



HAL
open science

Equations du bilan de systèmes comprenant des interfaces

Roger Prud'Homme

► **To cite this version:**

Roger Prud'Homme. Equations du bilan de systèmes comprenant des interfaces. Journal de Physique, tome 32, Colloque C 5, supplément au n° 10, octobre 1971., May 1971, Evian, France. hal-03018169

HAL Id: hal-03018169

<https://hal.science/hal-03018169>

Submitted on 22 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Equations du bilan de systèmes comprenant des interfaces¹

Roger Prud'homme²

L'interface est souvent considérée comme une simple surface de séparation entre deux milieux homogènes, de sorte que le bilan d'une grandeur quelconque se réduit à l'égalité des flux normaux entrant et sortant. Les équations du bilan établies ici sont plus générales et concernent un milieu interfacial en mouvement, ayant des propriétés internes et pouvant être le siège de phénomènes irréversibles. Les conditions aux limites sont précisées pour les équations obtenues.

The interface is often treated as a simple separation surface between two homogeneous media in that way, the balance equation for any quantity is obtained through the equality of normal fluxes entering and leaving the media. The balance equations established here are more general and apply to a moving interfacial medium, characterized by internal properties and able to be a source of irreversible phenomena. The boundary conditions are established for the equations thus obtained.

1, Introduction

Dans de nombreux phénomènes (croissance des cristaux couche limite ablative, ondes de choc, etc.) interviennent des interfaces en mouvement. Deux étapes doivent être franchies avant de pouvoir résoudre ces problèmes : il est nécessaire de connaître les équations de la thermodynamique de l'interface en équilibre ; il est nécessaire de connaître les équations du bilan des systèmes comprenant des interfaces en mouvement.

Dans cette étude nous essayerons d'écrire ces équations de bilan macroscopiques en faisant intervenir flux et productions comme dans les écoulements homogènes. Nous n'envisageons pas ici, d'une façon générale, les relations entre flux et forces comme on le fait en thermodynamique des phénomènes irréversibles [1], cela doit constituer une étape ultérieure. Les problèmes d'interfaces sont en général traités en admettant uniquement l'existence de flux à travers l'interface (diffusion, transfert de chaleur) et en négligeant les flux parallèles à l'interface. Par ailleurs les problèmes d'adsorption, de désorption, de réactions chimiques de surface, qui peuvent faire intervenir des productions, sont en général traités dans le cas de la vitesse de déplacement nulle [2]. De même on applique souvent à la croissance cristalline des lois de la thermodynamique d'équilibre alors qu'il s'agit d'un phénomène hors d'équilibre.

Il est donc nécessaire d'essayer de dégager la forme générale des équations du bilan à utiliser, cela devrait nous aider à résoudre de nombreux problèmes d'interface, ou tout au moins nous pouvons dire que la connaissance des équations du bilan est une condition nécessaire à la résolution de ce type de problème. Signalons enfin que l'établissement de ces équations nécessite un certain nombre d'hypothèses.

Outre les hypothèses habituelles pour les milieux homogènes situés de part et d'autre de l'interface, on admet que les quantités thermodynamiques (énergie interne, entropie, etc.) existent sur l'interface et sont des fonctions de la position du temps uniquement. Ces fonctions, dans le domaine envisagé, seront considérées comme des fonctions continues des coordonnées d'espace et du temps. Les flux unitaires (par unité de longueur) et les productions (par unité d'aire) sont également des fonctions continues. Toutes ces fonctions sont dérivables. Il est possible que toutes ces hypothèses limitent quelque peu le champ

¹ Présentation aux Colloques d'Evian de la Société Française de Physique, 25-29 mai 1971, Éditée par le *Journal de Physique*, tome 32, Colloque C 5, supplément au n° 10, octobre 1971.

² Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS. 4ter, route des Gardes. 92- Meudon

d'application de la théorie, mais nous n'avons pas envisagé ici, dans le détail ce champ d'application ; l'important était, dans ce travail, de proposer un ensemble cohérent susceptible d'être appliqué à une série de problèmes.

2. Surface de séparation et interface

Envisageons un volume (\mathcal{V}) de contrôle contenant la zone interfaciale (Figure 1) qui se divise en deux domaines (\mathcal{V}^-) et (\mathcal{V}^+). La normale ξ en un point de l'interface étant orientée de (-) vers (+), l'écriture du bilan d'une propriété F pour le volume (\mathcal{V}) et pour les domaines (\mathcal{V}^-) et (\mathcal{V}^+) permet d'aboutir à l'équation suivante [3] :

$$(1) \quad [\mathcal{J}_F + \rho f(\mathbf{v} - \mathbf{V})]_{-}^{+} \cdot \xi = 0$$

avec les notations suivantes :

$[]_{-}^{+}$, différence des valeurs prises par l'expression entre crochets de part et d'autre de l'interface,

\mathcal{J}_F , vecteur flux de la propriété F par unité d'aire et de temps,

ρ , masse volumique,

f , grandeur par unité de masse,

\mathbf{v} , vitesse particulière,

\mathbf{V} , vitesse de déplacement de l'interface définie à un glissement arbitraire pris de la surface sur elle-même.

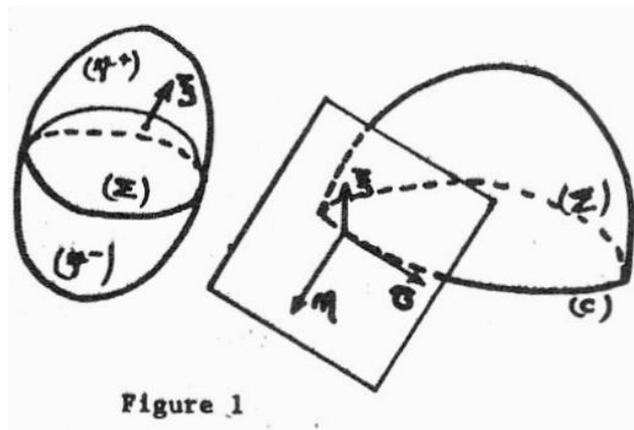


Figure 1

L'équation (1) n'est applicable aux différentes grandeurs caractéristiques du milieu en mouvement qu'en l'absence de tension d'interface, de réaction chimique de surface ou de flux de chaleur dQ à la conduction le long de l'interface notamment, Envisageons de tels flux et productions d'interface dans le cas le plus simple, celui de l'interface plane. Si la surface plane (Σ) n'échange rien avec les volumes en contact, le bilan est analogue à un bilan de volume réductible à deux dimensions. Si la surface plane n'est pas isolée des volumes en contact, il suffit d'ajouter dans le premier membre de l'équation du bilan le premier membre de l'équation (1). On obtient ainsi :

$$(2) \quad \frac{\partial \sigma f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi_F + \sigma \hat{f} \mathbf{w}) + [\mathcal{J}_F + \rho f(\mathbf{v} - \mathbf{V})]_{-}^{+} \cdot \xi = \dot{\omega}_F$$

avec les notations suivantes relatives au milieu interfacial : σ , masse surfacique ; \hat{f} , grandeur F par unité de masse ; φ_F , vecteur flux unitaire (par unité de longueur) de la grandeur F ; \mathbf{w} , vitesse particulière; $\dot{\omega}_F$, taux de production de surface de la grandeur F.

Le bilan de l'interface plane ne fait intervenir que la divergence du flux, cela n'est pas le cas pour une surface (Σ) quelconque, comme nous allons le voir. Ecrivons le bilan sous forme intégrale :

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \hat{\sigma} dS + \int_c (\varphi_F + \hat{\sigma} \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\eta} ds + \int_{\Sigma} [\mathcal{J}_F + \rho f(\mathbf{v} - \mathbf{V})]_{-}^{+} \cdot \boldsymbol{\xi} dS = \int_{\Sigma} \dot{\omega}_F dS$$

Chaque terme de cette équation peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de surface, cela est vrai en particulier pour le second terme. En effet (voir la figure 1), (c) est une courbe fermée, $\boldsymbol{\eta}$ est sa normale, contenue dans le plan tangent à la surface (Σ) telle que : $\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}$ étant la tangente à la courbe (c) (vecteur normalisé), de sorte qu'en appliquant le théorème de Stokes relatif à la circulation d'un vecteur le long d'une courbe fermée, lisière de la surface (Σ), on obtient :

$$(4) \quad \int_c (\varphi_F + \hat{\sigma} \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\eta} ds = \int_{\Sigma} \left\{ \nabla \times \left[\boldsymbol{\xi} \times (\varphi_F + \hat{\sigma} \mathbf{w}) \right] \right\} \cdot \boldsymbol{\xi} dS$$

Nous désignerons par le symbole \mathbf{X} l'opérateur ainsi introduit, tel que, \mathbf{X} étant un vecteur fonction de l'espace et du temps : $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \boldsymbol{\xi} \cdot [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{X})]$

S'il n'existe pas de lignes de discontinuité dans la zone interfaciale considérée, l'équation (3) permet d'écrire :

$$(5) \quad \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{X} \cdot (\varphi_F + \hat{\sigma} \mathbf{w}) + [\mathcal{J}_F + \rho f(\mathbf{v} - \mathbf{V})]_{-}^{+} \cdot \boldsymbol{\xi} = \dot{\omega}_F$$

Il nous reste à appliquer l'équation (5) aux diverses propriétés du milieu hétérogène. En utilisant l'équation de conservation de la masse et en introduisant la dérivée particulière

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla, \text{ l'équation (5) devient :}$$

$$(6) \quad \sigma \frac{d\hat{f}}{dt} + \mathbf{X} \cdot \varphi_F + [\mathcal{J}_F + \rho f(\mathbf{v} - \mathbf{V})]_{-}^{+} \cdot \boldsymbol{\xi} = \dot{\omega}$$

Les principales équations du bilan sont obtenues par une technique analogue à celle utilisée pour le volume [4], [5].

3. Conditions à la lisière

Deux ou plusieurs interfaces sont limitées par une lisière commune. On peut, en général, considérer cette lisière comme une simple courbe de séparation, de sorte que le bilan de la propriété F se réduit à :

$$(7) \quad \sum_k [\varphi^{(k)} + \sigma^{(k)} \hat{f}^{(k)} (\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{W})]_{(c)} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(k)} = 0$$

où la somme est étendue à toutes les interfaces concourant suivant la courbe(c). $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ est la normale à (c) contenue dans le plan tangent à ($\Sigma^{(k)}$) et \mathbf{W} la vitesse de déplacement de la lisière.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] De Groot (S.R.), Mazur (P.), *Non equilibrium thermodynamics*, North Holland Publishing Cy, 1961.
- [2] Defay (R.), Prigogine (I.), *Tension superficielle et adsorption*, Ed. Desoer, Liège.
- [3] Slattery (J.C.), *I & EC Fund*, 1967, **6**, 1.
- [4] Ghez (R.), *Surf. Sc.*, 1966, **4**, p 125-140.
- [5] Chez (R.), *Surf. Sc.*, 1970, **20**, p.126-334.