HAL
open science

LA COURBE

Laurent Fargues

To cite this version:

Laurent Fargues. LA COURBE. 2018 International Congress of Mathematicians (ICM 2018), Aug 2018, Rio de Janeiro, Brésil. pp.291-319, 10.1142/9789813272880_0055 . hal-03026674

HAL Id: hal-03026674

https://hal.science/hal-03026674v1

Submitted on 26 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA COURBE

LAURENT FARGUES

Résumé. On présente un résumé de nos travaux sur la courbe que nous avons introduite avec Jean-Marc Fontaine et ses applications en théorie de Hodge p-adique ainsi qu'au programme de Langlands.

Introduction

La courbe fondamentale en théorie de Hodge p-adique a été introduite par Jean-Marc Fontaine et l'auteur dans [37]. On présente d'abord celle-ci, l'étude des fibrés vectoriels et de leurs modifications dans la section 1. Dans la section 2 on explique nos résultats sur l'étude des G-fibrés et leurs applications aux espaces de périodes p-adiques. Enfin, on conclut dans la section 3 par des résultats récents sur les familles de fibrés et le lien conjectural avec la correspondance de Langlands locale. Ce texte est en quelque sorte un récit du parcours qui nous a mené des filtrations de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats ([25]) à la conjecture de géométrisation de la correspondance de Langlands locale (sec. 3).

1. Courbe et fibrés vectoriels

1.1. **Fonctions holomorphes de la variable p.** Soient E un corps local de corps résiduel le corps fini $\mathbb{F}_q$ et π une uniformisante de E. On a donc soit $[E:\mathbb{Q}_p]<+\infty$, soit $E=\mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$. Soit $F|\mathbb{F}_q$ un corps perfectoïde. On note $\varpi\in F$ une pseudo-uniformisante i.e. $0<|\varpi|<1$. Considérons l'anneau de Fontaine ([39],[41])

$$\mathbf{A}=\begin{cases} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \text{ si } E|\mathbb{Q}_p \\ \mathcal{O}_F[\![\pi]\!] \text{ si } E=\mathbb{F}_q(\!(\pi)\!). \end{cases}$$

La théorie de la courbe schématique ne nécessite pas la théorie des espaces perfectoïdes qu'elle prédate ou des espaces adiques. Néanmoins il est plus naturel maintenant de l'exposer en introduisant ces objets. Considérons donc l'espace adique

$$Y=\mathrm{Spa}(\mathbf{A},\mathbf{A})\setminus V(\pi[\varpi]).$$

Si $E=\mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$ il s'agit d'un disque ouvert épointé de la variable π, $\mathbb{D}_F^*=\{0<|\pi|<1\}\subset\mathbb{A}_F^1$ qui est exactement celui qui apparaît dans les travaux d'Hartl-Pink ([52]). Néanmoins on ne le considère pas ici comme un espace adique sur F mais

Date: 16 avril 2018.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11S31,11S37,11G18,14K10.

L'auteur a bénéficié du support des projets ANR-14-CE25 "PerCoLaTor" et ERC Advanced Grant 742608 "GeoLocLang".

sur E,

$$\begin{tikzcd} & Y = \mathbb{D}_F^* \arrow[dl, "\text{loc. de type fini}"'] \arrow[dr, "\text{pas loc. de type fini}"] & \\ \mathrm{Spa}(F) & & \mathbb{D}_{\mathbb{F}_q}^* = \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)). \end{tikzcd}$$

Il est préperfectoïde, si $E|\mathbb{Q}_p$ et E_∞ est le complété de l'extension engendrée par les points de torsion d'un groupe de Lubin-Tate, l'espace $Y\hat{\otimes}_E E_\infty$ est perfectoïde de basculé le même espace associé à $E_\infty^\flat$ i.e. $\mathbb{D}_F^{*,1/p^\infty}$ un disque perfectoïde épointé ([30] sec. 2.2).

L'algèbre de Fréchet $\mathcal{O}(Y)$ est obtenue par complétion des fonctions holomorphes sur Y, méromorphes le long des diviseurs (π) et $([\varpi])$,

$$\mathbf{A}[\tfrac{1}{\pi}, \tfrac{1}{[\varpi]}],$$

relativement aux normes de Gauss $|.|_\rho$ pour des rayons $\rho \in]0,1[$

$$\Big|\sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n\Big|_\rho = \sup_n |x_n|\rho^n.$$

Un élément $\xi = \sum_n [x_n]\pi^n \in \mathbf{A}$ est dit primitif de degré $d > 0$ si $x_0 \neq 0$, $x_0, \ldots, x_{d-1} \in \mathfrak{m}_F$ et $x_d \in \mathcal{O}_F^\times$. Le produit d'un élément primitif de degré d par un de degré d' est primitif de degré $d + d'$ et on a donc une bonne notion d'élément primitif irréductible. Deux tels éléments sont équivalents s'ils sont multiples par une unité dans $\mathbf{A}^\times$. Le résultat suivant est un un résultat clef pour toute la suite (on renvoie également aux articles de revue [34], [35] et [36]).

Théorème 1.1 ([37] théo. 2.4, coro. 2.2.23, théo. 3.1.11)**.**

(1) Si F est algébriquement clos alors tout élément primitif dans $\mathbf{A}$ irréductible est de degré 1, équivalent à $\pi - [a]$ avec $0 < |a| < 1$. En d'autres termes, tout ξ primitif a une factorisation (de Weierstrass)

$$\xi = u(\pi - [a_1]) \ldots (\pi - [a_d]),\ u \in \mathbf{A}^\times, 0 < |a_i| < 1.$$

(2) Pour ξ primitif irréductible dans $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}[\frac{1}{\pi}]/(\xi) = \mathcal{O}(Y)/(\xi)$ est un corps perfectoïde de basculé une extension de degré $\deg(\xi)$ de F via $x \mapsto [x]$ mod ξ. Cela induit une équivalence

$$\{\textit{éléments primitifs irréductibles de degré 1}\}/\sim \xrightarrow{\sim} \textit{débasculements de } F \textit{ sur } E.$$

Par définition les points classiques de Y, $|Y|^{cl}$, sont les zéros des éléments primitifs de $\mathbf{A}$. Les normes de Gauss $|.|_\rho$ sont multiplicatives et *on dispose donc d'une bonne notion de polygone de Newton pour les fonctions holomorphes f sur Y* ainsi que sur ses couronnes, ceci par application d'une transformée de Legendre inverse appliquée à la fonction concave $]0, +\infty[\ni r \mapsto -\log|f|_{q^{-r}}$. Par « bonne notion de polygone de Newton » on entend typiquement le fait que le polygone d'un produit est le concaténé des polygones ([37] sec. 1, [36] sec. 1). Par exemple, le polygone de Newton de $\sum_{n \gg 0}[x_n]\pi^n \in \mathbf{A}[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\varpi]}]$ est l'enveloppe convexe décroissante des points $(n, v(x_n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Si $\xi = \sum_n [x_n]\pi^n$ est primitif de degré d on définit sa valuation (la « distance à l'origine $\pi = 0$ dans le disque épointé Y ») comme étant $\frac{1}{d}v(x_0)$.

Théorème 1.2 ([37] théo. 3.4.4)**.**

(1) *Pour $f \in \mathcal{O}(Y)$ non nul les pentes de son polygone de Newton sont les valuations des zéros de f dans $|Y|^{cl}$, $f(y) = 0$ avec $y \in |Y|^{cl}$, comptées avec multiplicité $\mathrm{ord}_y(f)\deg(y)$ où la valuation ord_y est celle de l'anneau de périodes de Fontaine $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} = B^+_{dR}(k(y))$ associé au corps perfectoïde $k(y)$.*

(2) *L'algèbre de Banach des fonctions holomorphes sur une couronne compacte $\{\rho_1 \leq |\pi| \leq \rho_2\}$ de Y est un anneau principal de spectre maximal les éléments de $|Y|^{cl}$ dans cette couronne (à une unité près tout élément irréductible est primitif irréductible dans $\mathbf{A}$).*

Concrètement, si F est algébriquement clos et si λ est une pente du polygone de f alors $f = (\pi - [a])g$ avec $v(a) = \lambda$ et la multiplicité de λ dans le polygone de g est une de moins. L'analyse p-adique d'une fonction d'une variable développée dans [66] s'étend à ce cadre. On peut typiquement former des produits de Weierstrass et vérifier ainsi que tout $f \in \mathcal{O}(Y)$ se met sous la forme

$$\prod_{n\geq 0} \left(1 - \tfrac{[x_n]}{\pi}\right) \times g$$

avec $x_n \to 0$, g sans zéros au voisinage de $\pi = 0$ et donc méromorphe en $\pi = 0$, de la forme $\sum_{n \gg 0}[x_n]\pi^n$ avec $x_n \in F$ et pour tout $\rho \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n|\rho^n = 0$ ([37] sec. 1.2). Cela permet de rendre concret les éléments de $\mathcal{O}(Y)$ puisqu'*en général, sauf si bien sûr si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, un tel élément n'admet pas de développement unique en série de Laurent de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}}[x_n]\pi^n$.*

1.2. **La courbe schématique.** L'espace Y est muni d'un Frobenius φ induit par le Frobenius $x \mapsto x^q$ de F. *Les théorèmes de factorisation précédents permettent d'analyser les périodes p-adiques.* Typiquement un élément de $\mathcal{O}(Y)^{\varphi=\pi^d}$ a un polygone de Newton satisfaisant une équation fonctionnelle qui se résout facilement. On peut alors lui appliquer les résultats de factorisation précédent. Utilisant ces résultats on obtient le théorème clef suivant.

Théorème 1.3 ([37] théo. 6.2.1)**.** *Si le corps F est algébriquement clos l'algèbre de périodes $P = \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{O}(Y)^{\varphi=\pi^d}$ est graduée factorielle i.e. le monoïde abélien $\coprod_{d\geq 0} P_d \setminus \{0\}/E^\times$ est libre de base $P_1 \setminus \{0\}/E^\times$.*

Concrètement, si $f \in P_d \setminus \{0\}$, $f = f_1 \dots f_d$ avec $f_i \in P_1$ et une telle écriture est unique à des scalaires dans $E^\times$ près. Ce théorème (qui se formule et se démontre sans espaces adiques) s'est récemment retrouvé de nouveau au coeur de résultats plus complexes à priori, cf. prop. 3.2. *Il est au coeur même de la courbe.*

De la même façon, en utilisant ces résultats d'analyse concernant les fonctions de $\mathcal{O}(Y)$ et leurs zéros, on donne une démonstration rapide de la suite exacte fondamentale de la théorie de Hodge p-adique dans ([37] théo. 6.4.1). En combinant ces divers résultats on obtient la construction de la courbe schématique.

Théorème 1.4 ([37] théo. 6.5.2, 7.3.3)**.** *Le schéma $X = Proj(P)$ est noethérien régulier de dimension 1, i.e. de Dedekind. De plus*

(1) *Il y a un morphisme d'espaces annelés $Y \to X$ qui induit une bijection $|Y|^{cl}/\varphi^{\mathbb{Z}} \to |X|$ (points fermés de X) tel que si $y \mapsto x$ alors $k(y) = k(x)$ et $B^+_{dR}(k(y)) = \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$.*

(2) *La courbe est « complète » au sens où si pour* $x \in |X|$ *on pose* $\deg(x) := [k(x)^\flat : F]$, *alors pour tout* $f \in E(X)^\times$, $\deg(\mathrm{div} f) = 0$.

(3) *Si* F *est algébriquement clos alors tout point est de degré* 1, $P_1 \backslash \{0\}/E^\times \xrightarrow{\sim} |X|$ *via* $t \mapsto V^+(t)$. *De plus* $\mathcal{O}_X(D^+(t)) = \mathcal{O}(Y)[\frac{1}{t}]^{\varphi = Id} = B_{cris}(C_t)^{\varphi = Id}$ *est un anneau principal où* C_t *est le corps résiduel en* $V^+(t)$, $C_t^\flat = F$.

1.3. **La courbe adique.** Comme on l'a dit précédemment l'espace Y est adique préperfectoïde. On définit alors la courbe adique comme étant

$$X^{ad} = Y/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

C'est un espace adique quasicompact partiellement propre (mais pas de type fini) sur $\mathrm{Spa}(E)$. Il y a un morphisme d'espaces annelés $X^{ad} \to X$ qui identifie les points classiques de X^{ad} et les points fermés de X ainsi que les complétés des anneaux locaux correspondants. Bien que non localement de type fini on sait que Y *et* X^{ad} *sont localement noethériens* ([30] conjecture 1 démontrée par Kedlaya dans [56]). L'un des intérêts de ce résultat est que du coup Y et X^{ad} rentrent dans le cadre de la théorie « classique » développée par Huber ([53]). Ainsi, par exemple, si Z est un E-espace rigide de Tate, i.e. un E-espace adique localement de type fini, on peut former l'espace adique $X^{ad} \times Z$ et regarder les faisceaux cohérents dessus lorsque Z varie (cf. [59] pour une exemple d'une version non perfectoïde de cela).

1.4. **Fibrés vectoriels.** Bien que l'algèbre graduée de périodes P utilisée pour définir X dépende du choix de π, X n'en dépend canoniquement pas. Ceci dit, le choix de π définit un fibré « très ample » $\mathcal{O}(1) = \widetilde{P[1]}$ sur X tel que

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}(d)).$$

On suppose maintenant que F contient une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$. On note E_n l'extension non ramifiée de degré n de E et $\breve{E} = \widehat{E^{nr}}$ muni de son Frobenius σ. On a une identification (l'indice E signifie la courbe associée au choix de E)

$$X_E \otimes_E E_n = X_{E_n}$$

et le revêtement cyclique $X^{ad}_{E_n} \to X^{ad}_E$ s'identifie à

$$Y/\varphi^{n\mathbb{Z}} \longrightarrow Y/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

Ainsi,

$$\begin{tikzcd}
 & \text{trivialisation du revêtement } Y \to Y/\varphi^{\mathbb{Z}} \arrow[dr, "\text{ext. des scalaires ramifiées}"'] & \\
X^{ad} \arrow[ur, "\text{ext. des scalaires non ramifiées}"] \arrow[dr] & & \text{monde perfectoïde.} \\
 & &
\end{tikzcd}$$

Pour tout $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbb{Q}$, $(d, h) = 1$, on définit $\mathcal{O}_X(\lambda)$ comme étant le poussé en avant par le revêtement étale fini $X_{E_h} \to X_E$ de $\mathcal{O}_{X_{E_h}}(d)$. Un des points fondamentaux de la théorie est maintenant le suivant : puisque la courbe est complète (théo. 1.4) on peut définir naturellement le degré d'un fibré en droites et *on dispose en particulier du formalisme des filtrations de Harder-Narasimhan* ([37] sec. 5.5). Ainsi *le fibré* $\mathcal{O}(\lambda)$ *est stable de pente* λ.

Théorème 1.5 ([37] théo. 8.2.10)**.** *Supposons F algébriquement clos.*

(1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, un fibré sur X est semi-stable de pente λ si et seulement si il est isomorphe à une somme directe de $\mathcal{O}(\lambda)$.

(2) La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur X est scindée.

(3) L'application $(\lambda_i)_i \mapsto \oplus_i \mathcal{O}(\lambda_i)$ induit une bijection entre suites décroissantes de nombres rationnels et classes d'isomorphisme de fibrés sur X.

Ce résultat ressemble fortement à une généralisation du théorème de Grothendieck concernant la droite projective. Néanmoins sa preuve est beaucoup plus complexe car contrairement à $\mathbb{P}^1$, $H^1(X, \mathcal{O}(-1)) \neq 0$: si $V^+(t) = \infty$ avec $t \in P_1 \setminus \{0\}$ alors *l'anneau principal $\mathcal{O}(Y)[1/t]^{\varphi=Id}$ muni du stathme $-\mathrm{ord}_\infty$ n'est pas euclidien !* La démonstration de ce résultat utilise des résultats fins de théorie de Hodge p-adique concernant les périodes de groupes p-divisibles et leurs liens avec les modifications de fibrés (cf. sec. 1.7.2).

Lorsque le corps F n'est plus algébriquement clos des *phénomènes monodromiques apparaissent.* On vérifie typiquement que pour $t \in P_1 \setminus \{0\}$

$$\mathrm{Cl}(\mathcal{O}(Y)[1/t]^{\varphi=Id}) = \mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\overline{F}|F), E^\times).$$

On a plus généralement le résultat suivant.

Théorème 1.6 ([37] théo. 9.3.1, du type Narasimhan Seshadri [71])**.** *Via le foncteur $\mathscr{E} \mapsto H^0(X_{\widehat{\overline{F}}}, \mathscr{E}_{|X_{\widehat{\overline{F}}}})$, la catégorie des fibrés semi-stables de pente 0 sur X_F est équivalente à celle des représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ à coefficients dans E.*

Enfin, venons en au théorème GAGA.

Théorème 1.7 (GAGA, [30] théo. 3.5, [58] théo. 8.5.5)**.** *L'image réciproque par le morphisme d'espaces annelés $X^{ad} \to X$ induit une équivalence entre faisceaux cohérents sur X et X^{ad}.*

La première démonstration de ce résultat ([30]) consistait à comparer le théorème de classification 1.4 avec celui de Kedlaya ([55]) lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ ou bien le théorème d'Hartl Pink en égales caractéristiques ([52]). Plus précisément, les fibrés vectoriels sur X^{ad} s'identifient aux fibrés φ-équivariants sur Y, qui eux-même s'identifient aux germes de fibrés vectoriels φ-équivariants au voisinage de $\pi = 0$ sur Y (si U est un tel voisinage alors $Y = \cup_{n \geq 0} \varphi^n(U)$). *L'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $\pi = 0$ s'identifie à l'anneau de Robba* associé à F, et donc les fibrés vectoriels sur X^{ad} s'identifient aux φ-modules sur cet anneau de Robba.

Kedlaya et Liu ([58]) ont donné une autre démonstration reposant sur leur preuve du fait que $\mathcal{O}(1)$ *est ample sur X^{ad}* : pour tout fibré $\mathscr{E}$ sur X^{ad}, pour $d \gg 0$, $\mathscr{E}(d)$ est engendré par ses sections globales (bien sûr ce résultat est tautologique sur la courbe schématique, c'est une des raisons pour laquelle elle est plus simple à manipuler, ce résultat est intégré dans sa construction). Il s'agit de construire suffisamment de sections de $\mathscr{E}(d)$, $d \gg 0$, par un processus itératif convergeant ([58] sec. 6.2), les méthodes usuelles de séries de Poincaré ([10]) sur Y ne semblant pas fonctionner (de plus, si F est algébriquement clos, on ne sait pas à l'avance que le tiré en arrière à Y d'un fibré sur X^{ad} est trivial, i.e. qu'un tel fibré est donné par

un facteur d'automorphie, alors que c'est une conséquence du théorème de classification).

Une façon plus intrinsèque d'exposer le théorème de classification des fibrés est d'utiliser les isocristaux tels qu'ils apparaissent dans le théorème de Dieudonné-Manin ; $\varphi-\mathrm{Mod}_{\breve{E}}$ qui est la catégorie des couples (D,φ) où D est un $\breve{E}$–espace vectoriel de dimension finie et φ un automorphisme σ-linéaire. L'espace Y vit au dessus de $\mathrm{Spa}(\breve{E})$. Dès lors on peut construire pour un tel isocristal

$$\mathscr{E}(D,\varphi) = Y \times_{\varphi^{\mathbb{Z}}} D \longrightarrow Y/\varphi^{\mathbb{Z}} = X^{ad}$$

qui est un fibré trivialisé de fibre D sur Y ayant pour facteur d'automorphie φ agissant sur D. Via GAGA cela correspond au fibré associé au P-module gradué $\oplus_{d\geq 0}(D\otimes\mathcal{O}(Y))^{\varphi\otimes\varphi=\pi^d}$. Dès lors le théorème 1.5 s'énonce en disant que

$$\mathscr{E}(-) : \varphi-\mathrm{Mod}_{\breve{E}} \longrightarrow \text{Fibrés sur } X$$

est essentiellement surjectif.

1.5. **Simple connexité géométrique de la courbe.** Du théorème de classification des fibrés on peut déduire le résultat suivant.

Théorème 1.8 ([37] théo. 8.6.1)**.** *Si F est algébriquement clos le schéma $X_{\overline{E}}$ est simplement connexe : tout revêtement étale fini est scindé.*

En d'autres termes $\pi_1(X) = \mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$. Plus généralement, pour F quelconque, $\pi_1(X) = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)\times\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$ ([37] théo. 9.5.1). On dispose du même résultat, soit par la même méthode soit par GAGA, sur la courbe adique : les revêtements étales finis de $\mathrm{Spa}(E)$ correspondent à ceux de X^{ad}. Ce résultat a d'importantes applications. Il se réinterprète de façon formelle en disant que si F est algébriquement clos alors le diamant au sens de Scholze ([79],[81]) (cf. [33] par exemple pour ce diamant en particulier et la section 3.3)

$$\mathrm{Div}^1_F = \mathrm{Spa}(F)\times\mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}}_{E^\diamond}$$

a pour π_1 le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$ ($X_F^{ad,\diamond}$ et Div^1_F ont même catégorie de revêtements étales). On a

$$\mathrm{Spa}(F)\times\mathrm{Spa}(E)^\diamond = \mathbb{D}_F^{*,1/p^\infty}/\mathcal{O}_E^\times$$

un disque perfectoïde épointé divisé par l'action de Lubin-Tate de $\mathcal{O}_E^\times$ ([30] sec.2 et [81]). Dès lors, si $F=\mathbb{C}_p^\flat$ on trouve comme corollaire du théorème 1.8 que *le groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$ *classifie les revêtements étales finis $\mathcal{O}_E^\times$-équivariants de* $\mathbb{D}^*_{\mathbb{C}_p}/\varphi^{\mathbb{Z}}$ (Weinstein [87]). Ce résultat a motivé l'article [63] de Kucharczyk et Scholze qui est la recherche d'un résultat analogue sur les corps de nombres.

Le théorème 1.8 est également à la base de la preuve du *lemme de Drinfeld-Scholze* ([81]) qui affirme que « $\pi_1\big((\mathrm{Div}^1)^d\big) = \pi_1(\mathrm{Div}^1)^d$ » (cf. [33] sec. 4 pour une signification précise de cet énoncé en termes de Div^1).

1.6. **Fibrés et espaces de Banach-Colmez.** La découverte de la courbe remonte à l'étude par Fontaine et l'auteur des résultats de Colmez sur les espaces de Banach de dimension finie ([12], [14]). C'est en définissant des filtrations de Harder-Narasimhan sur ceux-ci et en tentant de les classifier que nous sommes tombés sur la courbe. Maintenant, le lien entre fibrés vectoriels sur la courbe et espaces de Banach-Colmez est complètement clarifié par le théorème suivant.

Théorème 1.9 ([67]). *Supposons que $F = C^\flat$ avec C algébriquement clos.*

(1) La catégorie des espaces de Banach-Colmez est la plus petite sous-catégorie abélienne de la catégorie des faisceaux pro-étales de E-espaces vectoriels sur $\mathrm{Spa}(C)$ contenant $\mathbb{G}_a$, $\underline{E}$ et stable par extensions.

(2) Le foncteur cohomologie relative induit une équivalence entre le coeur dans $\mathbb{D}^b_{coh}(\mathcal{O}_X)$ de la t-structure
- *dont la partie ≤ 0 est formée des complexes $\mathscr{E}^\bullet$ satisfaisant $\mathcal{H}^i(\mathscr{E}^\bullet) = 0$ si $i > 0$ et $\mathcal{H}^0(\mathscr{E}^\bullet)$ est à pentes de $HN \geq 0$,*
- *la partie ≥ 0 des complexes satisfaisant $\mathcal{H}^i(\mathscr{E}^\bullet) = 0$ si $i < -1$ et $\mathcal{H}^{-1}(\mathscr{E}^\bullet)$ est à pentes de $HN < 0$,*

et la catégorie des espaces de Banach-Colmez.

(3) L'équivalence précédente s'étend en une équivalence dérivée.

Ici par cohomologie relative on entend la chose suivante. On peut définir un morphisme de (gros) topos pro-étales

$$\tau : (X^{ad}_{C^\flat})^{\sim}_{\text{pro-ét}} \longrightarrow \mathrm{Spa}(C^\flat)^{\sim}_{\text{pro-ét}} = \mathrm{Spa}(C)^{\sim}_{\text{pro-ét}}$$

grâce à la fonctorialité de la courbe adique : $S \mapsto X^{ad}_S$ (cf. sec. 3.1) où S est un espace perfectoïde sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$. Dès lors, si $\mathscr{E}^\bullet$ est un complexe de faisceaux cohérents sur $X^{ad}_{C^\flat}$ on peut définir $R\tau_*\mathscr{E}^\bullet$.

Certains de ces faisceaux de cohomologie relative, ceux associés aux fibrés vectoriels à pentes dans $[0,1]$, sont représentables par des C-espaces perfectoïdes du type $\varprojlim_{\times p} \mathcal{G}^{rig}$ où $\mathcal{G}$ est un groupe formel p-divisible sur $\mathcal{O}_C$ (cf. sec. 4 de [37], c'est ce que Scholze et Weinstein ont appelé plus tard le revêtement universel d'un groupe p-divisible ([82]). Néanmoins en général ils ne sont représentables que par des diamants (et ces espaces de Banach-Colmez ont probablement été une forte source d'inspiration pour l'introduction par Scholze de la théorie des diamants).

Via le théorème de classification des fibrés 1.5 cela fournit une classification des espaces de Banach-Colmez. Remarquons que la t-structure intervenant dans ce dernier théorème est analogue à celle utilisée par Bridgeland ([8]) qui a été une inspiration pour ce résultat.

Dans ce cadre là, Fontaine a récemment fait le lien entre le coeur de la t-structure analogue sur les fibrés Galois équivariants et sa théorie des presque $\mathbb{C}_p$-représentations ([43]). Cela permet de boucler la boucle puisque cette théorie a été une forte inspiration pour la théorie des espaces de Banach-Colmez ([43] sec. 4.1 par exemple).

Enfin, les résultats de Berger ([3]) clarifient complètement le lien entre fibrés Galois équivariants et la théorie « classique » des (φ, Γ)-modules : si K est de valuation discrète à corps résiduel parfait, $C = \widehat{\overline{K}}$ et $F = C^\flat$ alors la catégorie des fibrés $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$-équivariants sur la courbe est équivalente à celle des (φ, Γ)-modules.

1.7. Modifications de fibrés et théorie de Hodge p-adique.

1.7.1. *Faiblement admissible implique admissible.* La première application que nous avons donnée de la courbe avec Fontaine dans [37], sec. 10, est une nouvelle preuve du théorème « faiblement admissible équivalent à admissible » de Colmez-Fontaine ([15], [4]). C'était la seconde fois, après la preuve du théorème de classification des fibrés, que sont apparues naturellement les modifications de fibrés qui sont devenues

essentielles dans la suite (dans l'exposé [24], p.53, on dit appliquer une correspondance de Hecke lorsqu'on modifie un fibré).

Plus précisément, prenons $E = \mathbb{Q}_p$ et soit $K|\breve{\mathbb{Q}}_p$ une extension de degré fini. On note $C = \widehat{\overline{K}}$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$. La courbe associée à $C^\flat$ est munie d'une action de Γ et d'un point fermé ∞ de corps résiduel C invariant sous l'action de Γ. Cette action « arithmétique » de Γ rigidifie complètement la situation. On a en effet les propriétés suivantes :

(1) ∞ est le seul point fermé dont la Γ-orbite soit finie et donc la catégorie des fibrés Γ-équivariants sur $X \setminus \{\infty\}$ est abélienne ([37] 10.1.1, 10.1.3)

(2) si $(D, \varphi) \in \varphi\text{−}\mathrm{Mod}_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$ alors les sous-fibrés Γ-invariants de $\mathscr{E}(D, \varphi)_{|X\setminus\{\infty\}}$ sont en bijection avec les sous-isocristaux de (D, φ) ([37] théo. 10.2.14).

Soit donc $(D, \varphi) \in \varphi\text{−}\mathrm{Mod}_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$ un isocristal. On s'intéresse aux modifications Γ-équivariantes de $\mathscr{E}(D, \varphi)$ en ∞. Ce fibré est trivialisé en ∞ et $\widehat{\mathscr{E}(D, \varphi)}_\infty = D \otimes B_{dR}^+ = D_K \otimes_K B_{dR}^+$. On dispose maintenant de l'énoncé suivant : pour W un K-espace vectoriel de dimension finie il y a une bijection

$$\begin{aligned} \text{Filtrations de W} &\xrightarrow{\sim} \text{réseaux } \Gamma\text{-invariants dans } W \otimes B_{dR} \\ \mathrm{Fil}^\bullet W &\longmapsto \mathrm{Fil}^0(W \otimes B_{dR}). \end{aligned}$$

Du point de vue « de la grassmanienne affine » ([81] où Scholze montre que l'on peut mettre une structure de ind-diamant sur ces objets), si μ est un cocaractère diagonal dominant à valeurs dans GL_n et

$$\mathrm{Gr}_\mu = \mathrm{GL}_n(B_{dR}^+)\mu(t)\mathrm{GL}_n(B_{dR}^+)/GL_n(B_{dR}^+)$$

est une cellule de Schubert affine (comme ensemble), il y a une application de Bialynicki-Birula ([9] prop. 3.4.3 pour la version en familles pour n'importe quel groupe)

$$\mathrm{Gr}_\mu \longrightarrow \mathrm{GL}_n(C)/P_\mu(C).$$

Le résultat précédent dit que cela induit une bijection

$$\mathrm{Gr}_\mu^\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(K)/P_\mu(K).$$

Il s'agit là d'un résultat analogue au résultat « classique » sur $\mathbb{C}$ qui dit que pour l'action de $\mathbb{G}_m$ sur la cellule affine Gr_μ, avec ici $\mathrm{Gr}(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n\big(\mathbb{C}(\!(t)\!)\big)/\mathrm{GL}_n\big(\mathbb{C}[\![t]\!]\big)$, induite par $\lambda.t = \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{G}_m$, alors

$$\mathrm{Gr}_\mu^{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{\sim} G/P_\mu.$$

Du point de vue des espaces de lacets cette action algébrique de $\mathbb{G}_m$ correspond à l'action de $U(1)$ de rotation des lacets. *Il y a donc une forte analogie entre $U(1)$ et Γ*. Par exemple, pour $\sigma \in \Gamma$, $\sigma(t) = \chi_{cyc}(\sigma)t$ où ici t est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine.

Il résulte de cela que les modifications Γ-équivariantes de $\mathscr{E}(D, \varphi)$ sont en bijection avec les filtrations de D_K. Partant donc d'un φ-module filtré $(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ au sens de Fontaine ([42]) on en déduit par modification un fibré Γ-équivariant $\mathscr{E}(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)$. Sa filtration de Harder-Narasimhan est Γ-invariante et provient donc d'une filtration de (D, φ). Partant de là « le théorème faiblement admissible » implique admissible est une conséquence facile du théorème de classification des fibrés qui implique que $\dim_E H^0(X, \mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$ ssi $\mathscr{F}$ est semi-stable de

pente 0.

On donne également dans [37], sec. 10.6, une preuve du théorème de la monodromie p-adique (de Rham implique potentiellement semi-stable ([13])) en utilisant la courbe.

1.7.2. *Modifications de fibrés et groupes p-divisibles.* La preuve du théorème de classification des fibrés utilise de façon fondamentale deux résultats sur les modifications de fibrés qui se déduisent de résultats sur les périodes de groupes p-divisibles. C'est au cours de cette preuve que l'auteur a commencé à s'intéresser aux liens entre groupes p-divisibles et modifications de fibrés. Plus précisément, supposons que $E = \mathbb{Q}_p$ et $F = C^\flat$ avec $C|\mathbb{Q}_p$ algébriquement clos. Si $\mathrm{BT}_{\mathcal{O}_C}$ désigne les groupes de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$ il y a un foncteur

$$\mathcal{M} : \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_C} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{modifications minuscules de fibrés en } \infty \\ \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{E} \text{ avec } \mathscr{F} \text{ semi-stable de pente 0 i.e. trivial} \end{array} \right\}.$$

Ce foncteur admet les deux descriptions suivantes, si $\mathcal{G} \mapsto [\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{E}]$,

- **[Périodes de de Rham]** On a $\mathscr{F} = V_p(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{O}_X$ et $\mathscr{E} = \mathscr{E}(D, p^{-1}\varphi)$ où (D, φ) est le module de Dieudonné covariant de $\mathcal{G}_{k_C}$. Le morphisme $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{E}$ est alors donné par une application linéaire
$$V_p(\mathcal{G}) \to H^0(\mathscr{E}(D, p^{-1}\varphi)) = (D \otimes \mathcal{O}(Y))^{\varphi = p}$$
qui est une application de périodes cristallines de Fontaine. Le faisceau $\mathrm{coker}(\mathscr{F} \to \mathscr{E})$ est alors le faisceau gratte-ciel $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})\left[\frac{1}{p}\right]$ en ∞.
- **[Périodes de Hodge-Tate]** Il y a un morphisme de Hodge-Tate $\alpha_{\mathcal{G}^D} : V_p(\mathcal{G}^D) \to \omega_{\mathcal{G}}\left[\frac{1}{p}\right]$ ([40], [23], [26]) qui induit une surjection $V_p(\mathcal{G}^D) \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow i_{\infty *}\omega_{\mathcal{G}}\left[\frac{1}{p}\right]$ et donc une modification. La modification duale de cette modification est $[\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{E}]$.

Ces deux types de périodes ont été unifiées plus tard via l'introduction des φ-modules sur A_{inf} (cf. sec. 1.7.3). Le théorème de classification des fibrés utilise les deux résultats suivants :

(1) *(Lafaille/Gross-Hopkins)* Tout élément de $\mathbb{P}^{n-1}(C)$ est la période de de Rham d'un groupe formel de hauteur n et de dimension 1

(2) *(Drinfeld)* Tout élément de $\mathbb{P}^{n-1}(C) \setminus \bigcup_{H \in \check{\mathbb{P}}^{n-1}(\mathbb{Q}_p)} H(C)$ est la période de de Rham d'un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial et donc (principe des tours jumelles, cf. sec. 2.3) la période de Hodge-Tate d'un groupe formel de hauteur n et de dimension 1.

Via le foncteur $\mathcal{M}$ le point (1) implique que toute modification de degré 1 de $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ est isomorphe à $\mathcal{O}^n$. Le point (2) implique que tout modification de degré -1 de $\mathcal{O}^n$ est isomorphe à $\mathcal{O}^{n-r} \oplus \mathcal{O}(\frac{1}{r})$, $1 \leq r \leq n$ (cf. sec. 8.3 de [37]).
Réciproquement, le théorème de classification fournit de nouveaux résultats concernant les espaces de périodes p-adiques (cf. sec. 2.3). Ainsi, *la courbe est une machine qui recycle les deux résultats précédents pour en produire de nouveaux.*

La catégorie de modifications précédente dans le but de $\mathcal{M}$ s'identifie (du point de vue des périodes de Hodge-Tate) à celle des couples (V, W) où : V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et $W \subset V_C$ est un sous-espace. On introduit

dans [27] la notion de *groupes rigides analytiques de type p-divisible.* Il s'agit de groupes rigides analytiques abéliens G sur C tels que

- $\times p : G \to G$ est surjectif de noyau fini
- $\times p : G \to G$ est topologiquement nilpotent i.e. « G est topologiquement de p^∞-torsion ».

On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.10 ([27]). *(1) Le foncteur $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^{rig}$ de la catégorie des groupes formels p-divisibles sur $\mathcal{O}_C$ vers les groupes rigides analytiques de type p-divisible est pleinement fidèle, d'image essentielle les groupes G tels que $G \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d_C$ comme espaces rigide pour un entier d.*

(2) La catégorie des groupes rigides analytiques p-divisibles s'identifie à celle des triplets (Λ, W, u) où Λ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, W un C-espace vectoriel de dimension finie et $u : W \to \Lambda_C$ est C-linéaire.

Dans le point (2), au triplet (Λ, W, u) on associe le groupe rigide analytique $(\log \otimes Id)^{-1}(W \otimes \mathbb{G}_a)$ dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow \big(\Lambda\big[\tfrac{1}{p}\big]/\Lambda\big)(1) \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}}_m^{rig} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda \xrightarrow{\log \otimes Id} \mathbb{G}_a \otimes \Lambda_C \longrightarrow 0.$$

Les groupes G associés aux triplets (Λ, W, u) avec u injectif correspondent aux groupes G « hyperboliques » i.e. tels que tout morphisme rigide analytique $\mathbb{A}^1 \to G$ soit constant. Les groupes rigides analytiques de type p-divisible hyperboliques à isogénie près sont donc équivalents aux modifications minuscules dans le but du foncteur $\mathcal{M}$. Ce même foncteur $\mathcal{M}$ est donc de plus pleinement fidèle d'après le point (1) du théorème précédent. Scholze et Weinstein on complété ce résultat en montrant qu'il est en fait essentiellement surjectif.

Théorème 1.11 ([82]). *Le foncteur $\mathcal{M}$ est une équivalence de catégories.*

Leur preuve consiste à montrer que si C est sphériquement complet avec comme groupe de valuations $\mathbb{R}$, alors pour tout groupe rigide analytique de type p-divisible G « hyperbolique » on a $G \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d_C$. Ils montrent ensuite que l'on peut descendre du cas C sphériquement complet au cas C quelconque en utilisant le fait que les orbites de Hecke, comme fibres des applications de périodes de de Rham de Rapoport-Zink, sont des espaces rigides de dimension 0.

1.7.3. *φ-modules sur A_{inf} et modifications de fibrés.* Il s'est alors posé la question de savoir comment faire le lien par un objet intermédiaire entre périodes de Hodge-Tate et de de Rham. Le point de départ est la remarque suivante qui résulte du théorème de factorisation 1.3 : les modifications de $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}(d)$ sont toutes obtenues par un procédé itératif qui est le suivant. Partant de ξ primitif de degré d tel que $\xi = \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n$ avec $x_d \in 1 + \mathfrak{m}_F$ on peut former le produit de Weierstrass

$$\prod_{n \geq 0} \frac{\varphi^n(\xi)}{\pi^d} \cdot \ll \prod_{n<0} \varphi^n(\xi) \ \gg \ \in \mathcal{O}(Y)^{\varphi = \pi^d}$$

le produit entre guillemets n'étant pas convergeant mais pouvant être défini comme solution de l'équation fonctionelle $\varphi(x) = \xi x$ dans $\mathbf{A}$ (cf. [37] sec. 6.3). Cela a conduit ([30]) à la « version perfectoïde » suivante des φ-modules de Breuil-Kisin ([60]). Soit ξ primitif de degré 1 qui engendre le noyau de $\theta : \mathbf{A} \to \mathcal{O}_C$. Par définition un φ-module sur $\mathbf{A}$ est un couple (M, φ) où M est un $\mathbf{A}$-module libre et

$\varphi : M \to M$ est semi-linéaire de conoyau annulé par une puissance de ξ. On a alors le résultat suivant.

Théorème 1.12 ([30], [81])**.** *Il y a une anti-équivalence entre $\varphi-\mathrm{Mod}_{\mathbf{A}}$ et la catégorie des modifications de fibrés en ∞, $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{G}$ avec $\mathscr{F}$ trivial muni d'un réseau dans $H^0(X, \mathscr{F})$.*

Partant d'un φ-module (M, φ) on construit un « *Shtuka* » $(\mathcal{M}, \varphi) = (M \otimes \mathcal{O}_Y, \varphi \otimes \varphi)$ sur Y dont le zéro est localisé en $V(\xi)$, $\mathrm{coker}(\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M})$ est supporté en $V(\xi)$. On forme alors ([30] sec. 4.4)

$$\mathcal{M}_\infty = \varprojlim_{n \geq 0} \varphi^{n*}\mathcal{M} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^\infty = \varinjlim_{n \leq 0} \varphi^{n*}\mathcal{M},$$

(opération qui est l'analogue du produit de Weierstrass précédent pour GL_1). Puisque φ « dilate sur le disque épointé Y » les deux limites précédentes sont essentiellement constantes sur tout ouvert quasicompact de Y, et $\mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{M}^\infty$ sont donc des fibrés φ-équivariants i.e. des fibrés sur X^{ad}. La modification associée à (M, φ) est alors la duale de $\mathcal{M}_\infty \hookrightarrow \mathcal{M}^\infty$.
Dans l'autre sens une telle modification fournit par un procédé inverse un tel Shtuka $(\mathcal{M}, \varphi)$ sur Y. On utilise alors la compactification par deux diviseurs ([81])

$$\mathscr{Y} = \mathrm{Spa}(\mathbf{A}, \mathbf{A}) \setminus V(\pi, [\varpi]) = Y \cup V(\pi) \cup V([\varpi]).$$

En utilisant le théorème 11.1.7 de [37] on vérifie que $\mathcal{M}$ s'étend automatiquement grâce à la structure de Frobenius le long du diviseur $([\varpi])$. En utilisant la condition de trivialité de $\mathscr{F}$ couplée au choix du réseau dans $H^0(X, \mathscr{F})$ on vérifie que $\mathcal{M}$ s'étend en $\pi = 0$. Le fibré $\mathcal{M}$ s'étend donc canoniquement à $\mathscr{Y}$. On peut alors appliquer le résultat GAGA de Kedlaya ([57]) qui dit que les fibrés sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{A}) \setminus V(\pi, [\varpi])$ et $\mathrm{Spa}(\mathbf{A}, \mathbf{A}) \setminus V(\pi, [\varpi])$ s'identifient et que ceux-ci sont triviaux pour conclure ($\mathbf{A}$ se comporte en quelque sorte comme un anneau local régulier de dimension 2).

Partant de $(M, \varphi) \in \varphi-\mathrm{Mod}_{\mathbf{A}}$, si $(\mathcal{N}, \varphi) = (M, \varphi) \otimes \mathcal{O}_{\mathscr{Y}}$:

- si $V(\pi) = \{y_{\text{ét}}\}$ (diviseur étale) : $(\mathcal{N}_{y_{\text{ét}}}, \varphi)$ fournit le fibré trivial $\mathscr{F}^\vee$ ainsi que le réseau dans $H^0(X, \mathscr{F}^\vee)$,
- si $V([\varpi]) = \{y_{\text{cris}}\}$ (diviseur cristallin) : $(\mathcal{N}_{y_{\text{cris}}}, \varphi)$ fournit le fibré $\mathscr{G}^\vee$ qui est associé à l'isocristal $(\mathcal{N}_{y_{\text{cris}}} \otimes k(y_{cris}), \varphi)$,
- si $V(\xi) = \{y_{\text{dR}}\}$ (diviseur de de Rham) : l'inclusion de B_{dR}^+-réseaux $\varphi : \widehat{\mathcal{N}}_{\varphi(y_{\text{dR}})} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{N}}_{y_{\text{dR}}}$ fournit la filtration de Hodge i.e. la modification $\mathscr{G}^\vee \hookrightarrow \mathscr{F}^\vee$.

C'est en ce sens là que l'on a unifié les différentes périodes. On renvoie à [81] pour plus de détails.

Comme corollaire du théorème précédent on déduit comme dans [60] que la catégorie des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_C$ s'identifie à celle des φ-modules sur $\mathbf{A}$, (M, φ), tels que $\mathrm{coker}\,\varphi$ soit annulé par ξ ([30] sec 4.8). Ce résultat a été repris par Lau sur des bases affinoïdes perfectoïdes plus générales dans [65] par les méthodes de Displays/Windows de Zink. Remarquons enfin que sur $\mathcal{O}_C$ l'hypothèse $p \neq 2$ de [30] et [65] n'est en fait pas nécessaire puisque tout groupe p-divisible $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_C$ est somme directe d'un groupe étale et d'un groupe connexe.

Si X est un schéma propre et lisse sur $\mathcal{O}_K$ de valuation discrète à corps résiduel parfait avec $C = \widehat{\overline{K}}$, les différents théorèmes de comparaison cristallins/semi-stables

([44], [86], [73] par exemple) fournissent automatiquement de telles modifications de fibrés avec $\mathscr{F} = H^{\bullet}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes \mathcal{O}_X$ et $\mathscr{G} = \mathscr{E}(D, \varphi)$, (D, φ) étant la cohomologie cristalline de la fibre spéciale X_{k_K}. On peut donc définir grâce à 1.12 une théorie cohomologique sur de tels X à valeurs dans les φ-modules sur $\mathbf{A}$.

À la suite de cela Bhatt, Morrow et Scholze ([5], [6]) ont défini de manière géométrique une telle théorie cohomologique sur les schémas formels propres et lisses sur $\mathcal{O}_C$, à valeurs dans des complexes de φ-modules sur $\mathbf{A}$ et ont donné des applications à l'étude de la torsion dans la cohomologie étale de ces variétés. Le point est qu'ils ne construisent pas seulement des φ-modules sur $\mathbf{A}$ mais plutôt un *complexe de cohomologie*, ce qui raffine la construction précédente et donne des informations sur la torsion. En effet, l'équivalence du théorème 1.12 n'est pas une équivalence exacte et ne passe pas aux complexes de cohomologie.

Notons également que Niziol a interprété la cohomologie syntomique géométrique en termes de fibrés sur la courbe dans [72]. Plus précisément, la cohomologie de Deligne s'interprète parfois comme groupes d'extensions de structures de Hodge mixtes, les régulateurs archimédiens envoyant une extension de motifs mixtes sur l'extension correspondante de structures de Hodge. Niziol donne une interprétation similaire dans [72] pour la cohomologie syntomique en termes d'extensions de modifications de fibrés vectoriels.

Enfin concluons par la conjecture suivante, apparue au cours de nombreuses discussions avec Le Bras et Scholze, également inspirée par les travaux de Colmez et Niziol ([16] sec. 5.2 où les espaces de Banach-Colmez apparaissent naturellement) qui devrait généraliser la cohomologie de Hyodo-Kato des schémas propres et lisses à réduction semi-stable.

Conjecture 1.13. *Soit $C|\mathbb{Q}_p$ complet et algébriquement clos. On peut définir une théorie cohomologique sur les C-espaces rigides lisses quasicompacts séparés, à valeurs dans les fibrés vectoriels sur la courbe associée à $C^\flat$ qui généralise la cohomologie de Hyodo-Kato des schémas propres et lisses à réduction semi-stable. Cette théorie cohomologique devrait se factoriser par la catégorie des motifs rigides de Ayoub ([2]).*

On espère même la construction d'un complexe de cohomologie dans $\mathbb{D}^b_{coh}(\mathcal{O}_X)$. Par semi-simplification de la filtration de Harder-Narasimhan cela fournirait une théorie cohomologique à valeurs dans les isocristaux. Cependant la conjecture précédente est plus subtile puisqu'on prédit l'existence d'un relèvement au niveau des fibrés. Bien sûr si $C = \widehat{\overline{K}}$ cela devrait définir une théorie cohomologique sur de tels K-espaces rigides à valeurs dans les fibrés Galois équivariants.

2. Géométrisation de l'ensemble de Kottwitz et applications

2.1. **Géométrisation.** Dans cette section X est la courbe associée à un corps F algébriquement clos et E comme précédemment. Soit G un groupe réductif sur E. On considère l'ensemble de Kottwitz $B(G) = G(\breve{E})/\sigma$-conj. des classes d'isomorphismes de G-isocristaux. Ici par σ-conjugaison on entend $b \sim gbg^{-\sigma}$. Si $b \in G(\breve{E})$ on peut lui associer un G-fibré sur X par composition

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}(G) &\longrightarrow \varphi\text{–}\mathrm{Mod}_{\breve{E}} \xrightarrow{\mathscr{E}(-)} \text{fibrés sur } X \\ (V, \rho) &\longmapsto (V_{\breve{E}}, \rho(b)\sigma). \end{aligned}$$

On le note $\mathscr{E}_b$ et on le voit également comme un G-torseur étale. Tiré en arrière sur la courbe adique il s'agit du G^{an}-torseur localement trivial pour la topologie adique

$$Y \times_{\varphi^{\mathbb{Z}}} G^{an}_{\breve{E}}$$

où φ agit sur $G_{\breve{E}}$ via $b\sigma$. Le théorème principal de [31] est alors le suivant (cf. [1] pour le cas $E = \mathbb{F}_q((\pi))$). Il s'agit d'une généralisation du théorème de classification 1.5.

Théorème 2.1 ([31], [1])**.** *Il y a une bijection d'ensembles pointés*

$$\begin{aligned} B(G) &\xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(X, G) \\ [b] &\longmapsto [\mathscr{E}_b]. \end{aligned}$$

Ce résultat est utilisé dans [9] afin de construire des applications de périodes de Hodge-Tate pour des variétés de Shimura de type Hodge et stratifier par un ensemble de Kottwitz la variété de drapeaux au but de ces applications de périodes.

Cette bijection satisfait des propriétés très agréables :

- Il y a un *dictionnaire entre théorie de la réduction de Harder-Narasimhan/ Atiyah-Bott et la description par Kottwitz de* $B(G)$. Par exemple :
  - b est basique ssi $\mathscr{E}_b$ est semi-stable
  - le polygone de Harder-Narasimhan $\{\nu_{\mathscr{E}_b}\}$ vu comme classe de conjugaison géométrique de cocaractère $\mathbb{D} \to G_{\overline{F}}$ est égal à $\{\nu_b^{-1}\}$ l'inverse du polygone de Newton.
- L'application $\kappa : B(G) \to \pi_1(G)_\Gamma$ de Kottwitz s'interprète comme l'opposé d'une *première classe de Chern d'un G-fibré.*
- On dispose d'un *analogue du théorème de Drinfeld-Simpson* : lorsque G est quasi-déployé, pour tout point fermé $\infty \in |X|$, $\mathscr{E}_{|X\setminus\{\infty\}}$ est trivial. Les fibrés sur X s'obtiennent ainsi par recollement « à la Beauville-Laszlo » et donc si $\{\infty\} = V^+(t)$, de corps résiduel C, le groupoïde des G-fibrés sur X s'identifie au groupoïde quotient

$$\big[G\big(\mathcal{O}(Y)[\tfrac{1}{t}]^{\varphi=Id}\big)\backslash G(B_{dR}(C))/G(B^+_{dR}(C))\big].$$

2.2. **Interprétation géométrique de certains résultats de Tate.** On suppose dans cette section que $E|\mathbb{Q}_p$. Durant la démonstration du théorème 2.1 est apparu un lien intéressant entre théorie du corps de classe et fibrés sur la courbe. Par exemple, si B est une algèbre à division sur E, d'après la théorie du corps de classe (calcul du groupe de Brauer), il existe un isocristal isocline (D, φ) tel que $B \simeq End(D, \varphi)$. On a alors

$$B \otimes_E \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}nd(\mathscr{E}(D, \varphi)).$$

Il en résulte que le morphisme $\mathrm{Br}(E) \to \mathrm{Br}(X)$ est nul. Partant de ce résultat on démontre dans [31] que *le groupe de Brauer* $\mathrm{Br}(X)$ *est nul.* On conjecture même en fait que le corps des fonctions de X est (C1) ([31]).

On peut aller plus loin dans les liens entre corps de classe et cohomologie de la courbe. On note $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{E}|E)$. D'après le théorème 1.8 les systèmes locaux étales finis sur X correspondent par tiré en arrière via $X \to \mathrm{Spec}(E)$ aux Γ-modules discrets finis. On a alors le résultat suivant.

Théorème 2.2 ([31])**.** *Soit M un Γ-module discret fini et $\mathscr{F}$ le faisceau étale localement constant associé sur X par tiré en arrière via $X \to \mathrm{Spec}(E)$. On a alors :*

(1) $H^\bullet(E,M) \xrightarrow{\sim} H^\bullet_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$.

(2) Via cet isomorphisme pour $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$*, la classe fondamentale de la théorie du corps de classe correspond à la classe fondamentale de la courbe* $\eta_X = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))$*, c'est à dire la classe de cycle d'un point fermé sur la courbe.*

On peut ainsi réinterpréter (mais pas redémontrer complètement jusqu'à maintenant i.e. par des méthodes purement géométriques) géométriquement les deux théorèmes suivants de Tate :

(1) La dualité de Tate-Nakayama s'interprète comme la *dualité de Poincaré sur la courbe.*

(2) La formule de Tate pour la caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie galoisienne s'interprète comme une *formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich.*

On espère pouvoir étudier les systèmes locaux sur des ouverts de la courbe ainsi que leur cohomologie (cf. [31] sec. 3.3 pour des conjectures précises et également [28] sec. 7 pour une description conjecturale du groupe fondamental d'un ouvert).

2.3. **Application aux espaces de périodes p-adiques.** Rapoport a donné une première application du théorème 2.1 aux espaces de périodes de [78] dans [75] en montrant que le lieu admissible coïncide avec toute la variété de drapeaux uniquement dans le cas Lubin-Tate et son dual de Cartier. Il faut faire attention ici que, bien que le théorème de Colmez-Fontaine dise que « admissible est équivalent à faiblement admissible », du point de vue géométrique des espaces de périodes cela dit uniquement que les lieux admissible et faiblement admissible ont mêmes points à valeurs dans des corps p-adiques de valuation discrète, mais ils ne sont pas égaux en général.

Rappelons le contexte de ce type de problème ([78],[17]). On fixe une classe de conjugaison géométrique de cocaractère minuscule $\{\mu\}$ à valeurs dans G et on regarde la variété de drapeaux associée $\mathcal{F}(G,\mu)$ comme espace adique sur le complété de l'extension maximale non ramifiée du corps de définition de $\{\mu\}$. On fixe un isocristal avec G-structure $[b] \in B(G,\mu)$, l'ensemble de Kottwitz ([62]) qui paramètre les strates de Newton dans les variétés de Shimura dont la donnée induit (G,μ) localement en p (la non vacuité des strates de Newton associées à un élément de $B(G,\mu)$, conjecturée dans [22], est connue dans de très nombreux cas maintenant). On regarde le lieu faiblement admissible $\mathcal{F}(G,\mu,b)^{\text{fa}}$, un ouvert partiellement propre obtenu en enlevant un nombre fini de $J_b(E)$-orbites de variétés de Schubert où la condition de faible admissibilité de Fontaine n'est pas satisfaite. Rapoport et Zink avaient conjecturé dans [78] l'existence d'un ouvert

$$\mathcal{F}(G,\mu,b)^{\text{a}} \subset \mathcal{F}(G,\mu,b)^{\text{fa}}$$

ayant même points classiques de Tate (à valeurs dans un corps de valuation discrète) que $\mathcal{F}(G,\mu)^{\text{a}}$, ainsi que l'existence d'un E-système local étale avec G-structure dessus qui interpolerait les représentations cristallines à valeurs dans $G(E)$ en les points classiques. Ces dernières représentations sont fournies par Fontaine via le théorème « faiblement admissible équivalent à admissible » en ces points. L'existence de cet ouvert est maintenant connue grâce à la courbe, les travaux de Kedlaya-Liu ([58], cf. le point (1) du théo. 3.1) et de Scholze ([79]), cf. sec. 3 de [11] pour un rapide

survol. Grâce à cela on peut construire les variétés de Shimura locales associées ([77]) comme espace de réseaux dans ce système local ([18]).

Dans [51] Hartl classifie les μ minuscules associés à $G = \mathrm{GL}_n$ tels que $\mathcal{F}^{\mathrm{a}} = \mathcal{F}^{\mathrm{fa}}$. Inspirés entre autre par ce résultat, Rapoport et l'auteur ont conjecturé le résultat suivant qui est maintenant démontré.

Théorème 2.3 ([11])**.** *Pour $[b] \in B(G,\mu)$ basique sont équivalents*

(1) $\mathcal{F}(G,\mu,b)^{\mathrm{a}} = \mathcal{F}(G,\mu,b)^{\mathrm{fa}}$.

(2) L'ensemble $B(G,\mu)$ est pleinement HN décomposable.

Par définition l'ensemble $B(G,\mu)$ est pleinement HN décomposable si pour tout $[b'] \in B(G,\mu)$ non basique son polygone de Newton, comme élément d'une chambre de Weyl positive, « touche le polygone de Hodge défini par μ en dehors de ses extrémités ». Les espaces/variétés de Shimura associés aux ensembles $B(G,\mu)$ pleinement HN décomposables jouissent de propriétés tout à fait remarquables ([47]). Le premier exemple de tel ensemble qui a intrigué l'auteur remonte à « l'astuce de Boyer » aka la décomposition de Hodge-Newton ([7] pour l'astuce originelle, [50] pour sa variante variétés de Shimura, [69], [70], [84] pour des généralisations au cas des variétés de Shimura, [47] pour le cas de la fibre spéciale, [49] and [45] pour des versions "modernes" dans le cadre des espaces de module de Shtukas locaux).

Voici un exemple de (2) $\Rightarrow$ (1) dans le théorème précédent. Il avait été traité auparavant ([29], appendice de [85]) et a servi de guide dans la démonstration de (2) $\Rightarrow$ (1).

Corollaire 2.4 (Application de la courbe aux surfaces)**.** *Supposons $p \neq 2$. Soit $\mathcal{F} = \{q = 0\} \subset \mathbb{P}^{20}_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$ la variété de drapeaux formées des droites isotropes pour la forme quadratique q telle que $q(x) = \sum_{i=1}^{21} x_i x_{22-i}$. Soit $Z = \{x_{12} = \cdots = x_{21} = 0\} \cap \mathcal{F}$, une variété de Schubert pour $G = SO(q)$. L'espace des périodes p-adiques des surfaces K3 polarisées à réduction supersingulière s'identifie à $\mathcal{F} \setminus G(\mathbb{Q}_p) \cdot Z$.*

La démonstration du théorème 2.3 repose sur la construction suivante. À $x \in \mathcal{F}(G,\mu)(C)$ est associé une modification $\mathscr{E}_{b,x}$ de $\mathscr{E}_b$. En effet, $\mathscr{E}_b$ est canoniquement trivialisé en ∞ et on utilise le fait que μ est minuscule afin d'associer à un tel x une donnée de modification dans $G(B_{dR})/G(B_{dR}^+)$. Via le théorème 2.1 la classe d'isomorphisme de $\mathscr{E}_{b,x}$ fournit un élément de $B(G)$. On peut classifier ces éléments possibles par un autre ensemble (fini) de Kottwitz $B(G, 0, \nu_b\mu^{-1})$ ([75] coro. 0.10, [11] sec. 4). Cela fournit une stratification de $\mathcal{F}(G,\mu)$, la strate ouverte étant celle associée à $[1] \in B(G)$ qui est exactement l'ouvert admissible i.e. le lieu où le G-fibré $\mathscr{E}_{b,x}$ est trivial (cf. [11] sec. 5). C'est l'étude de cette stratification qui mène à la preuve du théorème 2.3. Ce type de stratification apparaît également dans [9] par le même type de construction. En effet, les périodes de Hodge-Tate et de de Rham de la section 1.7.2 s'interprètent agréablement au sens où si $\mathscr{E}_b \rightsquigarrow \mathscr{E}_1$ est une modification minuscule de type μ en ∞ :

- sa *période de de Rham* est donnée par l'élément $x \in \mathcal{F}(G,\mu)(C)$ qui identifie la modification à $\mathscr{E}_b \rightsquigarrow \mathscr{E}_{b,x}$
- sa *période de Hodge-Tate* est donnée par l'élément $y \in \mathcal{F}(G,\mu^{-1})(C)$ qui identifie la modification à $\mathscr{E}_{1,y} \rightsquigarrow \mathscr{E}_b$.

Ces périodes de Hodge-Tate et de de Rham sont l'ombre de deux pattes du champ de Hecke des modifications des G-fibrés (cf. sec. 3.3). Ce type de considérations sur les périodes de Hodge-Tate et de de Rham a été une très forte inspiration pour

l'introduction de la conjecture de géométrisation de la section 3.

Puisque nous l'utilisons dans la preuve du théorème 2.3, remarquons que la considération des G-fibrés sur la courbe, pour G quelconque, clarifie complètement *l'isomorphisme entre les tours jumelles* de Faltings [20] et [21] (cf. également [23] et [82]). Plus précisément, pour $[b] \in B(G)$ basique le groupe réductif J_b devient une forme intérieure pure de G après extension des scalaires à la courbe : $J_b \times X$ *est la torsion intérieure de* $G \times X$ *par le* G*-torseur* $\mathscr{E}_b$. Il en résulte une équivalence de groupoïdes entre J_b-fibrés sur X et G-fibrés sur X qui respecte les modifications. À partir de là les espaces de modules de modifications sont identifiés. On renvoie à la section 5.1 de [11] pour plus de détails.

Enfin, l'auteur a commencé à s'intéresser aux filtrations du type Harder-Narasimhan en théorie de Hodge p-adique lors de la découverte de l'existence de telles filtrations sur les schémas en groupes finis et plats ([25]). Ces filtrations permettent de définir des domaines fondamentaux dans les espaces de modules de groupes p-divisibles ([25] coro. 11 et [83]). On a alors la conjecture suivante concernant l'existence de « domaines fondamentaux de Siegel » dans les espaces de périodes p-adiques. Cette conjecture est liée au théorème 2.3 via le fait que lorsque $B(G,\mu)$ est pleinement HN décomposé alors $\mathcal{F}(G,\mu) \setminus \mathcal{F}(G,\mu,b)^{\mathrm{a}}$ est « paraboliquement induit » ([11] sec. 7).

Conjecture 2.5 ([11] sec. 7)**.** *Pour* $[b] \in B(G,\mu)$ *basique, sont équivalents :*

(1) $\mathcal{F}(G,\mu,b)^{\mathrm{a}} = \mathcal{F}(G,\mu,b)^{\mathrm{fa}}$

(2) Il existe un ouvert quasicompact $U \subset \mathcal{F}(G,\mu,b)^{\mathrm{a}}$ *tel que* $\mathcal{F}(G,\mu,b)^{\mathrm{a}} = J_b(E) \cdot U$.

Si $\underline{G}$ est un modèle entier de G, les filtrations de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats s'étendent aux φ-modules de Breuil-Kisin avec $\underline{G}$-structure ([68], [74]) ainsi qu'aux φ-modules sur A_{inf} de la section 1.7.3. En étudiant les $\underline{G}$-Shtukas sur $\mathscr{Y}$ il est probable que l'on puisse généraliser la preuve de 1.12 à cadre là. On peut donc espérer des constructions générales de tels domaines fondamentaux grâce à ces techniques.

3. Géométrisation de la correspondance de Langlands locale

3.1. **La courbe en familles.** Soit $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ la catégorie des $\mathbb{F}_q$-espaces perfectoïdes ([80]). On ne s'intéresse désormais qu'à la courbe adique et on note X ce que l'on notait auparavant X^{ad}. Pour $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ on peut construire un E-espace adique X_S que l'on peut voir comme étant « la famille de courbes adiques $(X_{k(s),k(s)^+})_{s\in S}$ ». Comme dans le cas d'un point base

$$X_S = Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

où Y_S est « Stein ». Par exemple, si $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$, $Y_S = \mathbb{D}_S^* = \{0 < |\pi| < 1\} \subset \mathbb{A}^1_S$ et le Frobenius φ est donné par celui de S. Lorsque $S = \mathrm{Spa}(R,R^+)$ est affinoïde perfectoïde l'espace Y_S se définit comme étant

$$\mathrm{Spa}(\mathbf{A},\mathbf{A}) \setminus V(\pi[\varpi])$$

où $\mathbf{A} = W_{\mathcal{O}_E}(R^+)$ si $E|\mathbb{Q}_p$, $\mathbf{A} = R^+[\![\pi]\!]$ si $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$ et ϖ est une pseudo-uniformisante de R, $0 < |\varpi| < 1$. Ces E-espaces adiques sont pré-perfectoïdes et on

montre que

$$Y_S^\diamond = S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond$$

où $\varphi \leftrightarrow \varphi_S \times Id$. Ici on utilise la notion de diamant introduite par Scholze ([81], [79]). Si Z est un E-espace adique alors $Z^\diamond$ est le faisceau sur $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ tel que

$$Z^\diamond(T) = \{(T^\sharp, \iota, f) \mid T^\sharp \text{ est perfectoïde}, \iota : T \xrightarrow{\sim} T^{\sharp,\flat}, f : T^\sharp \to Z\}/\sim .$$

Cette formule catégorique, bien que particulièrement élégante, ne dit rien sur la géométrie de Y_S (par exemple elle ne dit rien sur ce qu'est un fibré vectoriel sur X_S).

3.2. **Résultats de Kedlaya et Liu sur les familles de fibrés.** Kedlaya et Liu ont montré que l'on dispose d'une bonne notion de fibré vectoriel sur des espaces adiques du type X_S ([58] sec. 2.7). Ils ont également démontré les trois résultats suivants qui sont au coeur de la structure du champ des G-fibrés sur la courbe (leurs résultats sont énoncés de manière moins « géométrique » en termes de φ-modules sur des anneaux de Robba mais sont équivalents à ceux qui suivent). Dans cet énoncé

$$\tau : \widetilde{(X_S)_{\text{pro-ét}}} \longrightarrow \widetilde{S}_{\text{pro-ét}}$$

est un morphisme de topos pro-étales obtenu par exemple grâce à la fonctorialité de la courbe en la base S.

Théorème 3.1. *Pour S un $\mathbb{F}_q$-espace perfectoïde et $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur X_S*

(1) La fonction $|S| \ni s \longmapsto \mathrm{HN}(\mathscr{E}_{|X_{k(s),k(s)^+}})$ (polygone de Harder-Narasimhan) est semi-continue supérieurement. En particulier le lieu semi-stable dans S est un ouvert partiellement propre.

(2) Les foncteurs $R\tau_*$ et $\tau^*(-)\otimes_{\underline{E}}\mathcal{O}_X$ induisent des équivalences inverses entre fibrés vectoriels, fibre à fibre sur S semi-stables de pente 0, et E-systèmes locaux pro-étales sur S.

(3) Le fibré $\mathcal{O}(1)$ est ample au sens où, si S est affinoïde perfectoïde, alors pour $d \gg 0$ il existe une surjection $\mathcal{O}_{X_S}^n \twoheadrightarrow \mathscr{E}(d)$.

Le point (1) se reformule de façon agréable de la façon suivante (c'est un exercice de vérifier que les deux sont équivalents). Il y a deux fonctions additives (introduites par Colmez dans [12]) sur la catégorie des espaces de Banach-Colmez sur $C|E$ (cf. sec. 1.6). Ce sont les fonctions dimension et hauteur déterminées par $\dim \mathbb{G}_a = 1$, $\dim \underline{E} = 0$, $\mathrm{ht}\, \mathbb{G}_a = 0$ et $\mathrm{ht}\underline{E} = 1$ (par référence à la hauteur et la dimension du revêtement universel d'un groupe p-divisible, un cas particulier d'espace de Banach-Colmez). Pour un fibré vectoriel $\mathscr{F}$ sur la courbe X_F associée à $F = C^\flat$ on peut alors définir la dimension et la hauteur des espaces de Banach-Colmez $H^0(X_F, \mathscr{F})$ et $H^1(X_F, \mathscr{F})$ (plus précisément, ces espaces sont définis par troncature via la t-structure du théorème 1.9, la fonction dimension sur le coeur de cette t-structure coïncide alors avec le degré et la hauteur avec le rang, les deux vues comme fonctions additives sur $\mathbb{D}^b_{coh}(\mathcal{O}_{X_F})$). Le point (1) se reformule alors en le fait que pour $\bullet \in \mathbb{N}$, la fonction

$$|S| \longrightarrow \big(\dim H^\bullet(X_{k(s),k(s)^+}, \mathscr{E}_{|X_{k(s),k(s)^+}}), \mathrm{ht}\, H^\bullet(X_{k(s),k(s)^+}, \mathscr{E}_{|X_{k(s),k(s)^+}})\big) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

est semi-continue supérieurement (puisque $\dim H^0 - \dim H^1 = \deg \mathscr{E}$ et $\mathrm{ht}\, H^0 - \mathrm{ht}\, H^1 = \mathrm{rg}\mathscr{E}$ qui sont localement constants, cela se ramène au même énoncé pour le H^0). Cela replace ce type de résultat dans le cadre conceptuel des résultats de

semi-continuité de [48] (mais malheureusement l'auteur ne sait pas donner un sens au fait que $R\tau_*\mathscr{E}$ soit un « complexe parfait de quoi que ce soit », ce qui donnerait une preuve rapide de cette semi-continuité).

Le point (2) est une vaste généralisation aux $\mathbb{Q}_p$-systèmes locaux du théorème de Lang (qui concerne les $\mathbb{Z}_p$-systèmes locaux). Plus précisément, si $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ alors d'après Lang,

$$\underline{\mathcal{O}_E}\text{-systèmes locaux pro-étales} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\mathbf{A}_{R,R^+}}$$

où les φ-modules sont ceux de la section 1.7.3 et la condition d'être étale signifie simplement que $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$ est un isomorphisme. Cette condition se réécrit du point de vue du théorème précédent en demandant que pour tout $s \in S$, $(M, \varphi) \otimes_{\mathbf{A}_{R,R^+}} \mathbf{A}_{k(s),k(s)^+}$ soit étale. Le point (2) du théorème précédent remplace donc la condition d'être étale fibre à fibre par la condition d'être semi-stable de pente 0 fibre à fibre et l'anneau $\mathbf{A}$ par un anneau de Robba.
Remarquons que le point (2) est également une généralisation du résultat « du type Narasimhan-Seshadri » 1.6.

Pour le point (3) on renvoie à la discussion après 1.7.

3.3. **Le champ Bun_G et la conjecture de géométrisation.** Motivé par l'apparition systématique des modifications de fibrés vectoriels (sec. 1.7.2), le théorème 2.1, les conjectures de Kottwitz décrivant la partie discrète de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink ([76]), les travaux naissants de Scholze sur la construction de L-paramètres via la cohomologie des espaces de Shtukas locaux ([81],[64]) et bien sûr ceux de l'école russe autour du programme de Langlands géométrique ([19], [46]), on a formulé une conjecture de géométrisation de la correspondance de Langlands locale ([32], [38]). Puisqu'il s'agit d'un travail en cours nous n'allons pas nous étendre en détail dessus. Indiquons seulement quelques points en lien avec les résultats précédents.

On définit le champ Bun_G sur $\mathrm{Perf}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ comme étant $S \mapsto \{G\text{-fibrés sur } X_S\}$. On le voit comme un champ pour la v-topologie ([79]). Le point de départ est que le théorème 2.1 donne une identification

$$B(G) = |\mathrm{Bun}_G|.$$

Il faut prendre garde au fait que la topologie quotient sur $B(G) = G(\breve{E})/\sigma$-conj. est la topologie discrète (si les matrices de Frobenius de deux isocristaux sont proches elles sont σ-conjuguées). *Ce n'est pas la topologie qui nous intéresse, on regarde plutôt celle de $|\mathrm{Bun}_G|$ induite par les sous-champs ouverts.* L'application première classe de Chern , i.e. -κ sur $B(G)$ (cf. sec. 2.1), est localement constante ([38]) et fournit une décomposition en sous-champs ouverts/fermés

$$\mathrm{Bun}_G = \coprod_{\alpha \in \pi_1(G)_\Gamma} \mathrm{Bun}_G^\alpha.$$

Il y a une application polygone de Harder-Narasimhan semi-continue à valeurs dans une chambre de Weyl (cet énoncé peut se déduire de 3.1 (1)). Contentons nous seulement de dire que *le lieu semi-stable est ouvert.* Cet énoncé est à mettre en parallèle avec le fait que le lieu basique dans la fibre spéciale d'une variété de Shimura est fermé ; la cohérence entre les deux énoncés provenant du fait que le tube, au sens de la géométrie rigide, au dessus d'un fermé est ouvert. D'après

Kottwitz ([61]) la restriction de κ induit une bijection $B(G)_{basique} \xrightarrow{\sim} \pi_1(G)_\Gamma$. Cela s'interprète géométriquement en : *toute composante de* Bun_G *indexée par un élément de* $\pi_1(G)_\Gamma$ *possède un unique point semi-stable* (l'auteur n'avait jamais vraiment compris la signification de cet énoncé de Kottwitz avant de tomber sur ce simple énoncé géométrique). Soit donc $[b]$ basique et $\alpha = -\kappa(b)$. En utilisant le point (2) de 3.1 on peut démontrer le résultat suivant qui calcule la gerbe résiduelle en l'unique point semi-stable de la composante associée à α : via le G-fibré $\mathscr{E}_b$, il y a un isomorphisme

$$\left[\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\underline{J_b(E)}\right] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bun}_G^{\alpha,ss}.$$

(champ classifiant des $J_b(E)$-torseurs pro-étales). *C'est là une des différences majeures avec le champ « classique » des G-fibrés sur une courbe : le groupe des automorphismes du G-fibré trivial est $\underline{G(E)}$ qui est totalement discontinu tandis que dans la situation « classique » c'est le groupe algébrique connexe G.* Cette différence de nature entre champs classifiants, couplée aux travaux de Kaletha et Kottwitz ([54] par exemple), est importante afin de comprendre la conjecture de géométrisation. Plus précisément, si l'on prend la fibre en un point semi-stable d'un faisceau ℓ-adique sur Bun_G on obtient une représentation lisse de $J_b(E)$ (alors que dans la situation « classique », puisque G est connexe, on n'obtiendrait qu'un simple espace vectoriel ℓ-adique).

Venons en maintenant aux modifications de fibrés qui ont joué un rôle très important dans l'intuition de la conjecture. Ici l'intuition vient du point (2) de 1.1. En effet, les débasculements de $S \in \mathrm{Perf}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ sur E, $S^\sharp$ un E-espace perfectoïde avec $S \xrightarrow{\sim} S^{\sharp,\flat}$, fournissent des diviseurs de Cartier

$$S^\sharp \hookrightarrow X_S$$

donnés par $S^\sharp = V(\xi) \hookrightarrow Y_S$ si S est affinoïde perfectoïde et $\xi \in \mathbf{A}_{R,R^+}$ est primitif de degré 1 définissant le débasculement $S^\sharp$. Posons alors

$$\mathrm{Div}^1_S = S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi_{E^\diamond}^{\mathbb{Z}}$$

comme S-diamant. Cet objet est en quelque sorte « le miroir » de $X_S^\diamond = S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi_S^{\mathbb{Z}}$ (tous deux ont même site étale puisque $\varphi_S \circ \varphi_{E^\diamond}$ est le Frobenius absolu de $S \times \mathrm{Spa}(E)^\diamond$, c'est ce que l'on utilise dans la section 1.5). Le faisceau Div^1 est alors celui des « diviseurs de Cartier effectifs de degré 1 sur la courbe » (qui n'est pas la courbe elle-même contrairement à la situation « classique »).

Un autre point important est la construction d'un *système de carte perfectoïdes « lisses »* (ℓ-cohomologiquement lisses au sens de [79] pour être plus précis) sur le champ Bun_G, dont on montre au final qu'il est lisse de dimension 0 ([38]). Le point de départ a été la remarque suivante liée aux espaces de Banach-Colmez (sec. 1.6) : le champ classifiant $\left[\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}\right]$ est lisse. En effet, l'espace de module des injections $\mathcal{O}^n \hookrightarrow \mathcal{O}(1)^n$ s'identifie à l'ouvert U du diamant relatif $H^0(\mathcal{O}(1))^{n^2} \to \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ formé des matrices de déterminant dans $H^0(\mathcal{O}(n)) \setminus \{0\}$. L'espace de Banach-Colmez relatif $H^0(\mathcal{O}(1)) \to \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est représentable par un disque ouvert perfectoïde (le revêtement universel d'un groupe de Lubin-Tate) et $U \to \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est donc lisse. Le groupe $\underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}$ agit librement sur U, si $K \subset$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est un sous-groupe compact ouvert pro-p et $F = \overline{\mathbb{F}}_q((T^{1/p^\infty}))$ alors

$$U_F/\underline{K} \longrightarrow \left[\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}\right]$$

est une présentation lisse par un diamant lisse.

Finalement, on peut alors définir des correspondances de Hecke pour μ une classe de conjugaison de cocaractère

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hecke}_\mu \arrow[dl, "\overleftarrow{h}"'] \arrow[dr, "\overrightarrow{h}"] & \\ \mathrm{Bun}_G & & \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Div}^1. \end{tikzcd}$$

où $\overrightarrow{h}$ est une fibration étale localement triviale en la cellule de Schubert associée à μ dans la B_{dR}-*Grassmanienne de Scholze* au dessus de Div^1 ([81], [9]). L'étude des modifications de fibrés en lien avec les groupes p-divisibles (sec. 1.7.2) et le lien avec les espaces de périodes (sec. 2.3) sont une motivation importante pour l'introduction de ce type de diagramme.

La conjecture se formule alors sommairement de la façon suivante. On suppose G quasidéployé et on fixe une donnée de Whittaker (la construction devrait dépendre de ce choix). On considère le L-groupe ${}^LG = \widehat{G} \rtimes W_E$ de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ construit canoniquement à partir d'un isomorphisme de Satake géométrique associé à la B_{dR}-grassmanienne affine de Scholze ([38]). Considérons un L-paramètre discret $\varphi : W_E \to {}^LG$. On conjecture alors l'existence d'un faisceau pervers $\mathscr{F}_\varphi$ sur Bun_G muni d'une action de S_φ, propre pour l'action des correspondances de Hecke et dont les fibres en les points semi-stables de Bun_G réalisent des correspondances de Langlands locales pour toutes les formes intérieures pures de G (les J_b lorsque b parcourt les éléments basiques). Sans rentrer dans les détails, outre le fait que cette conjecture construise des correspondances de Langlands locales dans la direction

$$\text{L-paramètre} \longmapsto \text{représentation},$$

l'un de ses points forts est qu'*elle prédit la structure interne des L-paquets associés à φ via l'action de S_φ*. La propriété de Hecke spécialisée aux points semi-stables *implique automatiquement les conjectures de Kottwitz sur la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink* ([76]) via le lien entre modifications de fibrés vectoriels et groupes p-divisibles (sec. 1.7.2).

On renvoie à [32] et [38] pour un énoncé précis de la conjecture et ses conséquences, en espérant avoir expliqué au lecteur quelques éléments de la démarche qui a mené à sa formulation.

3.4. **Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi.** Les résultats présentés dans l'article [33] sont un cas particulier de la conjecture de géométrisation qui ne nécessite pas en quelques sortes de l'avoir comprise entièrement. Il s'agit du cas de GL_1 i.e. de la *théorie du corps de classe géométrique.* Dans ce cas là, dans le cadre « classique », il est bien connu que cette même théorie résulte de ce qu'en grand degré le morphisme d'Abel-Jacobi est une fibration localement triviale en variétés algébriques simplement connexes (des espaces projectifs). On démontre que c'est également le cas dans notre cadre dans [33].

Voici tout d'abord comment recycler le théorème de factorisation des périodes 1.3 dans un cadre joailler (ce recyclage n'était pas prévu à l'origine mais il montre combien ce théorème de factorisation des périodes est au coeur de la machine). Plus généralement que Div^1, pour $d \geq 1$, on peut définir un un faisceau pro-étale Div^d des diviseurs de Cartier effectifs de degré d sur la courbe.

Proposition 3.2 ([33])**.** *Le faisceau pro-étale* Div^d *est un diamant. De plus le morphisme somme de d-diviseurs* $\Sigma^d : (\mathrm{Div}^1)^d \to \mathrm{Div}^d$ *est quasi-pro-étale surjectif et induit un isomorphisme de faisceaux pro-étales* $(\mathrm{Div}^1)^d/\mathfrak{S}_d \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}^d$.

Il y a alors un morphisme d'Abel-Jacobi

$$\mathrm{AJ}^d : \mathrm{Div}^d \longrightarrow \mathscr{P}ic^d = \mathrm{Bun}^d_{\mathrm{GL}_1}.$$

On démontre alors le résultat suivant.

Théorème 3.3 ([33])**.** *Le morphisme* $\mathrm{AJ}^d : \mathrm{Div}^d \to \mathscr{P}ic^d$ *est une fibration pro-étale localement triviale en diamants simplement connexes si* $d > 2$.

D'après le point (2) du théorème 3.1, l'application qui à un fibré en droites, fibre à fibre de degré d, associe le torseur pro-étale des isomorphismes avec $\mathcal{O}(d)$ induit une identification

$$\mathscr{P}ic^d = \left[\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\underline{E}^\times\right].$$

Le morphisme d'Abel-Jacobi se réécrit alors sous la forme

$$H^0(\mathcal{O}(d)) \setminus \{0\}/\underline{E}^\times \longrightarrow [\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\underline{E}^\times].$$

Ici $H^0(\mathcal{O}(d))$, le faisceau $S \mapsto H^0(X_S, \mathcal{O}(d))$, est un « espace de Banach-Colmez absolu » i.e. relatif au dessus de $\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$, l'objet final du topos pro-étale qui n'est pas représentable par un espace perfectoïde (les espaces de Banach-Colmez, qui sont des diamants, tels qu'introduits par Colmez, vivent d'habitude au dessus d'une base perfectoïde fixée, cf. sec. 1.6). Bien que $H^0(\mathcal{O}(d))$ ne soit pas un diamant, on montre que $H^0(\mathcal{O}(d)) \setminus \{0\}$ en est un et est simplement connexe lorsque $d > 2$.

Références

[1] J. Anschütz. Reductive group schemes over the Fargues-Fontaine curve. *Prépublication, https://arxiv.org/abs/1703.00700*, 2017.

[2] J. Ayoub. Motifs des variétés analytiques rigides. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (140-141) :vi+386, 2015.

[3] L. Berger. Construction de (ϕ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires. *Algebra Number Theory*, 2(1) :91–120, 2008.

[4] L. Berger. Équations différentielles p-adiques et (ϕ, N)-modules filtrés. *Astérisque*, (319) :13–38, 2008. Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ)-modules.

[5] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze. Integral p-adic Hodge theory—announcement. *Math. Res. Lett.*, 22(6) :1601–1612, 2015.

[6] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze. Integral p-adic Hodge theory. *Prépublication, https://arxiv.org/abs/1602.03148*, 2016.

[7] P Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3) :573–629, 1999.

[8] T. Bridgeland. Derived categories of coherent sheaves. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 563–582. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[9] A. Caraiani and P. Scholze. On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties. *To appear in Annals of Math*, 2017.

[10] H. Cartan. Fonctions automorphes et séries de Poincaré. *J. Analyse Math.*, 6 :169–175, 1958.

[11] M. Chen, L. Fargues, and X. Shen. On the structure of some p-adic period domains. *Prépublication*, 2017.

[12] P. Colmez. Espaces de Banach de dimension finie. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(3) :331–439, 2002.

[13] P. Colmez. Les conjectures de monodromie p-adiques. *Astérisque*, (290) :Exp. No. 897, vii, 53–101, 2003. Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002.

[14] P. Colmez. Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham. *Astérisque*, (319) :117–186, 2008. Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ)-modules.

[15] P. Colmez and J.-M. Fontaine. Construction des représentations p-adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1) :1–43, 2000.

[16] P. Colmez and W. Niziol. Syntomic complexes and p-adic nearby cycles. *Invent. Math.*, 208(1) :1–108, 2017.

[17] J.-F. Dat, S. Orlik, and M. Rapoport. *Period domains over finite and p-adic fields*, volume 183 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[18] A. J. de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compositio Math.*, 97(1-2) :89–118, 1995. Special issue in honour of Frans Oort.

[19] V. G. Drinfeld. Two-dimensional l-adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2). *Amer. J. Math.*, 105(1) :85–114, 1983.

[20] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129, 2002.

[21] G. Faltings. p-adic periods. In *Second International Congress of Chinese Mathematicians*, volume 4 of *New Stud. Adv. Math.*, pages 75–80. Int. Press, Somerville, MA, 2004.

[22] L. Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales. In *Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et Correspondances de Langlands locales, Asterisque 291*, 2004.

[23] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in math., 262, pages 1–325. Birkhäuser, 2008.

[24] L. Fargues. Exposé à la conférence en l'honneur de Jean-Marc Fontaine. *https://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/ExposeConfFontaine.pdf*, 2010.

[25] L. Fargues. La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats. *J. Reine Angew. Math.*, 645 :1–39, 2010.

[26] L. Fargues. La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles. *Annales scientifiques de l'ENS*, 44(6) :905–961, 2011.

[27] L. Fargues. Groupes rigides analytiques p-divisibles. *Prépublication*, 2013.

[28] L. Fargues. From local class field to the curve and vice-versa. *À paraître dans les ≪ Proceedings of the AMS 2015 Summer Research Institute on Algebraic Geometry ≫ ayant eu lieu à Salt Lake city en Juillet 2015*, 2015.

[29] L. Fargues. Lettre à Michael Rapoport. 2015.

[30] L. Fargues. Quelques résultats et conjectures concernant la courbe. *Astérisque*, (369) :325–374, 2015.

[31] L. Fargues. G-torseurs en théorie de Hodge p-adique. *Prépublication*, 2016.

[32] L. Fargues. Geometrization of the local Langlands correspondence, an overview. *Prépublication, https://arxiv.org/abs/1602.00999*, 2016.

[33] L. Fargues. Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local. *Prépublication*, 2017.

[34] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Vector bundles and p-adic Galois representations. *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics Volume 51, 2011.*

[35] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Factorization of analytic functions in mixed characteristic. In *Frontiers of mathematical sciences*, pages 307–315. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[36] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Vector bundles on curves and p-adic Hodge theory. In *Automorphic Forms and Galois Representations*, volume 415 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 2014.

[37] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique. *Prépublication*, 2017.

[38] L. Fargues and P. Scholze. Geometrization of the local Langlands correspondence. *En préparation*.

[39] J.-M. Fontaine. Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 3–80. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[40] J.-M. Fontaine. Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux. *Invent. Math.*, 65(3) :379–409, 1981/82.

[41] J.-M. Fontaine. Le corps des périodes p-adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[42] J.-M. Fontaine. Représentations p-adiques potentiellement semi-stables. In *Périodes p-adiques*, volume 294, pages 321–347. Astérisque, 1994.

[43] J.-M. Fontaine. Presque C_p-représentations. *Doc. Math.*, (Extra Vol.) :285–385, 2003. Kazuya Kato's fiftieth birthday.

[44] J.-M. Fontaine and W. Messing. p-adic periods and p-adic étale cohomology. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 of *Contemp. Math.*, pages 179–207. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[45] I. Gaisin and N. Imai. Non-semi-stable loci in Hecke stacks and Fargues' conjecture. *Prépublication*, https://arxiv.org/abs/1608.07446, 2016.

[46] D. Gaitsgory. Geometric Langlands correspondence for GL_n. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 571–582. Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[47] U. Goertz, X. He, and S. Nie. Fully Hodge-Newton decomposable Shimura varieties. *Prépublication*, https://arxiv.org/abs/1610.05381, 2016.

[48] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. étude cohomologique des faisceaux cohérents. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (17) :91, 1963.

[49] D. Hansen. Moduli of local Shtukas and Harris's conjecture, I. *Prépublication*, 2016.

[50] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[51] U. Hartl. On a conjecture of Rapoport and Zink. *Invent. Math.*, 193(3) :627–696, 2013.

[52] U. Hartl and R. Pink. Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc. *Compos. Math.*, 140(3) :689–716, 2004.

[53] R. Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996.

[54] T. Kaletha. Rigid inner forms of real and p-adic groups. *Ann. of Math. (2)*, 184(2) :559–632, 2016.

[55] K. S. Kedlaya. A p-adic local monodromy theorem. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :93–184, 2004.

[56] K. S. Kedlaya. Noetherian properties of Fargues-Fontaine curves. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8) :2544–2567, 2016.

[57] K. S. Kedlaya. Some ring-theoretic properties of A_{inf}. *Prépublication*, https://arxiv.org/abs/1602.09016, 2016.

[58] K. S. Kedlaya and R. Liu. Relative p-adic Hodge theory : foundations. *Astérisque*, (371) :239, 2015.

[59] K. S. Kedlaya, J. Pottharst, and L. Xiao. Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ)-modules. *J. Amer. Math. Soc.*, 27(4) :1043–1115, 2014.

[60] M. Kisin. Crystalline representations and F-crystals. In *Algebraic geometry and number theory*, volume 253 of *Progr. Math.*, pages 459–496. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[61] R.E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 56(2) :201–220, 1985.

[62] R.E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure.II. *Compositio Math.*, 109(3) :255–339, 1997.

[63] R.A. Kucharczyk and P. Scholze. Topological realizations of absolute Galois groups. *Prépublication,* https://arxiv.org/abs/1609.04717, 2016.

[64] V. Lafforgue. Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de langlands globale. *Prépublication,* https://arxiv.org/abs/1209.5352.

[65] E. Lau. Dieudonné theory over semiperfect rings and perfectoid rings. *Prépublication,* https://arxiv.org/abs/1603.07831, 2016.

[66] M. Lazard. Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (14) :47–75, 1962.

[67] A.-C. Le Bras. Espaces de Banach-Colmez et faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine. *Prépublication*, 2017.

[68] B. Levin and C. Wang-Ericksson. A Harder-Narasimhan theory for Kisin modules. *Prépublication,* https://arxiv.org/abs/1606.00914, 2016.

[69] E. Mantovan. On non-basic Rapoport-Zink spaces. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(5) :671–716, 2008.

[70] E. Mantovan and E. Viehmann. On the Hodge-Newton filtration for p-divisible $\mathcal{O}$-modules. *Math. Z.*, 266(1) :193–205, 2010.

[71] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. *Ann. of Math. (2)*, 82 :540–567, 1965.

[72] W. Niziol. Geometric syntomic cohomology and vector bundles on the Fargues-Fontaine curve. https://arxiv.org/abs/1605.07216.

[73] W. Niziol. Semistable conjecture via K-theory. *Duke Math. J.*, 141(1) :151–178, 2008.

[74] M. Peche Irissarry. The reduction of G-ordinary crystalline representations with G-structure. *Prépublication,* https://arxiv.org/abs/1611.08529.

[75] M. Rapoport. Appendix A : Accessible and weakly accessible period domains, Appendix to : P. scholze, on the p-adic cohomology of the lubin-tate tower. *To appear in Annales de l'ENS.*

[76] M. Rapoport. Non-archimedean period domains. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 423–434. Birkhäuser, 1995.

[77] M. Rapoport and E. Viehmann. Towards a theory of local Shimura varieties. *Münster J. Math.*, 7(1) :273–326, 2014.

[78] M. Rapoport and T. Zink. *Period spaces for p-divisible groups.* Number 141 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[79] P. Scholze. Étale cohomology of diamonds. *Prépublication,* https://arxiv.org/abs/1709.07343.

[80] P. Scholze. Perfectoid spaces. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 116 :245–313, 2012.

[81] P. Scholze. Peter scholze's lectures on p-adic geometry, Fall 2014, Berkeley. 2014.

[82] P. Scholze and J. Weinstein. Moduli of p-divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2) :145–237, 2013.

[83] X. Shen. Cell decomposition of some unitary group Rapoport-Zink spaces. *Math. Ann.*, 360(3-4) :825–899, 2014.

[84] X. Shen. On the Hodge-Newton filtration for p-divisible groups with additional structures. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (13) :3582–3631, 2014.

[85] X. Shen. On some generalized Rapoport-Zink spaces. *Prépublication,* https://arxiv.org/abs/1611.08977, 2016.

[86] T. Tsuji. p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.*, 137(2) :233–411, 1999.

[87] J. Weinstein. $\mathrm{Gal}(\overline{Q}\mathrm{p}/Q\mathrm{p})$ as a geometric fundamental group. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (10) :2964–2997, 2017.

Laurent Fargues, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu 75252 Paris

E-mail address: laurent.fargues@imj-prg.fr