



**HAL**  
open science

# Analyse Multicritères des Performances et de la Complexité des Turbo-égaliseurs à Complexité Réduite à base de Treillis et de Filtres

Eric Soubigou, Serdar Sahin, Antonio Cipriano, Charly Poulliat, Romain Chayot

► **To cite this version:**

Eric Soubigou, Serdar Sahin, Antonio Cipriano, Charly Poulliat, Romain Chayot. Analyse Multicritères des Performances et de la Complexité des Turbo-égaliseurs à Complexité Réduite à base de Treillis et de Filtres. 27ème Colloque du Groupe de Recherche sur le Traitement du Signal et des Images - GRETSI 2019, Aug 2019, Villeneuve-d'Ascq, France. (support électronique). hal-03003830

**HAL Id: hal-03003830**

**<https://hal.science/hal-03003830>**

Submitted on 2 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse Multicritères des Performances et de la Complexité des Turbo-égaliseurs à Complexité Réduite à base de Treillis et de Filtrés

Eric SOUBIGOU<sup>1</sup>, Serdar ŞAHİN<sup>1,2</sup>, Antonio Maria CIPRIANO<sup>1</sup>, Charly POUILLIAT<sup>2</sup>, Romain CHAYOT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>THALES, 4 Avenue des Louvresses, 92230 Gennevilliers, France

<sup>2</sup>IRIT-INPT, CNRS, University of Toulouse, France

{eric.soubigou, serdar.sahin, antonio.cipriano, romain.chayot}@thalesgroup.com,  
charly.poulliat@enseeiht.fr

**Résumé** – Cet article présente une étude comparative des turbo-égaliseurs à complexité réduite à base de treillis et de filtres. Des algorithmes récents et de référence sont ici comparés en fonction de leur performance de décodage, complexité calculatoire et mémorielle, ces aspects n’étant pas traités pour certains algorithmes récemment introduits. L’impact de l’estimation de canal imparfaite est discuté avec des résultats numériques.

**Abstract** – This paper presents a comparative study of trellis-based and filter-based low-complexity turbo-equalizers through a multi-criteria analysis. Indeed, reference and recently introduced algorithms from the literature are compared with regards to their decoding performance, computational complexity and memory complexity. The impact of imperfect channel estimation is also discussed with numerical results.

## 1 Introduction

Les transmissions sur canaux large bande sont généralement affectées par de l’interférences entre symboles (ISI). Ces canaux sélectifs en fréquence se retrouvent, par exemple, dans des systèmes de communications cellulaires, aéronautiques ou tactiques. L’approche optimale pour parvenir à récupérer l’information transmise sur de tels canaux est de considérer une détection et un décodage conjoints sur le signal reçu, qui peut se réaliser à travers le critère du maximum a posteriori (MAP) au prix d’une complexité très élevée. Les schémas de transmissions par modulation codée à bits entrelacés (BICM) permettent de séparer la détection et le décodage, fonctions qui peuvent ainsi s’effectuer indépendamment à travers des modules à entrées et sorties souples (SISO) utilisant le critère MAP. La turbo-égalisation [1] permet d’atteindre asymptotiquement les performances du récepteur optimal en faisant dialoguer entre eux ces modules SISO séparés.

Du point de vue des complexités calculatoire et mémorielle, le détecteur MAP optimal, utilisant l’algorithme BCJR [2], est souvent trop coûteux pour des transmissions sur canaux avec ISI puisque sa complexité dépend de façon exponentielle de la longueur du canal et de façon polynomiale de l’ordre de la modulation.

Ainsi, de nombreux détecteurs alternatifs ont été proposés dans la littérature dans le but de réduire la complexité, à travers des structures de filtrage itératives [3, 4, 5] ou bien en essayant de réduire la complexité du BCJR tout en gardant sa structure en treillis [6, 7, 8, 9]. Ces détecteurs subissent des dégradations de performance dues aux simplifications mises en jeu, et leurs complexités sont très rarement quantifiées de façon précise.

Ainsi, il est difficile de comparer ces récepteurs en terme de compromis entre performances et complexités.

Dans cet article, nous effectuons une revue succincte de certains algorithmes de la littérature, et nous quantifions la complexité calculatoire (en nombre d’opérations), ainsi que la complexité mémorielle (en nombre d’octets requis). Ensuite, ces aspects sont mis en perspective par la prise en compte de l’efficacité spectrale de ces récepteurs, obtenue par simulations avec et sans prise en compte de l’estimation canal.

## 2 Modèle du signal reçu

Nous considérons une transmission mono-porteuse de type BICM sur un canal sélectif en fréquence :  $K_b$  bits d’information  $\{b_p\}_{p=1}^{K_b}$  sont encodés par un code correcteur d’erreur et entrelacés pour former une séquence de  $K_d$  bits notée  $\{d_p\}_{p=1}^{K_d}$ . Ces bits codés sont ensuite transformés en une séquence de  $N$  symboles  $\{x_n\}_{n=1}^N$  avec une modulation d’amplitude en quadrature (QAM) d’ordre  $\mathcal{M}$ , notée  $\mathcal{X}$ , qui sont ensuite filtrés par un filtre de mise en forme. En réception, après le filtre de réception adapté uniquement au filtre de mise en forme et en supposant une synchronisation parfaite, les observations en bande de base échantillonnées au temps symbole s’écrivent

$$y_n = h_0 x_n + \sum_{k=1}^{L_h-1} h_k x_{n-k} + \omega_n, \quad n = 1, \dots, N + L_h - 1 \quad (1)$$

où  $\{h_l\}_{l=0}^{L_h-1}$  sont les coefficients du canal discret équivalent au temps symbole de mémoire  $L_h$  et  $\omega_n$  est un bruit blanc circulaire Gaussien de variance  $\sigma_\omega^2$ .

### 3 Turbo-égalisation et détection MAP

**Récepteur MAP conjoint :** Le détecteur qui minimise le taux d'erreur paquet (PER) d'une transmission BICM est

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \max_{\mathbf{b}} [p(\mathbf{b}|\mathbf{y})], \quad (2)$$

avec  $\mathbf{y} \triangleq y_{n=1}^{N+L_h-1}$  et  $\mathbf{b} \triangleq b_{p=1}^{K_b}$ . Ce critère maximise donc la probabilité a posteriori (APP) du paquet d'information, relative à l'observation  $\mathbf{y}$ . Sous l'hypothèse de  $\{b_p\}$  équiprobables, le critère est équivalent au critère de maximum de vraisemblance.

De manière générale, ce détecteur nécessite d'évaluer une probabilité pour tous les paquets possibles, et possède donc une complexité calculatoire prohibitive de l'ordre de  $\mathcal{O}(2^{K_b})$ .

**Turbo-égaliseur :** La structure de transmission BICM et l'utilisation de la propagation de croyance (BP) rendent possible le découplage du récepteur MAP en deux modules : détection MAP et décodage MAP par bit. Ces modules sont implémentés à travers des algorithmes SISO qui échangent des log de rapports de vraisemblance (LLR) extrinsèques des bits codés  $\{d_p\}$ .

On utilisera un décodeur canal MAP SISO, et pour se focaliser sur la détection, on ne rentrera pas dans le détail des calculs des LLRs. On notera, du point de vue du détecteur, les LLRs a priori  $L_a(d_p)$  et extrinsèques  $L_e(d_p)$  et la probabilité a priori de  $x_n$  obtenue à partir des LLRs a priori est  $p_a(x_n)$ .

**Détecteur MAP SISO :** En s'appuyant sur l'indépendance asymptotique des symboles  $x_n$  (hypothèse BICM), le détecteur peut s'écrire selon le critère MAP symbole

$$\hat{x}_n = \arg \max_{x_n} [p(x_n|\mathbf{y})]. \quad (3)$$

Ce critère sur la distribution APP revient à maximiser la densité conjointe  $p(x_n, \mathbf{y})$  et l'algorithme BCJR [2] permet de le calculer exactement. En effet, on a

$$p(x_n, \mathbf{y}) = \sum_{(\sigma', \sigma) \in S(x_n)} \alpha_{n-1}(\sigma') \gamma_n(\sigma', \sigma) \beta_n(\sigma), \quad (4)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \sigma = \{x_{n-i}\}_{i=1}^{L_h-1}, \\ S(x_n) = \{(\sigma', \sigma) | (\sigma_{n-1} = \sigma') \xrightarrow{x_n} (\sigma_n = \sigma)\}, \\ \alpha_{n-1}(\sigma') = p(\sigma_{n-1} = \sigma', \mathbf{y}_1^{n-1}), \\ \beta_n(\sigma) = p(\mathbf{y}_{n+1}^N | \sigma_n = \sigma), \\ \gamma_n(\sigma', \sigma) = p(y_n, \sigma_n = \sigma | \sigma_{n-1} = \sigma'), \end{cases}$$

où  $\sigma$  est l'état du treillis. Les métriques avant et arrière sont respectivement données par les récursions suivantes

$$\alpha_n(\sigma) = \sum_{\sigma'} \alpha_{n-1}(\sigma') \gamma_n(\sigma', \sigma), \quad (5)$$

$$\beta_{n-1}(\sigma') = \sum_{\sigma} \gamma_n(\sigma', \sigma) \beta_n(\sigma). \quad (6)$$

La métrique de branche est donnée par le modèle d'observation en bande de base considéré à l'équation (1) avec

$$\gamma_n(\sigma', \sigma) = \frac{1}{\pi \sigma_w^2} e^{-|y_n - \sum_l h_l x_{n-l}|^2 \sigma_w^{-2}} p_a(x_n) \mathbb{1}_{\sigma' \xrightarrow{x_n} \sigma}. \quad (7)$$

La complexité du BCJR réside sur le nombre d'états pour lesquels il faut calculer les métriques précédentes, ainsi l'ordre de complexité calculatoire et mémorielle est de  $\mathcal{O}(N\mathcal{M}^{L_h})$ .

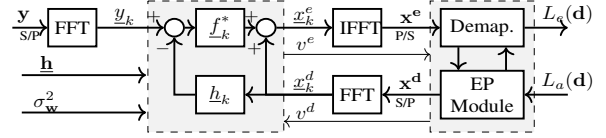


FIGURE 1 – Détecteur SISO avec filtrage auto-itéré avec EP.

### 4 Détection à complexité réduite

Pour diminuer la complexité prohibitive de l'algorithme BCJR, deux familles de détecteurs sous-optimaux ont été proposées.

#### 4.1 Détecteurs avec filtrage itératif avec EP

Afin de limiter la combinatoire du BCJR, *Laot et al.* [3] proposent de filtrer le signal reçu afin de minimiser l'ISI et d'utiliser un démodulateur symbole-par-symbole qui présente une complexité en  $\mathcal{O}(N\mathcal{M})$ . Pour cela, des estimations souples sont calculées à partir de  $p_a(x_n)$  pour effectuer une annulation d'interférences et le calcul de filtres adaptatifs. [4] a formalisé cette approche en dérivant un égaliseur minimisant le critère d'erreur quadratique moyenne minimum avec a priori.

La méthode de propagation de l'espérance (EP) effectue une inférence Bayésienne approximée qui étend BP par la capacité d'associer des familles de distributions de probabilité à chaque noeud de variable. Cette approche, utilisée pour résoudre le problème d'égalisation avec des symboles modélisés par des distributions gaussiennes, produit naturellement une architecture de filtrage itérative [5]. En effet, EP permet de raffiner les estimations souples constituées au niveau du démodulateur, et l'étape de filtrage et de démodulation est itérée  $S$  fois. Pour  $S = 0$ , cette structure est équivalente au récepteur de *Tüchler et al.* [4]. Lorsque des transmissions blocs étendues circulairement (par exemple avec un préfixe cyclique) sont utilisées, ce récepteur peut être implémenté dans le domaine fréquentiel avec un coût calculatoire de  $\mathcal{O}(SN \log N)$ .

Le démodulateur EP calcule les estimations APP des  $x_n$  avec

$$\mu_n^{d(s)} \triangleq \mathbb{E}_{p_p}[x_n], \quad \gamma^{d(s)} \triangleq N^{-1} \sum_n \text{Var}_{p_p}[x_n], \quad (8)$$

où  $s = 0, \dots, S$  et la distribution APP approximée s'écrit

$$p_p^{(s)}(x_n) \propto e^{-|x_n^{e(s)} - x_n|^2 / v^{e(s)}} p_a^{(s)}(x_n) \quad (9)$$

où  $x_n^{e(s)}$  et  $v^{e(s)}$  sont les sorties du filtre. Les estimations souples extrinsèques sont données par [5]

$$\begin{aligned} v^{d(s+1)} &\triangleq 1 / (1 / \gamma^{d(s)} - 1 / v^{e(s)}), \\ x_n^{d(s+1)} &\triangleq v^{d(s+1)} (\mu_n^{d(s)} / \gamma^{d(s)} - x_n^{e(s)} / v^{e(s)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Ces estimations sont ensuite utilisées pour effectuer un filtrage

$$\begin{aligned} \xi^{(s)} &= N^{-1} \sum_n |h_n|^2 / (\sigma_w^2 + v^{d(s)} |h_n|^2), \\ f_n^{(s)} &= h_n / [\xi^{(s)} (\sigma_w^2 + v^{d(s)} |h_n|^2)], \\ x_n^{e(s)} &= x_n^{d(s)} + f_n^{(s)*} (y_n - h_n x_n^{d(s)}), \\ v^{e(s)} &= 1 / \xi^{(s)} - v^{d(s)}, \end{aligned} \quad (11)$$

où les quantités soulignées se trouvent dans le domaine fréquentiel. La Fig. 1 présente la structure du détecteur EP.

## 4.2 Détecteurs BCJR à complexité réduite

**M-BCJR :** Le M-BCJR [6] est un BCJR à complexité réduite se basant sur la sélection d'états. À chaque itération, lors du calcul des métriques avant, les  $M$  états ayant les métriques les plus élevées sont conservés et les autres sont mis à 0. Les métriques arrière sont calculées sur les états retenus.

**RS-BCJR :** Le RS-BCJR est un BCJR à complexité réduite se basant sur la fusion d'états [7]. Le principe est de conserver la troncature des états correspondant à la mémoire  $L_{RS} \leq L_h$  la plus récente du canal. En d'autres termes, tous les états  $\sigma$  appartenant à l'ensemble des états  $S_\alpha = \{\sigma | \mathbf{x}_{n-L_{RS}}^{n-1} = \alpha\}$ , avec  $\alpha \in \mathcal{X}^{L_{RS}}$  seront considérés comme un seul et même état. Les valeurs des métriques avant  $\alpha(S_\alpha)$  et arrière  $\beta(S_\alpha)$  seront respectivement la somme des métriques avant et arrière des  $\sigma$  qui les constituent. Cette fusion s'effectue lors du calcul des métriques avant, et les métriques arrière sont calculées sur les états déjà fusionnés. Le terme de l'exponentielle dans la métrique de branche de l'équation (7) est remplacé par

$$e^{-|y_n - \sum_{l=0}^{L_{RS}-1} h_l x_{n-l} - \sum_{l'=L_{RS}}^{L_h-1} h_{l'} \hat{x}_{n-l'}|^2 \sigma_w^{-2}}, \quad (12)$$

où les  $\hat{x}_n$  sont des décisions dures sur les états passés. Donc RS-BCJR sélectionne implicitement  $M = \mathcal{M}^{L_{RS}}$  états.

**M\*-BCJR :** Le M\*-BCJR [8] se base sur le concept de la fusion des états finaux du RS-BCJR, appliquée au M-BCJR. En effet, au lieu de supprimer les états ne faisant pas partie des  $M$  états retenus, chacun de ces états  $\sigma$  est fusionné avec un état "d'accueil" parmi les états retenus, ayant la plus petite distance de Hamming à  $\sigma$ , vis à vis du mapping de la modulation  $\mathcal{X}$ .

**EP-M-BCJR :** L'Expectation Propagation-M-BCJR (EP-M-BCJR) [9] est une extension du M-BCJR, dérivée avec l'approche d'inférence du champ moyen (*mean field*-MF), et non avec EP contrairement à ce que son nom suggère<sup>1</sup>. Cette approche a deux différences fondamentales par rapport au M-BCJR. Premièrement, un double treillis est utilisé, autrement dit, la sélection sur les métriques arrière est indépendante de la sélection sur les métriques avant. Deuxièmement, la phase de sélection des états n'est pas réalisée à partir des métriques avant ou arrière mais à partir de métriques pseudo-APP :  $\tilde{p}_n(\sigma | \mathbf{y}) \propto \alpha_n(\sigma) \beta_n(\sigma)$ . C'est un algorithme auto-itéré pour  $i = 0, \dots, I$ , où lors de l'initialisation, on suppose que les métriques sont initialisées par  $\alpha_n^{i=0}(\sigma) = \beta_n^{i=0}(\sigma) = 1, \forall \sigma, n$ . Une fois que les  $M$  états ayant les  $M$  meilleures pseudo-APP sont sélectionnés, les états restants sont figés à un seuil inférieur  $\eta$ .

À la dernière itération, l'estimation APP est calculée avec

$$\forall n, \forall (\sigma, \sigma') \in \{(\sigma, \sigma') \in (\mathcal{A}_n^I, \mathcal{B}_{n+1}^I) | \sigma \xrightarrow{x_n} \sigma'\} \quad (13)$$

$$p_n(s_n | \mathbf{y}) = \alpha_n^{i=I}(\sigma) \gamma_{n+1}(\sigma, \sigma') \beta_{n+1}^{i=I}(\sigma'),$$

où  $\mathcal{A}_n^i$  et  $\mathcal{B}_n^i$  sont respectivement les ensembles des états survivants avant et arrière de l'itération  $i$ , à la section  $n$  du treillis.

1. EP utilise le critère  $\arg \min_q \text{KL}(p||q)$  pour approximer une distribution de probabilité  $p$  par  $q$ , alors que MF utilise  $\arg \min_q \text{KL}(q||p)$ .

## 5 Résultats numériques sur le compromis performance-complexité

Afin d'évaluer le compromis performance-complexité des algorithmes, nous étudions dans un premier temps le coût calculatoire de chacun des algorithmes. Une méthode très utilisée pour évaluer la complexité calculatoire d'un algorithme est la mesure du nombre de Floating-point Operations (FLOPs) et du nombre d'accès mémoire. Un FLOP est défini comme une addition et une multiplication réelle, suivant les mêmes conventions que dans les travaux de *Şahin et al.* [5]. Plus explicitement, nous utilisons le tableau 1 comme référence pour chaque coût d'opération.

Opération	Mult.	Add.	FLOP(s)
Add./Soustr. réelle	0	1	0.5
Mult./Div. réelle	1	0	0.5
Add./Soustr. Complexe	0	2	1
Mult. Complexe	4	2	3.0
Div. Complexe	8	3	5.5
Racine Carrée Réelle	-	-	3.0
Norme au Carré Complexe	2	1	1.5
Interpolation Linéaire Réelle	1	2	1.5
Opérateur binaire	-	-	0.5

TABLE 1 – Complexité des opérations élémentaires.

De façon analogue, nous répertorions les coûts en mémoire des variables utilisés pour l'implémentation des récepteurs, sur le tableau 2. Le coût mémoriel comprend, entre-autres, la sauvegarde des valeurs des métriques, des directions des branches des états fusionnés et des probabilités ou estimations souples.

Type	Integer	Long	Float	Double	Boolean
Octet(s)	4	4	4	8	1

TABLE 2 – Complexité mémorielle des variables élémentaires.

Pour l'analyse numérique, nous considérons des transmissions avec  $K_b = 2048$  bits, et un code convolutif à débit 1/2, sur le canal Proakis C (de réponse impulsionnelle  $\mathbf{h} = [12321]$ ) qui est particulièrement sélectif. Les performances en terme de PER sont obtenues par une analyse Monte Carlo, et la complexité requise pour l'égalisation et le décodage d'un symbole a été quantifiée, pour les récepteurs étudiés, en FLOPs et en octets. Ainsi, le compromis performance - complexité de ces récepteurs peut être étudié autour d'une valeur de PER cible.

Dans un premier scénario, nous considérons des transmissions 8-PSK avec une connaissance parfaite du canal. Les complexités calculatoire et mémorielle sont respectivement illustrées sur la Fig. 2, en haut, et sur la Fig. 3 à gauche. La Fig. 2 illustre la complexité requise lorsque le nombre de turbo-itérations varie de 0 à 10. On constate que les récepteurs à treillis ont une complexité plus élevée que les méthodes à filtre, et qu'ils convergent plus rapidement vers leurs performances limites. Cependant les récepteurs à filtres se rapprochent des performances du MAP asymptotiquement, avec moins de complexité, en partant de performances bien plus mauvaises.

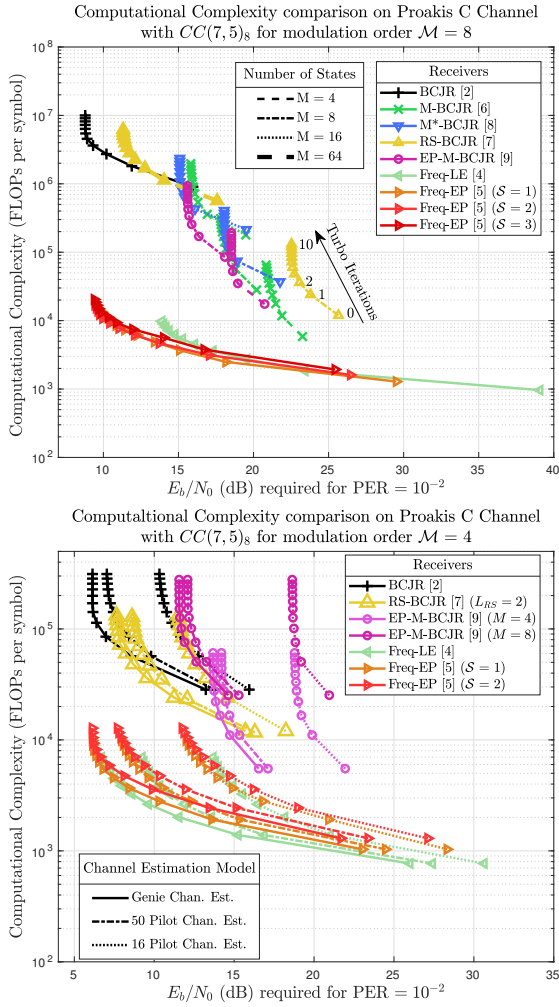


FIGURE 2 – Comparaison performance-complexité des différents récepteurs à treillis ou à filtre en 8-PSK et en QPSK. Chaque point correspondant à une turbo-itération (de 0 à 10).

Puis, nous considérons des transmissions QPSK (Fig. 2 en bas et Fig. 3 à droite), avec une estimation de canal selon la méthode des moindres carrés sur des séquences Zadoff-Chu. Le compromis performance-complexité avec connaissance du canal parfaite est comparé aux cas où le canal est estimé avec 50 et 16 symboles pilotes. Nous constatons que les performances des méthodes à filtres se rapprochent toujours du MAP asymptotiquement, certains récepteurs à treillis (RS-BCJR) ne voient pas leur performances se dégrader plus que les récepteurs à filtres en présence d’une connaissance imparfaite du canal.

Pour finir, la complexité mémorielle est significativement réduite par l’ensemble des méthodes faible complexité (cf. Fig. 3).

## 6 Conclusion

Par cette étude, nous avons pu mettre en exergue que les algorithmes par treillis à complexité réduite ne diminuent pas si drastiquement la complexité calculatoire de l’égalisation par

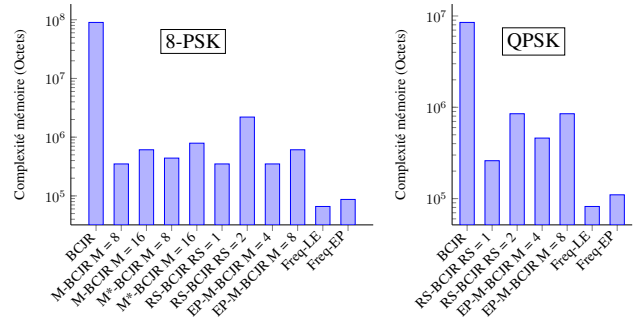


FIGURE 3 – Complexités mémorielles des récepteurs.

rapport au MAP standard. Les méthodes par filtrage se trouvent être plus intéressantes en terme de complexité pour des résultats équivalents en terme de PER. Cependant, les méthodes à treillis simplifiées peuvent être intéressantes si les applications ont une contrainte de latence pour laquelle qu’il est impossible d’itérer avec le décodeur. Dans ce cas, ces récepteurs atteignent des bonnes performances en sacrifiant de la complexité calculatoire et mémorielle pour obtenir une meilleure latence. Il faut souligner qu’il serait possible d’effectuer un gain en terme de complexité par l’implémentation d’algorithmes de tri plus performants que des tris standards.

## Références

- [1] C. Douillard *et al.*, “Iterative correction of intersymbol interference : Turbo-equalization”. *Eur. Trans. Telecomm.*, v. 6 n. 5, p. 507-511, Sep. 1995.
- [2] L. Bahl *et al.* “Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate”, *IEEE Trans. on Inf. Theory*, v. 20, n. 2, p. 284-287, Mar. 1974.
- [3] C. Laot, A. Glavieux and J. Labat, “Turbo-equalization : adaptive equalization and channel decoding jointly optimized”, *IEEE J. on Sel. Areas in Commun.*, v. 19, n. 9, p. 1744-1752, Sep. 2001.
- [4] M. Tüchler *et al.*, “Turbo Equalization : An Overview”, *IEEE Trans. Inf. Theo.*, v. 57, n. 2, p. 920-952, Feb. 2011.
- [5] S. Şahin, A. M. Cipriano *et al.*, “A Framework for Iterative Frequency Domain EP-Based Receiver Design”, *IEEE Trans. on Commun.*, v. 66, n. 12, p 6478-6493, Dec. 2018.
- [6] V. Franz and J. B. Anderson, “Concatenated decoding with a reduced-search BCJR algorithm”, *IEEE J. on Sel. Areas in Commun.*, v. 16, n. 2, p. 186-195, Feb. 1998.
- [7] G. Colavolpe, G. Ferrari and R. Raheli, “Reduced-state BCJR-type algorithms”, *IEEE J. on Sel. Areas in Commun.*, v. 19, n. 5, p. 848-859, May 2001.
- [8] M. Sikora and D. J. Costello, “A new SISO algorithm with application to turbo equalization”, *Proc. of IEEE ISIT 2005*, p. 2031-2035, Sep. 2005.
- [9] C. M. Vithanage *et al.*, “Approximate inference in hidden Markov models using iterative active state selection”, *IEEE Sig. Proc. Letters*, v. 13, n. 2, p.65-68, Feb. 2006.