal mais juste	3
3. Membres de droite et signes égal en musique et philosophie	6
4. De Chevalley à Stravinsky : le chef d’œuvre inconnu	8
5. Rigueur math. vs. musique : question de temps	9
6. Rigueur math. vs. philo. : question d’espace	11
7. Rigueur, un mal nécessaire, un bien suffisant ? Ou la plainte du but.	12

8. Retour aux limites du pays fertile : plaidoyer pour la musique des années cinquante	13
9. Réalisme en math, philo, musique.	16
10. rigueur = réalisme	17
11. La rigueur est une histoire de réalisme : l'exemple de la mécanique quantique	19
Références	22

1. Une anecdote

Un étudiant, ayant écrit une égalité totalement fausse, vient se plaindre à son professeur d'avoir obtenu zéro point, argumentant que *"le membre de droite est correct. Je devrais donc obtenir la moitié des points!"*.

Cette anecdote rend habituellement hilares tous les mathématiciens à qui on la raconte, mais fait difficilement (à peine) sourire les non-mathématiciens. Il me semble intéressant de se demander pourquoi.

Le signe = est le signe roi des mathématiques, il exprime l'identité entre deux choses a priori différentes et est emblématique de la jouissance du mathématicien dominant la puissance de corps opposés.

Le carré de l'hypoténuse = la somme des carrés des deux autres côtés.

Voilà bien un énoncé choc, valable pour tous les triangles rectangles, que seule la puissance du mathématicien peut augurer.

Mais notons tout d'abord, et nous y reviendrons largement plus tard, que pour qu'il y ait beauté dans l'égalité entre un membre de droite et un membre de gauche, il faut que les dits membres soient beaux eux-aussi, soient savoureux, soient puissants chacun de son côté. Si le triangle n'est pas rectangle, une formule analogie au Théorème de Pythagore existe, mais les membres de droite et de gauche font intervenir non seulement leurs longueurs, mais aussi l'angle entre deux côtés et (pas mal) de trigonométrie. Et patatras, tout l'esthétique s'effondre, sali par les cosinus et les sinus, voire même les tangentes. Les beaux mots de carré et de somme n'y suffisent plus.

Il y a donc bien des membres de droite qui perdurent, dépassent l'égalité (même fausse) avec un membre de gauche. Et l'étudiant de tout à l'heure méritait peut-être mieux que zéro....

Nous verrons par la suite comment des membres de droite existent sans égalité à leur gauche en musique, peut-être en philosophie, mais aussi en

mathématiques, mais voyons tout de suite comment le piédestal de l'égalité lui-même est fait d'argile et non de marbre.

Depuis longtemps, le signe $=$ se décline sous différentes formes

$\dots = \dots$ modulo ϵ
 $\dots = \dots$ presque partout
 $\dots = \dots$ asymptotiquement lorsque $x \rightarrow \infty$
 $\dots = \dots$ sur les rationnels
 $\dots = \dots$ au sens que \dots
etc

jusqu'au déclin suprême : le signe \leq .

Dire que $a \leq b$, c'est dire que, peut-être $a = b$, mais que peut-être pas, et que, de toutes façons, a est plus petit que b : le jeu des possibles s'est considérablement élargi. Certains mathématiciens⁽¹⁾, au moins en plaisantant, pensent que c'est là un véritable déclin car les mathématiques doivent dire le verbe (égaler), qu'ils doivent être les seuls à le dire, et ne doivent dire rien d'autre.

Si peu de mathématiciens pensent encore ainsi, je ne suis pas sûr que l'image qu'ils ont donnée des mathématiques ne perdure pas dans le grand public, réduisant l'idée de rigueur, justement, à celle d'identité rigide. Et de là la méprise entre les mathématiques d'un côté et de l'autre les arts : ces pays où les membres de droite peuvent être justes sans être égaux aux membre de gauche.

2. Poincaré, les résultats négatifs et le membre de droite non égal mais juste

S'il est un mathématicien qui a travaillé dans l'identité et son contraire, dans le vrai et le faux, le positif et le négatif, c'est bien Henri Poincaré.

"J'attire l'attention du lecteur sur les résultats négatifs présents dans ce mémoire..."

C'est en ces termes étranges que Poincaré conclut l'introduction de son célèbre mémoire sur la mécanique quantique [19]. Étranges pour nous chercheurs du XXIème siècle à qui l'on a inculqué la culture du positif, unique méthode pour obtenir un poste, un financement. Mais pas étranges du tout pour Poincaré.

1. J'ai entendu au Courant Institute en 1988 Peter Lax présenter son ami Raoul Bott ne disant que ce dernier avait choisi l'algèbre parce que "en analyse, il n'y a jamais d'égalité, seulement des inégalités!"

En effet, dans cet article, que fait-il? Il veut montrer que la célèbre loi de Planck, obtenue par ce dernier au prix d'une discrétisation ad hoc, les quanta, peut être dérivée, établie dans le cadre de la physique classique, celle du continu. Autrement dit, il voudrait montrer que

$$\textit{Loi de Planck} = \textit{physique des milieux continus}$$

mais il n'y arrive pas. Il obtient donc que

$$\textit{Loi de Planck} \neq \textit{physique des milieux continus}$$

c'est son résultat *négatif*. Mais, en fait, il montre que

$$\textit{Loi de Planck} = \boxed{\textit{physique des quanta}}$$

au sens que

$$\textit{seule l'hypothèse des quanta} \Rightarrow \textit{la loi de Planck}.$$

QED.

Ce que Poincaré présente comme un résultat négatif est en fait une démonstration de la nécessité de l'hypothèse des quanta de Planck. Et cette nécessité rend le "membre de droite" encadré dans le diagramme ci-dessus absolument détaché, indépendant de l'égalité qui le précède : la physique quantique est réellement née ontologiquement ce jour-là. Elle survivra à tout, sans sa béquille qui la lie à la loi de Planck qui, elle, n'étant qu'une loi, sera surpassée par l'équation de Schrödinger quelques vingt-cinq ans plus tard.

Il semble que Poincaré ne soit pas vraiment conscient de cet état de fait, d'où la phrase sibylline qui conclut l'introduction de l'article. Il s'est posé un problème, a espéré le résoudre dans le positif en restant dans le domaine de la science classique (c'est son côté conservateur) et échoue à trouver une distribution continue d'énergie qui entraîne la loi de Planck. Ce qui le fait aller plus loin, et "dérivée" le fameux membre de droite encadré ci-dessus, c'est à la fois une forme de rigueur intellectuelle absolue (disons une rigueur de la curiosité) qui le porte à aller plus loin, et une rigueur logique qui le fera passer du signe \neq au signe \Rightarrow dans le diagramme ci-dessus. Il démontre

en effet dans la deuxième partie de l'article que la distribution d'énergie en question doit avoir des sauts, des discontinuités, sur un ensemble discret de valeurs de l'énergie : les fameux quanta.

Ce qui est unique chez Poincaré, c'est son attitude très personnelle face à ces deux types de rigueur : intellectuelle et logique. Car si la rigueur intellectuelle, celle de la curiosité, est un moteur habituel de la création scientifique, il faut tout de même remarquer que Poincaré est le seul à l'exercer autant dans l'espace du négatif : au fond, le faux et le vrai semble l'exciter autant l'un que l'autre. En ce qui concerne la rigueur logique, celle qui va intuer le \Rightarrow à partir du \neq , on apprend généralement au mathématicien en herbe qu'on ne transige absolument pas avec elle. Et pourtant.

Et pourtant c'est ce que va faire Poincaré dans un autre de ses résultats les plus célèbres : le problème à 3 corps.

On connaît l'histoire, résumons drastiquement : Poincaré gagne le prix offert par le roi de Suède en montrant que le système à 3 corps de la mécanique céleste est intégrable⁽²⁾. Mais on lui fait remarquer que sa preuve n'est pas complète, elle comporte une partie non réellement démontrée. Poincaré reprend sa preuve ... et montre le contraire : le système à 3 corps n'est pas intégrable.

Être ou ne pas être intégrable est une alternative, tel faire jour ou faire nuit. Ne pas montrer que le système à 3 corps est intégrable est aussi éloigné de montrer qu'il n'est pas intégrable que ne pas voir qu'il fait jour (e.g. rester en quarantaine dans un appartement obscur pour échapper à un virus) est loin de voir qu'il fait nuit. C'est pourtant cette entrave à une troisième forme de rigueur, psychologique, très "humaine", que Poincaré franchit hardiment : si sa preuve de l'intégrabilité est fautive, c'est que l'intégrabilité est fautive. Énoncé qu'il lui faudra démontrer "à la main" puisqu'en dehors de toute rigueur logique a priori.

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. Là où la rigueur, celle de la curiosité et celle de la logique, va entrer à nouveau en jeu, c'est quand Poincaré va élargir le jeu phénoménologique des possibles. Si un système aussi simple que les trois corps - extension minimale du système des deux corps, intégrable, lui, comme on le sait depuis Newton - n'est pas intégrable, c'est qu'un système dynamique en général n'a pas à l'être. Et alors tout est possible : les divergences mathématiques rencontrées dans la tentative de preuve de l'intégrabilité deviennent source d'un nouveau paradigme : le chaos - strictement opposé à l'intégrabilité et non plus sa simple négation. L'usage et non usage de ces

2. Bien que cela n'ait pas trop d'importance pour notre argument ici, rappelons qu'un système dynamique, tel les planètes en mouvement, est dit intégrable lorsque l'on peut le rendre équivalent à un système simple évoluant périodiquement en chacune de ses dimensions.

trois forme de rigueur - psychologique, curieuse et logique - est vertigineux. Et nous semble si loin et si moderne comparé au structuralisme mathématique des années cinquante. Le diagramme suivant s'impose.

$$\begin{array}{rcc}
 \textit{Système à 3 corps} & = & \textit{intégrable} \\
 & & \text{devient} \\
 \textit{Système à 3 corps} & \neq & \textit{intégrable} \\
 & & \text{puis} \\
 & \dots & \dots \quad \boxed{\textit{chaos}}
 \end{array}$$

Cette fois-ci non seulement un membre de droite est né, qui n'est plus égal à un membre de gauche, mais ni le membre de gauche ni l'égalité ne perdurent. Le membre de droite encadré "est", il "est" tout seul, et il est correct. Et l'on sait le succès qu'il aura au siècle suivant.

Le vertige de cette construction n'est pas sans rappeler le vertige compositionnel que l'on trouve, par exemple⁽³⁾, dans les trois moments musicaux suivants : le début du développement du premier mouvement de la quarantième symphonie de Mozart (mesures 95-115)⁽⁴⁾, le milieu (variation fuguée avant la variation "andante")⁽⁵⁾ du dernier mouvement de l'héroïque de Beethoven et certains passages des Gruppen de Stockhausen⁽⁶⁾. Ces trois instants convoquent trois formes très strictes de composition : le style classique (forme sonate), les variations et le sérialisme généralisé des années cinquante⁽⁷⁾. Trois formes de rigueur musicale drastiques maltraitées, explosées, déstructurées⁽⁸⁾ par une ... rigueur musicale qui semble exténuée par la rigueur formelle. Nous y reviendrons.

3. Membres de droite et signes égal en musique et philosophie

Dans la discussion de la section précédente, est-on vraiment loin de la musique, de la philosophie ?

Une autre anecdote, duale en quelque sorte de celle de l'étudiant revendiquant qu'un membre de droite d'une égalité fautive puisse intrinsèquement être correct, nous aidera peut-être à y voir plus clair. Il s'agit de Leonard

3. On pourrait en citer bien d'autres.

4. https://www.youtube.com/watch?v=LQ_FZmILobE, 1 : 50 – 2 : 07

5. <https://www.youtube.com/watch?v=g6hl29t8qf0>, 4 : 24 – 5 : 13

6. <https://www.youtube.com/watch?v=6IZMWEtksII>, e.g. 14 : 35 – 15 : 30

7. Rappelons que Gruppen est écrit pour un orchestre divisé en trois groupes, chacun dirigé par un chef et avec son propre tempo.

8. Déconstruites ?

Bernstein jouant à son “Maître” Nadia Boulanger une petite chanson tout juste composée par lui. A un moment donné, Nadia Boulanger stoppe brusquement Bernstein par un : “*s’il vous plaît, pas de si bémol ici !*”. Ainsi dans le monde que l’on imagine tellement libre de la création musicale à Broadway, où l’on pense que les membres de droite virevoltent sans fin, électrisés par des néons clignotants, et bien, dans ce monde, les membres de droite peuvent rencontrer un signe \neq et l’identité “= *si bémol*” peut être fausse. Et Leonard Bernstein d’avouer, dépité comme l’étudiant mathématicien de tout à l’heure, qu’il a enlevé le si bémol “*parce que Mademoiselle⁽⁹⁾ me l’a demandé.*”.

Je reviendrai sur la place de la rigueur dans le processus compositionnel dans la section suivante, en particulier en comparant son lieu temporel à celui de la rigueur en mathématiques, mais essayons tout d’abord d’esquisser ce qui pourrait être un membre de droite sans égalité en musique. La plupart des fugues apparaissent dans la littérature musicale dans un diptyque *Prélude et Fugue* : une fugue aime bien (esthétiquement) être préludée. Peut-être le rôle du prélude est-il de flatter l’oreille de l’auditeur avant une certaine austérité contrapuntique que nous offrent les fugues ? Peut-être, quand elles étaient improvisée, l’interprète avait-il besoin de se faire les doigts ? En tous cas un lien, une identité organique lie le prélude à la fugue.

Mais tout comme l’identité = en mathématiques, ce lien se décline sous différentes formes : on a des préludes de chorals, on a des prélude-choral-et-fugue, le prélude peut devenir plus important en longueur que la fugue. Mieux encore, le prélude peut être fugué, à tel point que l’on croit entendre parfois non plus un prélude et fugue, mais une fugue et postlude.

Et puis Chopin franchit le pas en composant vingt-quatre préludes sans fugue. Et pour brouiller encore un peu plus les cartes, il les publie dans un seul opus (Op. 28) comme si chacun allait préluder l’autre dans la série. Cependant, il semble que Chopin ne souhaitait pas les entendre jouer ainsi, à la suite et dans l’enchaînement harmonique un peu conventionnel dans lequel ils sont édités⁽¹⁰⁾, il s’agit donc bien d’un ensemble non ordonné de 24 œuvres musicales différenciées. Mais quelle est alors leur identité ?

Un prélude sans fugue est un peu un membre de droite (plutôt de gauche en l’occurrence) sans égalité : le lien organique avec la fugue qu’on lui associait a disparu. Mais alors pourquoi l’appeler prélude et non pas pièce, bagatelle, impromptu ? Justement parce que, sans sa fugue, le prélude continue à préluder. On le sent très bien à l’audition de l’Op. 28 : chaque prélude

9. Mademoiselle : surnom de Nadia Boulanger.

10. Il est fascinant à ce propos d’écouter les enregistrements live de Sviatoslav Richter qui n’en joue qu’une sous-suite et dans un ordre différent à chaque fois : chaque prélude acquiert ainsi une personnalité que l’on ne détecte pas quand placé dans le flot, en particulier harmonique, initial.

nous place à sa fin en position d'attente, d'interrogation, un peu comme au bord du gouffre. Mais, me direz-vous, et le dernier ? Et bien le dernier (dans l'hypothèse où on les joue tous dans l'ordre dans lequel ils sont édités) se "termine" par une seule note fortissimo dans l'extrême grave du piano, tellement basse et tellement forte qu'elle sonne comme dissonante. un accord dissonant à une note, quoi de plus interrogatif, de plus vertigineux, de plus inabouti ?

Tout comme un membre de droite acquiert un statut ontologique quand il se retrouve sans égalité, un prélude sans fugue prélude. Il prélude intransitivement.

Notons que le même statut libéré a été acquis par la suite par d'autres formes musicales. Ainsi en va-t-il des trois intermezzi Op. 117 de Brahms [9] : un intermède entre deux intermèdes ... chacun sans rien "de l'autre côté".

Si, comme nous le verrons bientôt, la rigueur semble constitutive du processus de composition musicale, tout comme du processus de création mathématique, la philosophie, lieu privilégié des concepts, notions, idées par excellence, ne semblerait voir briller en son ciel que des membres de droite sans signe égal associé. Au moins sans la nécessité de la béquille =. Mais lorsque Jocelyn Benoist nous dit qu'un concept n'est concept que parce qu'il agit sur quelque chose, cette action nécessaire ne ressemble-t-elle pas au branchement de quelque chose sur un membre de droite procuré par un signe = ? Les membres de droite philosophiques seraient-ils plus "branchés" à une égalité rigoureuse que ne le sont leurs pendants mathématiques ? Nous y reviendrons.

4. De Chevalley à Stravinsky : le chef d'œuvre inconnu

Deux anecdotes, duales l'une de l'autre encore une fois, vont nous éclairer sur la différence qu'entretiennent les rigueurs mathématique et musicale.

Alors qu'il donnait une conférence au tableau noir, le grand mathématicien Claude Chevalley eut un trou de mémoire lors de l'exposition de la preuve de l'un des résultats qu'il venait d'exposer. Il se rapprocha alors du tableau et fit en catimini un petit dessin diagrammatique, caché par son épaule, qui lui permit de retrouver le chemin de sa preuve qu'il exposa alors brillamment après avoir pris grand soin d'effacer le dessin salvateur.

Igor Stravinsky composa ses merveilleux Moments pour piano et orchestre à la fin de sa vie, dans cette période où il utilisait la langage sériel strict de Schönberg et Webern, tout comme les jeunes Boulez, Berio et Stockhausen.

D'après André Boucourechliev [7], il se fit fort d'avoir écrit une œuvre sérielle tellement élaborée (bien que tellement courte) qu'il faisait fis à quiconque de pouvoir retrouver la série originale⁽¹¹⁾.

Ces deux anecdotes sont bien duales : d'un côté un mathématicien se défend d'exprimer en public une idée qui ne serait pas totalement fixée par des formules écrites, de l'autre un musicien qui prétend cacher la rigueur de sa composition pour n'exprimer que le sensible, le sensuel.

Chevalley a bien sûr tort, car le dessin, s'il ne constitue pas une preuve, aide tout autant l'auditeur que le conférencier à la comprendre. Mais je pense aussi que Stravinsky a tort - non pas seulement au sens que l'on peut (dixit Boucou) retrouver la série originelle - mais bien de vouloir la cacher, car elle peut aider non seulement l'analyse, et donc l'interprétation, mais parce que je prétend qu'elle fait partie du sensuel de l'œuvre.

La traversée du pays fertile n'est pas seulement nécessaire au compositeur, elle l'est aussi, d'après moi, à l'auditeur. Nous reviendrons là-dessus bientôt. Dans le cas de Chevalley comme dans celui de Stravinsky, il y a bien un chef d'œuvre inconnu : la sensualité d'un dessin face à la rigueur mathématique et la rigueur de l'acte de composition face à la sensualité sonore de l'œuvre musicale.

Les musiciens des années cinquante, après avoir exhibé a hue et a dia les séries, ont voulu tout d'abord les cacher pour finalement les faire disparaître afin de prétendument privilégier le sensuel par rapport au rigoureux, au rigoureux prétendument rugueux. Fatal error aurait dit un PC s'il y en avait eu à l'époque.

5. Rigueur math. vs. musique : question de temps

Les mathématiques et la musique ont en commun d'avoir leur propre langage. C'est une particularité rare, que semblent ne pas posséder la physique ou la danse, par exemple. Mais qui dit langage dit grammaire, c'est-à-dire rigueur et contraintes. Les langages tonal, modal ou sériel sont de parfaits exemples de rigueur en musique. N'est-ce pas rigoureux et contraignant que de composer en n'utilisant qu'un sous-ensemble choisi à l'avance de notes parmi les douze qui vont du do au si ? Autant que de convenir que si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors, *nécessairement*, $a \leq c$.

11. Boucourechliev prétend que si, c'est possible ... mais sans donner la série retrouvée.

Puisque composer et démontrer font appel tous deux à la notion de rigueur, les compositeurs démontreraient-ils des sonates et les mathématiciens composeraient-ils des théorèmes ?

Si la réponse est partiellement positive, l'usage de la rigueur, effective en mathématiques et en musique, se situe en deux "moments" différents de la création dans les deux disciplines : la rigueur est première en musique et finale en mathématiques. On compose "a priori" dans une tonalité ou dans le cadre d'une série ou d'un matériau donnés à l'avance et l'on boucle "a posteriori" la démonstration d'un théorème dont on avait déjà, depuis longtemps parfois, l'énoncé [15]. Le compositeur commence à travailler dans un choix rigoureux de tonalité, une série, un tableau de signes, un algorithme, puis s'en affranchit au cours du travail de composition : il en a le droit, c'est lui l'artiste ! Un mathématicien qui veut démontrer le résultat qu'il a en tête commence tous azimuts, hors de toute rigueur, simplement pour avoir des idées ; mais, à la fin, il vérifie tous les lemmes (et il y en a qui résistent longtemps) au nom de la rigueur qui lui donne enfin le droit de proclamer son résultat.

On retrouve aussi dans d'autres espaces de valeurs ce type d'opposition de hiérarchies de la rigueur en musique et en math. L'Op. 27 numéro 1, [2], de Beethoven s'appelle "sonata quasi una fantasia" :

sonata quasi una fantasia : pourquoi pas "fantasia quasi una sonata" ?

De même, il existe en mathématiques des fonction "(infiniment) différentiables quasi-analytiques" ⁽¹²⁾.

quasi-analytique : pourquoi pas "quasi-différentiable" ?

Être analytique est plus contraignant, plus rigoureux qu'être différentiable, tout comme une sonate est plus rigoureuse qu'une fantaisie. On a donc bien les équivalences renversée :

$$\begin{aligned} \textit{quasi una fantasia} &\leftrightarrow \textit{quasi - différentiable}, \\ \textit{quasi - analytique} &\leftrightarrow \textit{quasi una sonata}. \end{aligned}$$

La rigueur est première ici aussi en musique, pas en mathématiques : le musicien part de la rigueur sonate, le mathématicien arrive à la rigueur analytique. La rigueur est le matériaux premier du compositeur, elle est le romantisme final du mathématicien. Lorsque ce dernier boucle le dernier lemme qui lui a donné tant de mal, alors, et alors seulement, "c'est lui l'artiste !".

12. Une fonction infiniment différentiable est une fonction qui a un développement de Taylor a tout ordre (elle peut être approximée par un polynôme à tout ordre), elle est analytique si ce développement converge.

6. Rigueur math. vs. philo. : question d'espace

Pour un mathématicien amoureux (de la philosophie) une question revient souvent à l'esprit : qu'est-ce qui fait qu'un texte, écrit donc, est un texte de philosophie plutôt qu'un texte d'une autre discipline. On "sent" très bien la différence qu'il y a entre un poème ou une nouvelle et ... le mode d'emploi d'un mixer : la finalité n'est pas la même. Mais entre un chapitre d'un roman disons philosophique et un chapitre d'un livre de philosophie ? La finalité cette fois peut être assez semblable : réfléchir sur un même sujet, le commenter, en découvrir ses structures, etc. Mais là où le littéraire va illustrer, émouvoir, créer des personnages, le philosophe va (vouloir) argumenter, prouver, démontrer une construction de pensée. L'émotion finale viendra (dans les bons cas) de cette construction. Au moins en partie.

Cette dynamique de rigueur philosophique rapproche le philosophe du mathématicien. Est-ce que l'émotion mentionnée l'en sépare ? Certains le pensent⁽¹³⁾, ils ont totalement tort. " $-\hbar^2 \frac{\Delta}{2} - \frac{1}{r}$ est auto-adjoint" est aussi émouvant au mathématicien que ne l'est "l'existence précède l'essence" au philosophe ou "la sauterelle est bougonne" au poète⁽¹⁴⁾.

Les mathématiciens, tout comme les philosophes, aiment parler. Parler de leurs travaux, exprimer oralement ce qu'ils consignent par écrit. Cela les différencie des auteurs littéraires qui écrivent mais ne lisent pas, en général, leurs productions en public. Et, au fond, un exposé de math n'est pas si différent que ça d'un exposé de philo. Les matheux accusent souvent les philosophes d'avoir dans leurs laïus trop d'histoire de la philo⁽¹⁵⁾, et les philosophes aux mathématiciens d'en manquer. Mais, dans les deux disciplines, les exposés durent une heure en général, ont une introduction, un développement, une conclusion, et suscitent une séance de questions du public. C'est donc dans l'espace de l'écrit qu'il faut chercher une différence.

Posons nous donc la question : quel est l'espace du texte philosophique (rigoureux) ?

Les mathématiciens présentent leurs résultats récents et pointus dans des articles à paraître dans des journaux, les philosophes dans des livres. Si un article de mathématique est long (cela arrive), c'est en général justifié par une spécificité du champ étudié (la classification exhaustive des groupes finis

13. Ceux qui pensent des mathématicien, tel San Antonio de Bérurier, qu'ils ont un sixième sens mais aucun des cinq autres.

14. Pour ne citer que des "résultats" presque contemporains de l'après-guerre.

15. Exposer de la philosophie sans histoire de la philosophie, c'est un peu comme jouer juste du violon : on ne peut jamais parfaitement le faire, mais comme disait David Oittrakh (à propos de violon), il y en a quand même qui exagèrent !

existe, c'est un théorème, mais la liste est longue), les livres de philosophie sont moins long qu'autrefois, mais quand même ! Il y a une esthétique de la concision en math comme il y a une esthétique de l'abondance en philo.

Bien sûr, les mathématiciens écrivent aussi des livres. Mais plus tard, après, et souvent moins techniques, voire pas du tout. Généralement à l'attention d'un plus large public que celui ciblé par les articles originaux. Et, de leur côté, les philosophes écrivent aussi des articles, mais souvent, là encore, dans des revues grand public. On voit donc une différence nette entre les espaces de l'écriture en math et en philo, non pas une différence qualitative (les deux utilisent un langage etc) mais bien quantitative : des espaces de taille modeste en math, large en philo.

Il me semble que l'on est là au cœur de l'expression de la rigueur dans les deux disciplines. Une preuve d'un résultat mathématique plus courte que celle originalement publiée par l'auteur sera considérée sinon comme supérieure, en tous cas comme intéressante, surprenante, inattendue. L'économie de moyens sera vue comme une virtuosité pas seulement technique de la rigueur mathématique : une preuve plus courte sera plus belle aux yeux de la communauté mathématique. La rigueur en philosophie aura besoin, au contraire, de la longueur : l'argumentation se fera souvent par l'exemple, la répétition, ... , bref tout ce que le mathématicien verra comme de la redondance. Le philosophe verra quant à lui de la sècheresse dans la concision du mathématicien.

En somme deux expressions de la rigueur habitant deux espaces différents, tout comme en math et musique deux expressions de la rigueur vivant en deux temps différents.

7. Rigueur, un mal nécessaire, un bien suffisant ? Ou la plainte du but.

La rigueur est douloureuse au mathématicien, comme "les escaliers de la butte sont durs aux miséreux". Douloureuse ascension que l'établissement d'un résultat, à cause de ce petit lemme qui résiste toujours. Alors, comme "les ailes des moulins protègent les amoureux", le mathématicien publie parfois le résultat modulo le petit lemme, c'est-à-dire sous la forme : supposons que le petit lemme soit vrai, alors le gros théorème est vrai aussi. Mais c'est une démarche insatisfaisante. Insatisfaisante parce cette douleur ascensionnelle est un mal nécessaire, nécessaire au fait que le résultat final soit un bien, un bien qui sera suffisant au mathématicien pour jouir alors de toute l'aventure. Il ne faut voir en cela nulle trace de judéo-christianisme, ou de masochisme, mais plutôt le fait qu'en mathématique, le résultat arrive et

s'expose *avec* sa preuve⁽¹⁶⁾. Sans une preuve complète, le mathématicien est en général triste, “sous le ciel sans lune, je pleure à la brune mon rêve évanoui”. Il faut le génie de Poincaré pour pouvoir fièrement passer outre une telle incomplétude, “la lune trop rousse de gloire éclabousse ton jupon plein d'trous”.

En musique, la rigueur, qui rappelons-le apparaît au début, est plutôt un bien suffisant. Suffisant à produire un matériaux capable de trier dans le jeu infini des possibles, d'exhiber un chemin de composition. La forme sonate, la tonalité, la série sont de cet ordre. Ils limitent par la contrainte de façon très efficace le jeu des possibles. Leur efficacité est redoutable, mais pas universelle ; combien de sonates composée au XVIIIème siècle justement oubliées, combien de séries restées sèches musicalement, et surtout combien de fugues académiques ? Pour accéder au statut musical, il faut instiller, nécessairement, autre chose. Un autre chose à qui l'on confèrera tous les pouvoirs, tous les pouvoirs absolus, y compris celui de revenir sur, d'entamer les principes rigoureux de composition initiaux. Cet *autre chose* qui fera d'une fugue un chef d'œuvre par l'introduction d'une strette dès le début, ou fera d'une a priori banale marche funèbre un hymne infini en faisant se succéder des accords de quarte, cet autre chose n'apparaît-il pas lui-même comme une rigueur, puisque plus fort que la rigueur initiale ? Le musicien s'efforçant d'ailleurs très vite d'oublier cette dernière, “un poète et une inconnue s'aimèrent l'espace d'un instant mais il ne l'a jamais revue”. Et cette nécessité musicale ne joue-t-elle pas le rôle chez le musicien de la rigueur-mal-nécessaire du mathématicien dont je parlais plus haut ?

Une inversion, encore une fois.

8. Retour aux limites du pays fertile : plaidoyer pour la musique des années cinquante

Les musiciens, comme les artistes en prise avec le spectacle vivant en général, sont sujets (assujettis parfois) à la mode. Bien sûr pas la mode d'un public pour un compositeur de musique, disons, classique. Mais probablement celle (d'un sous-ensemble choisi) de ses condisciples. C'est vrai historiquement et c'est souvent cruel⁽¹⁷⁾. Jusqu'aux années cinquante, cette évolution se passait par transmission d'une génération à l'autre. Et c'était de bonne guerre⁽¹⁸⁾.

16. Et c'est pour cela que lorsqu'une preuve plus courte arrive, comme nous l'avons évoqué plus haut, le résultat aussi s'en trouve changé.

17. Que l'on pense au vieux Jean-Sébastien Bach à qui l'on préférait ses fils !

18. “Fuyons, il va développer !” Debussy après l'exposition du premier mouvement lors de la création parisienne de la quatrième symphonie de Brahms.

Mais ce qui s'est passé avec la génération 1925, ces jeunes compositeurs de la tout juste après-guerre, est spécial : après avoir fait table rase de leur milieu culturel contemporain, ils ont adopté la grammaire du sérialisme webernien qu'ils ont généralisé et étendu. Rien que de plus normal à ça. Mais ils ont très vite rejeté eux-même cette période-là de leur propre création. En tout cas d'une partie, celle qui était "à la limite du pays fertile". Et comme ils étaient souvent leurs propres interprètes, en tous cas en ce qui concerne la direction d'orchestre, c'est tout un pan du répertoire, heureusement préservé par le disque, qui a plus ou moins disparu des salles de concert.

Ce pays fertile (et ses prétendues limites), c'était celui d'une rigueur extrême en musique, d'une période où l'on composait, comme l'a dit Stockhausen, "au double décimètre". Et bien que la limite du pays fertile fut ensuite franchie par, pourrait-on dire, un "retour" au musical sensiblement audible, à une certaine souplesse acoustique, le public ne suivit pas vraiment et la musique contemporaine devint la musique jouée dans les concerts de musique contemporaine. Je ne peux imaginer autre raison à cela que l'abandon du répertoire de cette musique estampillée "années cinquante" qui a privé le public futur de cette traversée du pays fertile, jusques et y compris ses limites pénibles à dépasser. Et il, le public, en avait besoin.

Lorsqu'aux "Fêtes musicales en Touraine" de 1987, Sviatoslave Richter invita Pierre Boulez et l'EIC, ils jouèrent ensemble deux pièces de Stravinsky : le Capriccio, petit bijou du début de la période neo-classique et les Moments, œuvre sérielle de la période ultime. On pensa alors que Richter avait choisi le premier et Boulez le second. C'était en fait le contraire qui s'était produit : Richter avait voulu les Moments (comme il avait voulu auparavant le Kammerkonzert de Berg), une œuvre trop strictement sérielle pour le Boulez de l'époque, qui ne l'avait d'ailleurs jamais enregistrée (jouée ?). Le concert, auquel j'assistai, fut saisissant, Richter entrant dans les Moments avec une force, un geste et un son dénués de tout inhibition post-structuraliste. J'ai su bien des années après⁽¹⁹⁾ que Boulez aurait dit que, "évidemment, jouée comme Richter l'avait fait, l'œuvre prenait un sens". Autrement dit, la rigueur pour la rigueur et pour la rigueur seulement devenait musique.

Il me semble qu'une nouvelle appropriation de la musique sérielle du type de celle des années cinquante pourrait, maintenant, nous apprendre beaucoup. Un peu comme le retour vers Rameau et Couperin fut jadis salutaire aux Debussy et autre Ravel du début du siècle dernier. En tous cas⁽²⁰⁾ la musique des années cinquante me semble rafraichissante ces jours-ci, après

19. Par Antoine Bonnet.

20. Faites-en l'expérience !

quelques décennies d'enivrement sonore fourni par l'audition de tant de virtuosité de timbres, rythmes et masses acoustiques créés (ou pas) grâce à l'aide de l'informatique en temps réel. Nous, les auditeurs, saturons un peu par l'abondance portée à nos oreilles depuis le début du XXIème siècle. Tout comme ont saturé les oreilles des compositeurs français au début du XXème (l'histoire se reproduirait-elle ?) à l'audition d'une certaine perversion du style classique, roborative par trop de modulations, développements et gigantisme dimensionnel.

La raison d'être de cette longue digression est la suivante. Boulez "explique" l'intérêt de l'ouverture⁽²¹⁾ dans "Éclats" [8] par le fait de créer une grande tension chez les instrumentistes de l'orchestre qui ne savent, jusqu'à l'extrême dernier moment, ni la note ni quand ils doivent la jouer. On sent donc bien là une occurrence de rigueur : c'est plus la structure de la composition que les notes elles-même qui sont confiés aux interprètes, le chef qui choisit et les instrumentistes qui sont poussés à bout, transmettant pas là-même cette nervosité au public comme événement musical.

Mais ce qui se passe dans (ce moment d') "Éclats", on le retrouve en grande partie dans toute la musique de cette période lorsque on l'écoute interprétée à l'époque de sa création. Les interprètes sont alors confrontés à une grammaire totalement nouvelle, et la tension créée est bien plus grande que lors de l'interprétation de cette musique de nos jours. Il faut écouter les enregistrements d'époque⁽²²⁾ pour que le côté rigueur apparaisse par un côté rugueux. Écoutez le premier livre des Structures pour deux pianos de Boulez par les frères Kontarski : c'est extraordinairement, magnifiquement musical. Autant qu'est merveilleusement musical la façon dont Mozart "résout" la rigueur du développement du premier mouvement du KV 550 ou l'héroïsme⁽²³⁾ instrumental que demande Beethoven dans les rigoureuses variations finales de l'Op. 55.

Dans tous les exemples mentionnés, la rigueur se révèle comme *réellement* ressentie musicalement : la rigueur des années 50 est musicale, tout comme la rigueur mathématique est esthétique.

Mais, vous avez dit réel ?

21. Pour certaines séquences de "Eclats", l'interprète (le chef) choisit au hasard (c'est-à-dire d'ailleurs, en principe, ne choisit pas,) au dernier moment, l'ordre et le début d'intervention des différents instrumentistes. On a donc bien une seule œuvre, "Eclats, dont chaque interprétation est différente" [14]. C'est ce que l'on appelle une œuvre ouverte.

22. Et grâce au disque, nous pouvons nous permettre d'être véritablement "baroqueux" et entendre cette musique sur instrument(iste)s d'époque.

23. Écoutez l'enregistrement de Hermann Scherchen en 1958 mentionné plus haut (les années cinquante encore) dirigeant un orchestre de l'opéra de Vienne au bord de l'apoplexie !

9. Réalisme en math, philo, musique.

La musique a un statut particulier par rapport aux mathématiques et à la philosophie (un peu moins pour cette dernière) : elle se joue. Bien sûr il y a des séminaires de math et de philo, mais ce sont des échanges entre mathématiciens et des échanges entre philosophes. La musique est jouée pour des non-musiciens. De là une certaine idée peut-être de réalisme naïf : est réel ce qui est immédiatement musical. De nos jours, trop de rigueur est jugé comme non musical. Il en est de même pour l'ouverture : l'utilisation de l'aléa (pourtant si quantique en esprit [14]) a été supplanté par l'usage de l'informatique au tournant des années soixante-dix.

En mathématiques, le débat sur le réalisme a longtemps été occupé par la fameuse alternative platonicienne : les mathématiques existent elles en tant que telles ou bien émergent-elles d'un a priori, situé quelque part, on ne sait où ? Mais la discussion sur cette alternative (stérile selon moi) a été mise à mal au cours du XXème siècle par l'apparition de méthodes de plus en plus abstraites ou au moins distantes les unes des autres pour étudier les objets mathématiques [17, 16]. Ces méthodes ont vu et fait naître des entités "au dessus" des objets, situées sur un étage supérieur et bientôt promptes à se débarrasser de l'étage inférieur, celui a priori bien "réel" des objets. Les mathématiques ont ainsi englobé le platonisme (mathématique) pour en faire une partie d'elle même avec sa grammaire rigoureuse propre, loin (et même à l'opposé) d'un quelconque regard méta-mathématique.

Le réalisme en philosophie ouvre un champ beaucoup plus large, et tout à fait d'actualité. Traditionnellement, le réalisme philosophique veut saisir de façon indépendante de l'esprit ce qui doit être connu. Mais le concept d'indépendance vis-a-vis de l'esprit doit être individualisé selon les formes d'activité de l'esprit actives en relation avec ce que l'on considère : la réalité n'a donc pas la même forme suivant les types de connaissance en jeu. D'où la mise en cause, dans la période contemporaine, de cette conception du réel par trop naïve. Et la floraison récente de nouveaux réalistes, de doctrines et attitudes très variées : réalisme contextuel, relativisme, absolutisme,...

On voit donc apparaître dans ces trois disciplines la critique, sinon la condamnation, de formes de réalisme trop simples, trop directes, peut-être trop phénoménologiques : un réel trop strictement acoustique, un platonisme trop absolu et enfin un réalisme trop libéré de l'esprit.

Mais il ne suffit pas de supprimer ces réalismes-là pour en créer d'autres plus convenables. Encore faut-il isoler dans ces matériaux - musical, mathématique et philosophique - ce qui sera, intrinsèquement, sans être sujet à caution, le réel.

10. rigueur = réalisme

Et voici un membre de droite à nouveau. Et un membre de droite, juste, correct, très signifiant. Alors qu'en est-il de son "lien organique" avec la rigueur ?

En mathématiques, "rigueur = réalisme" est séduisant. En particulier, il permet d'évacuer le débat platonicien : que les résultats soient ou non inscrits "quelque part" n'a plus d'importance si ce qui est réel se ramène à leur démonstration. C'est aussi une vision qui rend bien réelles les "entités sans objets" mentionnées plus haut. Et puis, et surtout, les faux résultats étant souvent plus beaux que les vrais, il faut bien placer le réalisme dans leur démonstration.

Nous avons vu plus haut que la rigueur est, selon Boulez accompagnant Richter dans Stravinsky, réellement musicale. Et ce dans la "pire" des périodes où ce fait ait été contesté. Injustement d'ailleurs, car que dire de ces musiques du XIV^{ème} siècle où les rythmes étaient composé avant que ne le soient les lignes mélodiques ? Bien sûr, une jolie mélodie peut-être musicale, mais à elle seule elle ne peut pas donner un mouvement de symphonie. Mais elle peut suffire musicalement à une chanson, c'est-à-dire un morceau court où le texte chanté a autant d'importance que la musique. Dans les pages de grande envergure, c'est la rigueur que l'on entend. C'est aussi la rigueur qui est universelle, indépendante de la qualité des instrumentistes, de l'interprétation, de la qualité sonore de l'enregistrement ⁽²⁴⁾.

Et c'est avec la rigueur que l'on pense en philosophie. Voyons de plus près l'incidence de ceci sur le réalisme en philosophie. Nous l'avons déjà évoqué, dans la période contemporaine celui-ci est multiple. Mais c'est évidemment du côté du réalisme contextuel, ou plutôt dans sa direction comme nous allons le voir, qu'il faut chercher une idée qui nous rapproche de la situation musicale et mathématique. En effet, contexte il y a lors de la création d'une œuvre musicale dans un contexte de rigueur avancée telle que le sérialisme dont nous avons déjà parlé. Mais sérialisme de quoi ? Très vite les séries de notes

24. Je trouve d'ailleurs que le baroque fait ressortir cela cruellement pour les œuvres faibles et justement oubliées du baroque dont l'intérêt ne dépassent pas l'attrait jouissif d'une interprétation ostensiblement colorée et estampillée "baroque". Les autres, elles, qu'on préfère ou pas les écouter sur instruments et dans le style modernes ou (prétendument) historiques, n'en ont pas moins été jouées, écoutées et diffusées pendant des décennies sans nul besoin d'idéologie baroque.

(hauteurs) vont suggérer les séries de rythmes, les séries de timbres, un esprit sériel d'appropriation du temps dans sa dimension allant du microscopique (le timbre) au macroscopique (l'œuvre musicale) chez Stockhausen [21]. Un sérialisme contextuel délocalisé, impossible à fixer, à attacher à quoi que ce soit. Et contexte il y a aussi, on pourrait presque dire "et seulement contexte", dans ses entités mathématiques sans objet universel, platonicien, sous-jacent. Un contexte presque sans contexte en quelque sorte, un contexte qui n'habite ni ne peut (plus) habiter nulle part, l'étage inférieur ayant disparu. Exactement comme est sans adresse, et même sans possibilité d'en avoir, la vision du réalisme contextuel par Jocelyn Benoist [5, 4]. Un réel intrinsèquement contextuel - par là même strictement opposé à, et donc à même de remplacer, l'indépendance de l'esprit du réalisme naïf - mais aussi, et c'est le plus important pour nous, résolument non-spéculatif, c'est-à-dire rigoureux, proche si ce n'est l'analogie, justement par sa rigueur indéfectible, du réalisme musical et mathématique que nous venons d'essayer de construire.

Les trois disciplines dont nous venons de parler ont en commun un côté disons abstrait, un côté premier plutôt. Premier comme une philosophie première, comme quelque chose d'a priori. Les mathématiques non seulement vivent d'elles-mêmes mais elles s'exportent, s'appliquent par exemple aux sciences *mathématisées*. La musique est un art qui s'exporte aussi vers le cinéma, le théâtre, la radio, la poésie (via la chanson). Quant à la philosophie, que fait-elle d'autre qu'aider toutes les autres disciplines à penser ?

Ces trois disciplines ouvrent par ailleurs tout un champ naïf de conceptions du réalisme. L'alternative platonicienne pour les mathématiques, la co-présence d'une partition écrite et d'un concert joué pour la musique et enfin un réel que l'on voudrait appréhender sans avoir l'air d'y toucher pour la philosophie. Et l'on pourrait en citer bien d'autres.

Mais ce qui reste universel dans le réalisme commun aux trois c'est bien la rigueur, rigueur de la démonstration, de la composition et de la pensée.

Prenons pour finir un dernier exemple musical, puisque, au fond, c'est bien la musique qui nous guide dans tout ce texte. Les mesures 45 à 49 du premier mouvement de l'héroïque de Beethoven Op. 55 [3].



Qu'entendons nous réellement dans ce passage, parfaite réalisation de Klangfarbenmelodie plus d'un siècle avant l'Op. 16 de Schönberg [20]. Un hautbois, puis une clarinette, une flûte et enfin des violons ? Non. Un brin de mélodie, de rythme plutôt, répété quatre fois par quatre instruments différents dont chaque timbre attirerait pour soi-même notre oreille ? Non. Ce que nous entendons, c'est une mélodie dans un nouvel espace "abstrait" où chaque note est ce brin de mélodie et la "hauteur" est le timbre de l'instrument. Et peu importe ce que sont ces timbres : changer de timbre reviendrait à transposer comme on change les hauteurs, peu importe le brin, comme peu importe d'avoir des noires ou des croches. Ce que nous entendons réellement, c'est ce nouveau paradigme d'espace musical inventé par Beethoven dans sa rigueur de compositeur expérimental, et qui sera retrouvé par Schönberg et alors intronisé au rang de rigueur compositionnelle établie.

11. La rigueur est une histoire de réalisme : l'exemple de la mécanique quantique

"Qu'est-ce qui est réel ?" se demandait en 1960 Schrödinger dans un article célèbre. La question du réalisme n'a cessé depuis 1925 (presque'un siècle) d'embarrasser abusivement la théorie physique la plus précise que l'histoire des sciences ait connue, à grands coups de prétendus paradoxes et autres manques de confrontation à l'observation expérimentale.

Or, rappelons-le, il n'y a aucun paradoxe en mécanique quantique dès lors que l'on se réfère à ses axiomes (dits de l'école de Copenhague et en fait établis par John von Neumann [12, 13]) exprimés dans le langage quantique mathématique, strictement.

De plus, signalons pour ceux qui ne le sauraient pas encore, que toutes les *Gedankenexperiment* des pères fondateurs et de ceux qui les ont suivis ont été réalisées expérimentalement et ont toutes donné raison au formalisme de Copenhague.

D'où vient donc (le problème de) tant de résistance face à une théorie si bien établie dans son formalisme (bien mieux que ne l'est la dynamique classique) et tellement bien en accord avec l'expérience ?

La première raison qui vient à l'esprit est bien sûr le conservatisme. Le changement de paradigme est tel que les penseurs classiques n'y retrouvent pas leurs petits. Et l'on essaie d'expliquer, d'interpréter la mécanique quantique avec le vocabulaire classique, et là les paradoxes arrivent. On a beau changer les noms (le quanton), les images classiques perdurent, qui ruinent une approche directe du formalisme. Tout cela a longtemps semblé, au fond, encore une fois, de bonne guerre. Une espèce de philosophie réactionnaire devant un nouveau "Eppur si muove!"⁽²⁵⁾.

Mais tout de même, un siècle après ! Il ne peut pas ne pas y avoir une autre explication à cette floraison journalière d'idées de torture de l'animal domestique préféré du docteur Schrödinger.

Il me semble que l'explication de ce mal-amour du quantique vient de ce que le tournant épistémologique de 1925 est une nouvelle révolution copernicienne, alors que l'on continue à appréhender le quantique à l'aune de la première. Si Copernic-Galilée-Newton nous disent que la nature s'écrit dans la langue mathématique, on garde la possibilité de la lire dans la langue réaliste de tous les jours. Les étoiles sont comme des vers luisants dans la nuit, leurs trajectoires sont semblables à des dessins sur un tableau et les masses différentes qui tombe(raie)nt à la même vitesse d'une tour mal construite sont des cailloux et des plumes. Tous objets communs de la praxis prè-Copernicienne.

C'est ce réalisme-là qui fait totalement défaut au quantique. Plus exactement, il faudrait au quantique un imaginaire réaliste, un "comme si", si cher à Bachelard [1], référant à la physique classique. Mais rien n'y fait depuis un siècle : Heisenberg ne peut pas rentrer dans le costume trop petit de Kant. Et si l'on essaie d'habiller Kant avec le costume trop grand de Heisenberg, le pauvre Imanuel doit se contorsionner horriblement pour que le costume de Werner lui "tombe" bien⁽²⁶⁾.

25. "Et pourtant, elle tourne !"

26. Tout comme dans le sketch célèbre du tailleur de Fernand Raynaud (<https://www.youtube.com/watch?v=1X7dtki8EvY>, 9 : 00). Et la conclusion, cruelle, est la même : les

Il faut donc se rendre à l'évidence : il n'y a pas pour la mécanique quantique d'imaginaire réaliste naïf "hors quantique". Donc pas de "comme si", comme il y en a tant en mathématiques récentes [16] - et l'esprit de Bachelard de nous indiquer la direction vers la nouvelle étape, celle d'un "pourquoi pas". Alors pourquoi pas des univers parallèles, des principes de relativité, des théories de la double solution ondes pilotes et autres interprétations ontologique et causale à la "deBB" (hélas pas "de BB", ça serait plus agréable!). Pourquoi pas? Et bien parce que si les manches du costume de Heisenberg cachent les mains de Kant, elles tombent à merveille sur les poignets de Heisenberg. L'axiomatique de Copenhague sied parfaitement à la mécanique quantique, pas un seul pli inopportun, pas un seul fil qui dépasse, pas une retouche à faire. C'est normal, il n'y a pas eu de patron, pas de modèle : telle une robe de Marlène Dietrich, il a été cousu sur elle. Nul besoin de l'élargir, le formalisme mathématique dit tout. Et il dit tout à tout le monde, pas seulement aux mathématiciens, pas seulement aux physiciens : sa "gigantesque" simplicité lui permet d'être accessible à tous [12, 13, 18].

Car dire que "la mathématique s'identifie purement et simplement à son formalisme et n'est rien au-delà de lui" [6], ne veut pas dire que le formalisme mathématique en soi ne puisse être quelque chose au delà de lui-même. Grâce à sa rigueur, justement. Et que l'on ne pense pas là que ce formalisme est formel⁽²⁷⁾, c'est-à-dire dépourvu de sens, les mathématiques présentes dans l'axiomatique de Copenhague sont, pour la plupart d'entre elles, nées de la physique quantique, leur réalisme est contextuellement, entre autres, quantique⁽²⁸⁾. On voit bien là le début d'une chaîne logique qu'il convient de terminer. Plus précisément, von Neumann a bâti l'axiomatique de Copenhague à partir du réalisme quantique bancal du début de la mécanique quantique. Bancal parce que classiquement contextualisé. Et l'immense découverte de von Neumann fut de découvrir que cette "bancalité" disparaissait dans une formulation en quatre simples axiomes mathématiques. Mais attention! , quatre axiomes dont la puissance venait de leur cohérence parfaitement rigoureuse logiquement. Qu'un seul axiome, même exhibé dans une situation particulièrement extrême, même pernicieusement extrême, vienne à mordre la queue de l'un des autres membre du quatuor, patatras, tout s'effondrerait

gens qui voient Kant contorsionné portant un costume qui lui va si bien pensent : "Vu comme il est foutu, il doit avoir un sacré tailleur!". Et l'épistémologue tailleur de costumes de remporter le paquet.

27. Au sens exprimé par Giuseppe Longo dans ce volume-même [11]

28. Il suffit pour s'en apercevoir de ne pas oublier qu'elles ont été formalisées par un von Neumann qui, après s'être intéressé aux fondements des mathématiques "à la Hilbert", s'en est très vite éloigné dès la naissance du Théorème de Gödel et n'a cessé dès lors de, au fond, (re)fonder les mathématiques depuis le réel (certains diront pour le meilleur et pour le pire).

alors, immédiatement ⁽²⁹⁾. Et c'est cette rigueur, indiscutable, qui permet au formalisme mathématique de von Neumann de réintégrer la place du réalisme quantique initialement bancal dont il était issu. C'est ce réalisme scandinave que, rappelons-le, on observe maintenant tous les jours dans les "Gedankenexperiment", qui assure la stabilité de la matière, qui viole les inégalités de Bell ... la liste est longue. Et c'est bien la rigueur-réalisme quantique qui assure la réalité du cryptage quantique, tellement plus sûr que son géniteur classique, qui développe l'information quantique, qui nous permettra peut-être un jour d'enfermer la complexité d'une môle de gaz dans un ordinateur quantique à seulement cent (qu)bits ⁽³⁰⁾.

Qu'on le veuille ou non, un électron est un espace vectoriel et l'état dans lequel il est est un élément de cet espace. Tout comme deux électrons sont le carré *tensoriel* de l'espace précédent. Et c'est la rigueur de la construction tensorielle, universelle d'ailleurs, qui assure, qui est l'émergence de l'intrication, ce mal responsable de tous les maux du réalisme bancal primitif qui est devenu au fil des ans un bien réel incontournable de la mécanique quantique, de notre monde.

On le voit, il n'y a de réel en mécanique quantique que son formalisme mathématique, formalisme que l'on ne peut chercher à interpréter extérieurement, qui est sa propre interprétation.

Qu'est-ce qui est réel en mécanique quantique ? La rigueur de son formalisme mathématique.

Références

- [1] G. Bachelard, "La philosophie du non", Essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique. Paris : Les Presses universitaires de France, 1966,
- [2] L. van Beethoven, Sonata quasi una fantasia Op. 27 No. 1, Gio. Cappi e Comp., Vienne 1802.
- [3] L. van Beethoven, Sinfonie Nr.3 (Es-Dur) op. 55 Stimmen, Bureau des Arts et d'Industrie, Vienne 1805.
- [4] J. Benoist, Éléments de philosophie réaliste, Vrin, Paris 2011.
- [5] J. Benoist, L'adresse du réel, Vrin, Paris 2019.
- [6] J. Benoist et T.Paul, "Pour une phénoménologie du formalisme mathématique", dans "Dynamique du formalisme mathématique", édité par J. Benoist et T. Paul, Hermann, 2012.

29. Entrez dans l'axiomatique de Copenhague vous verrez comment, par exemple, la si décriée réduction du paquet d'onde est nécessaire à l'axiome de la mesure, afin que le résultat d'une nouvelle mesure infiniment proche en temps, redonne bien le même résultat [12, 13].

30. Tout simplement parce que si cent bits classiques contiennent deux cents ($= 2 \times 100$) informations différentes, cent qubits en contiennent 1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376 ($= 2^{100} \sim 1,2610^{30}$), un nombre largement supérieur au nombre d'Avogadro 602 214 076 000 000 000 000 $\sim 6.10^{23}$.

- [7] A. Boucourechliev, “Stravinsky”, Fayard, Paris 1983.
- [8] P. Boulez, “Éclats, Universal, Vienne 1965.
- [9] J. Brahms, 3 Intermezzi, op. 117, 1892
- [10] F. Chopin, Vingt-quatre préludes Op. 28, Paris et Leipzig, 1839.
- [11] G. Longo, “Le jeu difficile entre rigueur et sens”, RIGUEUR, Spartacus, Paris, sous presse.
- [12] T. Paul, “La mécanique quantique vue comme processus dynamique”, dans “Logique, dynamique et cognition” (dir. J.-B. Joinet), collection “Logique, langage, sciences, philosophie”, Publications de la Sorbonne, Paris, 2007.
- [13] T. Paul, “A propos du formalisme mathématique de la Mécanique Quantique , ”Logique et Interaction : Géométrie de la cognition” Actes du colloque et école thématique du CNRS “Logique, Sciences, Philosophie” à Cerisy, Hermann, 2009.
- [14] T. Paul, “Des sons et des quanta”, dans “Mathématique/Musique/Philosophie” (C. Alunni, M. Andreatta et F. Nicolas, eds.), Collection “Musique/Sciences”, IRCAM-Delatour, 2012.
- [15] T. Paul, “Rigueur-contraintes : mathématiques-musique”, Gazette des Mathématiciens, **139** 71-77, 2014.
- [16] T. Paul, “Le presque, le non, l’anti et la rigueur”, Le presque, Hermann, Paris 2015.
- [17] T. Paul, “Mathematical entities without objects - On the realism in mathematics and a possible mathematization of the (non)platonism”, Proceedings of the conference “Symmetry, Proportions and Seriality”, European Review.**29** (2), April 2021.
- [18] T. Paul, “La description quantique de la réalité physique peut-elle être considérée comme incomplète”, en préparation.
- [19] H. Poincaré, “Sur la théorie des quanta”, J. de Physique théorique et appliquée, 5ième série, **2** 5-34, 1912.
- [20] A. Schönberg, “Fünf Orchesterstücke” Op. 16, Peters, Leipzig, 1909.
- [21] K. Stockhausen, “...wie die Zeit vergeht...”, die Reihe, **3**, 1957. Traduction française “...comment passe le temps...”, Analyse musicale **6**, 1987.