



HAL
open science

De nouvelles propriétés du pic épidémique

Nicolas Bacaër, Frédéric Hamelin, Hisashi Inaba

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaër, Frédéric Hamelin, Hisashi Inaba. De nouvelles propriétés du pic épidémique. *Quadrature*, 2021, 119, pp.40-47. hal-03008502v2

HAL Id: hal-03008502

<https://hal.science/hal-03008502v2>

Submitted on 9 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

De nouvelles propriétés du pic épidémique

Nicolas Bacaër* Frédéric Hamelin† Hisashi Inaba‡

Quadrature 119 (2021)

Résumé

On étudie une épidémie modélisée par un système différentiel de type S-I-R ou S-E-I-R. Pour le modèle S-I-R, on montre que la date du pic épidémique n'est pas toujours une fonction décroissante du taux de contact. Pour le modèle S-E-I-R, lorsque la population N est grande, de nouveaux éléments tendent à confirmer la conjecture selon laquelle le pic épidémique a lieu au temps T avec $T \sim (\ln N)/\lambda$, où λ est la plus grande valeur propre du système linéarisé.

1 Introduction

Dans [2], on a commencé à étudier la date du pic épidémique du modèle S-I-R de Kermack et McKendrick [1, chapitre 18]

$$\frac{dS}{dt} = -aS\frac{I}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = aS\frac{I}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI,$$

dans le cas où $a > b$ et où la population N est grande. La variable $S(t)$ est le nombre de personnes susceptibles d'être infectées, $I(t)$ le nombre de personnes infectées, $R(t)$ le nombre de personnes retirées de la transmission. La population totale $N = S + I + R$ est constante. Le paramètre a est le taux de contact effectif et b le taux auquel les personnes infectées cessent d'être infectieuses. Lorsque la population N est grande, on a montré que le pic épidémique (qui correspond au maximum de $I(t)$) a lieu au temps T avec

$$T \sim \frac{\ln N}{\lambda},$$

où $\lambda = a - b$. Autrement dit, λ est le taux de croissance du nombre de personnes infectées dans le système linéarisé $dI/dt = (a - b)I$ au début de l'épidémie, lorsque $S \simeq N$.

*Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes, Institut de recherche pour le développement, Les Cordeliers, Paris, France, nicolas.bacaer@ird.fr

†Institut de génétique, environnement et protection des plantes; Institut national de recherche pour l'agriculture, l'alimentation et l'environnement; Rennes, France

‡Département de mathématiques, Université de Tokyo, Tokyo, Japon

Dans [3], on a brièvement conjecturé que l'équivalent en $(\ln N)/\lambda$ pour la date du pic épidémique était le même dans le modèle S-E-I-R, qui inclut une phase latente (notée E) avant que les personnes infectées ne deviennent infectieuses,

$$\frac{dS}{dt} = -aS\frac{I}{N}, \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = aS\frac{I}{N} - bE, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = bE - cI, \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = cI, \quad (4)$$

avec $a > c$, à condition de prendre pour λ la plus grande valeur propre du système linéarisé au début de l'épidémie, c'est-à-dire la plus grande valeur propre de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -b & a \\ b & -c \end{pmatrix}.$$

Dans [7], N. Piovella s'est aussi intéressé à la date du pic épidémique dans le modèle S-E-I-R lorsque le rapport a/c est proche de 1, sans toutefois que ses approximations soient parfaitement justifiées d'un point de vue mathématique.

Dans la section 2, on rappelle tout d'abord un résultat apparemment oublié (y compris dans [2]) de [6, chapitre 2] pour le modèle S-I-R, qui donne le terme suivant dans le développement asymptotique de T :

$$T = \frac{\ln \frac{N}{I(0)} + f(\mathcal{R}_0)}{\lambda} + o(1), \quad N \rightarrow +\infty,$$

où $\mathcal{R}_0 = a/b$ est la reproductivité, $\lambda = a - b$ le taux de croissance, et f une fonction assez compliquée. Ce résultat semble ne figurer dans aucun livre ou article publié depuis [6], ce qui est un peu étonnant pour un modèle aussi simple et aussi connu.

On montre dans la suite de la section 2 que

$$f(\mathcal{R}_0) = \ln \left[2(\mathcal{R}_0 - 1)^2 \right] + o(1), \quad \mathcal{R}_0 \rightarrow 1^+.$$

On en déduit que la date du pic épidémique n'est pas toujours une fonction décroissante du taux de contact effectif a , mais que ceci ne s'observe que pour des valeurs de \mathcal{R}_0 proches de 1. La date du pic atteint un maximum pour

$$\mathcal{R}_0 \simeq 1 + e \sqrt{\frac{I(0)}{2N}},$$

où e est la base des logarithmes népériens. Cette observation semble nouvelle.

Dans la section 3, on se tourne vers le modèle S-E-I-R. On rappelle ce que l'on sait sur la taille finale de l'épidémie. On précise ce que l'on entend par

pic épidémique dans ce cadre, à savoir le point où $E + I$ atteint un maximum. On trouve une nouvelle borne inférieure pour la date de ce pic, compatible avec la conjecture sur le comportement asymptotique. Nous présenterons ensuite quelques simulations pour illustrer cette conjecture.

2 Le modèle S-I-R

2.1 Une expression intégrale de T

Pour le modèle S-I-R, supposons

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

avec $0 < i < N$. Supposons $a > b$ et N assez grand pour que $a(1 - i/N) > b$, c'est-à-dire $\frac{dI}{dt}(0) > 0$. Comme dans [2] (où l'on avait pris $i = 1$), on a

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\frac{a}{bN} \frac{dR}{dt} \quad \text{et} \quad \ln \frac{S(t)}{S(0)} = -\frac{a}{bN} R(t).$$

Donc

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{S}{N} (N - S - R) = -a \frac{S}{N} \left(N - S + \frac{bN}{a} \ln \frac{S(t)}{S(0)} \right).$$

Le pic de $I(t)$ a lieu au temps T où $dI/dt = 0$, ce qui intervient lorsque $S = Nb/a$. On en déduit que

$$T = \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-i/N} \frac{ds}{s \left[1 - s + \frac{b}{a} \ln s - \frac{b}{a} \ln(1 - i/N) \right]}. \quad (5)$$

2.2 La formule de Lauwerier quand $N \rightarrow +\infty$

Posons $\varepsilon = -\frac{b}{a} \ln(1 - \frac{i}{N})$. En suivant l'astuce de [6, p. 12], on a $T = T_1 + T_2$ avec

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{a} \int_{\frac{b}{a}}^{1-\frac{i}{N}} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon - s + \frac{b}{a} \ln s} - \frac{1}{\varepsilon - (1 - \frac{b}{a}) \ln s} \right) \frac{ds}{s}, \\ T_2 &= \frac{1}{a} \int_{\frac{b}{a}}^{1-\frac{i}{N}} \frac{ds}{s \left[\varepsilon - (1 - \frac{b}{a}) \ln s \right]}. \end{aligned}$$

En réduisant au même dénominateur,

$$T_1 = \frac{1}{a} \int_{\frac{b}{a}}^{1-\frac{i}{N}} \frac{-1 + s - \ln s}{\left[\varepsilon - (1 - \frac{b}{a}) \ln s \right] (1 + \varepsilon - s + \frac{b}{a} \ln s)} \frac{ds}{s}.$$

On a : $\varepsilon \sim \frac{b}{a} \frac{i}{N} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$. Observons que l'intégrale qui intervient lorsqu'on passe formellement à la limite $N \rightarrow +\infty$

$$\int_{\frac{b}{a}}^1 \frac{-1 + s - \ln s}{-(\ln s)(1 - s + \frac{b}{a} \ln s)} \frac{ds}{s}$$

est a priori une intégrale généralisée en $s = 1$. Mais la fonction intégrée se prolonge par continuité en $s = 1$ car

$$\ln s = s - 1 - \frac{(s-1)^2}{2} + o((s-1)^2)$$

au voisinage de $s = 1$, de sorte que

$$\frac{-1 + s - \ln s}{-(\ln s)(1 - s + \frac{b}{a} \ln s)s} \xrightarrow{s \rightarrow 1} \frac{1}{2(1 - b/a)}.$$

En particulier, cette intégrale est convergente. On en déduit (voir l'appendice 1) que

$$T_1 = \frac{1}{a-b} \int_{\frac{b}{a}}^1 \frac{-1 + s - \ln s}{-(\ln s)(1 - s + \frac{b}{a} \ln s)s} \frac{ds}{s} + o(1), \quad N \rightarrow +\infty.$$

Avec le changement de variable $s = e^{-u}$,

$$T_1 = \frac{1}{a-b} \int_0^{\ln \frac{a}{b}} \frac{-1 + e^{-u} + u}{u(1 - e^{-u} - \frac{b}{a}u)} du + o(1).$$

Par ailleurs, l'intégrale T_2 se calcule explicitement :

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{a} \left[\frac{\ln \left\{ -\frac{b}{a} \ln \left(1 - \frac{i}{N} \right) - \left(1 - \frac{b}{a} \right) \ln s \right\}}{-(1 - \frac{b}{a})} \right]_{\frac{b}{a}}^{1 - \frac{i}{N}} \\ &= \frac{1}{a-b} \left\{ \ln \left[-\frac{b}{a} \ln \left(1 - \frac{i}{N} \right) - \left(1 - \frac{b}{a} \right) \ln \frac{b}{a} \right] - \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{i}{N} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{\ln \frac{N}{i} + \ln \left[\left(1 - \frac{b}{a} \right) \ln \frac{a}{b} \right]}{a-b} + o(1). \end{aligned}$$

En additionnant les deux résultats, on obtient ce que l'on peut appeler la formule de Lauwerier [6, p. 13]

$$T = \frac{1}{a-b} \left\{ \ln \frac{N}{i} + \ln \left[\left(1 - \frac{b}{a} \right) \ln \frac{a}{b} \right] + \int_0^{\ln \frac{a}{b}} \frac{-1 + e^{-u} + u}{u(1 - e^{-u} - \frac{b}{a}u)} du \right\} + o(1),$$

qui est de la forme

$$T = \frac{1}{a-b} \left\{ \ln \frac{N}{i} + f(\mathcal{R}_0) \right\} + o(1)$$

avec $\mathcal{R}_0 = a/b > 1$.

La figure 1 montre à quel point la formule de Lauwerier donne une bonne approximation de la date T du pic épidémique. On a utilisé le logiciel libre Scilab pour le calcul numérique des intégrales. On a choisi le paramètre b de sorte

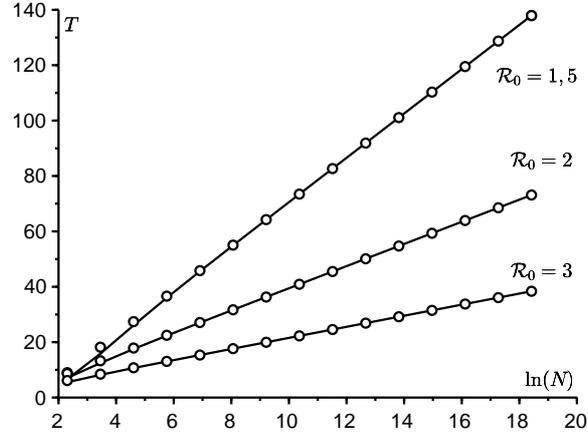


FIGURE 1 – La date T du pic épidémique du modèle S-I-R (en jours écoulés depuis le début de l'épidémie) en fonction de $\ln N$ selon la formule exacte (5) (lignes continues) et selon la formule approchée de Lauwerier (petits cercles). Valeurs des paramètres : $i = 1$, $b = 1/4$ par jour, $\mathcal{R}_0 = a/b \in \{1,5; 2; 3\}$.

que la période infectieuse dure en moyenne $1/b = 4$ jours.

Remarque. La formule de Lauwerier reste inchangée si l'on part de la condition initiale

$$S(0) = N - i - r, \quad I(0) = i, \quad R(0) = r,$$

avec $i > 0$, $r \geq 0$, $i + r < N$ et $a(1 - \frac{i+r}{N}) > b$. En effet, posons

$$\widehat{N} = N - r = N(1 - r/N), \quad \widehat{R}(t) = R(t) - r, \quad \widehat{a} = a\widehat{N}/N = a(1 - r/N).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\widehat{a}S\frac{I}{\widehat{N}}, & \frac{dI}{dt} &= \widehat{a}S\frac{I}{\widehat{N}} - bI, & \frac{d\widehat{R}}{dt} &= bI, \\ S(0) &= \widehat{N} - i, & I(0) &= i, & \widehat{R}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$T = \frac{1}{\widehat{a} - b} \left\{ \ln \frac{\widehat{N}}{i} + f(\widehat{a}/b) \right\} + o(1), \quad \widehat{N} \rightarrow +\infty.$$

Mais comme $\widehat{N} \rightarrow +\infty$ équivaut à $N \rightarrow +\infty$, et comme $\widehat{a} = a + O(1/N)$, on retombe sur

$$T = \frac{1}{a - b} \left\{ \ln \frac{N}{i} + f(a/b) \right\} + o(1), \quad N \rightarrow +\infty.$$

2.3 Étude de la fonction $f(\mathcal{R}_0)$

La figure 2 montre comment $f(\mathcal{R}_0)$ varie en fonction de \mathcal{R}_0 . On remarque que $f(\mathcal{R}_0)$ semble être une fonction croissante de \mathcal{R}_0 (ce n'est pas évident, même en calculant la dérivée) et $f(\mathcal{R}_0) = 0$ pour $\mathcal{R}_0 \simeq 2,10$.

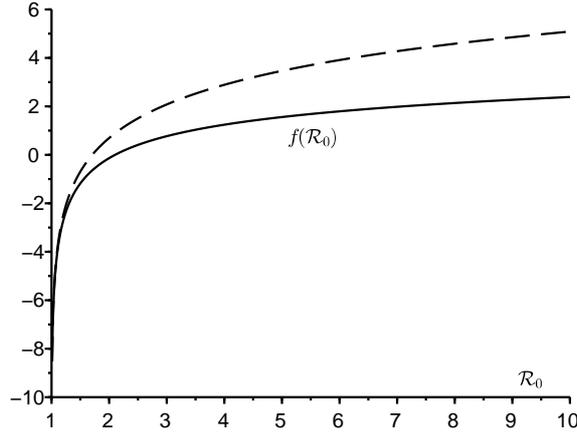


FIGURE 2 – $f(\mathcal{R}_0)$ en fonction de \mathcal{R}_0 (ligne continue) et l'approximation (6) au voisinage de $\mathcal{R}_0 = 1$ (en pointillé).

Lorsque $\mathcal{R}_0 \rightarrow 1^+$, $\ln \mathcal{R}_0 = (\mathcal{R}_0 - 1)(1 + o(1))$ et

$$\ln \left[\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \ln \mathcal{R}_0 \right] = \ln [(\mathcal{R}_0 - 1)^2] + o(1) = 2 \ln(\mathcal{R}_0 - 1) + o(1).$$

Au voisinage de $u = 0^+$,

$$\begin{aligned} \frac{-1 + e^{-u} + u}{u(1 - e^{-u} - u/\mathcal{R}_0)} &= \frac{u^2/2 + o(u^2)}{u(u - u^2/2 + o(u^2) - u/\mathcal{R}_0)} \\ &= \frac{1 + o(1)}{2(1 - 1/\mathcal{R}_0) - u + o(u)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln \mathcal{R}_0} \frac{du}{2(1 - 1/\mathcal{R}_0) - u} &= \left[-\ln \{ 2(1 - 1/\mathcal{R}_0) - u \} \right]_0^{\ln \mathcal{R}_0} \\ &= -\ln \frac{2(1 - 1/\mathcal{R}_0) - \ln \mathcal{R}_0}{2(1 - 1/\mathcal{R}_0)} \\ &= -\ln \left[1 - \frac{\ln \mathcal{R}_0}{2(1 - 1/\mathcal{R}_0)} \right] \\ &\xrightarrow{\mathcal{R}_0 \rightarrow 1^+} -\ln(1/2) = \ln 2 \end{aligned}$$

On en déduit (voir l'appendice 2) que

$$f(\mathcal{R}_0) = \ln\left[2(\mathcal{R}_0 - 1)^2\right] + o(1), \quad \mathcal{R}_0 \rightarrow 1^+. \quad (6)$$

Cette approximation coïncide avec celle suggérée dans [2, p. 11] en partant de l'approximation (non rigoureuse) de Kermack et McKendrick pour le modèle S-I-R lorsque \mathcal{R}_0 est proche de 1.

2.4 La date du pic n'est pas une fonction monotone du taux de contact

Ainsi, lorsque N est grand et \mathcal{R}_0 proche de 1 avec $N(\mathcal{R}_0 - 1)^2$ pas trop petit,

$$T \simeq \frac{\ln\left[\frac{N}{i}2(a/b - 1)^2\right]}{a - b}.$$

Donc

$$\frac{\partial T}{\partial a} \simeq \frac{2 - \ln\left[\frac{N}{i}2(a/b - 1)^2\right]}{(a - b)^2}.$$

On remarque que $\frac{\partial T}{\partial a} \simeq 0$ si

$$\frac{a}{b} \simeq 1 + e\sqrt{\frac{i}{2N}}.$$

Avec cette valeur de a , notons-la a^* , la valeur correspondante du maximum de T est

$$T_{\max} \simeq \frac{2}{a^* - b} = \frac{2}{be} \sqrt{\frac{2N}{i}}.$$

La date du pic n'est donc pas une fonction monotone décroissante du taux de contact, comme on pourrait le croire a priori. La figure 3 illustre ceci avec quelques exemples numériques.

3 Le système S-E-I-R

Considérons désormais le modèle S-E-I-R donné par le système (1)-(4). On suppose $N > 0$, $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. On suppose aussi $a > c$; le rapport a/c est la reproductivité du modèle S-E-I-R et joue un rôle analogue au \mathcal{R}_0 du modèle S-I-R. Les conditions initiales sont

$$S(0) = N - n_E - n_I > 0, \quad E(0) = n_E \geq 0, \quad I(0) = n_I \geq 0, \quad R(0) = 0,$$

avec $n_E + n_I > 0$. Pour tout $t > 0$, on a

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (7)$$

De plus, $S(t) > 0$, $E(t) > 0$, $I(t) > 0$ et $R(t) > 0$.

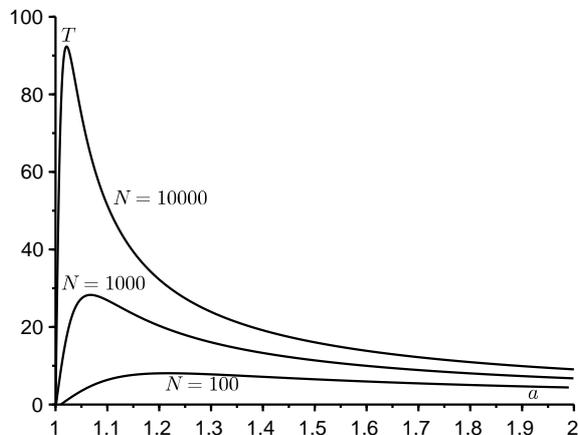


FIGURE 3 – La date T du pic épidémique selon la formule exacte (5) en fonction du taux de contact a pour $a > b/(1 - \frac{i}{N})$ si $i = 1$ et $N \in \{100; 1000; 10000\}$. On a choisi l'unité de temps de sorte que $b = 1$.

3.1 La taille finale de l'épidémie

La fonction $S(t)$ est décroissante d'après l'équation (1) et minorée par 0, donc elle converge vers une limite S_∞ . La fonction $R(t)$ est croissante d'après l'équation (4) et majorée par N , donc elle converge vers une limite R_∞ . Comme les fonctions $E(t)$ et $I(t)$ sont bornées par N pour $t \in]0; +\infty[$, la fonction dI/dt l'est aussi d'après l'équation (3), de même que d^2R/dt^2 d'après l'équation (4). La fonction $R(t)$ est donc convergente quand $t \rightarrow +\infty$ avec une dérivée seconde bornée; il en résulte que $dR/dt \rightarrow 0$ (voir par exemple [5, II.3.21] ou l'appendice 3). Avec l'équation (4), on voit que $I(t) \rightarrow 0$. La fonction dE/dt est bornée d'après l'équation (2), de même que d^2I/dt^2 d'après l'équation (3). Il en résulte que $dI/dt \rightarrow 0$ comme précédemment. D'après l'équation (3), $E(t) \rightarrow 0$. Avec l'équation (7), on obtient à la limite $S_\infty + R_\infty = N$. D'après les équations (1) et (4),

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{cN}{aS} \frac{dS}{dt}.$$

Donc

$$R(t) = -\frac{cN}{a} \ln \frac{S(t)}{S(0)}. \quad (8)$$

À la limite, on en déduit que $S_\infty > 0$ et que

$$S_\infty = N - R_\infty = N + \frac{cN}{a} \ln \frac{S_\infty}{S(0)}.$$

Posons $x_\infty = S_\infty/N$, $x_0 = S(0)/N$ et

$$g(x) = 1 - x + \frac{c}{a} \ln \frac{x}{x_0}.$$

On a donc $g(x_\infty) = 0$ et $0 < x_\infty \leq 1$. Mais

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 + \frac{c}{ax} > 0 & \text{si } 0 < x < c/a, \\ g'(x) &< 0 & \text{si } c/a < x < 1. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{c}{a} \ln \frac{1}{x_0} > 0, \\ g(x) &\rightarrow -\infty \text{ si } x \rightarrow 0^+, \\ g(c/a) &= 1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \ln \frac{c/a}{x_0} > 1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \ln \frac{c}{a} > 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité vient de l'hypothèse $c/a < 1$ et du fait que la fonction $h(u) = 1 - u + u \ln u$ vérifie $h'(u) = \ln u < 0$ pour $u \in]0; 1[$ et $h(1) = 0$, de sorte que $h(u) > 0$ pour $u \in]0; 1[$.

Par conséquent, la fonction g croît de $-\infty$ à $g(c/a) > 0$ sur l'intervalle $]0, c/a[$, puis décroît de $g(c/a) > 0$ à $g(1) > 0$ sur l'intervalle $]c/a, 1[$. L'équation $g(x) = 0$ a donc une unique solution dans l'intervalle $]0; 1[$ et cette solution se trouve dans l'intervalle $]0; c/a[$. On en conclut que

$$0 < S_\infty/N < c/a.$$

3.2 Le pic épidémique

Précisons notre définition du pic épidémique. On a

$$\frac{d}{dt}(E + I) = (aS/N - c)I. \quad (9)$$

Supposons

$$S(0)/N = 1 - (n_E + n_I)/N > c/a.$$

Avec l'hypothèse $a > c$, cette inégalité est vraie dès que N est assez grand. On a $I(t) > 0$ pour tout $t > 0$. La fonction $S(t)$ est strictement décroissante et décroît de $S(0) > Nc/a$ jusqu'à $S_\infty < Nc/a$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Il existe donc un unique $T > 0$ tel que $S(T) = Nc/a$. D'après l'équation (9), la fonction $E(t) + I(t)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; T]$ puis strictement décroissante sur l'intervalle $[T; +\infty[$. On appelle T le pic épidémique. Notons qu'il ne correspond en général ni au maximum de $I(t)$, ni à celui de $E(t)$.

D'après l'équation (8), on a aussi

$$E(T) + I(T) = N - S(T) - R(T) = N - S(T) + \frac{cN}{a} \ln \frac{S(T)}{S(0)}. \quad (10)$$

Puisque $S(T) = Nc/a$, on a

$$E(T) + I(T) = N \left(1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \ln \frac{Nc}{aS(0)} \right),$$

comme H. Hethcote l'a déjà observé dans [4, p. 35].

3.3 Borne inférieure

Comme $S/N \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &\leq -bE + aI \\ \frac{dI}{dt} &= bE - cI. \end{aligned}$$

Dans la suite, l'inégalité \leq entre vecteurs signifie qu'il y a inégalité pour toutes les composantes respectives. Nous rappelons le théorème de comparaison pour les systèmes quasi-monotones (voir par exemple [8, appendice E] ou l'appendice 4) :

Théorème 1 *Si $d \geq 2$ est un entier, si $F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $X \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)$ et $Y \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)$ vérifient*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) &\geq 0 \quad \forall i \neq j, \forall x \in \mathbb{R}^d, \\ \frac{dX}{dt} - F(X(t)) &\leq \frac{dY}{dt} - F(Y(t)) \quad \forall t > 0, \\ X(0) &\leq Y(0), \end{aligned}$$

alors $X(t) \leq Y(t)$ pour tout $t > 0$.

Posons $d = 2$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \end{pmatrix}, \quad Y(t) = e^{tM} \begin{pmatrix} n_E \\ n_I \end{pmatrix}, \quad F(x) = Mx,$$

où M est la matrice définie dans l'introduction. On a

$$\frac{dX}{dt} - F(X(t)) \leq \vec{0} = \frac{dY}{dt} - F(Y(t)) \quad \forall t > 0,$$

$X(0) = Y(0)$ et l'hypothèse sur la fonction F est vérifiée puisque les termes non diagonaux de la matrice M sont positifs. Donc

$$\begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \end{pmatrix} \leq e^{tM} \begin{pmatrix} n_E \\ n_I \end{pmatrix}$$

pour tout $t \geq 0$. L'exponentielle de matrice e^{tM} se calcule explicitement [9, proposition 6] avec les valeurs propres de la matrice M , qui sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{-b - c \pm \sqrt{(b - c)^2 + 4ab}}{2}.$$

On a

$$e^{tM} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t}}{2} + \frac{c-b}{\sqrt{(b-c)^2 + 4ab}} \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{2} & \frac{a(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t})}{\sqrt{(b-c)^2 + 4ab}} \\ \frac{b(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t})}{\sqrt{(b-c)^2 + 4ab}} & \frac{e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t}}{2} + \frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4ab}} \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{2} \end{pmatrix}$$

pour tout $t \geq 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} E(T) + I(T) &\leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} e^{TM} \begin{pmatrix} n_E \\ n_I \end{pmatrix} \\ &\leq \left(\frac{e^{\lambda_+ T} + e^{\lambda_- T}}{2} + \frac{b+c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4ab}} \frac{e^{\lambda_+ T} - e^{\lambda_- T}}{2} \right) n_E \\ &\quad + \left(\frac{e^{\lambda_+ T} + e^{\lambda_- T}}{2} + \frac{2a+b-c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4ab}} \frac{e^{\lambda_+ T} - e^{\lambda_- T}}{2} \right) n_I. \end{aligned}$$

Comme $\lambda_- < \lambda_+$, il existe une constante $k > 0$, qui dépend de a, b, c, n_E et n_I (mais pas de N), telle que

$$E(T) + I(T) \leq k e^{\lambda_+ T}.$$

Mais (10) montre que

$$E(T) + I(T) = N \left(1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \ln(c/a) \right) - \frac{cN}{a} \ln(S(0)/N).$$

Comme $S(0)/N < 1$, on a donc

$$N \left(1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \ln(c/a) \right) \leq E(T) + I(T) \leq k e^{\lambda_+ T}.$$

Il existe ainsi une autre constante $K \in \mathbb{R}$, qui dépend de a, b, c, n_E et n_I (mais pas de N), telle que

$$T \geq \frac{\ln N}{\lambda_+} + K.$$

Cette borne inférieure est compatible avec la conjecture

$$T \sim \frac{\ln N}{\lambda_+}, \quad N \rightarrow +\infty.$$

3.4 Exemples

On a choisi $b = 1/3$ par jour, $c = 1/4$ par jour, $n_E = 1$, $n_I = 0$, et trois valeurs du taux de contact a de sorte que $a/c \in \{1, 5; 2; 3\}$. Ainsi, une période infectieuse qui dure en moyenne 4 jours succède à une période latente qui dure en moyenne 3 jours. On a pris diverses valeurs pour la population N entre 10^2 et 10^8 . On a résolu le système S-E-I-R (avec le logiciel libre Scilab) et repéré le

pic T qui correspond au maximum de $E + I$. La figure 4 montre comment T varie en fonction de $\ln N$ (lignes continues). On a aussi tracé $(\ln N)/\lambda_+$ (petits ronds). Les pentes semblent coïncider, comme le suggère la conjecture. La figure suggère aussi que le terme suivant dans le développement asymptotique de T est encore une constante, qui est négative quand a/c est proche de 1 et qui devient positive quand le rapport a/c augmente. Déterminer cette constante en fonction des paramètres du modèle semble une tâche difficile.

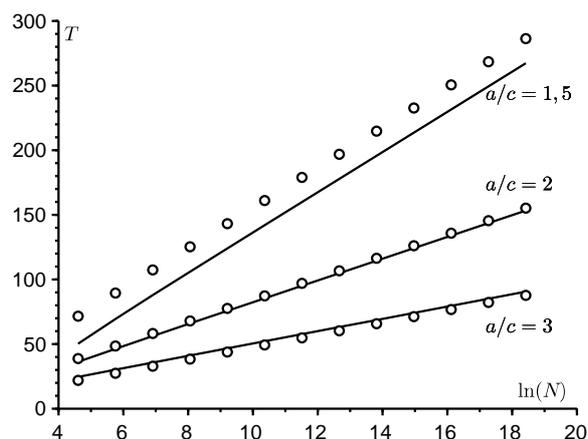


FIGURE 4 – La date T du pic épidémique du modèle S-E-I-R en fonction de $\ln N$ d’après les simulations numériques (lignes continues) et $(\ln N)/\lambda_+$ (petits ronds).

Appendice 1

Pour $b/a < s < 1$, posons

$$\psi(s) = \frac{-1 + s - \ln s}{-(a-b)(\ln s)(1 - s + \frac{b}{a} \ln s)s},$$

$$\psi_N(s) = \frac{1}{a} \frac{-1 + s - \ln s}{[\varepsilon - (1 - \frac{b}{a}) \ln s](1 + \varepsilon - s + \frac{b}{a} \ln s)s},$$

où $\varepsilon = -\frac{b}{a} \ln(1 - \frac{i}{N})$. On a : $0 < \psi_N(s) < \psi(s)$ et $\psi_N(s) \rightarrow \psi(s)$ quand $N \rightarrow +\infty$. On a vu dans la section 2.2 que $\int_{b/a}^1 \psi(s) ds$ était une intégrale convergente. D’après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{b/a}^1 \psi_N(s) ds \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{b/a}^1 \psi(s) ds.$$

De plus,

$$0 \leq \int_{1-\frac{i}{N}}^1 \psi_N(s) ds \leq \int_{1-i/N}^1 \psi(s) ds \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc

$$\int_{b/a}^{1-\frac{i}{N}} \psi_N(s) ds = \int_{b/a}^1 \psi_N(s) ds - \int_{1-i/N}^1 \psi_N(s) ds \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{b/a}^1 \psi(s) ds.$$

Appendice 2

Soit

$$\phi(u) = \frac{-1 + e^{-u} + u}{u(1 - e^{-u} - u/\mathcal{R}_0)} - \frac{1}{2(1 - 1/\mathcal{R}_0) - u}.$$

On va montrer que

$$\int_0^{\ln \mathcal{R}_0} \phi(u) du \xrightarrow{\mathcal{R}_0 \rightarrow 1^+} 0.$$

En réduisant au même dénominateur, on remarque que

$$\phi(u) = (1 - 1/\mathcal{R}_0) \frac{e^{-u} - 1 + u - u^2/2}{u(1 - e^{-u} - u/\mathcal{R}_0)(1 - 1/\mathcal{R}_0 - u/2)}.$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $u > 0$, il existe $\theta \in]0, 1[$, tel que

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} e^{-\theta u}.$$

Donc pour tout $u > 0$,

$$\left| e^{-u} - 1 + u - \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{6}.$$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-u} - u/\mathcal{R}_0 &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} e^{-\theta u} - u/\mathcal{R}_0 \\ &> u - \frac{u^2}{2} - u/\mathcal{R}_0 = u(1 - 1/\mathcal{R}_0 - u/2). \end{aligned}$$

On remarque que pour $0 < u < \ln \mathcal{R}_0$,

$$1 - 1/\mathcal{R}_0 - u/2 > 1 - 1/\mathcal{R}_0 - (\ln \mathcal{R}_0)/2 \underset{\mathcal{R}_0 \rightarrow 1^+}{\sim} (\mathcal{R}_0 - 1)/2 > 0.$$

Pour \mathcal{R}_0 proche de 1, on a donc $1 - 1/\mathcal{R}_0 - (\ln \mathcal{R}_0)/2 > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\ln \mathcal{R}_0} \phi(u) du \right| &\leq \frac{1 - 1/\mathcal{R}_0}{[1 - 1/\mathcal{R}_0 - (\ln \mathcal{R}_0)/2]^2} \int_0^{\ln \mathcal{R}_0} \frac{u}{6} du \\ &= \frac{1 - 1/\mathcal{R}_0}{[1 - 1/\mathcal{R}_0 - (\ln \mathcal{R}_0)/2]^2} \frac{(\ln \mathcal{R}_0)^2}{12} \underset{\mathcal{R}_0 \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{3} \xrightarrow{\mathcal{R}_0 \rightarrow 1^+} 0. \end{aligned}$$

Appendice 3

Soit $Z :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $Z(x) \rightarrow L$ quand $x \rightarrow +\infty$ et $|Z''(x)| \leq M$ pour tout $x > 0$. [5, II.3.21] montre que $Z'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_0 > 0$ tel que $\forall x > x_0, |Z(x) - L| \leq \varepsilon^2/(4M)$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x > 0$, pour tout $h > 0$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $Z(x+h) = Z(x) + hZ'(x) + \frac{h^2}{2}Z''(x+\theta h)$. Donc pour tout $x > x_0$, pour tout $h > 0$,

$$|Z'(x)| \leq \frac{|Z(x+h) - Z(x)|}{h} + \frac{Mh}{2} \leq \frac{\varepsilon^2}{2Mh} + \frac{Mh}{2}.$$

Avec $h = \varepsilon/M$, on obtient $|Z'(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x > x_0$.

Appendice 4

Avec les notations de la section 3.3, posons $U(t) = Y(t) - X(t)$ et

$$H(t) = \frac{dY}{dt} - F(Y(t)) - \left[\frac{dX}{dt} - F(X(t)) \right].$$

Par hypothèse, on a l'inégalité vectorielle $H(t) \geq 0$. Par ailleurs,

$$\frac{dU}{dt} = H(t) + F(X(t) + U(t)) - F(X(t)) = \phi(t, U(t)),$$

avec

$$\phi_i(t, U(t)) = H_i(t) + \sum_j \left[\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X(t) + sU(t)) ds \right] U_j(t).$$

Si $x_j \geq 0 \forall j$ et si $x_i = 0$, alors $\phi_i(t, x) \geq 0$ en raison de l'hypothèse sur le signe des dérivées partielles de la fonction F . Le cône \mathbb{R}_+^d est donc une région invariante. Comme $U(0) \geq 0$, il en résulte que $U(t) \geq 0$ et $X(t) \leq Y(t) \forall t \geq 0$.

Remerciements

On remercie A. Moussaoui pour avoir signalé [7].

Références

- [1] N. Bacaër, *Histoires de mathématiques et de populations*, Éditions Cassini, Paris, 2009.
- [2] N. Bacaër, *Sur le pic épidémique dans un modèle S-I-R*. Quadrature 117, 2020, 9-12.
- [3] N. Bacaër, *Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France*. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 2020, 29. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>

- [4] H. Hethcote, *The basic epidemiology models : models, expressions for R_0 , parameter estimation, and applications*. In : S. Ma, Y. Xia (éd.) *Mathematical Understanding of Infectious Disease Dynamics*, World Scientific, Singapour, 2009, p. 1-61.
- [5] W.J. Kaczor, M.T. Nowak (trad. E. Kouris), *Problèmes d'analyse II*. EDP Sciences, Les Ulis, 2008.
- [6] H.A. Lauwerier, *Mathematical models of epidemics*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981. <https://ir.cwi.nl/pub/12996>
- [7] N. Piovella, *Analytical solution of SEIR model describing the free spread of the COVID-19 pandemic*. Chaos Soliton Fract. 140, 2020, 110243.
- [8] J.W. Prüß, R. Schnaubelt, R. Zacher, *Mathematische Modelle in der Biologie*. Birkhäuser, Bâle, 2008.
- [9] E. Thomas, *Sur l'exponentielle de matrices*. Quadrature 116, 2020.