



HAL
open science

Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe

Mickael da Ronch, Michèle Gandit, Sylvain Gravier

► **To cite this version:**

Mickael da Ronch, Michèle Gandit, Sylvain Gravier. Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. Repères IREM, 2020, 121, pp.77-105. hal-03030861

HAL Id: hal-03030861

<https://hal.science/hal-03030861v1>

Submitted on 15 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DU PROBLEME DE WANG VERS UNE NOUVELLE SITUATION DE RECHERCHE POUR LA CLASSE

Mickaël DA RONCH
Michèle GANDIT
Sylvain GRAVIER

SFR Maths à Modeler
Institut Fourier
Université Grenoble Alpes

Résumé. Cet article présente une analyse suivant les axes épistémologique et historique, mathématique et didactique concernant le problème de Wang. Dans le cas de ce problème, nous démontrons l'importance, d'une part, d'effectuer une analyse fine suivant ces axes afin d'évaluer la potentialité du problème dans le modèle des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC). Et d'autre part, nous démontrons que ce problème est un candidat favorable en vue d'une mise en situation dans le cadre des SiRC.

Introduction

Notre recherche s'effectue au sein du thème combinatoire et didactique de l'Institut Fourier à Grenoble en lien avec la Structure Fédérative de Recherche (SFR) Maths à Modeler. Deux des principaux thèmes de recherche consistent à élaborer des situations de recherche en classe et hors classe dans le but de diffuser l'activité de recherche en mathématiques. Cette volonté est mise en avant depuis des années en parallèle de nombreuses recommandations noosphériques, dont la plus marquante est sans doute celle du rapport Rocard et al. (2007) visant à promouvoir l'enseignement basé sur l'activité de recherche en sciences (IBSE) et en particulier sur la résolution de problèmes en mathématiques. Ce rapport vise entre autres à lutter

contre la désaffection des sciences relatée depuis de nombreuses années (Convert, 2003 ; Hamelin, 2003). Il souligne, par ailleurs, une volonté de changer de paradigme d'enseignement en favorisant davantage l'enseignement inductif proche des attentes de l'IBSE.

[...] Cette approche laisse plus de place à l'observation, à l'expérimentation et à la construction par l'enfant de ses propres connaissances sous la conduite du professeur (Rocard et al., 2007, p. 9).

Ainsi, de nombreux projets européens ont suivi — Fibonacci ou Primas par exemple —, et qui visaient à disséminer la démarche d'in-

vestigation en Europe notamment en sciences et en mathématiques via la résolution de problèmes. Récemment, le rapport Villani et Torossian (2018) met en avant cette volonté en évoquant l'importance d'un apprentissage des mathématiques fondé sur la *manipulation*, la *verbalisation* et l'*abstraction*, mais également celle de redonner une place à la notion de *preuve* en mathématiques (*ibid.*, p. 26) Ce même rapport souligne également la place souvent négligée accordée à l'affectivité dans l'apprentissage des mathématiques. Il ne nous semble pas raisonnable de penser pouvoir bâtir des connaissances chez les élèves, si cette affectivité n'est pas prise en compte. Une des hypothèses que nous faisons, tient de la place accordée aux « jeux » mathématiques qui peuvent être constitutifs d'un accroissement du plaisir et qui peuvent favoriser le développement de connaissances chez les élèves, évidemment, si ces « jeux » sont construits en ce sens. Par ailleurs, ce rapport montre également que le domaine des mathématiques discrètes — qui sont, comme nous le savons, très peu rencontrées dans le curriculum des élèves français —, est une branche des mathématiques propice au développement de connaissances sur le raisonnement et la logique en mathématiques, mais aussi d'une accessibilité permettant d'atténuer l'écart entre les mathématiques et notre société.

Les mathématiques discrètes, par exemple, sont trop marginales dans l'enseignement des mathématiques aujourd'hui, alors qu'elles constituent, d'une part, un lien avec la recherche contemporaine et l'informatique et d'autre part un champ dans lequel il est permis de raisonner et prendre du plaisir sur des problèmes motivants avec des connaissances mathématiques minimales (ibid., p. 36).

Cette citation confirme les résultats de nombreux travaux de recherche dont nous donnons quelques références qui ne se veulent en aucun

cas exhaustives (Cartier, 2008 ; Da Ronch, 2019b ; Gandit, 2008 ; Giroud, 2011 ; Godot, 2005 ; Grenier & Payan, 1998 ; Ouvrier-Buffet, 2003 ; Rolland, 1999). En outre, il est important de souligner le fait que les institutions universitaires montrent également leur implication pour favoriser la rencontre entre société et mathématiques notamment dans des projets portés par l'association Math.en.Jeans¹ (Duchet, 1997) ou encore la SFR Maths à Modeler², par exemple, visant à donner un spectre beaucoup plus large de l'activité mathématique souvent cloisonnée au rapport personnel co-construit entre ses propres idées et la dimension scolaire donnée à cette discipline. Dans cette lignée, d'autres acteurs de la communauté sont également impliqués, comme le réseau des Irem et ses groupes de travail sur la résolution de problèmes ou plus spécifiquement le groupe sur le raisonnement, la logique et les Situations de Recherche pour la Classe à Grenoble (SiRC). Ce groupe participe d'une part, à la création de nouvelles ressources pour les enseignants en élaborant des SiRC, et d'autre part, participe à la formation continue des enseignants du premier et second degré dont l'un des axes a comme point d'entrée les mathématiques discrètes permettant de développer le raisonnement, la logique et la preuve en mathématiques.

Par ailleurs, cette entrée par les mathématiques discrètes fait l'objet d'une UE transversale pluridisciplinaire (de la L1 à la L3), intitulée « Jeux combinatoires et raisonnements mathématiques », au sein de l'Université Grenoble Alpes. Cette approche intervient aussi ponctuellement dans des cours sur la résolution de problèmes ou la modélisation dans la formation initiale des enseignants du premier et du second degré (INSPE, Grenoble). Ce paragraphe bien que non exhaustif essaie de donner une vision

1 <https://www.mathenjeans.fr/>

2 <http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/>

plus large et montre comment les mathématiques discrètes, en tant qu'outil d'étude, sont utilisées pour l'enseignement et la formation sur la preuve, la logique, le raisonnement et la modélisation, alors qu'elles y occupent une place quasi inexistante d'un point de vue curriculaire dans le système français actuel.

Notre travail s'articule dans une volonté similaire de favoriser la rencontre entre mathématiques et société, d'accroître le facteur d'affectivité des élèves pour les mathématiques, mais également d'enrichir les ressources pour les enseignants et formateurs en prenant comme point d'entrée les mathématiques discrètes. A ce titre, nous nous sommes intéressés à un problème de recherche contemporain sous le nom de problème de Wang (1961) qui — nous semble-t-il et nous le verrons dans la suite du texte — peut avoir ce potentiel.

Le problème est le suivant : est-il possible de paver le plan entier par une collection finie de pavés appelés aussi tuiles ? Une tuile de Wang est simplement un carré unitaire partagé par ses diagonales en 4 secteurs triangulaires colorés (figure 1).

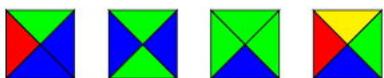


Figure 1 – Collection de 4 tuiles de Wang à 4 couleurs.

Le « jeu » consiste à paver le plan par des tuiles d'une collection sachant que :

- il est strictement interdit d'effectuer des isométries sur les tuiles ;
- un motif est valide si chaque paire de tuiles adjacentes a son côté commun de la même couleur (figure 2) ;

- chaque tuile peut être répétée autant de fois que nécessaire dans la construction d'un pavage.



Figure 2 – Un motif valide et un motif non valide.

L'objectif principal de cet article est de démontrer que le problème de Wang est un candidat potentiel en vue de l'élaboration d'une Situation de Recherche en Classe (SiRC).

Pour cela, dans la première partie de ce texte, nous réalisons une analyse *a priori* suivant les axes épistémologique, historique et mathématique qui va nous permettre d'identifier des sous-problèmes amenant à une pluralité de stratégies envisageables pour les résoudre, mais également d'identifier finement les connaissances en jeu in situ. Cette partie vise ainsi à reconstruire et repersonnaliser notre réflexion dans le processus d'évaluation et de construction *a priori* d'une SiRC. La seconde partie du texte vise, d'un point de vue didactique, à opérationnaliser le modèle théorique des SiRC développé par Grenier et Payan (2002) par rapport à l'analyse réalisée du problème. Nous démontrons, à cette occasion, que le problème de Wang est un candidat propice à la mise en place d'une SiRC. La dernière partie de notre texte fait l'objet d'une discussion ouvrant sur d'autres possibilités et s'appuie notamment sur un projet de recherche en cours, développant des situations de recherche hors classe.

1. — Le problème de Wang

Commençons cette partie par deux exemples explicites.

On considère une première collection de 5 tuiles à 3 couleurs (figure 3).



Figure 3 – Collection de 5 tuiles de Wang à 3 couleurs.

On observe que l'on peut construire un carré de taille 2 en utilisant 4 tuiles de cette collection. Il suffit ensuite de répéter le motif ainsi construit en effectuant une translation de celui-ci pour obtenir un pavage du plan (figure 4).

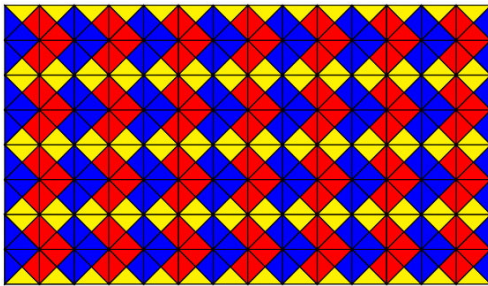


Figure 4 – Pavage du plan par des tuiles de notre collection.

On aurait pu aussi utiliser la tuile qui possède les 4 secteurs triangulaires rouges (figure 5). On aurait ainsi obtenu un pavage du plan par translation de cette tuile.

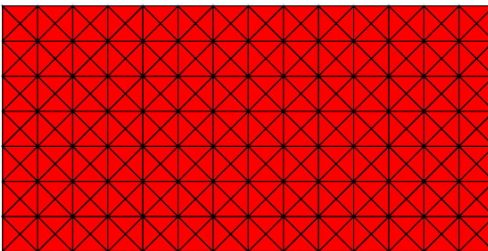


Figure 5 – Pavage du plan par une tuile de notre collection.

Considérons à présent une autre collection de tuiles (figure 6).

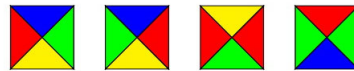


Figure 6 – Collection de 4 tuiles à 4 couleurs.

Il est facile de construire un carré de taille 1, 2 et 3 avec ces tuiles, mais aucun de ces carrés ne constitue un motif périodique (figure 7). Par construction, on constate alors qu'il est nécessaire que le motif carré de taille 3 possède la couleur rouge au nord. De ce fait, il est impossible de positionner d'autres tuiles de cette collection au dessus de ce motif, puisqu'aucune d'entre elles ne possède une couleur rouge au sud (figure 6). Il n'existe donc pas de motif carré de taille supérieure. Ainsi, comme le carré de taille 4 n'est pas pavable par cette collection de tuiles, on en déduit qu'elle ne permet pas de paver le plan.

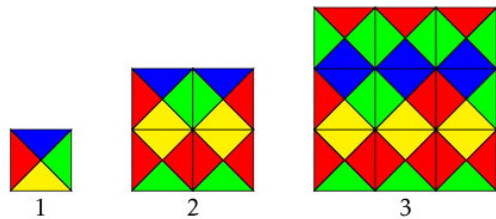


Figure 7 – Exemples de différents pavages valides de taille 1, 2 et 3.

Les deux collections de tuiles précédemment présentées ont permis de répondre par oui ou par non quant à la pavabilité du plan. Qu'en est-il lorsque la collection finie de tuiles est plus grande, avec plus de couleurs, peut-on toujours répondre à cette question ? Pour éclaircir ce point, nous allons réaliser une analyse épistémologique et historique du problème à travers la littérature de recherche.

2. — Analyse épistémologique et historique

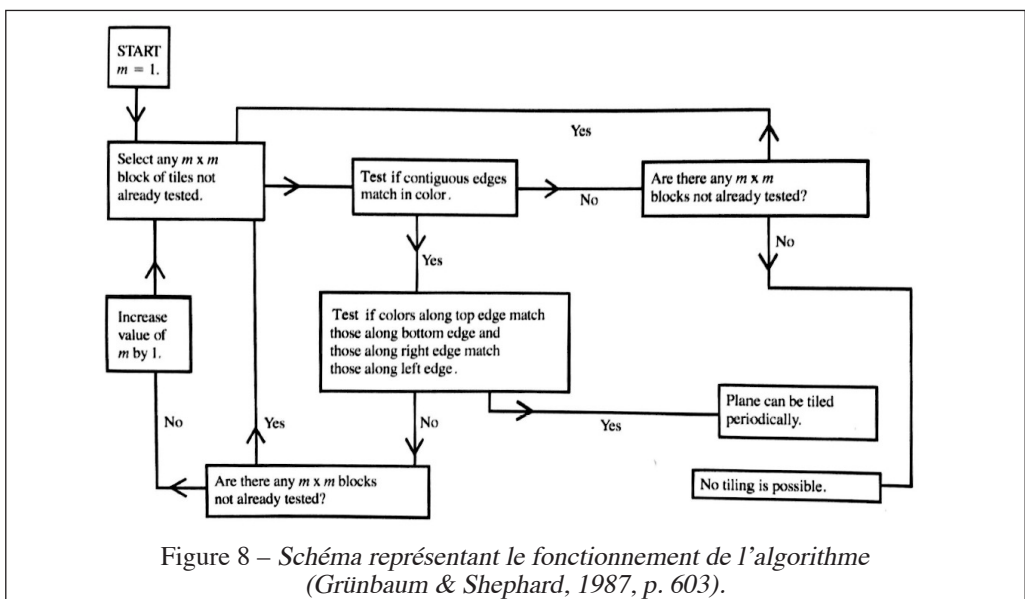
Le problème de Wang a été présenté par le mathématicien, logicien et philosophe chinois Hao Wang au début des années soixante (1961). Dans cet article Wang a conjecturé que tout pavage du plan par des tuiles de Wang était périodique.

Si cette conjecture s'avérait être vraie alors le problème serait nécessairement décidable. Autrement dit, on pourrait répondre par oui ou par non à ce problème de décision. Il existerait, de ce fait, au moins un algorithme qui permettrait d'examiner successivement tous les carrés de taille de 1 à n afin de déterminer si ces carrés sont pavables.

Cet algorithme évaluerait en fait toutes les dispositions possibles en un nombre fini de l'ordre de $|\tau|^{n^2}$ où $|\tau|$ est le nombre de tuiles de la collection et s'arrêterait alors lorsqu'il détec-

terait au moins un carré non pavable ou un carré périodique (Debrabant & Busser, 2018). Nous donnons ci-dessous un schéma de l'algorithme général (figure 8).

Malheureusement, la conjecture énoncée par Wang a été réfutée par Berger (1964, 1966). Celui-ci a montré que le problème de Wang était un problème indécidable au sens de la théorie de la calculabilité. En d'autres termes, Berger a d'une part démontré qu'il n'existait pas d'algorithme qui renvoyait en un nombre fini d'étapes la réponse oui ou non, et d'autre part a exhibé une collection de 20426 tuiles permettant de paver le plan aperiodiquement — c'est-à-dire sans aucune période verticale et horizontale. Il a ensuite restreint cette collection au nombre de 104 tuiles. Puis, durant plus de 50 ans, de nombreux mathématiciens ont essayé de réduire ce nombre de tuiles — et *a fortiori* le nombre de couleurs —, dans le but d'exhiber une collection minimale de tuiles permettant de paver le



plan aperiodiquement. Selon Grünbaum et Shephard (1987, pp. 589-590), Läuchli est sans doute le premier à avoir réduit ce nombre de tuiles à 40 en 1966, mais les détails n'ont été publiés qu'en 1975 dans un article de Wang. En 1967, Robinson a également réduit ce nombre à 52. L'année suivante, Knuth a exhibé une collection de 92 tuiles en se basant sur les travaux initiaux de Berger (Knuth, 1968, p. 384). Au début des années 70, Robinson a encore réduit ce nombre à 35 (Robinson, 1971). Ces différentes réductions utilisent toutes le domaine de la géométrie discrète. En parallèle, d'autres pavages aperiodiques sont apparus, notamment ceux de Penrose, qui, rappelons-le, ont eu une influence significative après la découverte des quasi-cristaux pour leur modélisation mathématique. En lien avec le problème de Wang, Penrose, lui-même, a proposé une toute nouvelle approche utilisant le domaine de la géométrie plane permettant de faire la correspondance entre les tuiles de Wang et ses propres tuiles. Il a ainsi démontré dans une lettre adressée à Robinson que son ensemble de tuiles de types « cerf-volant et fléchette » (figure 9(a)), permettant d'exhiber un pavage de Penrose³ de type 2 (P2), pouvait aussi être utilisé pour exhiber une collection de 34 tuiles de Wang pavant le plan aperiodiquement.

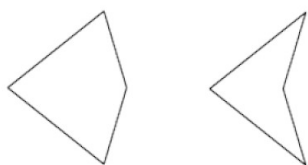


Figure 9(a) – Tuiles de Penrose (« cerf-volant et fléchette ») permettant de construire un pavage P2 de Penrose.

A partir de ce travail, Robinson a également réduit ce nombre à 32 tuiles de 16 couleurs (Grünbaum & Shephard, 1987, pp. 591-592). A

la fin des années 70, ce même auteur a utilisé un nouvel ensemble de tuiles permettant de former un pavage aperiodique en utilisant cette fois-ci, l'ensemble des tuiles A2 de Ammann (figure 9(b)). Robinson a ainsi mis en évidence une nouvelle collection de 24 tuiles de Wang de 24 couleurs (Robinson, 1977).

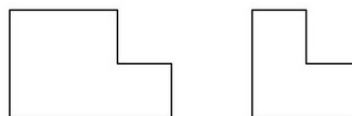


Figure 9(b) – Tuiles de Ammann permettant de construire un pavage A2 de Ammann.

Durant la même période, Ammann a diminué encore ce nombre à 16 tuiles de Wang de 6 couleurs⁴. On retrouve cette nouvelle collection dans l'article de Robinson (1978). A partir de cette période et jusqu'à la fin des années 90, personne⁵ n'a réussi à réduire davantage cette dernière collection. D'ailleurs dans leur ouvrage, Grünbaum et Shephard ont écrit que⁶

la réduction du nombre de tuiles de Wang dans un ensemble aperiodique de plus de 20 000 à 16 a été un exploit remarquable. Peut-être que le nombre minimum possible est maintenant atteint. Si, toutefois, d'autres réductions sont possibles, il semble alors certain que de nouvelles idées et méthodes seront nécessaires (Grünbaum & Shephard, 1984, p. 596).

Ces auteurs avaient parfaitement raison puisqu'il a fallu une approche radicalement

3 Il existe d'autres types de pavage de Penrose, les types P0, P1 et P3 correspondant respectivement aux pavages par des triangles d'or, pentagones et autres tuiles et losanges.

4 Nous donnons en annexe de cet article quelques collections de tuiles de Wang permettant de paver le plan aperiodiquement.

5 A notre connaissance.

6 Nous avons traduit cette citation, à l'origine en anglais.

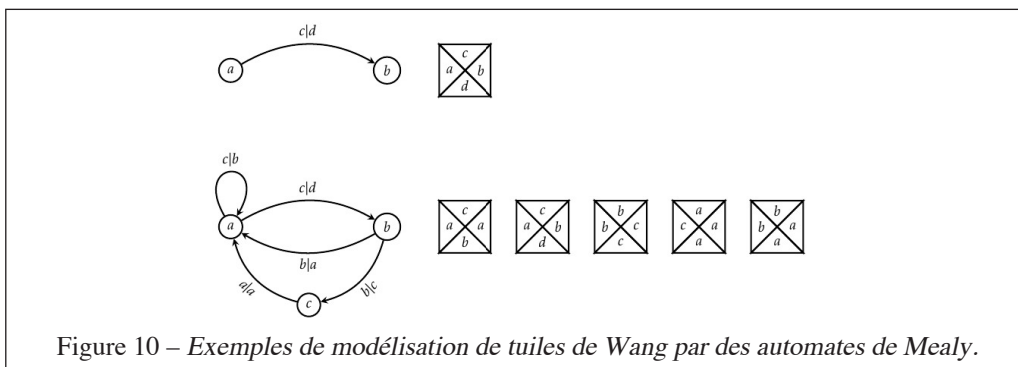


Figure 10 – Exemples de modélisation de tuiles de Wang par des automates de Mealy.

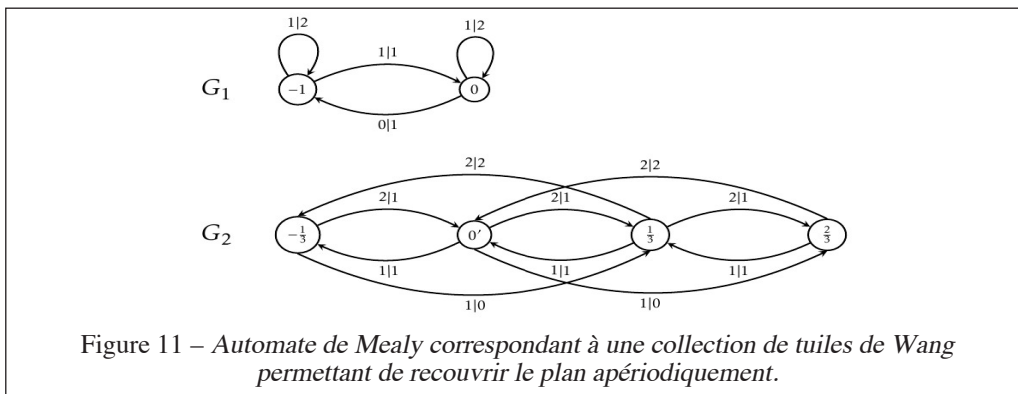


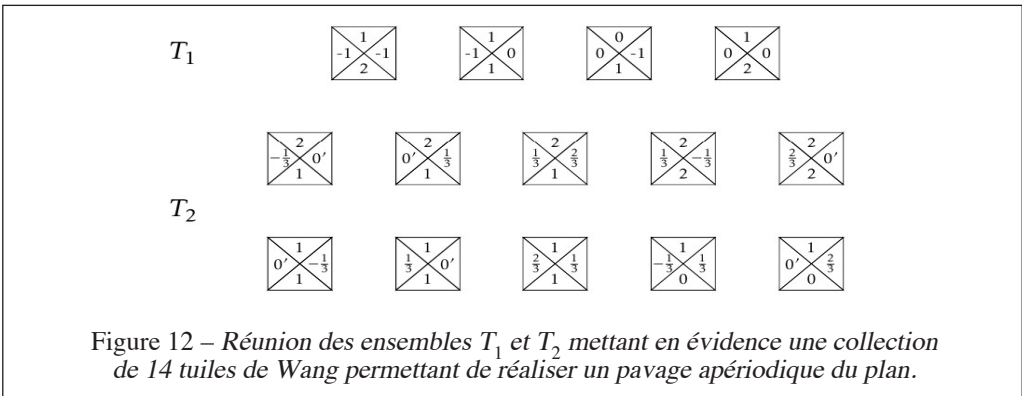
Figure 11 – Automate de Mealy correspondant à une collection de tuiles de Wang permettant de recouvrir le plan aperiodiquement.

différente pour réduire ce nombre à 14 à la fin des années 90. Kari (1996) a en effet utilisé une méthode basée sur l'arithmétique et les automates de Mealy, ces derniers permettant de modéliser des tuiles de Wang comme sur la figure 10. De façon informelle et sans entrer dans les détails, si l'on prend l'exemple de la figure 10, un automate de Mealy possède différents états correspondant aux sommets — représentés par des cercles munis d'une lettre dans cet exemple —, ainsi que des entrées et des sorties représentées sous la forme d'étiquettes « •|• » sur les arêtes. Sur le haut de la figure 10, on constate que deux états sont représentés, l'état « a » et l'état « b », la flèche donne ici le sens du parcours. Ainsi l'état « a » (resp. « b »)

correspond à la couleur ouest (resp. est) de la tuile de Wang.

Kari a ainsi utilisé les automates de Mealy et des notions d'arithmétique pour exhiber un ensemble de tuiles permettant de recouvrir le plan aperiodiquement (*ibid.*). Il a alors mis en évidence un automate de Mealy basé sur la réunion disjointe des composantes G_1 et G_2 (figure 11)⁷.

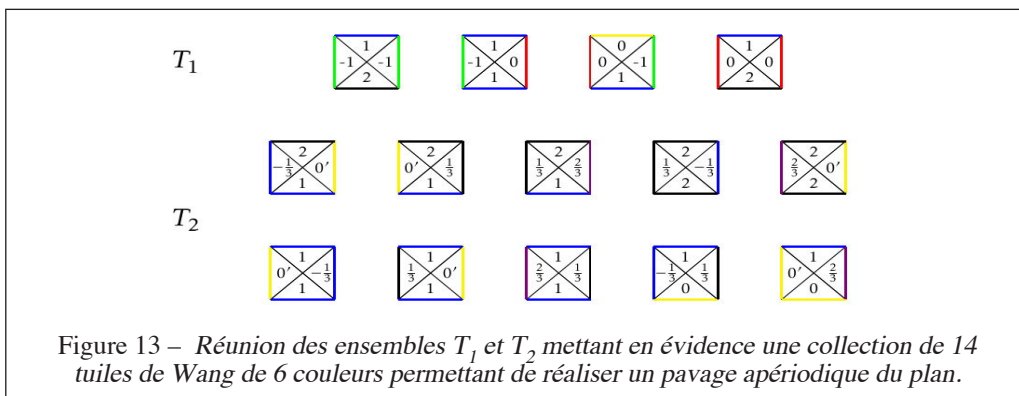
⁷ Dans cet article, nous ne présentons pas les étapes techniques permettant de démontrer que la réunion des deux ensembles de tuiles associés à G_1 et G_2 permet d'une part, de recouvrir le plan et qu'en plus, elle le recouvre de manière non périodique d'autre part. Ces techniques reposent principalement sur des notions arithmétiques sur les tuiles ainsi que sur les suites de Beatty. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'article de Kari (1996).



La modélisation énoncée précédemment permet de traduire cet automate par 2 ensembles de 4 tuiles (T_1) et de 10 tuiles (T_2) respectivement associés à G_1 et G_1 (figure 12).

Dans son article, Kari a démontré que la réunion de ces 2 ensembles permettait d'exhiber une collection de 14 tuiles recouvrant le plan aperiodiquement (*ibid.*). Néanmoins, chacun de ces ensembles ne permettait pas à lui seul de paver le plan. Prenons par exemple l'ensemble T_1 , on constate que les tuiles comportant la marque 2 au sud ne peuvent pas être utilisées dans un pavage du plan car aucune autre tuile de cet ensemble ne comporte un 2 au nord. Cette remarque est également valable pour la tuile comportant un 0 au nord. En effet, aucune autre tuile de T_1 ne comporte de 0 au sud. Il reste donc la tuile comportant un 1 au nord et au sud qui ne permet pas à elle seule de recouvrir le plan. Un raisonnement analogue sur l'ensemble T_2 permet de conclure de la même manière. Ces ensembles ont été construits de telle manière que chaque bande horizontale — de hauteur 1 unité — du pavage comporte uniquement des tuiles d'un même ensemble. Autrement dit, il ne peut pas y avoir de tuiles de T_1 avec des tuiles de T_2 sur une même bande horizontale. Pour s'en convaincre, il suffit de remar-

quer que chaque tuile de Wang à l'ouest et à l'est ne possède aucune marque en commun dans ces deux ensembles. A présent, nous allons nous intéresser davantage aux marques figurant sur chacune de ces tuiles. De prime abord, on constate que cet ensemble de 14 tuiles possède 8 marques différentes à savoir : $0'$, 0 , -1 , 1 , $-1/3$, $1/3$, $2/3$ et 2 . Si l'on associe chaque marque à une couleur, nous en avons également 8. Nous allons voir qu'en réalité 6 suffisent à construire cet ensemble de 14 tuiles (figure 13). En effet, Kari a expliqué très brièvement que le $0'$ de l'ensemble T_2 est utilisé pour le différencier du 0 de T_1 , mais est interprété comme le 0 de l'ensemble T_2 (*ibid.*, p. 260). Ainsi les marques $0'$ et 0 de l'ensemble T_2 prennent la même couleur — disons jaune (figure 13). Par contre, le 0 situé à l'est ou à l'ouest des tuiles de l'ensemble T_1 doit nécessairement avoir une couleur différente de celle du 0 déjà prise dans l'ensemble T_2 — disons rouge. En effet, si ce n'était pas le cas alors on pourrait avoir des tuiles de T_1 et T_2 sur une même bande horizontale, ce qui est impossible avec ces deux ensembles. Il reste à identifier les autres marques : -1 , 1 , 2 , $-1/3$, $1/3$ et $2/3$. Prenons par exemple la couleur bleue pour la marque 1 . Nous pouvons très bien la réutiliser pour la marque $-1/3$ de l'ensemble T_2 , puisque cette marque est située à l'est ou à



l'ouest des tuiles T_2 , tandis que le 1 de l'ensemble T_1 est toujours situé au nord ou au sud. Même raisonnement pour la marque 2 dont on peut faire coïncider la couleur, disons noire, avec la marque $2/3$. Prenons ensuite la couleur violette pour la marque $2/3$. Il reste alors à remarquer que la tuile possédant la marque 0 au nord de l'ensemble T_1 doit avoir la même couleur que le 0 dans l'ensemble T_2 , c'est-à-dire jaune, afin de pouvoir positionner une autre tuile de l'ensemble T_2 au-dessus (figure 13).

Finalement, 6 couleurs suffisent alors que l'article de Kari de 1996 ne le mentionnait pas explicitement. On obtient ainsi un ensemble de 14 tuiles à 6 couleurs (figure 14).

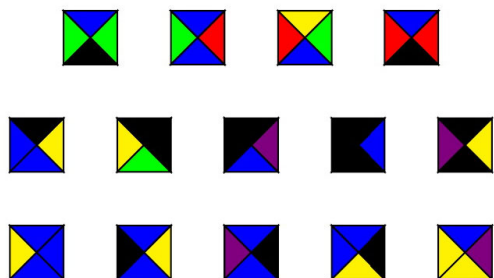


Figure 14 – Collection de 14 tuiles de Wang de 6 couleurs (bleu, rouge, vert, jaune, violet, noir).

Durant la même période, Culik (1996) a exhibé une autre collection de 13 tuiles de 5 couleurs en se basant sur une méthode analogue (figure 15).

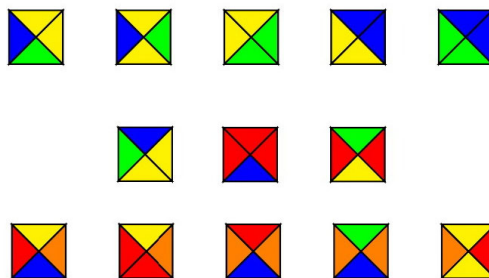


Figure 15 – Collection de 13 tuiles de Wang de 5 couleurs (bleu, rouge, vert, jaune, orange).

Ce n'est que récemment où Jeandel et Rao (2015) ont exhibé une collection minimale de 11 tuiles à 4 couleurs permettant de paver le plan aperiodiquement (figure 16). Cette minimalité a été démontrée grâce à une recherche exhaustive assistée par ordinateur qui a nécessité près d'un an de calculs (Rao, 2017). Cependant les moyens informatiques ont une limite en temps et en espace. En effet, la recherche exhaustive de Jeandel et Rao a per-

mis de mettre en évidence un ensemble de 10 tuiles permettant de paver des carrés de grande taille mais qui pourtant ne pavait pas le plan. Ils ont ainsi démontré que cet ensemble ne permettait pas de recouvrir des carrés de taille encore plus grande en privilégiant des arguments théoriques face à l'inefficacité des moyens informatiques dans ce cas précis. Ceci met en évidence le fait que la recherche par exhaustivité des cas a ses limites lorsque la taille des instances devient de plus en plus importante. Ces auteurs ont ainsi démontré que toutes les collections de tuiles strictement plus petites que 11, si elles pavent le plan, le pavent nécessairement de manière périodique.

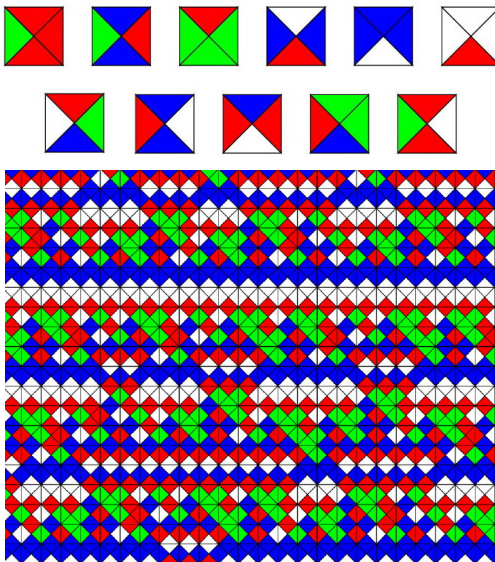


Figure 16 – Collection minimale de 11 tuiles à 4 couleurs et fragment de pavage aperiódique du plan utilisant cette même collection (Jeandel & Rao, 2015, p. 36).

Nous résumons dans le tableau de la page ci-contre les quelques références incontournables

que nous avons mises en avant dans cet article, et qui montrent la ténacité de ce problème dans l'histoire des mathématiques discrètes (tableau 1, page ci-contre).

En parallèle, d'autres mathématiciens ont démontré que la conjecture de Wang était vraie dans le cas où la collection de tuiles possédait au plus 3 couleurs (Chen et al., 2014 ; Hu & Lin, 2011). Ce qui signifie que le problème de Wang, dans ce cas, est un problème décidable. Mais alors, qu'en est-il sur des régions bornées du plan comme les rectangles ? Est-ce un problème décidable ou indécidable ? Dans la littérature, le problème de Wang restreint au rectangle de taille $p \times q$ est un problème décidable et d'une complexité NP-complet⁸ (Jeandel, 2011). En théorie de la complexité, cela signifie qu'il est « très difficile » à résoudre. En d'autres termes, il est facile de vérifier qu'une solution donnée est correcte à l'aide d'un algorithme polynomial qui examine chaque tuile du rectangle, mais sans savoir, en temps polynomial, comment cette solution a été construite...

Notre travail consiste donc à trouver des ensembles d'instances « intéressantes » permettant de rendre le problème d'une part décidable, mais également résoluble dans « un temps raisonnable ». Nous nous sommes alors intéressés à deux sous-problèmes. Le premier — que nous ne détaillons pas dans cet article —, consiste à se limiter à des familles de collections d'au plus deux couleurs par tuile, afin de déterminer, pour chaque famille d'une collection de tuiles à quelle(s) condition(s) il est possible de paver le plan. Nous en avons dénombré trois à rotation près (figure 17, page ci-contre).

⁸ NP signifie « soluble en temps polynomial par un algorithme non déterministe ». Un algorithme non déterministe est un algorithme qui propose lors de son exécution des branchements laissés « au choix de la machine ». On demande qu'au moins un des choix successifs conduise à la solution en un nombre d'étapes élémentaires majoré par un polynôme en la taille du problème à résoudre, tel qu'il est posé selon un codage convenu.

Tableau 1 – Existence de pavages apériodiques du plan par des tuiles de Wang.

Berger (1964, 1966) ⁹	20426 puis 104 tuiles
Läuchli (1966) cité par Grünbaum et Shephard (1987)	40 tuiles
Robinson (1967)	52 tuiles
Knuth (1968)	92 tuiles
Robinson (1971)	35 tuiles
Penrose (1976) et Robinson (1976) cités par Grünbaum et Shephard (1987)	34 tuiles puis 32 tuiles
Robinson (1977) cité par Grünbaum et Shephard (1987)	24 tuiles et 24 couleurs
Amman (1978) cité par Robinson (1978)	16 tuiles et 6 couleurs
Kari (1996)	14 tuiles et 6 couleurs
Culik (1996)	13 tuiles et 5 couleurs
Jeandel et Rao (2015)	11 tuiles et 4 couleurs

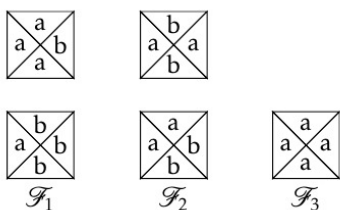


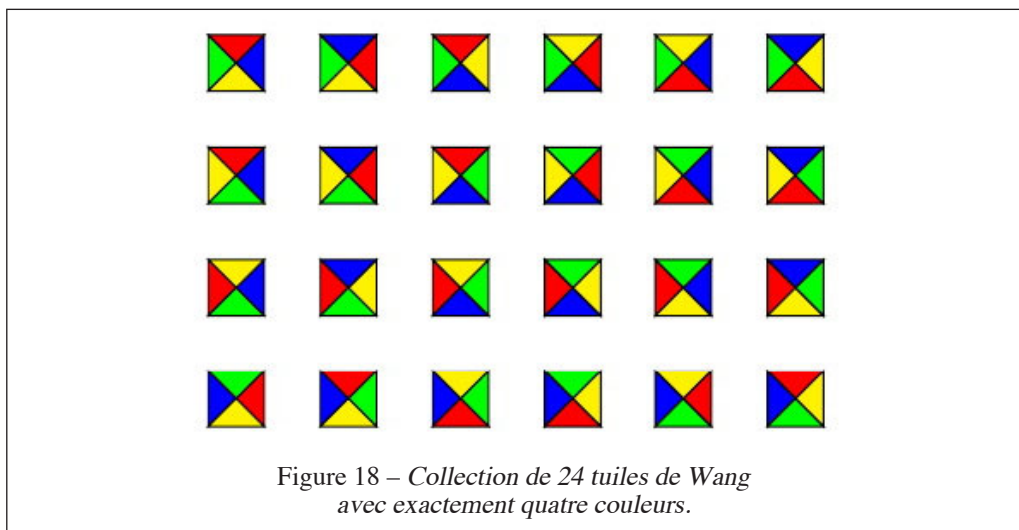
Figure 17 – Trois familles de tuiles d’au plus deux couleurs par tuile.

Le cas de la famille F_3 permet de paver le plan, puisque cette tuile peut à elle seule recouvrir le plan par translation d’elle-même. Même remarque pour la tuile du haut de la famille F_2 .

⁹ En réalité, Berger en 1964 dans son travail de thèse a proposé un ensemble de 20426 tuiles puis l’a réduit à 104, mais n’a pas publié ce dernier ensemble dans son article de 1966.

Le problème pour les tuiles restantes se réduit en fait à la recherche de circuits en théorie des graphes. Ce problème est en général un problème appartenant à la classe de complexité P. En d’autres termes, nous pouvons dire qu’il est « facile » à résoudre, puisqu’il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre le problème d’existence d’un circuit, mais également d’en exhiber un exemple.

Le deuxième problème, que nous allons détailler dans ce texte, consiste à se restreindre à une région bornée du plan comme les rectangles avec des « contraintes » de coloration aux bords. Pour cela, on va s’intéresser à une famille de tuiles possédant exactement quatre couleurs distinctes dont on autorise les permutations. Ceci nous conduit à un ensemble de $4! = 24$ tuiles de Wang (voir la figure 18 de la page suivante).



Au premier abord, on observe que ce jeu de tuiles permet de construire des premiers motifs qui respectent les règles du jeu. On s'aperçoit alors rapidement par construction qu'il est facile d'exhiber des motifs périodiques. En effet, pour une tuile donnée, il existe trois autres tuiles équivalentes modulo une certaine rotation sur cette tuile. Ainsi avec ces quatre tuiles, on pourrait former un motif carré de taille 2, qui par translation, permettrait de paver le plan. Ainsi si le plan est pavable alors n'importe quelle région bornée du plan et *a fortiori* un rectangle est également pavable. Les « contraintes » de coloration aux bords du rectangle permettront, et nous le verrons dans la suite du texte, de rendre le problème intéressant, au sens où la réponse n'est pas du tout immédiate et nécessite différentes stratégies et raisonnements mathématiques pour y répondre.

A travers cette section, nous avons essayé de montrer l'importance d'une analyse épistémologique et historique pour ce problème. Celle-ci permet en effet de donner une pre-

mière vision sur ce qu'il est envisageable de proposer aux élèves, sans d'une part dénaturer le problème initial et sans que le problème proposé soit hors de portée ou trivialement résoluble d'autre part.

Dans la suite de ce texte, nous parlerons de motifs valides ou de pavages valides lorsqu'un motif ou pavage respecte les règles du jeu de Wang énoncées au début de l'article, mais aussi lorsqu'il respecte les contraintes de coloration sur les bords du rectangle.

Dans la prochaine section, nous faisons une analyse mathématique du deuxième sous-problème présenté en amont afin d'identifier des variables pertinentes ainsi que les connaissances en jeu dans ce problème.

3. — Analyse mathématique et identification des connaissances en jeu

Cette partie vise à donner des éléments mathématiques permettant d'identifier diffé-

rentes stratégies en jeu dans la résolution du problème. Nous verrons d'ailleurs, en deuxième partie de ce texte, que l'analyse mathématique nous permet en outre d'identifier des instances qui semblent enclines au développement du raisonnement, de la logique et de la preuve chez les élèves idoines à l'activité de recherche en mathématiques.

Le problème général s'énonce ainsi.

- *Instances* : Des entiers naturels p et q non nuls et notre collection de 24 tuiles (figure 18, page précédente).
- *Question* : Peut-on paver un rectangle de taille $p \times q$ par ces tuiles dont chacun des côtés de ce rectangle a une et une seule couleur fixée ?

De prime abord, une première stratégie consiste à identifier les rectangles qui sont susceptibles d'être pavés par des tuiles de notre collection en faisant des essais sur des petits cas particuliers. On s'aperçoit alors, suivant la parité de p et de q , qu'il est possible ou non d'exhiber un pavage valide suivant les types de rectangles ci-après (figure 19).

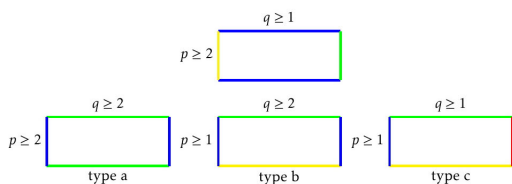


Figure 19 – Rectangles de différents types.

Effectivement, on s'aperçoit que lorsque les rectangles ont la même couleur à l'est et à l'ouest et/ou au nord et au sud, il est nécessaire d'avoir des longueurs dont la mesure est supérieure ou égale à 2 unités. Ceci s'explique par le fait qu'il ne peut pas y avoir 2 fois la même

couleur sur une tuile. Prenons 3 exemples de pavages impossibles sur des rectangles de type a et b avec des conditions particulières sur p et q pour illustrer nos propos (figure 20 (a)).

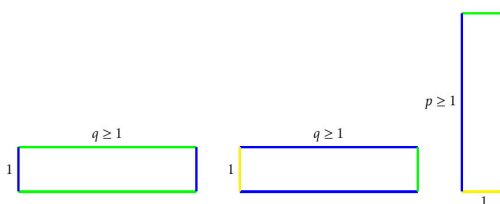


Figure 20 (a) – Rectangles de type a et b qui ne sont pas pavables avec ces tuiles.

Il existe bien évidemment d'autres types de rectangles qui respectent la coloration unie sur les bords, mais qui ne peuvent jamais être pavés par ces tuiles (figure 20 (b)).



Figure 20 (b) – Autres types de rectangles non pavables avec ces tuiles.

En effet, dans tous les cas pour pouvoir paver ces deux types de rectangles, il est nécessaire d'avoir au moins une tuile dans les « coins gauches » qui possède la même couleur au nord (resp. au sud) et à l'ouest – bleue dans ce cas-ci. Ceci est bien évidemment impossible puisque cette tuile ne fait pas partie de notre collection initiale.

Le problème général se réduit alors à la recherche de conditions portant sur les entiers p et q pour les rectangles de type a, b et c. Dans cette partie on va se restreindre à l'étude des rectangles de type c¹⁰. Le lecteur intéressé

¹⁰ Nous donnerons à la fin de cette section les résultats concernant les rectangles de types a et b.

sé trouvera une analyse succincte dans le texte de Bernat (2014), qui a été écrit de manière indépendante du problème de Wang. Dans les lignes ci-après, nous développons notre analyse mathématique dans une perspective didactique, en gardant un lien étroit avec le problème général énoncé au début de cette section. Le problème restreint aux rectangles de type c s'énonce ainsi :

- *Instances* : p et q des entiers naturels non nuls et notre collection de 24 tuiles (figure 18, page 88).
- *Question* : Est-il toujours possible de paver par ces tuiles un rectangle de taille $p \times q$ dont chaque bord a une couleur unie et distincte des autres ?

Choisissons arbitrairement quatre couleurs distinctes sur les bords du rectangle, disons bleue à l'ouest, jaune au sud, rouge à l'est et verte au nord — l'ordre des couleurs n'a aucune importance, d'autres choix sont possibles.

Etude de quelques cas particuliers

Avant de regarder le problème dans sa globalité, nous proposons de l'étudier sur des cas particuliers comme pourrait le faire un élève, la stratégie consiste donc à faire des essais sur des rectangles de petite taille. On s'aperçoit alors rapidement qu'il y a des cas qui permettent d'exhiber un pavage valide, alors que d'autres où il semble impossible d'en exhiber un. Par exemple, on observe que les rectangles de taille 1×5 , 3×5 , 2×4 ou encore 2×6 possèdent bien un pavage valide respectant les règles de coloration aux bords (figure 21). A contrario, il semble impossible d'en exhiber un pour les rectangles de taille 1×4 et 2×3 par exemple (figures 22 & 23).

Pour démontrer cette impossibilité, une stratégie consiste à supposer que le rectangle 1×4 possède un pavage valide, ceci conduit néces-

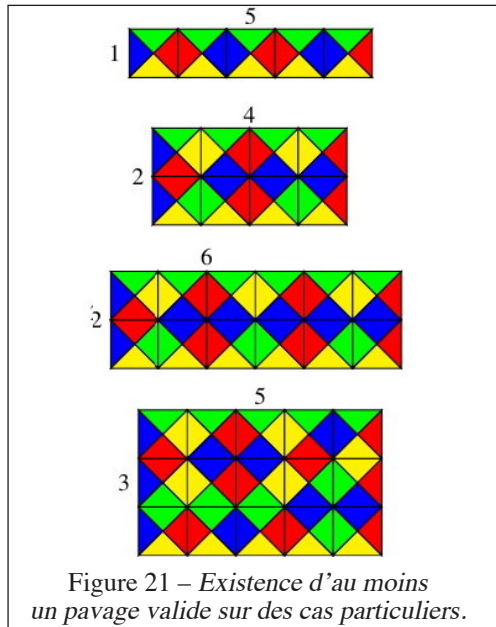


Figure 21 – Existence d'au moins un pavage valide sur des cas particuliers.

sairement à la configuration ci-après (figure 22 (a)). Il faut alors compléter le premier carré à gauche par la couleur rouge à l'est, puis le deuxième carré par la couleur rouge à l'ouest et bleue à l'est et ainsi de suite. En raisonnant par condition nécessaire (CN), on s'aperçoit alors que le dernier carré à droite (figure 22 (b)) a nécessairement la couleur rouge à l'ouest, ce qui est impossible puisque cette tuile n'appartient pas à notre collection. Le rectangle 1×4 ne possède donc pas de pavage valide. Ce type de raisonnement par CN aboutissant à une impossibilité se nomme communément raisonnement par forçage.

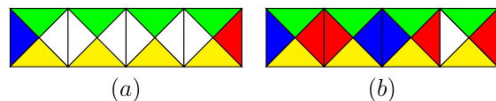


Figure 22 – Raisonnement par forçage pour le rectangle 1×4 .

En utilisant une stratégie analogue, on démontre également que le rectangle de taille 2×3 ne possède pas non plus de pavage valide (figure 23). Par construction et en supposant qu'un tel pavage existe, on aboutit nécessairement à la configuration de gauche (figure 23). En raisonnant par CN sur les couleurs, on s'aperçoit alors que la dernière tuile possèdera 2 couleurs jaunes au nord et au sud (figure 23 à droite). Ceci est impossible puisqu'aucune tuile de notre collection ne présente cette configuration.

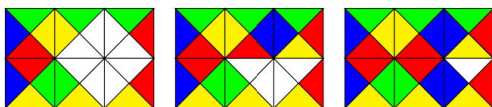


Figure 23 – Exemple de raisonnement par forçage pour le rectangle 2×3 .

Un autre point de vue consiste à dénombrer le nombre de fois où une couleur apparaît dans le pavage. Ainsi, si le rectangle 2×3 admet un pavage valide alors il possède exactement six tuiles de 4 couleurs distinctes. Or chaque couleur est représentée par des triangles colorés qui sont soit, situés sur les bords du rectangle, soit qui sont adjacents par leur base à un autre triangle de même couleur, ce qui signifie qu'ils peuvent être regroupés par paires de deux. Par exemple, comme on a supposé que le rectangle était pavable, il y a donc 3 triangles jaunes au sud de mon rectangle, et donc $6 - 3 = 3$ triangles jaunes qui ne sont pas sur les bords. Or, chaque triangle jaune qui n'est pas sur le bord du rectangle doit nécessairement être adjacent par sa base à un autre triangle jaune. Cela sous-tend que 3 est un nombre pair, ceci est bien évidemment faux. On en déduit donc que le rectangle 2×3 ne possède pas de pavage valide.

L'étude de ces quelques cas particuliers permet rapidement de voir émerger des condi-

tions sur les entiers p et q favorables à la construction d'un pavage valide. En l'occurrence nous pouvons conjecturer que lorsque p et q ont la même parité (resp. de parité différente), il semble possible (resp. impossible) d'exhiber un pavage valide.

Afin de mettre à l'épreuve cette conjecture initiale, il peut être intéressant de proposer aux élèves d'étudier le cas des bandes de taille $1 \times q$ et $2 \times q$.

Le cas de la bande $1 \times q$

En commençant par construire un pavage de la bande $1 \times q$, on s'aperçoit rapidement que l'on a nécessairement le même motif de taille 1×2 qui se répète successivement. Ainsi, la stratégie pour compléter cette bande consiste à translater horizontalement le motif contenant les deux premiers carrés construits. On en déduit donc que si la longueur de la bande est paire alors le rectangle aura nécessairement la couleur bleue à l'est. Ceci qui est bien évidemment impossible dans le cas des rectangles de type c (figure 24 (a) de la page suivante).

Néanmoins si q est impair, alors il suffit de translater $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ fois le motif de base (figure 24 (b) page suivante), pour compléter les $q - 1$ premières cases. Il reste alors à compléter la dernière case manquante par le carré possédant la couleur bleue à l'ouest, jaune au sud, rouge à l'est et verte au nord. On aurait également pu construire par translation de ce même motif une bande pavable de longueur paire de type b, dont on aurait ôté la dernière tuile afin d'obtenir un pavage valide de la bande de longueur impaire cette fois-ci de type c.

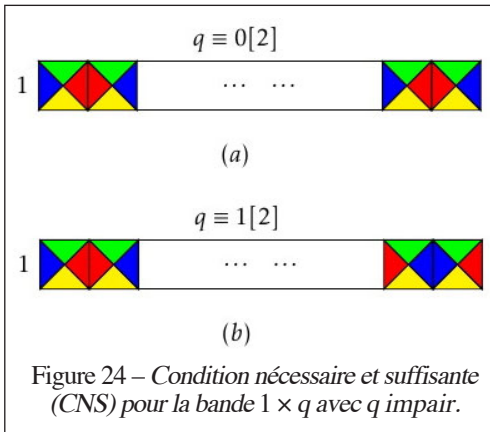


Figure 24 – Condition nécessaire et suffisante (CNS) pour la bande $1 \times q$ avec q impair.

On obtient ainsi le résultat préliminaire suivant :

Propriété. Soit $q \geq 1$, q est impair si et seulement si la bande $1 \times q$ possède un pavage valide de type c.

Le cas de la bande $2 \times q$

Quand on commence à construire un pavage de la bande $2 \times q$, on s'aperçoit dès le début qu'il y a exactement deux choix possibles pour construire le premier motif carré de taille 2. L'un permet de paver la bande de longueur paire grâce à une translation horizontale de ce motif (figure 25).

En effet, comme ce motif carré a la même couleur à l'est et à l'ouest, on peut le translater $\left(\frac{q}{2} - 1\right)$ fois. Cela permet ainsi de paver les $q - 2$ premières colonnes. Il reste alors à construire un motif carré de taille 2 de telle manière qu'il pave les 2 dernières colonnes en respectant les contraintes de coloration aux bords du rectangle (figure 25).

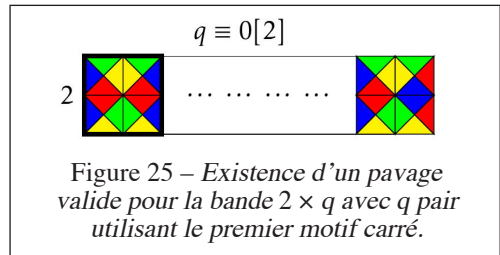


Figure 25 – Existence d'un pavage valide pour la bande $2 \times q$ avec q pair utilisant le premier motif carré.

Tandis que l'autre motif incite à poursuivre la construction d'un deuxième motif carré dont les côtés ouest et est sont tous les deux rouges¹¹. Ainsi par translation horizontale de ce nouveau motif, on exhibe un pavage valide de cette bande de longueur paire (figure 26).

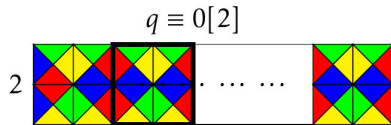


Figure 26 – Existence d'un pavage valide pour la bande $2 \times q$ avec q pair utilisant le deuxième motif carré.

En d'autres termes, l'argumentation précédente nous a permis de démontrer que la condition « q est pair » est une condition suffisante (CS) pour exhiber un pavage valide de la bande $2 \times q$, mais est-elle nécessaire ? Autrement dit, démontrons qu'il est impossible d'exhiber un pavage valide dans le cas où q est impair. Supposons qu'il existe un tel pavage, il suffit alors de remarquer que la couleur jaune au niveau de la deuxième bande apparaît nécessairement soit à l'est, soit à l'ouest des tuiles (figures 25 & 26). Ceci se justifie par le fait qu'elle ne peut pas occuper la place au nord, déjà prise

¹¹ On aurait pu intervertir la couleur rouge et bleue sur la dernière bande verticale du dernier motif carré. On aurait ainsi obtenu un rectangle de taille 2×4 dont les côtés est et ouest ont tous les deux la couleur bleue.

par la couleur verte, ni au sud, car sinon, nous aurions des tuiles au niveau de la première bande qui possèderaient 2 fois la couleur jaune, ce qui est bien évidemment impossible. On en déduit donc qu'au niveau de la deuxième bande, la couleur jaune apparaît à l'est des tuiles si et seulement si la case a une « abscisse » impaire. En d'autres termes, chaque case située sur la deuxième bande ayant une case d'abscisse impaire a nécessairement la couleur jaune à l'est. Comme q est impair, on aura alors nécessairement une couleur jaune à l'est sur le dernier carré de la deuxième bande, ce qui est impossible si l'on respecte la coloration aux bords du rectangle. On en déduit donc que la bande de taille $2 \times q$ ne possède pas de pavage valide si q est impair. La CNS pour que le rectangle de type c soit pavable par des tuiles de notre collection est que q soit pair. Ceci nous amène donc à la propriété suivante.

Propriété. Soit $q \geq 1$, q est pair, si et seulement si, la bande $2 \times q$ possède un pavage valide de type c .

Une stratégie analogue consiste à raisonner sur la première bande, en considérant non plus la couleur jaune mais la couleur verte cette fois-ci. Cela nous aurait conduit également au même résultat.

Si l'on considère la bande de taille $3 \times q$, la CN est beaucoup plus difficile à démontrer en utilisant l'argumentation précédente car il faut traiter différents sous-cas qui n'apparaissent pas dans l'étude des bandes de taille $1 \times q$ ou $2 \times q$. Il suffit pour s'en convaincre de démontrer l'impossibilité d'exhiber un pavage valide pour le rectangle de taille 3×4 . La démonstration reste fastidieuse, mais permet en outre de s'apercevoir que la stratégie utilisant le raisonnement par forçage est efficace localement sur des petits cas particuliers, voire sur les bandes de petite taille ($1 \times q$, $2 \times q$), mais ne permet pas

de généraliser de manière efficace, car le nombre de sous-cas à traiter grandit en fonction de la taille de la bande à étudier. Nous verrons par la suite, qu'une autre stratégie déjà évoquée dans le cas du rectangle 2×3 permet d'élaborer une démonstration d'impossibilité dans le cas général.

A ce stade de l'analyse, nous pouvons formuler une conjecture de portée générale qui semble cohérente avec nos différents résultats préliminaires.

Conjecture. Soient p et q des entiers naturels non nuls, les entiers p et q ont la même parité, si et seulement si, le rectangle de taille $p \times q$ possède un pavage valide de type c avec des tuiles de notre collection.

Dans le paragraphe suivant, nous verrons comment, modulo différentes stratégies et raisonnements, démontrer la conjecture précédemment énoncée.

*Vers une généralisation
sur des rectangles de taille $p \times q$*

L'analyse préliminaire nous a permis d'identifier des conditions sur les entiers p et q qui permettent ou non d'exhiber un pavage valide. Ainsi, lorsque p et q sont de même parité il semble toujours possible d'exhiber un pavage valide alors que, s'ils sont de parités différentes, il semble impossible d'exhiber un tel pavage. Dans cette partie, nous allons démontrer que la condition « p et q ont la même parité » est une CNS quant à l'existence d'un pavage valide dans le cas des rectangles de type c , en mettant en avant différentes stratégies possibles.

Une première stratégie pour démontrer la CS consiste à raisonner par disjonctions des cas en étudiant d'une part le cas où p et q sont pairs et le cas où p et q sont impairs d'autre part.

DU PROBLEME DE WANG VERS UNE NOUVELLE SITUATION DE RECHERCHE POUR LA CLASSE

Pour construire un pavage valide dans le cas où p et q sont impairs, une première stratégie relève d'un raisonnement par construction et déconstruction de rectangles pavables. L'analyse préliminaire a mis en avant le fait qu'il est plus ou moins facile de construire un pavage rectangulaire de « grande » taille, si à un moment ou un autre, nous sommes en mesure d'exhiber un motif carré pouvant être traduit périodiquement. Ainsi, une stratégie consiste à exhiber le plus petit motif carré périodique. En d'autres mots, cela correspond à un carré possédant la même couleur au nord et au sud, mais aussi à l'est et à l'ouest. Dans notre cas, on construit ainsi ce que l'on appelle le motif de base de notre pavage (figure 27).

On pose $p' = p + 1$ et $q' = q + 1$, en répétant alors le motif de base verticalement $\frac{p'}{2}$ fois, on pave ainsi la bande $p' \times 2$. En remarquant que cette bande possède la même couleur à l'est et à l'ouest, on peut alors la traduire hori-

zontalement $\frac{q'}{2}$ fois. On a ainsi construit un pavage valide pour un rectangle de type a dont ses côtés ont une mesure paire (figure 27).

L'objectif est de construire un pavage valide pour le rectangle de type c. Une stratégie consiste alors à déconstruire le pavage précédent. En effet, il suffit d'extraire la dernière bande du pavage par exemple, pour obtenir un pavage valide d'un rectangle de type b, dont la mesure des côtés nord et sud est impaire et dont celle des côtés est et ouest reste invariante (figure 28, page ci-contre). On réitère la procédure, cette fois-ci sur un des côtés nord ou sud. Par extraction, on obtient alors un pavage valide d'un rectangle de type c, dont la mesure des côtés est impaire (figure 29).

Finalement, on s'aperçoit que cette stratégie permet non seulement de construire un pavage valide pour les rectangles de type c, mais également de démontrer que quelle que soit la parité des entiers p et q il est toujours possible

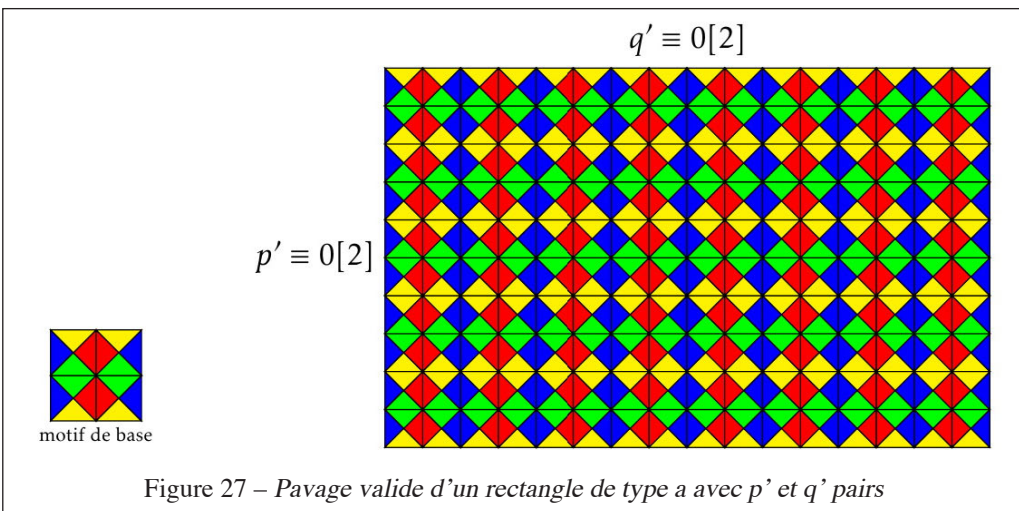
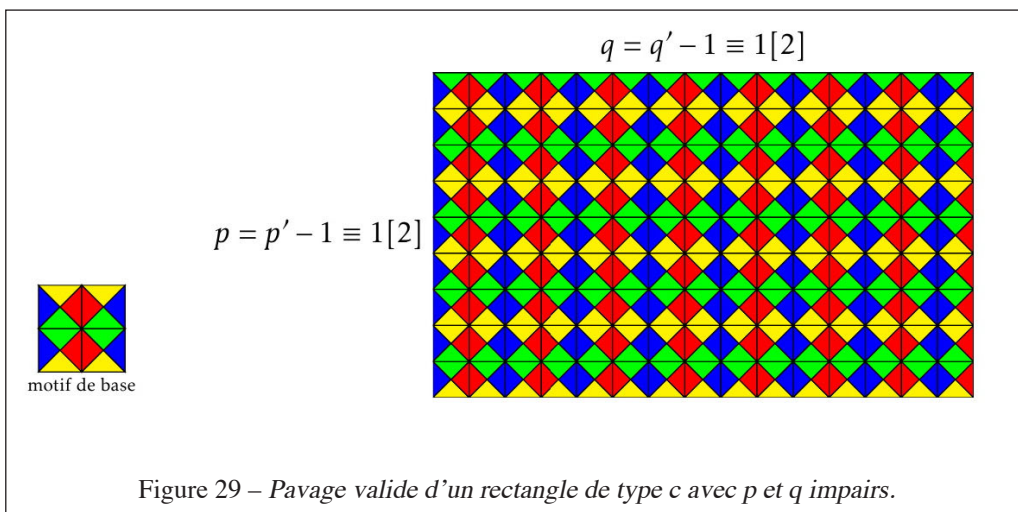
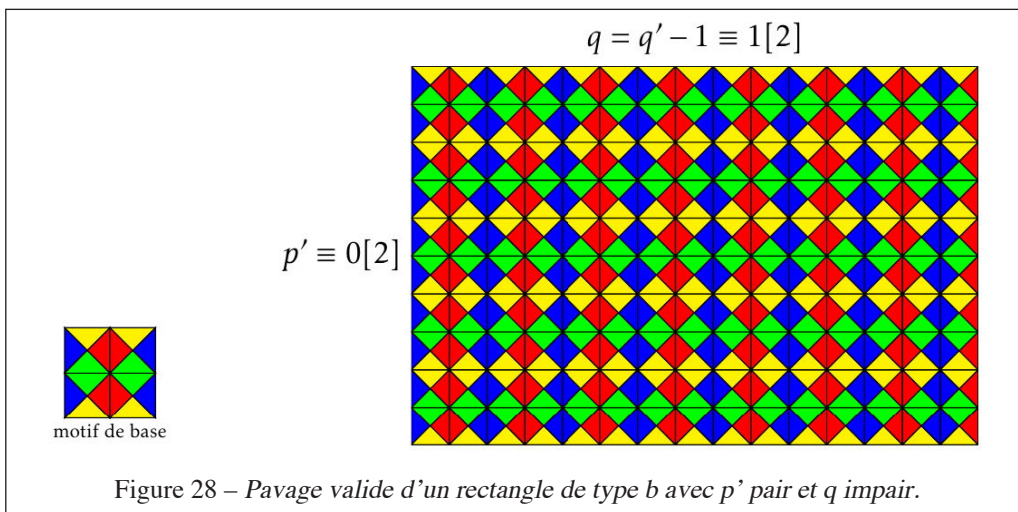


Figure 27 – Pavage valide d'un rectangle de type a avec p' et q' pairs



d'exhiber un pavage valide de type a, b et bien sûr c. Ces faits permettent donc de répondre à notre problème général à savoir :

- si p et q sont pairs alors il existe au moins un rectangle pavable de type a ;
- si p et q sont de parités différentes alors il existe au moins un rectangle pavable de type b ;
- si p et q sont impairs alors il existe au moins un rectangle pavable de type c.

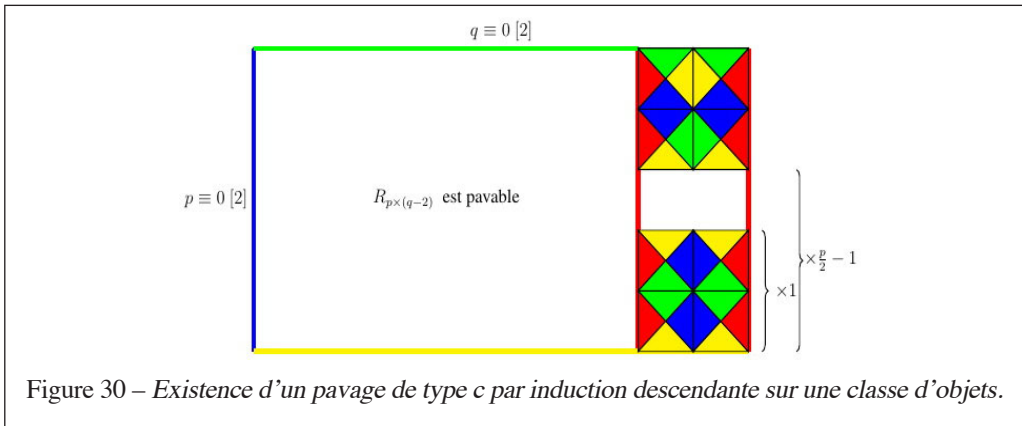


Figure 30 – Existence d’un pavage de type c par induction descendante sur une classe d’objets.

Examinons le cas où les entiers p et q sont pairs. Pour cela, une stratégie consiste à utiliser un raisonnement par récurrence descendante¹² sur une classe d’objets en mettant en avant un contre-exemple minimal (figure 30). Considérons le rectangle de taille $p \times q$ comme étant le plus petit rectangle qui ne possède pas de pavage valide de type c. Par cette considération, tout rectangle de taille strictement plus petite que $p \times q$ et possédant les mêmes conditions de parité sur les côtés possède nécessairement un pavage valide. Ainsi le rectangle de la taille $p \times (q - 2)$ possède bien un pavage valide, puisque p et $(q - 2)$ sont pairs. L’enjeu est alors de construire une bande de taille $p \times 2$ respectant les contraintes de coloration au nord (vert) au sud (jaune) à l’est (rouge) et à l’ouest (rouge) dépendant du rectangle $p \times (q - 2)$. Par concaténation des deux rectangles, on obtient une reconstruction du rectangle de taille $p \times q$ qui est bien pavable. Ceci est en contradiction avec notre hypothèse de départ, on conclut donc que celle-ci est fautive. Ce raisonnement est toujours possible jusqu’au carré de taille 3×3 qui constitue la base de notre induction. De plus, l’analyse préliminaire nous a permis

de démontrer la possibilité ou l’impossibilité de paver les cas de plus petite taille. En somme, nous avons démontré que la condition « p et q sont pairs » est bien une CS pour pouvoir exhiber un pavage valide de type c (figure 30).

Ainsi, si p et q ont la même parité alors il existe au moins un pavage valide pour le rectangle de taille $p \times q$ de type c. A présent, nous allons présenter une démarche qui permet d’établir la CN. En d’autres termes, nous allons démontrer que la CS « p et q ont la même parité » est également une CN pour obtenir un pavage valide.

Comme nous l’avons évoqué précédemment, la stratégie par forçage est efficace localement sur des petits cas particuliers, mais devient très vite inexploitable au vu des nombreux sous-cas à traiter dépendant de la taille du rectangle à considérer. Pour démontrer l’impossibilité de paver un rectangle de type c de taille 2×3 , nous avons évoqué une stratégie qui consiste à dénombrer de deux manières différentes le nombre de fois où une couleur apparaît dans le pavage. Cette stratégie consiste à remarquer que chaque couleur est présente une et une seule fois sur chaque tuile. Si l’on suppose que le rectangle

12 Aussi appelé principe de la descente infinie de Fermat.

est pavable, alors chaque couleur sera nécessairement présente $p \times q$ fois dans le pavage — puisqu’il y a au total $p \times q$ tuiles dans un pavage valide. La suite du raisonnement consiste à dénombrer d’une autre façon le nombre de fois où une couleur apparaît en deux sous-ensembles disjoints dénombrables. En d’autres termes, si l’on considère un élément i appartenant à notre ensemble de 4 couleurs (bleu, jaune, vert, rouge), le nombre de fois¹³ où une couleur i apparaît dans le pavage est égal à la somme du nombre de fois où cette couleur apparaît sur les bords du rectangle et du nombre de fois où elle apparaît à l’intérieur de mon pavage — bords exclus (figure 31). Si l’on suppose qu’il existe un pavage, on écrira de manière syntaxique :

$$\forall i \in \{\text{bleu, rouge, vert, jaune}\},$$

$$N_{\Delta}(i) = N_{\Delta_{ext}}(i) + N_{\Delta_{int}}(i) = p \times q$$

où

- $N_{\Delta}(i)$ correspond au nombre total de triangles de couleur i du pavage.
- $N_{\Delta_{ext}}(i)$ correspond au nombre de triangles extérieurs de couleur i au bord du pavage.
- $N_{\Delta_{int}}(i)$ correspond au nombre de triangles intérieurs de couleur i (bords exclus) du pavage.

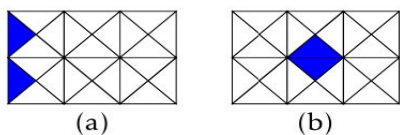


Figure 31 – Exemples de triangles extérieurs (a) et intérieurs (b) bleus.

Remarquons que pour chaque couleur, le nombre de triangles intérieurs, si le pavage est valide, est nécessairement pair. En effet, chaque

triangle intérieur est nécessairement adjacent par sa base à un autre triangle appartenant à une tuile voisine. Il est donc possible de les regrouper par paires. Finalement, quelle que soit la couleur, on a toujours $N_{\Delta_{int}}(i) \in 2\mathbb{N}^*$. Il suffit de remarquer qu’ajouter un entier quelconque à un entier pair ne change pas la parité de la somme obtenue, elle dépendra toujours de l’entier quelconque. En somme $p \times q$, sera de même parité que l’entier $N_{\Delta_{ext}}$.

Raisonnons à présent sur les côtés est-ouest du rectangle et choisissons arbitrairement l’une des deux couleurs. L’entier $p \times q$ a donc la même parité que p . Si l’on raisonne de manière analogue sur les côtés nord-sud, on montre également que l’entier $p \times q$ a la même parité que q . Cela est possible, bien évidemment si p et q ont la même parité. Nous avons donc démontré que la condition « p et q ont la même parité » est bien une CN pour exhiber un pavage valide dans un rectangle de type c. La conjecture précédemment énoncée est ainsi démontrée. On a alors le résultat suivant.

Théorème. Soient p et q des entiers naturels non nuls, les entiers p et q ont la même parité si et seulement si le rectangle de taille $p \times q$ possède un pavage valide de type c avec des tuiles de notre collection.

Dans cet article, nous ne développons pas le cas des rectangles de type a et b, puisque le raisonnement est analogue au précédent. En fait, il faut et il suffit que le produit de $p \geq 2$ par $q \geq 2$ soit pair pour obtenir un pavage valide. On remarque que cette CNS reste valide pour le pavage d’un rectangle de type b avec $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

Ainsi, l’analyse menée suivant les axes épistémologique, historique et mathématique, nous a conduits à identifier des sous-problèmes favorisant une diversité d’approches lors de la

13 Ici, une fois correspond à une tuile.

résolution. L'analyse mathématique nous a alors permis d'identifier différentes stratégies pouvant être utilisées par les élèves lors de la résolution du problème. Elles conduisent au développement de connaissances d'ordre I et d'ordre II relatives à l'activité mathématique. Sackur, Drouhard, Assude, Paquelier, et Maurrel (2005) identifient les connaissances d'ordre I, comme relatives aux connaissances notionnelles telles que les axiomes, définitions, propriétés, théorèmes issus d'une théorie tandis que les connaissances d'ordre II sont relatives au raisonnement, à la logique et aux différentes représentations sémiotiques qui sont inhérentes à l'activité de recherche en mathématiques. Ainsi, notre analyse montre que les connaissances d'ordre I mobilisées à travers ce problème sont relatives à la notion de pavage, de périodicité vue comme une translation de motifs, d'aire de rectangle ou encore de parité et caractérisent ainsi les invariants de ce problème. L'analyse présentée permet également d'identifier des connaissances d'ordre II visées à travers ce problème comme :

- la démonstration de l'existence via le théorème d'existence sur des cas particuliers ;
- la mise en avant de différents raisonnements comme le forçage ou encore l'exhaustivité des cas sur de petits cas particuliers ;
- l'émission de conjectures locales/globales concernant la possibilité ou l'impossibilité de paver le rectangle ;
- la distinction entre CN et CS ;
- mais aussi la pluralité des raisonnements évoqués pour prouver des conjectures globales — disjonction des cas, construction/déconstruction d'une classe d'objets, induction et partition d'une classe d'objets, absurde.

Ainsi, nous espérons que cette partie aura convaincu le lecteur ou la lectrice, d'une part

de l'importance d'une analyse *a priori* fine permettant de favoriser au mieux la transposition de ce problème en une situation de recherche pour les élèves, d'autre part, que les problèmes de décision dont on ne peut *a priori* pas connaître la solution (oui ou non) de manière pérenne — appelés également problèmes indécidables —, sont aussi d'une grande richesse lorsque l'on identifie des variables « pertinentes » amenant à l'étude de sous-problèmes tout à fait accessibles aux élèves.

Dans cette seconde partie du texte nous montrons dans un premier temps l'importance du matériel dans ce type de situation et nous donnons une première idée du matériel utilisé. Dans un second temps, nous présentons succinctement le modèle des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) dans le but, *in fine*, de l'opérationnaliser dans le cas de notre problème afin de démontrer que le problème de Wang a la potentialité, *a priori*, d'être transposé en une SiRC.

4. — Vers l'élaboration d'une nouvelle situation de recherche pour la classe

4.1. Importance de la manipulation d'artefacts tangibles pour l'avancée dans la résolution du problème

Il est important de rappeler que des travaux de recherche incluant des SiRC ont montré que les artefacts tangibles participent à la dévolution de la situation et qu'ils sont même nécessaires (Da Ronch, 2019a ; Godot, 2005 ; Grenier, 2006). De ce fait, nous pensons que le matériel permet en outre de favoriser l'enrôlement et l'entrée dans la situation nécessaire à la dévolution. Le fait d'avoir du matériel manipulable décroïssonne les mathématiques de leur usage quotidien de la classe ordinaire. Cela permet ainsi de susciter davantage l'adhésion et l'envie d'entrer dans la situation. Ceci

peut donc aider à améliorer le facteur « d'affectivité » des élèves par rapport à cette discipline. Une première idée consiste à fabriquer des tuiles carrées de taille 6 cm — cela nous semble raisonnable pour la manipulation — en les partageant par leurs diagonales en quatre secteurs triangulaires de couleurs distinctes, en utilisant des planches de bois ou tout autre matériel dont l'épaisseur ne permet pas le chevauchement ou le glissement des pièces (figure 32). Du point de vue de l'activité mathématique de l'élève, le découpage préalable des tuiles permet de faire des essais sur des cas particuliers, mais également de favoriser la mise en œuvre du raisonnement par forçage pour la preuve d'une impossibilité.

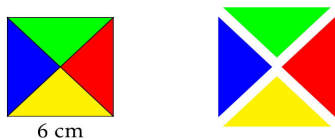


Figure 32 – Exemple d'une tuile découpée en quatre secteurs triangulaires.

Néanmoins, il faut noter que ce type d'artefact tangible dénature quelque peu le problème général. D'un point de vue épistémologique, le recouvrement d'une région du plan se fait grâce à des tuiles qui ne sont pas préalablement découpées. On peut alors proposer les six configurations (figure 33), qui à rotation près, permettent d'obtenir notre ensemble de 24 tuiles.

De surcroît, d'un point de vue didactique, le contrôle sur la structure des tuiles (figure 33) est pris directement en charge par le milieu artefactuel, alors que les tuiles prédécoupées (figure 32) ne permettent pas ce contrôle. C'est donc à l'élève de vérifier que chaque tuile possède bien quatre couleurs distinctes en plus des contraintes générales liées au problème.

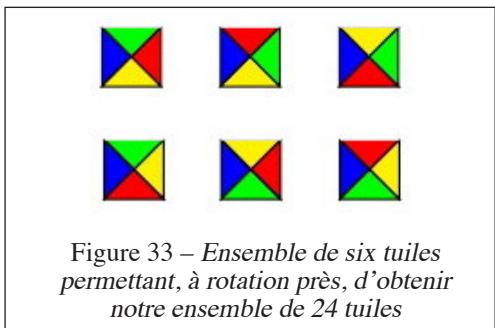


Figure 33 – Ensemble de six tuiles permettant, à rotation près, d'obtenir notre ensemble de 24 tuiles

Ainsi la réflexion sur le type de matériel est importante pour amener l'élève à la recherche du problème.

4.2. Regard croisé entre notre analyse et le modèle théorique des SiRC

Ce modèle est utilisé depuis une vingtaine d'années dans l'élaboration de SiRC et sa caractérisation est donnée en six points¹⁴ par Grenier et Payan (2002, pp. 191-192) :

- (1) une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle ;
- (2) la question initiale est facile d'accès ;
- (3) des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques ;
- (4) plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles ;
- (5) une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question ;
- (6) des variables de recherche existent, elles pourraient être des variables didactiques — à la charge de l'enseignant —, mais dans ce cas-ci elles sont à la charge de l'élève (Godot, 2005).

¹⁴ Le dernier point (6) a été rajouté dans le travail de thèse de Godot (2005).

Les auteurs font l'hypothèse que cette proximité entre une question encore non résolue du point de vue de la recherche va avoir un impact sur l'élève, la classe, mais aussi sur l'enseignant et le chercheur vis-à-vis du rapport personnel qu'ils entretiennent avec la situation (Grenier & Payan, 2002). Le problème présenté dans la section précédente répond à ce premier critère (1), puisque le problème de pavage d'un rectangle par des tuiles de Wang — qui est *a fortiori* plus général que le problème que nous avons traité — appartient à la classe des problèmes de complexité NP-Complet. Rappelons à cet effet, que l'un des enjeux majeurs de la recherche contemporaine concerne l'étude de la conjecture $P = NP$. En d'autres termes, il s'agit de démontrer que $P = NP$ ou $P \neq NP$ ou encore que cet énoncé n'est pas démontrable. Ce problème fait partie d'un des six problèmes du millénaire non encore résolus — en réalité, il y en avait sept mais la conjecture de Poincaré a été démontrée par Perelman en 2003. Schématiquement, cela reviendrait à dire que s'il est facile de vérifier rapidement une solution à un problème de décision — en un temps polynomial —, alors il est également facile de la trouver en un temps analogue.

Le deuxième point est également validé (2). On peut commencer par donner la collection de tuiles à quatre couleurs distinctes dont chaque tuile possède exactement ces quatre couleurs. On pose ensuite la question de savoir s'il est possible de paver n'importe quel rectangle. Ce problème est assez facile, puisqu'il suffit de construire un motif carré de taille deux périodique qui nous permet de paver n'importe quelle région du plan et donc *a fortiori* un rectangle de n'importe quelle taille. Pour complexifier un peu, on peut rajouter des contraintes de coloration sur les bords de notre rectangle, en proposant par exemple d'avoir pour chaque côté du rectangle une et une seule couleur unie distincte des autres (figure 34). Cela revient donc

à résoudre le problème étudié dans la partie précédente, c'est-à-dire : est-il toujours possible de paver un rectangle par ces tuiles dont chaque bord a une couleur unie et distincte des autres ? L'étude de petits cas particuliers permet de voir émerger des preuves locales d'existence ou d'impossibilité, voire des conjectures globales.



Figure 34 – Rectangle dont les bords sont de couleurs unies, distinctes les unes des autres.

Dans ce problème, la notion de pavage vue comme un recouvrement d'une région bornée du plan par une même collection d'objets, sans chevauchement ni dépassement, est travaillée depuis la maternelle. Les notions d'aire ou de parité inhérentes au problème sont nécessaires pour l'avancée dans la résolution, mais ne sont pas des pré-requis fondamentaux. Ces notions peuvent tout à fait être introduites ou approfondies au cours de la situation. Nous faisons l'hypothèse que les artefacts tangibles permettent de favoriser l'enrôlement et l'entrée dans la situation. On commence par traiter des cas particuliers qui amènent les élèves à exhiber ou non des pavages valides de rectangles dépendant de leur taille. Ainsi en faisant raisonner les élèves sur des rectangles de petite taille dont il semble impossible d'exhiber un pavage, on arrive à des preuves d'impossibilités utilisant le forçage. L'étude de cas particuliers peut amener à la formulation de conjectures globales, voire à des résultats partiels concernant les bandes $1 \times q$ et $2 \times q$. Des stratégies initiales (3) existent donc par rapport à cette situation.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'analyse du problème, il existe une pluralité

de stratégies mises en avant dans l'avancée de la résolution (4). Certaines stratégies sont efficaces localement comme l'exhibition d'un pavage ou des preuves d'impossibilités utilisant le forçage sur de petits cas particuliers. Ces stratégies, comme nous l'avons signalé dans le paragraphe précédent, permettent d'émettre des conjectures de portée générale, voire des preuves sur des bandes particulières. Dans la première partie du texte, nous avons montré que des preuves utilisant la construction et reconstruction d'une classe d'objets permettaient de démontrer la possibilité de paver. L'une de ces stratégies de construction et déconstruction de cette classe d'objets utilise également un découpage inductif pour démontrer l'existence d'un pavage. Pour prouver l'impossibilité dans le cas général, un raisonnement par l'absurde est envisageable. Il nécessite de dénombrer de deux manières différentes le nombre de fois où une couleur apparaît dans le pavage, modulo un argument de parité entre ce nombre et le nombre de fois où cette couleur apparaît sur un des bords du rectangle pour pouvoir conclure.

Concernant le cinquième point (5), la situation peut se prolonger sur l'étude de rectangles ayant deux ou trois couleurs distinctes (de type a ou b) sur leur frontière en gardant la même collection de tuiles. On peut également prolonger le problème non plus sur des régions bornées du plan mais sur le plan tout entier en se limitant cette fois-ci à des familles de tuiles d'au plus deux couleurs par tuile comme présenté en début de l'article. Il peut être également envisageable d'étendre le problème que nous avons étudié en dimension 3. En considérant cette fois-ci des cubes unitaires de Wang possédant six faces de couleurs distinctes dont il est possible de permuter les couleurs, le problème vise alors à déterminer des conditions sur les entiers L , l et h pour lesquels il existe au moins un pavage valide du pavé droit.

La situation montre que le dernier point (6) est également vérifié, puisque les variables p et q correspondant aux longueurs du rectangle sont laissées à la charge de l'élève et sont donc considérées comme des variables de recherche. On peut également laisser les élèves chercher les « bons » rectangles qui respectent les contraintes de coloration aux bords, même si la suite de la situation conduit à l'étude d'un seul type de ces rectangles.

A priori, il est donc tout à fait envisageable de construire une SiRC à partir du problème de Wang puisque toutes les caractéristiques du modèle que nous venons de détailler sont validées. De plus, la plupart des connaissances visées par cette situation relatives aux « savoir-faire » mathématiques, que nous avons qualifiées de connaissances d'ordre II, sont en fait inhérentes aux différentes compétences visées, que ce soit au niveau du cycle 3 ou 4 mais aussi du lycée, telles que *chercher*, *représenter*, *communiquer* ou encore *raisonner* par exemple. Suivant l'objectif et le degré d'approfondissement du problème, il semble tout à fait envisageable de proposer cette situation dès la fin du cycle 3.

5. — Conclusion et perspectives de recherche

A travers cet article, nous avons essayé de démontrer la pertinence d'une analyse épistémologique et historique, mathématique et didactique dans le cas du problème de Wang. Ces axes nous ont permis d'identifier des sous-problèmes accessibles aux élèves favorisant ainsi le développement du raisonnement, de la logique et de la preuve idoines à l'activité mathématique. Nous avons également démontré que ce problème était un candidat favorable en vue de l'élaboration d'une Situation de Recherche pour la Classe (SiRC), puisqu'il vérifie tous les critères caractéristiques des SiRC. En effet, le problème émerge d'une question de recherche pro-

fessionnelle ; la question initiale est facile d'accès pour les élèves ; des stratégies initiales existent telles que l'exhibition d'un pavage sur des cas particuliers, l'exhaustivité des cas ou encore des stratégies par forçage pour démontrer l'impossibilité de paver certains rectangles, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques ; plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles ; des variables de recherche existent et sont à la charge de l'élève (Godot, 2005) — comme par exemple les longueurs du rectangle — ; et certaines questions résolues peuvent renvoyer à de nouvelles questions de recherche. (Grenier & Payan, 2002). Actuellement des expérimentations sont menées dans le cadre d'ateliers Math.en.Jeans dans divers établissements scolaires (collèges et lycées), mais aussi universitaires, notamment dans un module de Licence intitulé « Jeux combinatoires et raisonnements mathématiques » de l'Université Grenoble Alpes, dirigé par Sylvain Gravier.

Le but *in fine* est d'étoffer notre analyse et d'identifier finement les obstacles rencontrés lors de la résolution. Par ce problème, nous avons essayé de montrer que les mathématiques discrètes étaient une source de problèmes de recherche permettant de favoriser la rencontre entre mathématiques et société. En

effet, elles sont souvent dépourvues de tout formalisme mathématique — atténuant ainsi l'écart entre société et mathématiques —, et jouent également un rôle de levier dans l'évolution des pratiques d'enseignement considérées à ce jour comme peu stimulantes (Artigue, 2011, p. 21). Le fait que le problème soit associé à des artefacts tangibles donne, à notre sens, un caractère ludique à la situation, et permet également d'accroître le facteur d'affectivité des élèves pour les mathématiques, qui, de surcroît va être favorisé par le changement de posture de l'élève passant d'une posture d'élève « ordinaire » à une posture d'« élève-chercheur ».

Actuellement une recherche est en cours notamment dans le cadre de l'élaboration de situations de recherche hors classe. Nous développons à cet effet la notion de concept-problème issue de la Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1991) et du modèle proposé par Giroud (2012) dans le cas du problème de Wang. L'un des enjeux principaux de ce concept-problème vise, à partir du problème générateur de Wang, à identifier d'autres problèmes ainsi que les différents invariants opératoires et représentations associés, permettant de donner du sens à ce problème. Ceci dans le but *in fine* de créer un dispositif-problème visant à l'initiation de l'activité de recherche en mathématiques.

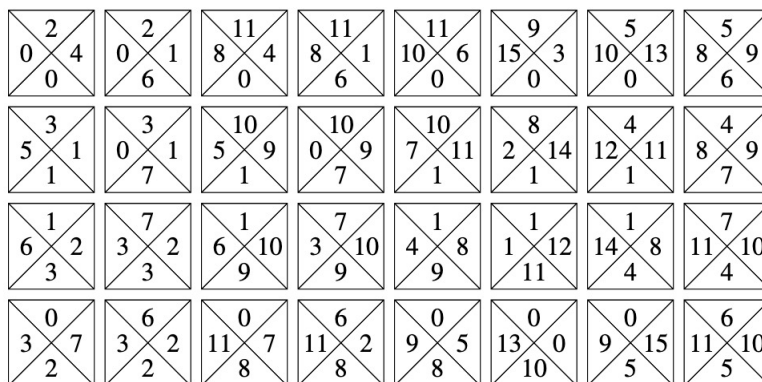
Références bibliographiques

- Artigue, M. (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. UNESCO Paris.
- Berger, R. (1964). *The Undecidability of the Domino Problem*. [PhD Thesis]. Harvard University.
- Berger, R. (1966). *The undecidability of the domino problem*. American Mathematical Soc.
- Bernat, J. (2014). Coloriages sous contraintes. *Découverte*, 394, 44-47.
- Cartier, L. (2008). A propos du théorème d'Euler et des parcours eulériens dans les graphes. *Petit x*, 76, 27-53.
- Chen, H.-H., Hu, W.-G., Lai, D.-J., & Lin, S.-S. (2014). Nonemptiness problems of Wang tiles with three colors. *Theoretical Computer Science*, 547, 34-45.
- Convert, B. (2003). La « désaffection » pour les études scientifiques. *Revue française de sociologie*, 44(3), 449-467.
- Culik, K. (1996). An aperiodic set of 13 Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160(1-3), 245-251.
- Da Ronch, M. (2019a). Fait-on des mathématiques en résolvant des « casse-têtes » ? L'exemple des Tours de Hanoï dans un dispositif d'exposition. *Petit x*, 109, 49-73.
- Da Ronch, M. (2019b). Un problème de pavage : entre jeu et activité mathématique. *Revue de Mathématiques pour l'école*, 231, 46-55.
- Debrabant, P., & Busser, A. (2018). Du carreau de Truchet au carreau de Wang : Atteindre l'atome de l'apériodique et du calculable. *Images des Mathématiques*, CNRS.
- Duchet, P. (1997). De la recherche à la formation : Math. En. Jeans. *Actes de l'Université d'été Recherche mathématique et Formation*, 129-160.
- Gandit, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation* (Thèse de doctorat). Grenoble 1.
- Giroud, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe* (Thèse de doctorat). Université de Grenoble.
- Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs* (Thèse de doctorat). Université Joseph-Fourier-Grenoble I.
- Grenier, D. (2006). Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque AMQ*.
- Grenier, D., & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *RDM*, 18(1), 59-100.
- Grenier, D., & Payan, C. (2002). *Situation de recherche en classe : Essai de caractérisation et proposition de modélisation, cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*. Paris.

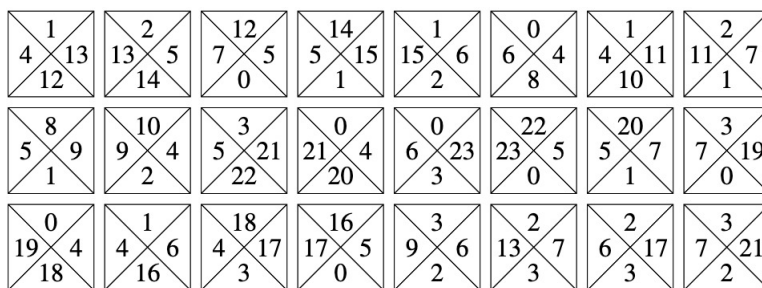
- Grünbaum, B., & Shephard, G. C. (1987). *Tilings and patterns*. Freeman.
- Hamelin, E. (2003). Développement et diffusion de la culture scientifique et technique. *Un enjeu national*.
- Hu, W.-G., & Lin, S.-S. (2011). Nonemptiness problems of plane square tiling with two colors. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139(3), 1045–1059.
- Jeandel, E. (2011). *Propriétés structurelles et calculatoires des pavages* (HDR). Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc.
- Jeandel, E., & Rao, M. (2015). An aperiodic set of 11 Wang tiles. *arXiv preprint arXiv:1506.06492*.
- Kari, J. (1996). A small aperiodic set of Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160(1-3), 259-264.
- Knuth, D. E. (1968). *The Art of Computer Programming, vol 1 : Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, New York, NY, 968.
- Lagae, A., Kari, J., & Dutré, P. (2006). Aperiodic sets of square tiles with colored corners. *Report CW 460*.
- Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions/construction de concept : Vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques* (Thèse de doctorat). Université Joseph-Fourier-Grenoble I.
- Rao, M. (2017). *Preuves aidées par ordinateur en combinatoire des mots* (HDR). ENS Lyon.
- Robinson. (1967). Seven polygons which permit only nonperiodic tilings of the plane. *Notices Amer. Math. Soc*, 14, 835.
- Robinson, R. M. (1971). Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones mathematicae*, 12(3), 177-209.
- Robinson, R. M. (1978). Undecidable tiling problems in the hyperbolic plane. *Inventiones mathematicae*, 44(3), 259-264.
- Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). L'enseignement scientifique aujourd'hui : Une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe. *Commission européenne/Bruxelles. [Rapport en ligne] Disponible sur <http://ec.europa.eu>*.
- Rolland, J. (1999). *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication* (Thèse de doctorat). Laboratoire Leibniz, Grenoble.
- Sackur, C., Drouhard, J.-P., Assude, T., Paquelier, Y., & Maurel, M. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(1), 57-90.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3).
- Villani, C., Torossian, C., & Dias, T. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*.
- Wang, H. (1961). Proving theorems by pattern recognition—II. *Bell system technical journal*, 40(1), 1-41

ANNEXE

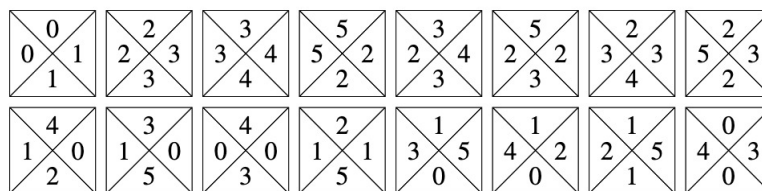
*Ces ensembles ont été pris dans l'article
de Lagae, Kari et Dutré (2006, pp. 11-12).*



Ensemble de 32 tuiles de Wang à 16 couleurs permettant de paver le plan apériodiquement.



Ensemble de 24 tuiles de Wang à 24 couleurs permettant de paver le plan apériodiquement.



Ensemble de 16 tuiles de Wang à 6 couleurs permettant de paver le plan apériodiquement.