



HAL
open science

Distribution non gaussienne des rendements : quel impact sur les options par défaut des plans d'épargne retraite ?

Stéphane Hamayon, Florence Legros, Pradat Yannick

► To cite this version:

Stéphane Hamayon, Florence Legros, Pradat Yannick. Distribution non gaussienne des rendements : quel impact sur les options par défaut des plans d'épargne retraite ?. 2016. hal-03003588

HAL Id: hal-03003588

<https://hal.science/hal-03003588v1>

Preprint submitted on 13 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Distribution non gaussienne des rendements : quel impact sur les options par défaut des plans d'épargne retraite ?

Stéphane Hamayon, Florence Legros, Yannick Pradat

CEREFIGE

Cahier de Recherche n°2016-02

CEREFIGE

Université de Lorraine

13 rue Maréchal Ney

54000 Nancy

France

Téléphone : 03.72.74.16.35

Fax : 03 54 50 35 81

Cerefige@univ-lorraine.fr

www.univ-lorraine.fr/CEREFIGE



1.	Les instruments de l'épargne à long terme.....	3
1.1.	Convergence ou efficience : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert.....	4
1.2.	Champ de l'étude et nature des données.....	5
1.2.1.	Comment traiter les périodes de guerre ?	6
1.3.	Risque réel et durée de détention	8
1.4.	Une évaluation orthodoxe de l'efficience des marchés	15
1.5.	Production et cours boursiers : une bonne synchronisation des cycles.....	16
1.6.	Un résumé des enseignements historiques	17
2.	Allocation de cycle de vie paramétrique vs semi paramétrique	19
2.1.	Eléments de méthodologie.....	19
2.1.1.	Programme d'optimisation de la VaR paramétrique.....	23
2.1.2.	Programme d'optimisation de la VaR de Cornish-Fisher	24
2.1.3.	Prise en compte la « mean reversion » dans la dynamique du prix des actions.....	25
2.2.	Résultats : l'hypothèse d'une VaR de 3%.....	26
2.2.1.	La conjecture d'une VaR paramétrique de 3%	26
2.2.2.	La conjecture d'une CF VaR semi-paramétrique de 3%.....	29
2.3.	Le classement des stratégies.....	30
2.4.	L'exemple d'une Value-at-Risk nulle.....	32
2.5.	En guise de conclusion	35
3.	Annexes	36
3.1.	Annexe 1 : Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs.....	36
3.2.	Annexe 2 : Synthèse des résultats pour des durées de placement < à 40 ans.....	37
3.3.	Annexes 3 : Stratégies alternatives d'assurance de portefeuille	39
3.3.1.	STOP-LOSS	39
3.3.2.	CPPI.....	40
3.4.	Annexe 4 : Test de dominance stochastique de Kolmogorov-Smirnov pour deux échantillons	42
3.5.	Annexe 5 : « Great Recession » et « Great Depression » aux Etats-Unis	44
4.	Bibliographie	46

Introduction¹

Pour compenser le rationnement des transferts entre générations, les ménages vont devoir assurer la gestion de leur épargne financière. Cette appréciation doit être tempérée sur un point essentiel : 1 français sur 2 déclare ne pas être en mesure d'épargner (FFSA/IPSOS, mars 2011). En période de ressources contraintes, ces statistiques plaident pour un changement de modèle de transferts qui consisterait à passer d'un Etat providence à un Etat providence "sélectif" où les prestations seraient ciblées sur les besoins du milieu et du bas de la classe moyenne.

Quoi qu'il en soit, la nécessaire constitution de compléments de retraite pose la question de la capacité des ménages concernés à gérer l'épargne longue. A cet égard, quelques expérimentations soulignent la faiblesse du niveau d'éducation financière des ménages (*financial literacy*) : l'enquête AMF/Crédoc 2011 sur la culture financière des français indique qu'un individu sur deux, ne maîtrise pas calcul d'un pourcentage. Le constat, loin d'être local, a poussé les fonds de pension nord-américains à cotisations définies (DC plans) à proposer systématiquement des allocations par défaut (*default options*) qui sont souscrites par 80% des affiliés.

Ces méthodes de "nudging", théorisée par Thaler R. et Sunstein C. (2008), qui consistent à inspirer la bonne décision aux ménages sans apparemment les forcer alors qu'ils arbitrent dans un univers de placements largement contraint, font l'objet de nombreuses controverses. A l'opposé ou presque, certaines études (Arrondel et Masson, 2011) montrent une grande rationalité et une totale stabilité des préférences qui montreraient que les ménages font preuve d'une «sagesse pratique» (Arrondel et Masson, *op. cité*) qui pousse à conclure que la construction pure et simple d'un « épargnant nouveau » ne pourrait relever que de la manipulation intellectuelle inefficace et dangereuse pour les ménages.

Il n'en demeure pas moins que la question des performances à long terme des options par défaut des plans d'épargne retraite reste posée. Loin de nous aventurer sur le terrain de la critique du "paternalisme libertaire", c'est sur le point de la performance que se focalisent les développements qui suivent.

Dans une première partie, basée sur une analyse des séries longues de rendements des actifs en France et aux Etats-Unis, nous analysons les propriétés statistiques des grandes classes d'actifs face au risque et au temps.

Dans une seconde partie, munis de ces caractéristiques, nous procédons au « baktesting » des stratégies d'allocation par défaut, puis nous les hiérarchisons via un critère de « taux de remplacement » du revenu des ménages. La comparaison des distributions de taux de remplacement confirme sans équivoque la supériorité des allocations de cycle de vie investies massivement en actif risqués.

1. Les instruments de l'épargne à long terme

L'étude des propriétés « rendement - risque » des principales classes d'actifs est un préalable utile à l'analyse des stratégies d'allocation d'actifs. Cette étape permet de vérifier la validité des attributs accolés, souvent sans trop de discernement, aux classes d'actifs et reposant sur des justifications pratiques ou théoriques plus qu'incertaines. A cet égard on soulignera que la crise bancaire et financière de l'automne 2008 (dénommée « Great Recession » par les anglo-saxons en référence à la « Great Depression » de 1929) symbolisée par la chute de Lehman Brothers, a alimenté tous les phantasmes et contribué à modifier durablement les anticipations des analystes au point de les conduire – souvent – à remettre en cause la hiérarchie des rendements des actifs financiers allant même jusqu'à nier le concept de « prime de risque ». L'analyse rétrospective, malgré ses limites évidentes, permet de relativiser ces conclusions pour le moins radicales².

¹ Une version résumée de cette contribution est publiée par Stéphane Hamayon, Florence Legros, Yannick Pradat, (2016), Non Gaussian returns and pension funds asset allocation », *Review of Accounting and Finance*, Vol. 15 Iss 4 pp. 416 – 444.

² Voir, annexe 5, la note sur la comparaison des crises boursières aux Etats-Unis.

L'exercice permet, en effet, d'éclairer des questions simples et néanmoins fondamentales : les rendements attendus des différents actifs sont-ils stables au cours du temps, quelle est la part de l'illusion monétaire dans la perception de la performance, les chocs sur les marchés financiers sont-ils permanents ou transitoires, comment évolue le risque en fonction d'un horizon de placement ?

1.1. Convergence ou efficience : le débat sur la dynamique des cours reste ouvert

Depuis l'introduction par Fama (1965) de l'hypothèse d'efficience des marchés financiers (EMH), concept central de la théorie financière moderne, il y a presque 50 ans; l'EMH a été testée dans de nombreuses études empiriques. Après les travaux fondateurs de Poterba et Summers (1988) qui détectent un processus de retour vers la moyenne (mean-reverting process) sur les horizons longs, un débat rémanent persiste dans la littérature académique pour trancher sur la nature du processus qui régit le prix des actifs risqués. Sans prétendre être exhaustif, on peut mentionner quelques exemples afin d'illustrer l'âpreté du débat.

Du côté des supporters de l'imprédictibilité des marchés, de nombreux auteurs, comme Fama et al. (1969), confirment que les analyses empiriques prouvent que les marchés sont efficaces. Hawawini et Michels (1984) mettent en évidence une forme d'efficience faible (hypothèse qui assume que les prix reflètent toute l'information contenue dans la série historique des prix) sur les marchés financiers Européens. Chan et al. (1997) confirment que les marchés boursiers mondiaux vérifient la propriété d'efficience faible. Malkiel (2003), conclut pour sa part que les marchés sont toutefois moins efficaces que ne le rapportent les recherches académiques tandis que Jorion (2003) réfutent le concept de diversification temporelle et plaide pour une diversification géographique. En dépit de ces hésitations, plus récemment, Borges (2008) établit que les marchés Européens suivent une marche aléatoire, hypothèse confirmée par Sewell (2012) dont les travaux légitiment l'EMH.

Dans le camp des tenants du retour vers la moyenne, on retrouve curieusement Fama et French (1988) qui documentent l'existence de mean-reversion sur les marchés boursiers pour les horizons supérieurs à l'année. Les tests empiriques de Kim et al. (1991) mettent en évidence l'existence de composants transitoires dans des cours des actions, ils imputent toutefois les forces de rappel dans les chroniques boursières à la dévastation consécutive à la seconde guerre mondiale. Balvers et al (2000) rejettent sans ambiguïté l'EMH, tandis que Spierdijk et al. (2012) décèlent des variations de la vitesse de retour vers la moyenne au cours du temps.

L'importance de l'EMH est due principalement à ses implications pratiques. En effet, comme le montrent Campbell et al (2003), la présence ou l'absence de retour vers la moyenne dans le cours des actifs risqués a des conséquences majeures sur la structure des allocations stratégiques au cours du temps. Parce qu'elle induit par une autocorrélation négative des rendements, la variance des actions est moins que proportionnelle à l'horizon d'investissement, ce qui renforce l'attractivité des actions pour les investissements de long terme.

Les causes du sempiternel débat sur la dynamique des cours sont souvent attribuées à la taille réduite des échantillons combinée à la faible puissance des tests statistiques utilisés pour rejeter l'EMH. Parmi les techniques disponibles pour tester l'efficience des marchés, le test du « ratio de variance » (VR) de Lo et MacKinlay (1988) – plus puissants que les tests de racine unitaire (Dickey-Fuller, Phillips-Perron...) – est de loin le plus populaire.

L'intuition derrière le test du ratio de variance est la suivante : si le cours des actifs suit une marche aléatoire, alors sa variance croît linéairement avec l'intervalle des observations. Il en découle que la variance des rendements $r(t)$ sur une période q doit être approximativement égale à q fois la variance sur une période.

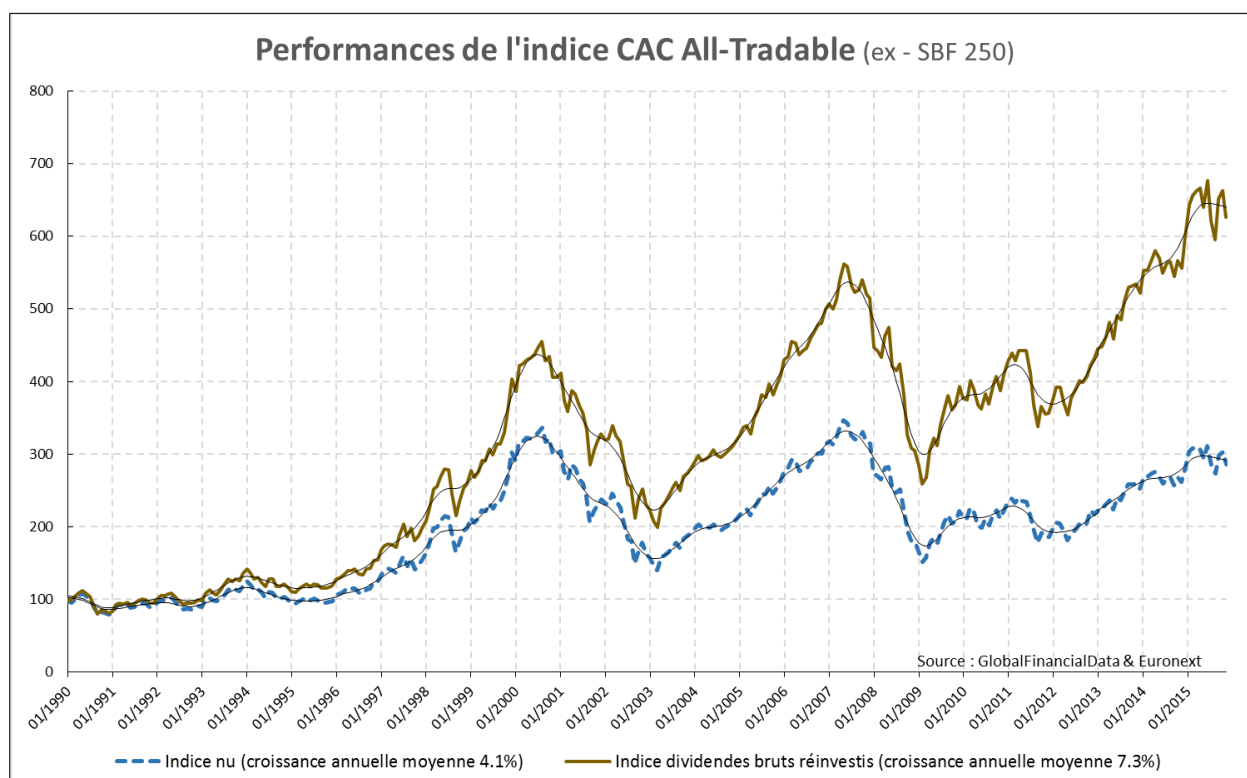
Depuis les travaux fondateurs de Lo-MacKinlay, de nombreuses extensions du test ont été proposées. Wright (2000) documente une alternative non paramétrique du test VR en s'inspirant des tests des signes et rangs de Wilcoxon. Plus récemment, Belaire et al. (2004) propose de substituer le test VR par le test de Wright dans la procédure de Chow et Denning (1993) pour créer un test non paramétrique du ratio de variance multiple. Toutefois, en dépit de ces améliorations substantielles, la puissance des tests de ratio de variance reste faible et la

statistique qui en résulte hautement incertaine. Aux USA la récente succession de « bulles » sur les marchés actions (Internet, subprime crisis, debt crisis, quantitative easing...) a fait rejaillir la polémique. Ainsi, les tenants du « retour vers la moyenne » comme Wilkie (2001) et surtout Siegel (2014) s'opposent toujours aussi violemment, notamment par voie de presse, aux adeptes de la marche aléatoire dont Zvi Bodie (1995) est l'un des chefs de file. Compte tenu des limites identifiées du test de ratio de variance, il paraît illusoire d'en faire l'outil central d'analyse de la dynamique des prix des actifs risqués. Partant de ce constat nous avons adopté une méthodologie résolument empirique reposant sur l'analyse des chroniques de prix des actifs sur très longue période. L'analyse s'appuie principalement sur une multiplicité de tests – qui pris isolément, ne sont pas nécessairement déterminants – et une technique probatoire reposant davantage sur un faisceau d'indices concordants que sur le verdict d'un critère unique.

1.2. Champ de l'étude et nature des données

Les enseignements tirés de l'examen des statistiques descriptives dépendent étroitement de la nature et de la profondeur des indices de performance utilisés. Précisons que nous avons utilisé les « indices bruts » (ou « *total return* » c'est-à-dire calculés dividendes ou intérêts réinvestis) des placements monétaires, obligataires et actions rétopolés sur la période 1895-2011 par Global Financial Data³. Cette précision est indispensable. En effet, la presse financière, mais également nombre d'économistes fondent leurs analyses sur les propriétés des « indices nus » (hors dividendes), ce qui détermine des résultats pour le moins contrastés relativement aux conclusions tirés des indices bruts. Ainsi, comme l'atteste le graphique ci-dessous, le différentiel de croissance entre l'indice nu et l'indice brut sur la période 1990-2015 est en moyenne de 3% l'an. On le devine, négliger les dividendes conduit à des conclusions radicalement différentes sur les performances d'un placement en actifs risqués.

Graphique 1 – Performances du CAC All-Tradable



³Les calculs ont été faits à partir de chroniques de « *total return* » calculées par Global Financial Data (www.globalfinancialdata.com). Pour des placements français les indices retenus sont : monétaires, obligataires (maturité 10 ans) et actions (SGF-Insee, SBF250 puis CAC All-Tradable). On utilise l'indice des prix à la consommation INSEE comme déflateur. Pour les Etats-Unis les indices sont les suivants: monétaires (US Treasury Bills Total Return Index), obligataires (US Total Return Long-term Government Bond Index) et actions (S&P 500 Composite Total Return Index).

L'étude se focalise sur deux pays aux économies différentes : la France et les USA. D'une part, il est instructif de juger du degré de convergence des performances d'une même classe d'actifs dans deux systèmes de production distincts et, d'autre part, entre 1914 et 1950, le placement en actions françaises s'est fortement dévalorisé par rapport au placement en actions américaines. Pendant cette période, durant laquelle les effets des deux guerres mondiales ont été sans commune mesure en France et aux Etats-Unis, les performances des actifs financiers nord-américains peuvent servir de référence pour évaluer l'incidence des périodes de guerre sur la dynamique du cours des actifs risqués.

1.2.1. Comment traiter les périodes de guerre ?

Lorsque l'on calcule la performance nominale des actifs financiers sur les 115 années subdivisées en trois périodes afin d'isoler les épisodes de guerres mondiales, on remarque que les actifs de même nature exprimés en monnaie locale procurent des rendements nominaux relativement similaires sur la période sous revue (tableau 1a).

Tableau 1a - Performance nominale annuelle moyenne des classes d'actifs (dividendes réinvestis)

	1895-1914		1914-1950		1950-2011		1995-2011		1895-2011	
	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France
Monétaires	4.3%	2.5%	2.2%	3.1%	4.6%	5.9%	3.3%	3.1%	3.8%	4.5%
Obligations	3.1%	2.2%	3.5%	3.4%	6.0%	7.3%	6.9%	6.5%	4.8%	5.3%
Actions	7.7%	6.7%	7.1%	10.8%	10.6%	10.5%	7.9%	6.8%	9.1%	10.0%
Prix	1.9%	0.5%	2.5%	13.5%	3.6%	4.7%	2.5%	1.6%	3.0%	6.8%

Néanmoins, l'examen de l'indice des prix invalide le constat ; la forte inflation observée abaisse la performance réelle des actifs français (tableau 1b).

Tableau 1b - Performance réelle annuelle moyenne des classes d'actifs (dividendes réinvestis)

	1895-1914		1914-1950		1950-2011		1995-2011		1895-2011		France 1885-2011 hors guerres*
	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	Etats-Unis	France	
Monétaires	2.4%	2.1%	-0.3%	-10.4%	1.0%	1.2%	0.8%	1.5%	0.8%	-2.2%	0.9%
Obligations	1.2%	1.8%	1.1%	-10.1%	2.3%	2.6%	4.5%	4.9%	1.8%	-1.5%	2.1%
Actions	5.8%	6.3%	4.6%	-2.8%	7.0%	5.8%	5.4%	5.2%	6.1%	3.2%	5.3%

*Périodes de guerre exclues de l'analyse [1915-1920] et [1940-1948]

Considérant que l'avènement d'une guerre mondiale relève du concept d'incertitude radicale tel qu'établie par Knight (1921), nous avons supprimé (à partir d'un critère d'écart type) les performances des actifs financiers français enregistrées sur les périodes [1915-1920] et [1940-1948]. Cette décision, radicale par rapport au travail de rétopolation conduit par les historiens de l'économie (Arbulu, 1998, Le Bris, 2010, ou Friggitt, 2010), permet de rétablir un parallélisme de long terme entre les actifs français et nord-américains : en dehors d'une prime de risque (*excess return*) supérieure aux Etats-Unis, on note que les rendements réels des autres actifs sont proches.

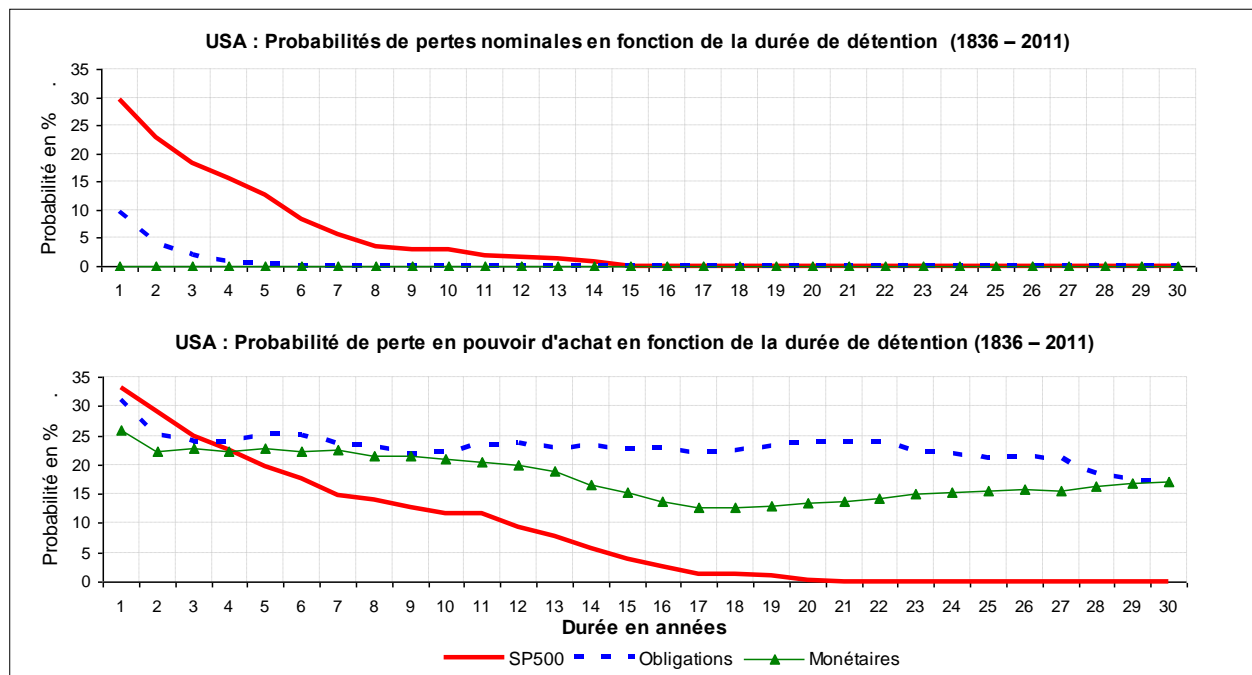
L'analyse rétrospective souligne les biais inhérents à l'analyse des performances nominales des actifs. La confusion entre les variations du niveau général des prix et du prix relatifs des actifs conduit en outre à surévaluer les performances des actifs sans risque et à fausser les corrélations et la hiérarchie entre les classes.

Dans la mesure où l'économiste retient traditionnellement « l'effet d'encaisses réelles » comme déterminant de l'épargne des ménages, il est naturel de conduire l'étude sur la base des performances des différentes classes d'actifs déflatées. Cette décision, ceci étant, à une conséquence remarquable : dès lors que l'objectif de l'investisseur n'est plus le gain nominal,

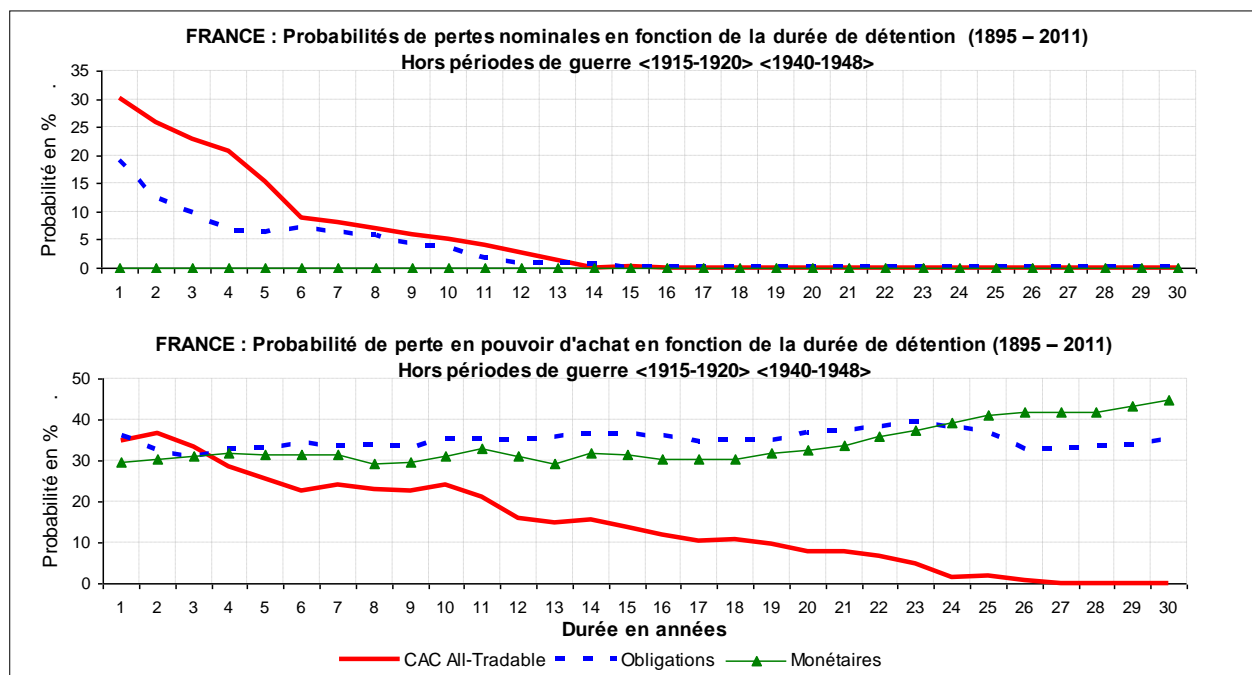
mais le gain de pouvoir d'achat, la notion d'actif sans risque disparaît puisque la probabilité de perte n'est nulle pour aucun des actifs sous revue (graphiques 2a et 2b).

Sur les horizons longs, seuls les placements à revenus variables⁴ ont surperformé l'évolution des prix. Concernant les placements à revenus fixes, on constate que la probabilité de perte en pouvoir d'achat ne diminue pas avec le temps. On retrouve des résultats en phases avec les calculs de Laulanié (2003).

Graphique 2a – profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs – Etats-Unis



Graphique 2b – profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs – France



⁴ Ce constat ne se restreint pas à la France et aux Etats-Unis, comme le montre les probabilités de perte calculées en annexe 1 pour le Royaume-Uni et le Japon.

1.3. Risque réel et durée de détention

Débarassé du phénomène d'illusion monétaire, il est utile d'étudier plus finement la nature des relations entre espérance de gain, risque et temps et notamment d'analyser les caractéristiques de la dispersion des rendements autour de leur espérance en fonction de l'horizon.

- **Ce que montrent les statistiques descriptives**

S'il est vrai que les actions sont le seul actif permettant le maintien du pouvoir d'achat des placements sur des horizons longs (proche de 30 ans en France entre 20 ans et 30 ans aux Etats-Unis) le risque de perte à court terme est beaucoup plus important que pour les valeurs à revenus fixes. Les statistiques (tableaux 2a et 2b) montrent également, sous réserve que la distribution des rendements soit raisonnablement gaussienne à long terme, que la vitesse de concentration des rendements autour de la valeur médiane est variable selon les supports d'investissement. La remarque est particulièrement vraie pour les actions qui n'offrent des perspectives de gain et de perte élevées que sur les horizons courts. A long terme, du fait de la réduction de la volatilité, les rendements spéculatifs sont inaccessibles.

Tableau 2a- Evolution des rendements réels des actifs - France

FRANCE : Evolutions des rendements réels des actions (CAC All-Tradable depuis 1895)									
	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans	
1er centile	-38.8%	-26.4%	-18.3%	-14.3%	-12.3%	-5.9%	-2.9%	2.4%	
médiane	5.4%	5.4%	5.3%	5.4%	5.4%	5.5%	5.5%	5.2%	
99e centile	60.9%	43.7%	35.2%	33.7%	28.9%	18.4%	13.3%	10.5%	

FRANCE : Evolutions des rendements réels des Obligations (maturité 10 ans)									
	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans	
1er centile	-21.5%	-17.8%	-14.7%	-12.2%	-10.0%	-6.3%	-2.9%	-2.8%	
médiane	2.1%	2.1%	2.1%	2.0%	2.0%	2.0%	1.8%	1.5%	
99e centile	36.4%	25.4%	20.5%	18.4%	16.7%	12.2%	9.9%	7.5%	

FRANCE : Evolutions des rendements réels des monétaires									
	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans	
1er centile	-19.4%	-16.4%	-13.0%	-11.8%	-10.6%	-6.9%	-3.9%	-2.4%	
médiane	0.9%	1.0%	1.0%	1.0%	1.0%	0.9%	0.8%	0.5%	
99e centile	18.2%	14.3%	10.9%	9.9%	9.1%	6.2%	4.7%	3.4%	

Tableau 2a- Evolution des rendements réels des actifs – Etats-Unis

USA : Evolutions des rendements réels des actions (S&P depuis 1895)									
	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans	
1er centile	-38.6%	-28.4%	-22.8%	-14.1%	-10.5%	-4.1%	0.1%	3.0%	
médiane	6.2%	6.3%	6.2%	6.2%	6.3%	6.3%	6.5%	6.6%	
99e centile	55.4%	43.0%	32.3%	31.0%	28.5%	18.3%	13.0%	10.3%	

USA : Evolutions des rendements réels des Obligations (Long-term Government Bond)									
	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans	
1er centile	-17.2%	-15.3%	-13.8%	-12.1%	-10.3%	-5.0%	-2.4%	-1.4%	
médiane	1.8%	1.8%	1.7%	1.7%	1.7%	1.7%	1.6%	1.5%	
99e centile	34.7%	23.4%	17.2%	15.5%	16.0%	10.3%	8.0%	6.4%	

USA : Evolutions des rendements réels des monétaires									
	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	10 ans	20 ans	30 ans	
1er centile	-13.2%	-11.4%	-10.1%	-9.1%	-7.5%	-5.0%	-2.9%	-1.6%	
médiane	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.7%	0.7%	
99e centile	13.4%	12.6%	10.6%	8.9%	7.8%	5.6%	3.7%	2.3%	

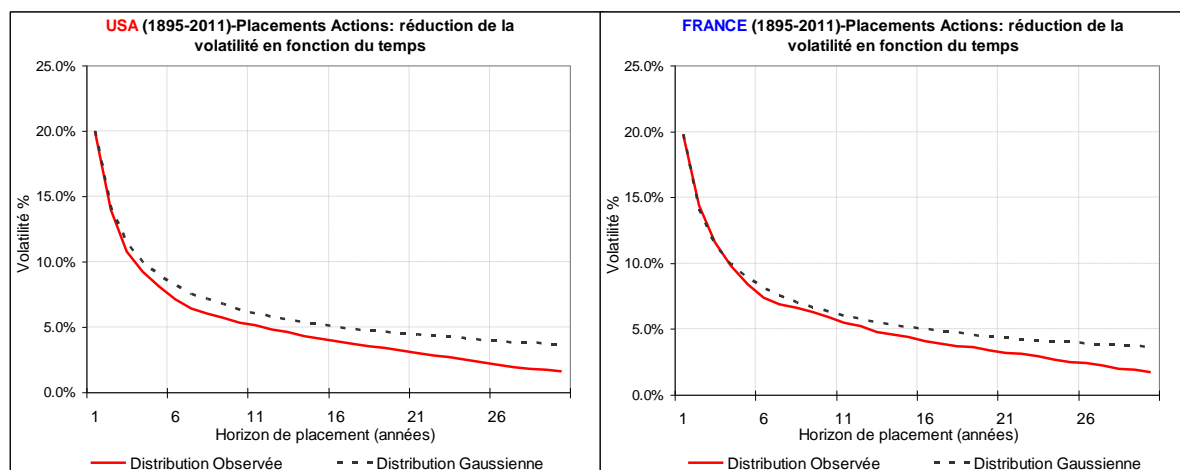
Au-delà d'un léger surcroît de rendement, on observe ainsi le même phénomène de réduction de la variance en France et aux Etats-Unis. Pour juger si cette propriété représente un intérêt pour les investisseurs, il est nécessaire de sortir du champ de la comparaison entre actifs pour faire référence aux propriétés d'une loi paramétrique.

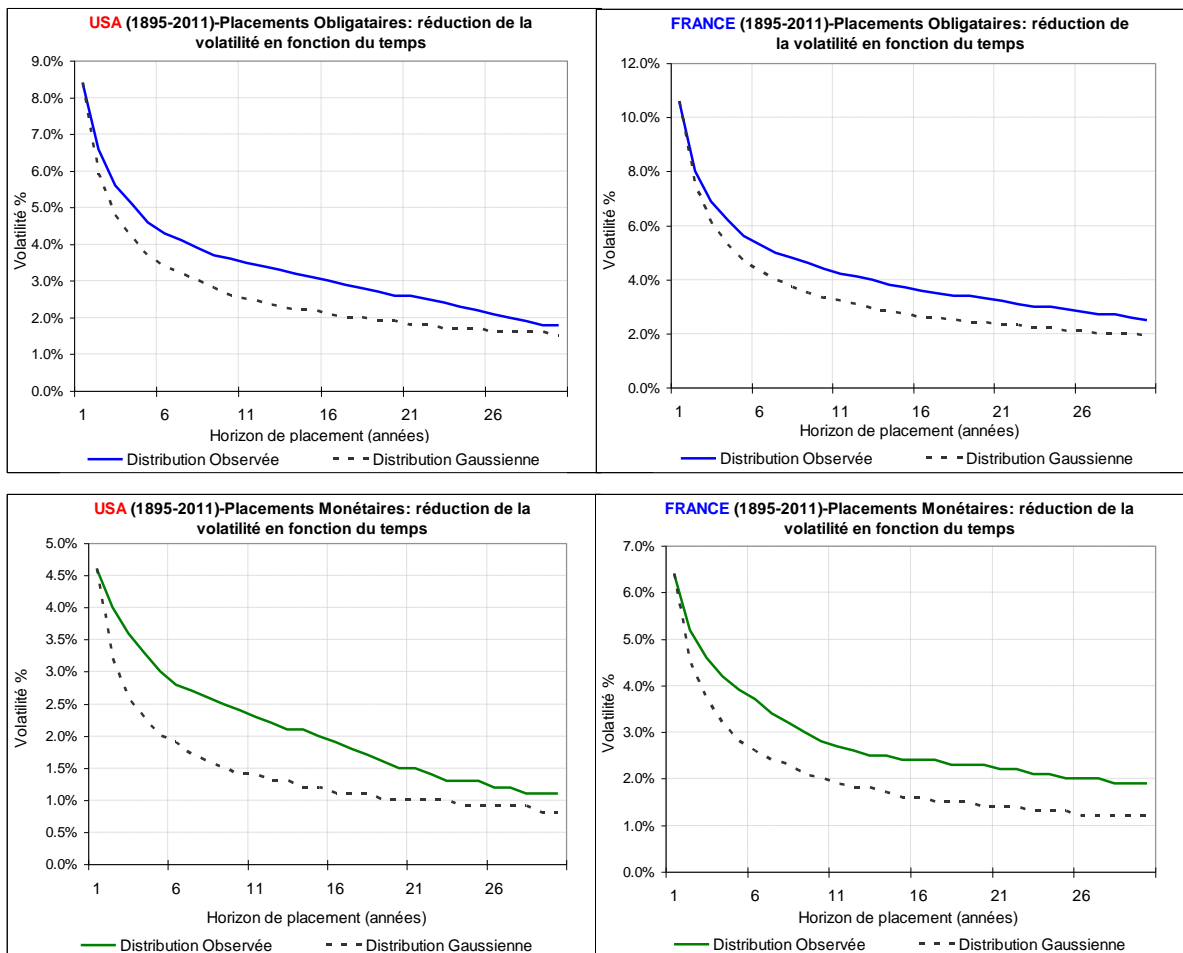
Si la réduction de la variance des rendements des placements actions ne domine pas un bruit blanc gaussien les conclusions tirées des statistiques descriptives devront être relativisées. En effet, une fois intégré, ce processus suit une marche aléatoire, c'est-à-dire de processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents. Soient des propriétés qui correspondent à la définition de l'efficience des marchés financiers donnée par Fama (1965). C'est, en effet, dans l'article fondateur « *The Behavior of Stock-Market Prices* » que Fama postule qu'« *un marché financier est dit efficient si, et seulement si, l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif* ». Il découle de cette théorie que si les marchés boursiers sont efficaces, ils sont imprédictibles. Dans une dynamique sans mémoire, la probabilité de perte n'est pas fonction de la durée de placement et un investisseur risquophobe fuira ce type de placement.

- **Une dilution du risque variable selon les actifs**

Si l'on retient la volatilité comme *proxy* du risque, on peut en comparer les valeurs historiques et théoriques au cours du temps. Un survol des graphiques (graphiques 3a à 3f) croisant volatilité et horizon pour les actifs étudiés, permet d'établir plusieurs constats. Une fois de plus, le comportement des actions se distingue de celui des placements à revenus fixes. C'est le seul actif dont la réduction de la volatilité domine celle d'une loi normale de même espérance. Concernant les actions, l'évolution et la valeur des volatilités historiques présentent de fortes similitudes des deux côtés de l'Atlantique. La volatilité des placements monétaires et obligataires est en revanche plus élevée en France en raison de périodes d'inflation plus marquées qu'aux Etats-Unis au cours de la période sous revue.

Graphiques 3a à 3f – volatilité des actifs et horizons des placements – France/Etats-Unis





Le surcroît de volatilité des actifs à revenus fixe relativement à une loi normale peut être imputé à une forte présomption de non stationnarité. Dans un processus stationnaire au sens faible, la série oscille autour de sa moyenne avec une variance constante. Par opposition, l'origine de la non stationnarité des actifs obligataires et monétaires peut provenir d'une dépendance de leur espérance et/ou de leur variance par rapport au temps.

Le fait que les actions soient qualifiées de stationnaires par les tests (tableau 3) démontre l'invariance de l'espérance de rendement par translation dans le temps. Cette propriété qui distingue les actions des autres classes d'actifs, n'apporte toutefois, à elle seule, aucune certitude à l'épargnant concernant le montant du capital constitué au terme de son investissement. Rappelons que les tests de racine unitaire sont effectués sur la croissance des indices boursiers. Le verdict des tests nous apprend que les cours boursiers sont stationnaires après différentiation (*Difference Stationary (DS)*). Or, une série DS ne revient pas systématiquement autour de sa tendance déterministe en niveau après un choc, car le choc affecte de manière permanente la composante stochastique de la série⁵. En d'autres termes, le rendement des actions est régi par un processus de retour vers la moyenne, mais le prix des actions peut être imprévisible puisqu'une fois intégrée, la série DS suivra une marche aléatoire avec dérive. Or, pour les épargnants, la détention d'actifs risqués à long terme ne semble avoir d'intérêt que si les prix, et non les rendements, sont caractérisés par un processus de retour à la moyenne (*Trend Stationary (TS) process*).

⁵ C'est le cas lorsque le rendement des actions est stationnaire sous la forme : $(1-L)d X_t = b + \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t \rightarrow N(0, \sigma^2)$. Avec L l'opérateur retard, d l'ordre d'intégration et b la dérive. En niveau, l'expression s'écrit : $X_t = b + X_{t-1} + \varepsilon_t = b + (b + X_{t-2} + \varepsilon_t) + \varepsilon_t = \dots = X_0 + b_t + \sum \varepsilon_i$. La composante stochastique correspond au cumul des innovations ε_i . Autrement dit le processus garde une mémoire permanente des innovations passées.

Tableau 3 – Tests de stationnarité

Tests de Stationnarité : rendement réel des actifs (1895 – 2011)						
	Dickey Fuller Augmenté			KPSS Test		
Log>Returns USA	stat.	cValue	verdict	stat.	cValue	verdict
Action	-41.5286	-1.9416	Stationnaire	0.0252	0.1460	Stationnaire
Obligation	-39.7891	-1.9416	Stationnaire	0.3734	0.1460	Non Stationnaire
Monétaire	-38.1088	-1.9416	Stationnaire	0.9038	0.1460	Non Stationnaire

	Dickey Fuller Augmenté			KPSS Test		
Log>Returns France	stat.	cValue	verdict	stat.	cValue	verdict
Action	-30.2137	-1.9416	Stationnaire	0.0507	0.1460	Stationnaire
Obligation	-31.6050	-1.9416	Stationnaire	0.1884	0.1460	Non Stationnaire
Monétaire	-21.5008	-1.9416	Stationnaire	0.5440	0.1460	Non Stationnaire

Pour préciser la nature de la relation entre réduction du risque et durée de placement, il reste à se pencher sur la distribution des rendements au cours du temps, en effet, les déductions tirées des indicateurs de volatilité peuvent être trompeuses si les variables ne sont pas correctement décrites par leur deux premiers moments (espérance, variance).

Afin de s'en assurer, nous avons comparé les distributions théoriques et historiques des rendements à des horizons contrastés. L'exercice n'est conduit que pour les actions qui sont le seul actif présentant des propriétés de réduction de la variance susceptibles de justifier les stratégies de diversification temporelle qui repose sur l'idée que le risque supporté par l'investisseur est d'autant plus faible que l'horizon d'investissement est long.

La fonction de répartition des rendements historiques est d'abord comparée à celle d'une loi gaussienne d'espérance variance identique sur l'ensemble des placements actions de 12 mois glissants réalisables sur la période 1895-2011. Les distributions cumulatives s'avèrent légèrement plus risquées que des lois gaussiennes de même espérance-variance. En effet (tableau 4), on note des kurtosis élevés qui sont le propre des distributions leptokurtiques (queues de distribution épaisses) et des skewness négatifs qui traduisent des profils de risque asymétriques du côté des pertes. L'exercice, reproduit sur la même fenêtre pour les placements à 360 mois (30 ans – tableau 4), conforte les intuitions déduites de l'analyse de l'évolution des volatilités. On constate, en premier lieu, que la fonction cumulative des probabilités historiques est raisonnablement normale. La tendance leptokurtique a disparu et les skewness traduisent désormais des profils de risque asymétriques du côté des gains.

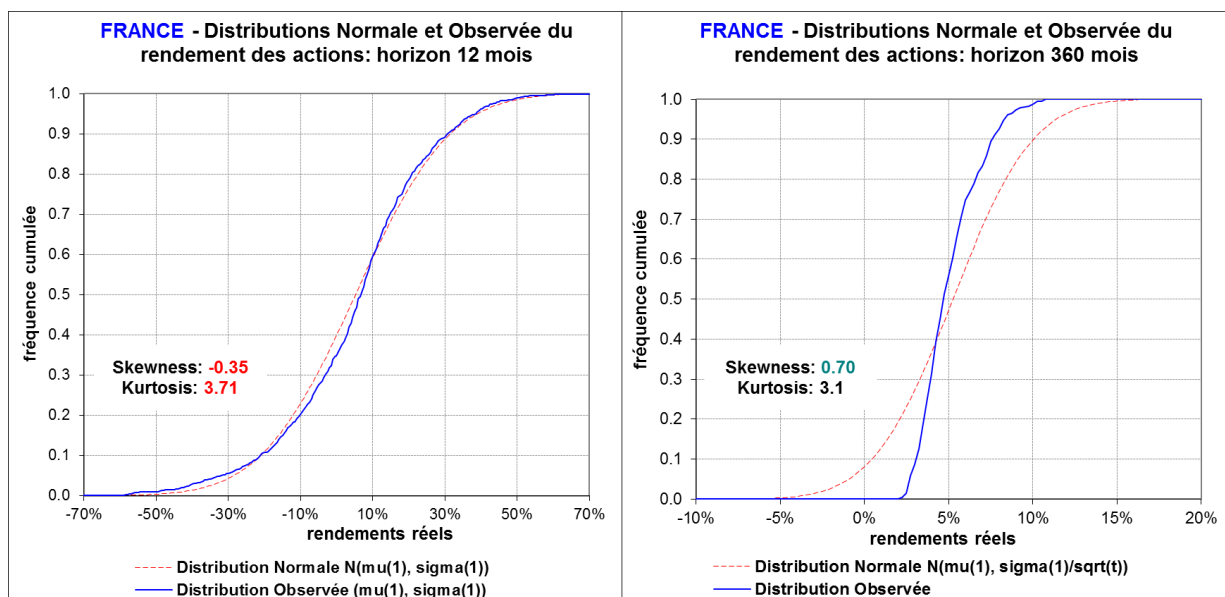
Tableau 4 - Distribution du rendement des actions sur la période 1895-2011

	Durée de placement 12 mois		Durée de placement 360 mois	
	USA S&P 500	FRANCE CAC All-Tradable	USA S&P 500	FRANCE CAC All-Tradable
Espérance	6.20%	5.40%	6.60%	5.20%
Ecart type	20.70%	20.53%	1.61%	1.75%
Kurtosis	4.85	3.71	2.55	3.12
Skewness	-0.53	-0.35	0.12	0.70

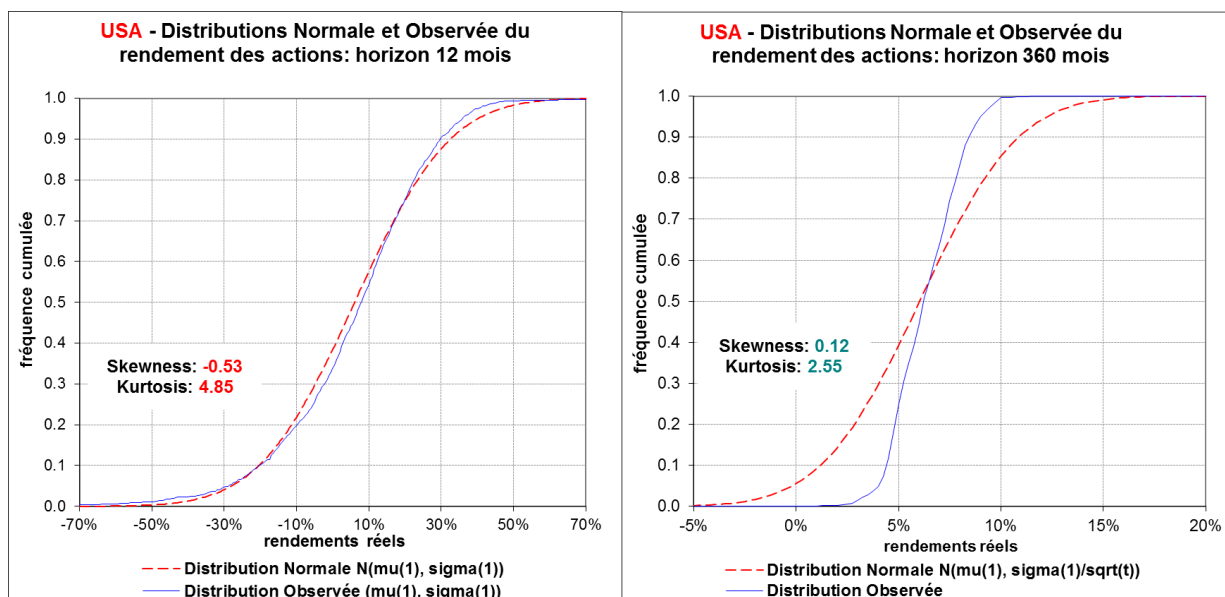
Mais l'enseignement majeur vient de la comparaison avec la distribution théorique de paramètres $\mu_T, \sigma_T/\sqrt{T}$ (graphiques 4 a, b, c, d). Sur les actions américaines comme sur les actions françaises, si on compare les fonctions de répartition des rendements historique (F) et théorique (G), on voit

clairement que la répartition de F est moins dispersée que celle de G . G a la même distribution que $F + \varepsilon$ avec $E(\varepsilon/F) = 0$. Comme les distributions ont les mêmes espérances et que $V(F) < V(G)$, un individu risquophobe préférera F à G .

Graphiques 4 a et b – fonctions de répartition – actions françaises (1895-2011)



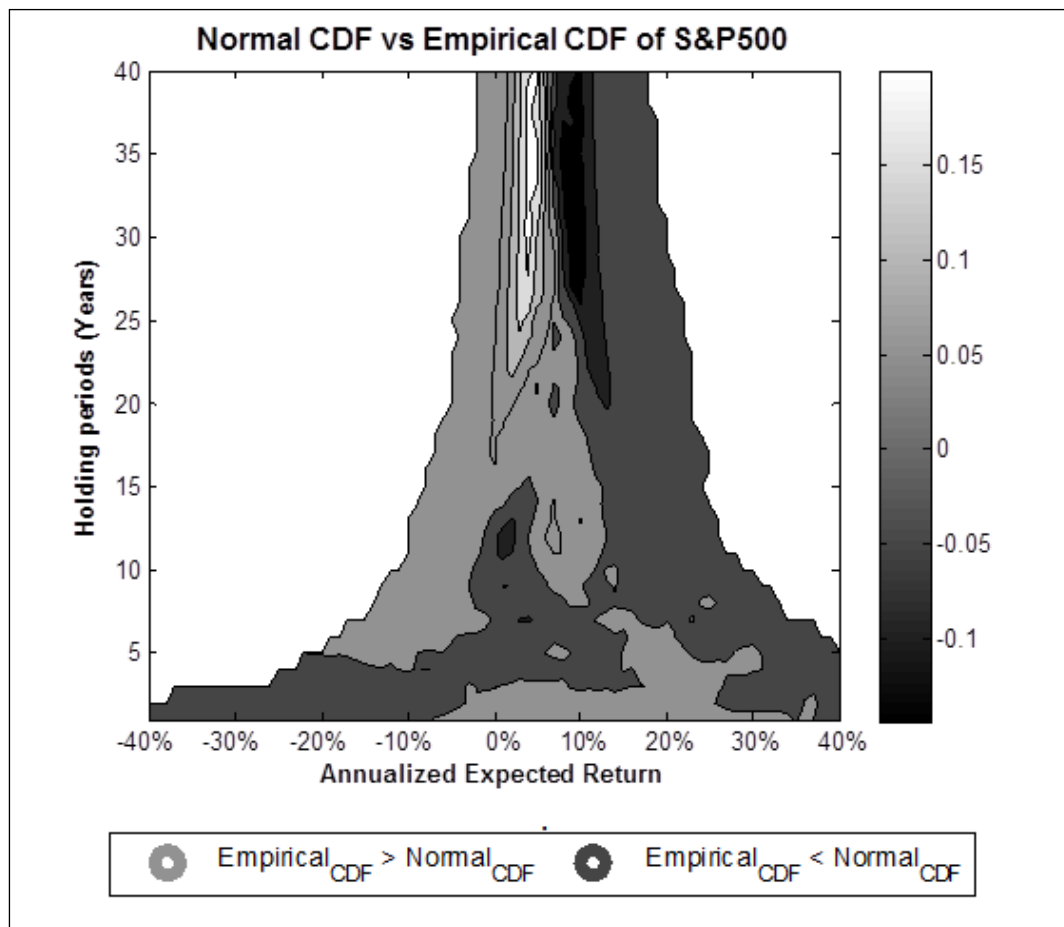
Graphiques 4 c et d – fonctions de répartition – actions américaines (1895-2011)



Sur les horizons longs, la vitesse de concentration des rendements autour de leur espérance est incontestablement plus rapide que dans une loi normale. Pour synthétiser la dynamique des rendements des actions au cours de chaque période, il est pratique d'utiliser un graphique en surface vu du dessus, similaires aux cartes topographiques 2D, où l'axe horizontal représente l'espérance de rendement, l'axe vertical la durée de placement tandis que le troisième axe (vu du dessus) symbolise l'écart entre les valeurs de la fonction de répartition normale (G) et de celle des rendements du S&P 500 (F). Le graphique 4e montre clairement que sur les horizons courts

(de 1 à 5 ans) la fonction de répartition empirique est dominée par une loi normale de même espérance (couleur sombre sur la surface) ce qui révèle l'existence de skewness⁶ négatif.

Graphiques 4e – Volatilité des rendements sur différents horizon de temps



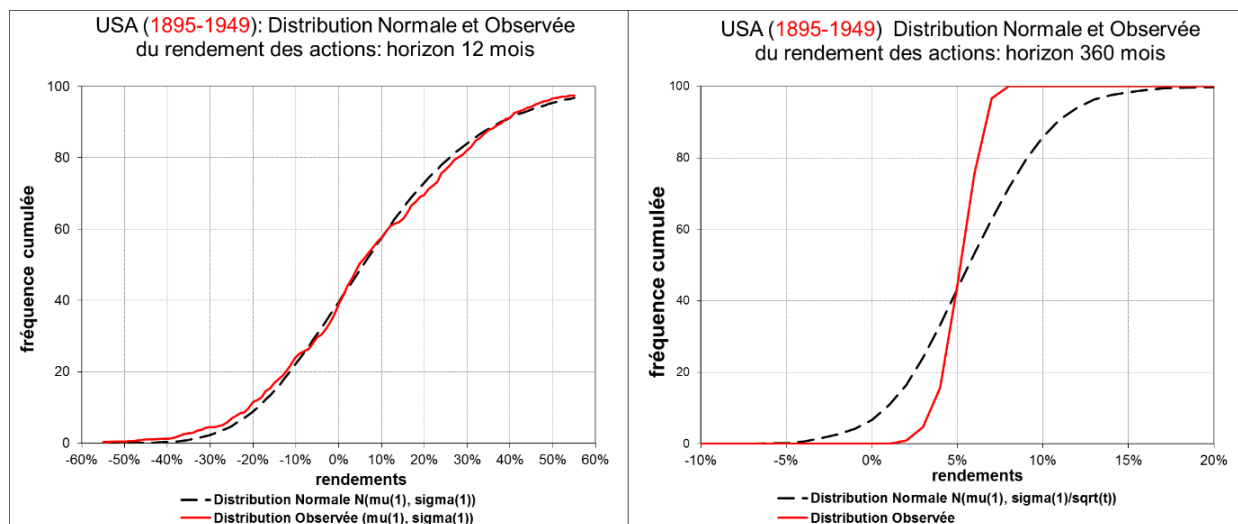
A moyen terme les queues épaisses de la distribution leptokurtique disparaissent et la distribution empirique offre une meilleure protection contre les rendements inférieurs à la moyenne qu'une distribution normale de même espérance (couleur claire sur le graphique surface). Concomitamment la probabilité de dépasser le rendement moyen se réduit relativement à une loi normale : sur des horizons longs, du fait de la réduction de la volatilité, les rendements spéculatifs sont inaccessibles. Avec l'allongement de la durée de détention, les résultats montrent que les rendements sont plus concentrés autour de la moyenne qu'ils ne le seraient

⁶ L'explication la plus communément avancé pour expliquer l'existence d'asymétrie dans le cours des actions tient à la relation entre le levier financier d'une société (apprécié par le ratio : « dette totale/capitaux propres ») et sa volatilité (Black et Scholes, 1973). En effet, en cas de retournement de tendance, une société ayant un levier élevé devient mécaniquement plus risquée, et son cours boursier enregistre une plus grande volatilité. L'effet rétroactif (ou effet « feed back ») est également considéré, comme une des principales sources des variations asymétriques de la volatilité. Par exemple, Bekaert et Wu (2000) montrent qu'une volatilité en hausse incite les investisseurs à exiger une prime de risque excédentaire pour rémunérer davantage les actifs qui deviennent plus risqués. D'où, une hausse du rendement exigé, et par conséquent un repli immédiat des cours. Or, ce repli est plus élevé que l'appréciation des cours causée par une baisse de la volatilité de même amplitude. Parmi l'abondante littérature sur le sujet signalons Veronesi (1999) qui montre que les investisseurs sur-réagissent aux mauvaises nouvelles pendant les périodes favorables et sous-réagissent aux bonnes nouvelles durant les périodes défavorables ou encore la contribution originale de Hibbert et al. (2008) qui analysent la relation dynamique entre les rendements du S&P 500 et les variations de la volatilité implicite sur des cotations à hautes fréquences. Ils ne décèlent ni « effet de levier » ni « effet de feed back ». Ils développent une explication alternative reposant sur les biais cognitifs qui affecteraient le comportement des « traders ».

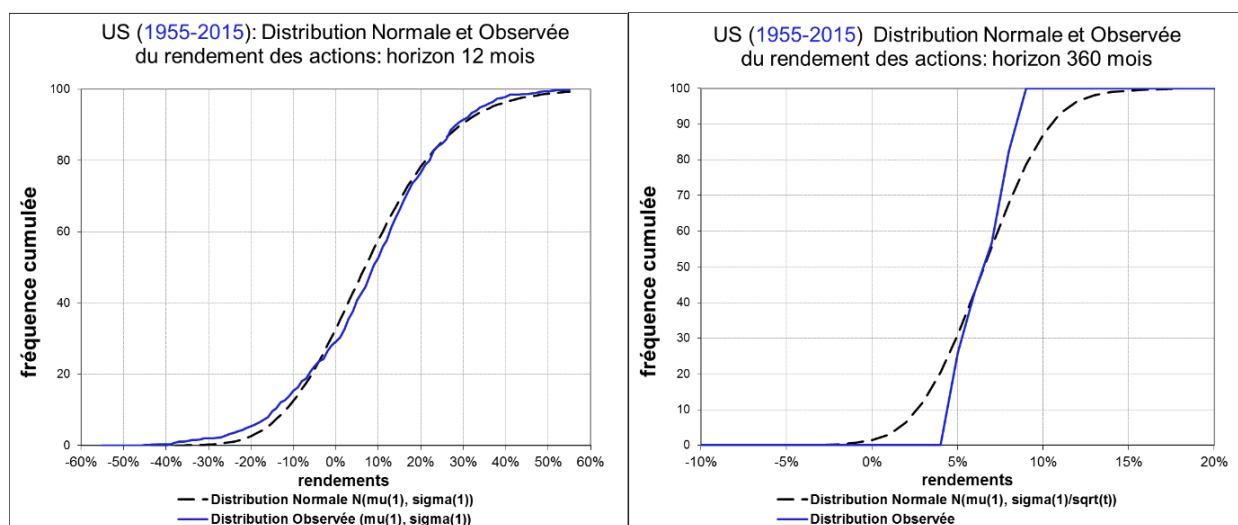
dans une gaussienne. Cela indique que la vitesse de réduction de la volatilité des rendements du S&P 500 au cours du temps est supérieure à la celle d'un bruit blanc gaussien.

Ce diagnostic, s'il est avéré, remet en cause l'hypothèse d'efficience des marchés et plaide pour une modélisation alternative de la dynamique des cours dans laquelle les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires. C'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposés qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Comme le mécanisme de correction des mouvements extrêmes est d'autant plus probable que la durée de placement est longue, l'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque. Naturellement, ce verdict doit être nuancé car de nombreux auteurs, comme Spierdijk et al. (2012), ont montré que la vitesse de retour vers la moyenne est variable dans le temps. Toutefois, les résultats de notre étude attestent que retour à la moyenne n'est pas exclusivement lié à un phénomène de rattrapage consécutif à la seconde guerre mondiale comme suggéré par Kim (1991). La comparaison des données avant et après la Seconde Guerre mondiale (graphiques 4f à 4i) montre que la période d'après-guerre est également caractérisée par un processus de concentration des rendements des actifs risqués autour de leur espérance plus rapide que dans une loi gaussienne.

Graphiques 4 f et g – fonctions de répartition – actions américaines (1895-1949)



Graphiques 4 h et i – fonctions de répartition – actions américaines (1955-2015)



1.4. Une évaluation orthodoxe de l'efficience des marchés

Afin de tester de manière plus académique l'efficience au sens faible des marchés boursiers nous avons complété notre analyse par des tests de « ratios de variance » sur le logarithme des cours nominaux des actions sur les marchés français et nord-américain. Depuis la contribution de Lo et MacKinlay (1988), le test du « ratio de variance » et ceux qui s'inscrivent dans son prolongement – comme le test non paramétrique de Wright (2000) par exemple – sont devenus les outils privilégiés d'analyse de l'efficience des marchés. L'intuition derrière ce test est la suivante : si le cours des actifs suit une marche aléatoire, alors sa variance croît linéairement avec l'intervalle des observations. Il en découle que la variance des rendements r_t sur une période q doit être approximativement égale à q fois la variance sur une période unitaire. Si on note $Var(r_t(q))$ la variance de la somme des différences premières du logarithme des cours sur la période q , alors le test du ratio de variance VR se note :

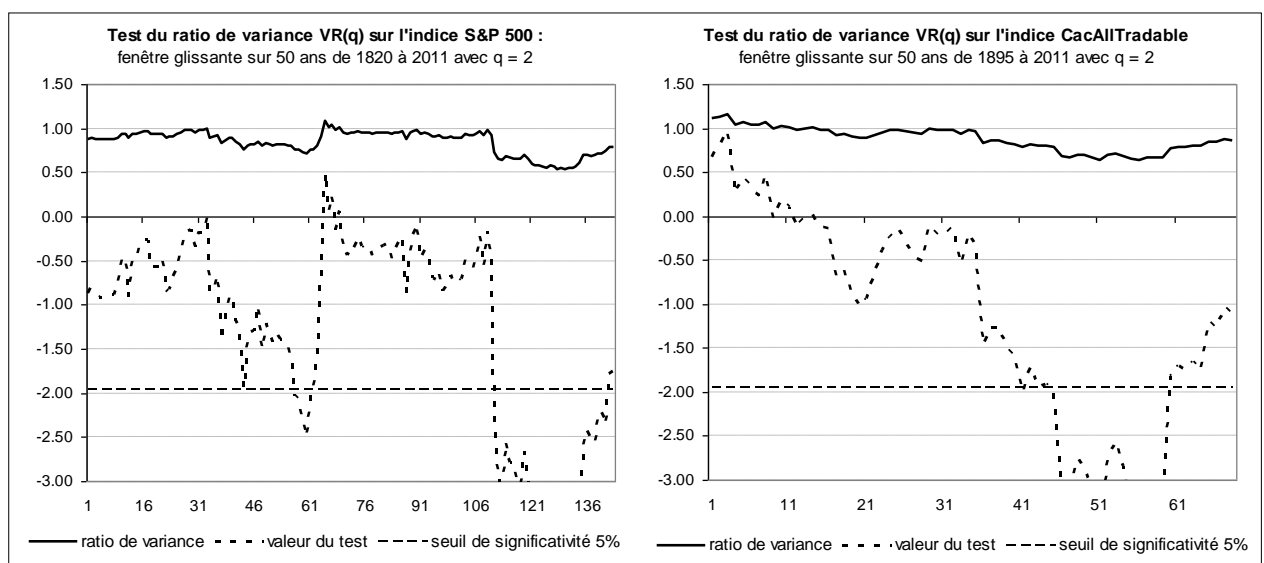
$$VR(q) = \frac{Var(r_t(q))}{qVar(r_t)}$$

Lo and MacKinlay ont montré que pour $q=2$, $VR(2)-1=\rho(1)$, où $\rho(1)$ est le coefficient d'autocorrélation du premier ordre. Un ratio proche de l'unité suggère donc une marche aléatoire, tandis qu'une déviation significative indique une autocorrélation des rendements. Un ratio de variance inférieur à l'unité plaide pour un processus de « retour vers la moyenne ».

Compte tenu de la forte sensibilité des tests, les ratios de variance ont été estimés sur une fenêtre glissante. La méthode favorise la synthèse visuelle des estimations (graphiques 5 a et b). La lecture des graphiques montre que les tests effectués, sur des fréquences annuelles, déterminent des ratios de variance majoritairement inférieurs à l'unité pour le CAC All-Tradable et le S&P500, ce qui plaide pour un processus de retour vers la moyenne. Pour ne pas introduire de rupture dans l'autocorrélation sérielle des cours, les périodes de guerre ont été prises en compte dans les calculs.

Ces résultats sont naturellement fragiles compte tenu des seuils de significativité calculés. Toutefois, ils sont en ligne avec les travaux de Poterba et Summers (1988), Bec et Gollier (2007) ou encore Hamayon et Legros (2008), qui concluent que les variations excessives de prix observés sur les marchés financiers sont transitoires. Ces arguments légitiment les stratégies de diversification temporelle sur les produits d'épargne à long terme.

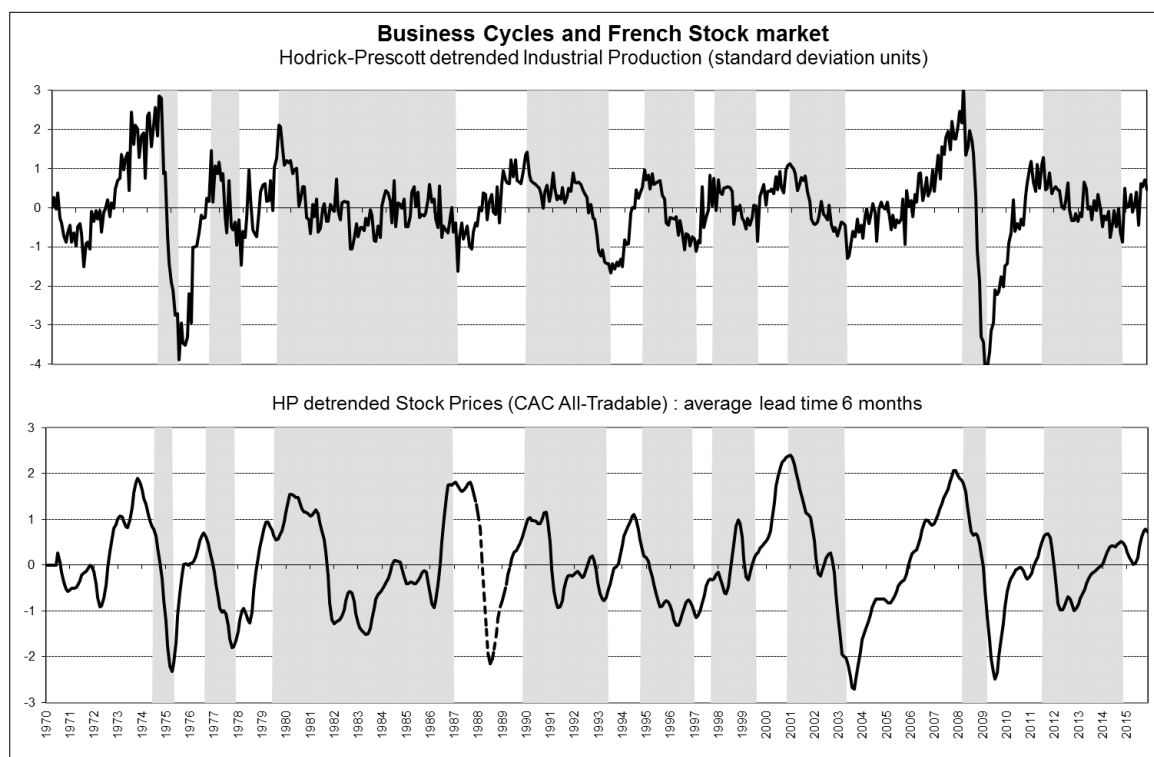
Graphiques 5 a et b – tests du ratio de ratios de variance – indices français et américains



1.5. Production et cours boursiers : une bonne synchronisation des cycles

Si la dynamique des cours est régie par un processus de retour vers la moyenne, on devrait s'attendre à l'existence d'une certaine connexion entre économie réelle et sphère financière. Afin de vérifier empiriquement l'assertion, les cycles de la production industrielle sont comparés à ceux des cours boursiers. Pour établir une chronologie des cycles, on a classiquement utilisé un filtre Hodrick-Prescott(1981)⁷ pour décomposer la composante cyclique et tendance des séries. Puis on a utilisé l'algorithme de Bry et Boschan (1971) pour dater les phases de récession. Pour l'essentiel, l'algorithme identifie un maximum local (pic), y_i si $\{y_{i+k} < y_i > y_{i-k}\}$ et un minimum (creux) y_i si $\{y_{i+k} > y_i < y_{i-k}\}$. Dans la pratique, l'algorithme doit répondre à certaines exigences supplémentaires pour éliminer les faux points de retournement. Nous entendons par là des règles qui évitent les cycles de longueur ou d'amplitude insuffisante et une procédure pour faire en sorte que pics et creux se succèdent. L'exercice conduit en France (graphique 6a) et aux Etats-Unis (graphique 6b) depuis janvier 1970, détermine une bonne concordance cyclique entre la croissance économique mesurée par la production industrielle et l'évolution des cours boursiers avancés de 6 mois. C'est avec ce décalage moyen que la corrélation entre les séries est la meilleure (respectivement 0.53 et 0.65 en France et aux Etats-Unis). A l'exception notable du krach d'octobre 1987, lié non à un retournement de conjoncture mais à un relèvement brutal des taux d'intérêt outre Atlantique destiné à enrayer la baisse du dollar, les cours de bourse sont donc des indicateurs avancés de l'activité économique.

Graphique 6 a- Production et cours boursiers - France

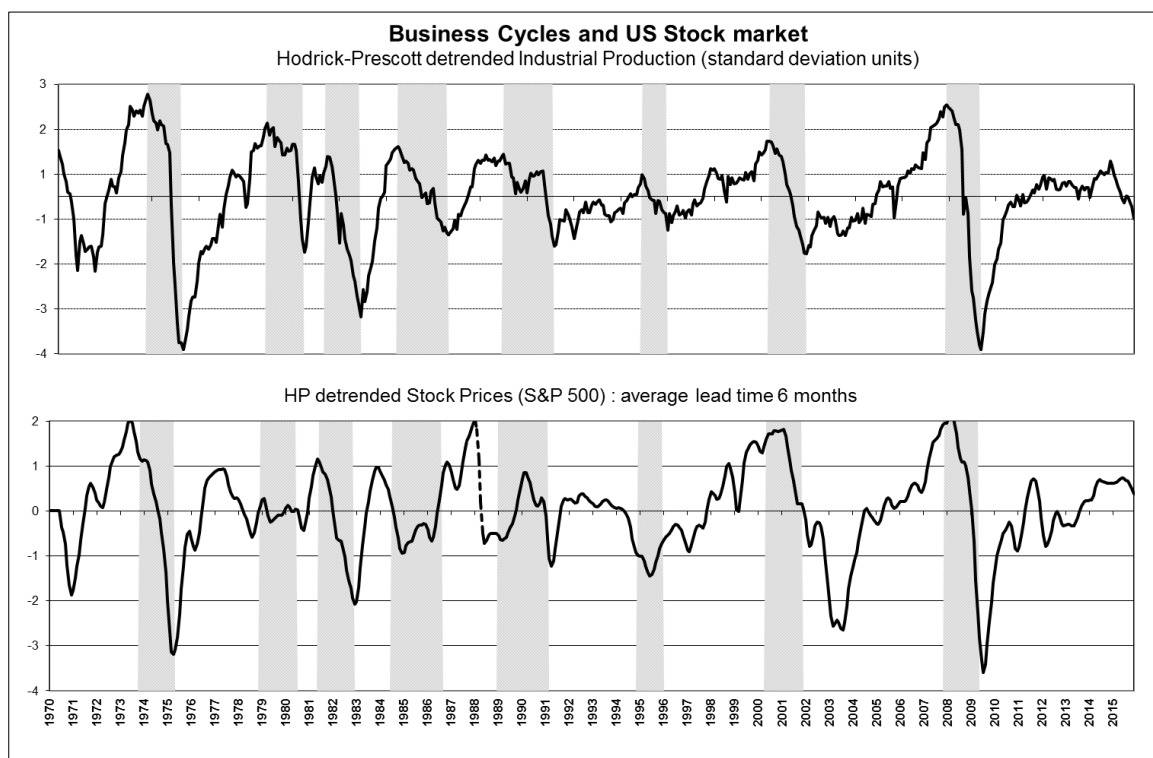


⁷ Soit $y_t = g_t + c_t$ où g_t est la valeur du trend en t , c_t la composante cyclique. Pour déterminer g_t l'idée de départ du filtre de Hodrick Prescott est de proposer une fonction qui fait l'arbitrage entre 2 objectifs:

- trouver les valeurs de g_t qui approchent aussi bien que possible y_t ;
- trouver des valeurs g_t dont l'accélération $(\Delta g_{t+1} - \Delta g_t)$ soit la plus faible possible.

Le programme de minimisation est le suivant : $\min \sum ((y_t - g_t)^2 + \lambda \sum ((\Delta g_{t+1} - \Delta g_t))^2)$. Dans ce programme, λ est un paramètre ad hoc qui reflète l'importance relative que l'on accorde à la souplesse de la tendance par rapport à l'amplitude des cycles.

Graphique 6 b- Production et cours boursiers – Etats-Unis

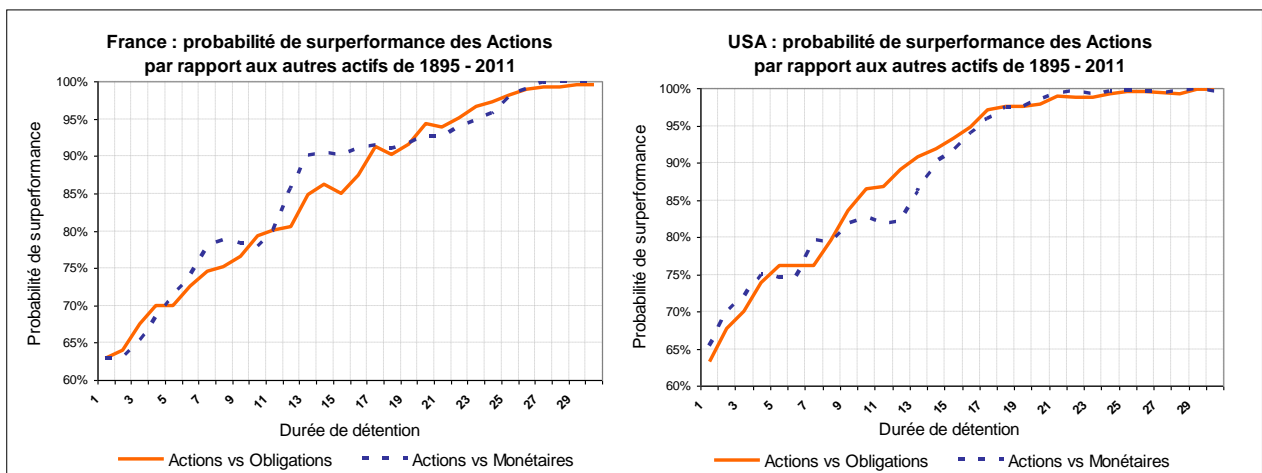


Ces résultats sont un argument de plus à l'encontre de l'hypothèse de marche aléatoire des marchés boursiers, puisque les prix des actifs risqués semble dépendre des anticipations formulées sur la croissance économique future. L'analyse de la distribution historique des rendements, dont la vitesse de réduction de la variance domine celle d'une loi normale, la bonne concordance cyclique entre croissance et cours de bourse sont autant d'indices qui accréditent l'existence de retour vers la moyenne ou «*mean reversion*» dans le processus qui régit le cours des actions.

1.6. Un résumé des enseignements historiques

Si l'on s'intéresse à la performance réelle des actifs, on peut dresser plusieurs constats. Dès lors que l'on s'attache au maintien du pouvoir d'achat de l'épargne, la notion d'actif sans risque disparaît : qu'on s'intéresse à la France ou aux Etats-Unis, les supports à revenus fixes ne battent pas l'inflation sur longue période.

Graphiques 7 a et b – probabilité de surperformance des actions – France et Etats-Unis



En outre, hors périodes de guerre mondiale, on note une forte convergence entre les valeurs réelles des actifs en France et les Etats-Unis. De même, l'évolution de la hiérarchie entre actifs en fonction de l'horizon de placement dans les deux pays présente de fortes similarités. Au-delà de 25 ans et 30 ans respectivement en France et aux Etats-Unis, la probabilité de surperformance des actions par rapport aux autres actifs atteint 100% (graphiques 7 a et b).

En définitive, le focus sur les propriétés des actifs risqués s'est révélé d'une grande richesse. Les résultats de la batterie de tests effectuée sur les chroniques des cours boursiers sont convergents. Ils indiquent que sur le long terme, la dynamique des prix serait régie par un processus de retour vers la moyenne ou « *mean reversion* ». Autrement dit, que les rendements des actions ne sont pas déconnectés de la croissance économique potentielle et, par-là, que l'allongement l'horizon de placement conduit à une réduction du risque.

2. Allocation de cycle de vie paramétrique vs semi paramétrique

L'étude des caractéristiques des classes d'actifs nous permet de tirer de précieux enseignements sur la hiérarchie des placements en fonction du temps. Elle a toutefois une portée limitée en matière de choix de portefeuille car elle n'intègre pas les effets de la diversification sur le risque des placements.

Dans cette seconde partie nous allons donc nous intéresser aux performances des placements issues de la combinaison des différentes classes d'actifs afin d'évaluer les avantages et les limites de stratégies d'allocation par défaut proposées par les plans d'épargne à cotisation définies⁸.

En écartant des options retenues les techniques reposant sur des instruments financiers sophistiqués, de même que les placements ne garantissant qu'une performance au terme et pénalisant les sorties anticipées ont été exclus du champ de l'analyse (fonds à promesse, fonds structuré), les options par défaut retiennent traditionnellement quatre types de stratégies :

- les allocations de cycle de vie (Life Cycle Asset Allocation)
- la gestion profilée
- le CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance)
- la gestion « Stop-Loss »

Dans cette étude nous nous attachons aux allocations de cycle de vie particulièrement intéressantes dans le contexte de l'épargne retraite. Une des stratégies de gestion à long terme de l'épargne de type cycle de vie repose, en effet, sur la diversification temporelle. C'est à dire une réduction de la part du patrimoine financier investie en actifs risqués au fur et à mesure que l'horizon de désinvestissement se rapproche.

On peut trouver par exemple chez Gollier et Zeckhauser (1997) une justification de la décroissance de la part d'actifs risqués avec l'âge. Les auteurs montrent que la flexibilité liée à l'horizon (le fait que les jeunes ont plus de temps pour la réallocation de portefeuille) l'emporte sur les risques d'arrière-plan (background risks, les risques professionnels ou familiaux par exemple), si la tolérance au risque est une fonction convexe et décroissante des ressources du consommateur. Dans ce cas, les jeunes seront plus tolérants à l'égard du risque que les plus âgés. Cette situation est appelée par les auteurs la clause DER (clause « *Duration Enhances Risk* »).

Précisons par ailleurs que, par soucis de simplicité, nous n'avons pas fait d'hypothèse sur les frais liés aux investissements (droits d'entrée, de gestion, de sortie) qui certes grèvent les rendements mais n'affectent pas la classification des stratégies d'allocation. Seul sont pris en compte les frais d'arbitrage entre supports qui ont une incidence évidente sur le rendement des différentes allocations. Nous avons ainsi fait l'hypothèse subjective et relativement sommaire que les frais représenteraient 0.5% des arbitrages quel qu'en soit le montant.

2.1. Eléments de méthodologie

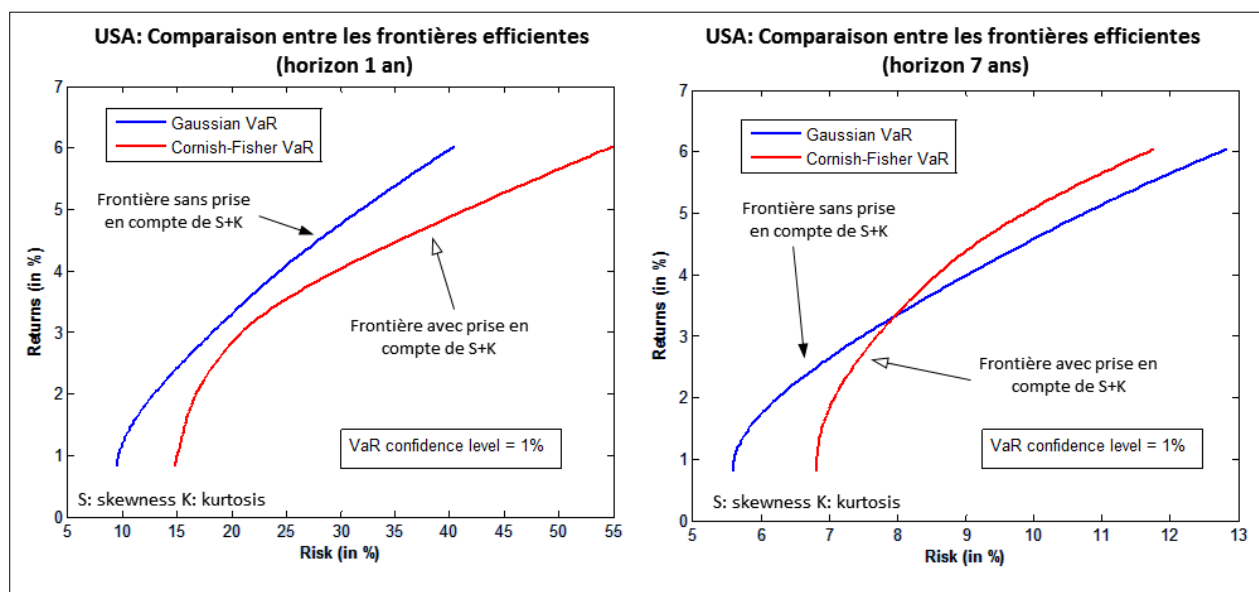
L'introduction d'une diversification temporelle dans les stratégies d'investissements suppose de répondre à la question suivante : comment les ménages doivent-ils modifier le poids et la structure de leur portefeuille d'actifs dans le temps ? Afin de tenir compte du caractère potentiellement non gaussien de la distribution de certains actifs, nous avons voulu comparer la

⁸ Pour une analyse sur données annuelles aux Etats-Unis, on pourra consulter Chetouane M. (2011) Strategic asset allocation challenges for DC plan members, Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine.

structure des portefeuilles déterminée à partir d'un critère classique d'« espérance-variance » et d'un mode de sélection plus achevé basé sur les moments d'ordre supérieur.

Pour cela, on élargit la notion de risque proposée par Markowitz (où le risque est évalué par la variance des rendements) pour inclure l'asymétrie de la distribution des rendements (c'est-à-dire son skewness) et les événements extrêmes (le kurtosis des rendements). En effet, on constate que selon l'horizon de placement, les allocations optimales déduites du cadre de Markowitz diffèrent des allocations optimales obtenues en utilisant des mesures de risque qui intègrent les moments d'ordre supérieur (graphiques 8a et 8b). C'est pourquoi nous avons pris en compte dans la détermination de la structure des allocations de cycle de vie, les ajustements liés aux risques extrêmes.

Graphiques 8a et 8b – frontières efficaces avec ou sans moments d'ordre supérieur à 2



En première approche, une solution pourrait consister à s'appuyer sur la théorie de l'utilité espérée et à supposer que les préférences d'un investisseur resteront constantes au cours du temps pour déterminer l'évolution de la structure des allocations optimales. L'idée est séduisante dans les programmes d'optimisation de types Markowitz, mais elle se heurte à la détermination de la préférence des agents dès lors que l'on introduit des moments d'ordre supérieur. Pour plus de clarté, rappelons que le problème classique de maximisation de l'utilité dans un espace rendement-risque peut se résumer par l'expression suivante : $\text{Max } \mu - \lambda_2 \sigma^2$

Avec :

μ = l'espérance du portefeuille

σ^2 = la variance du portefeuille

λ_2 = le paramètre d'aversion au risque

La question de la détermination des préférences se restreint alors à l'évaluation de l'aversion au risque de l'agent. Dès lors que l'on intègre le skewness (S) et le kurtosis (K) dans la fonction d'utilité de l'agent afin de prendre en compte la structure non gaussienne de la distribution des rendements, le programme peut se noter : $\text{Max } \mu - \lambda_2 \sigma^2 + \lambda_3 S - \lambda_4 K$. Dans cette expression λ_2 , λ_3 , λ_4 , représentent respectivement l'aversion pour la variance, la préférence pour l'asymétrie et l'aversion pour le kurtosis. On constate que l'optimisation de portefeuille avec des moments d'ordre supérieur est un problème plus ambigu que l'approche classique. En effet, l'investisseur cherche simultanément à maximiser le rendement espéré et le skewness (les moments d'ordre impair) en minimisant la variance et le kurtosis (les moments d'ordre pair). Dans ce type de maximisation, généralement résolu par un programme multi objectifs (*polynomial goal*

programming ou PGP), la sélection du portefeuille dépend des objectifs et des préférences de l'investisseur. Or s'agissant des moments d'ordre supérieur, Prigent et Mhiri (2010) établissent, dans le sillage des travaux de Lai, Yu et Wang (2006), que l'arbitrage entre les différents objectifs reste un exercice beaucoup plus complexe que dans un espace rendement risque.

Les résultats des travaux empiriques de Mhiri et Prigent (*op. citée*) montrent que les différentes combinaisons des préférences de l'investisseur pour l'espérance de rendement (noté λ_1 par les auteurs), la variance λ_2 , le skewness λ_3 et le kurtosis λ_4 conduisent à déterminer des portefeuilles optimaux de moments pour le moins contrastés (à moins de faire l'hypothèse que les préférences de l'investisseur sont toutes égales $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$).

La comparaison entre l'optimisation moyenne-variance (MV) qui dépend essentiellement de l'aversion au risque (λ_2) et l'optimisation PGP qui dépend de trois préférences additionnelles et, en pratique, indéterminées ($\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$), conduit à un large éventail de solutions (cf. l'exemple des solutions données par Mhiri et al. ci-dessous).

Tableau 5 : Le Polynomial goal programming (PGP) détermine un large éventail de solutions

Variation des moments des portefeuilles optimaux en fonction de la hiérarchie des préférences. Prigent et Mhiri (2010)								
Portfeuille	A	A1	B	B1	C	C1	D	D1
λ_1	1	2	3	3	1	2	1	2
λ_2	1	1	1	1	1	1	3	3
λ_3	3	3	1	2	0	0	0	0
λ_4	0	0	0	0	3	3	1	1
Moyenne	8.321	8.404	8.971	8.937	9.769	9.778	10.01	10.02
Variance	1.768	1.772	1.873	1.242	1.44	1.44	1.588	1.589
Skewness	0.162	0.16	-0.08	-0.051	-0.05	-0.05	-0.044	-0.044
Kurtosis	2.156	2.183	0.351	0.48	0.088	0.089	0.0695	0.0695

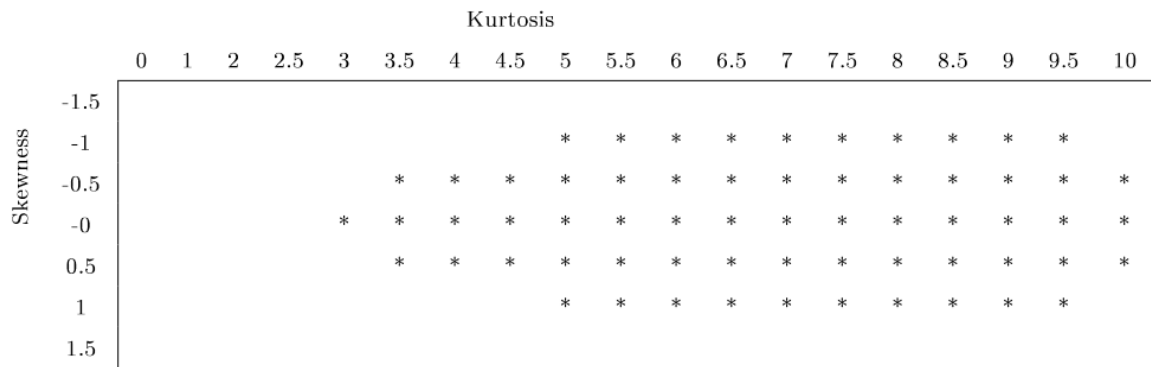
Par conséquent quand les moments d'ordre supérieur sont pris en compte, il peut y avoir une multiplicité de portefeuilles efficients pour un même degré d'aversion au risqué λ_2 . Tester toutes les combinaisons sort clairement du cadre de notre recherche.

Pour contourner la difficulté tout en intégrant les moments d'ordre supérieur dans les stratégies d'investissement de cycle de vie, nous avons retenu un critère de *Value-at-Risk* pour définir le risque de perte accepté par les agents. La sélection d'une mesure non équivoque favorise la comparaison des stratégies dans des univers paramétriques ou semi paramétriques. Le programme d'optimisation revient à chercher l'allocation à espérance maximum associée alternativement à un critère de VaR paramétrique et à une VaR de type Cornish-Fisher (CF VaR) qui prend en compte le skewness et le kurtosis de la distribution des rendements.

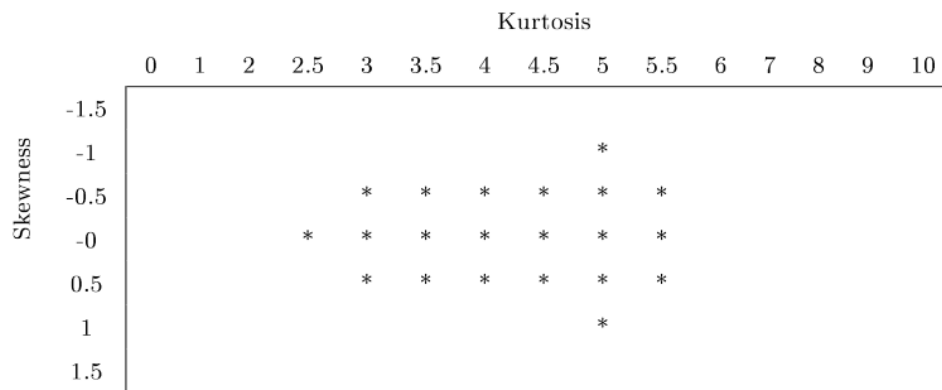
Naturellement l'expansion de Cornish-Fisher n'est pas la seule méthode pour intégrer les moments d'ordre supérieur. Les substituts possibles sont les expansions d'Edgeworth et de Gram-Charlier, la distribution de Johnson, etc. (pour un inventaire des méthodes on pourra consulter Lien et al. 2013).

Les graphiques 9a et 9b ci-après montrent les couples de skewness et kurtosis qui délimitent le domaine de validité des expansions de Gram-Charlier et de Cornish-Fisher expansions. Le domaine de validité correspond aux aires déterminées par l'intérieur des frontières. On constate que le domaine de validité de l'expansion de Gram-Charlier est relativement restreint tandis que celui de Cornish-Fisher est beaucoup plus large. L'expansion d'Edgeworth est également caractérisée par un périmètre d'applicabilité réduit (l'approximation de Gram-Charlier étant un cas particulier de l'expansion Edgeworth).

Graphiques 9a – Domaine de validité de l'expansion de Cornish-Fisher



Graphiques 9b – Domaine de validité de l'expansion de Gram-Charlier



L'expansion de Cornish-Fisher permet de définir une relation commode entre Skewness, Kurtosis et Value-at-Risk, et de plus facilite grandement le calcul numérique du portefeuille moyenne-VaR optimal avec les quatre moments. En dépit de sa grande souplesse d'utilisation, comme le montre Maillard (2012), cette expansion n'est valide que lorsqu'elle est bijective. Cette condition est satisfaite si pour toute valeur du quantile Z de la loi normale, la dérivée de l'expansion de Cornish-Fisher pour toute valeur de Z est positive :

$$\frac{dZ^{CF}}{dZ} > 0, \quad \forall Z$$

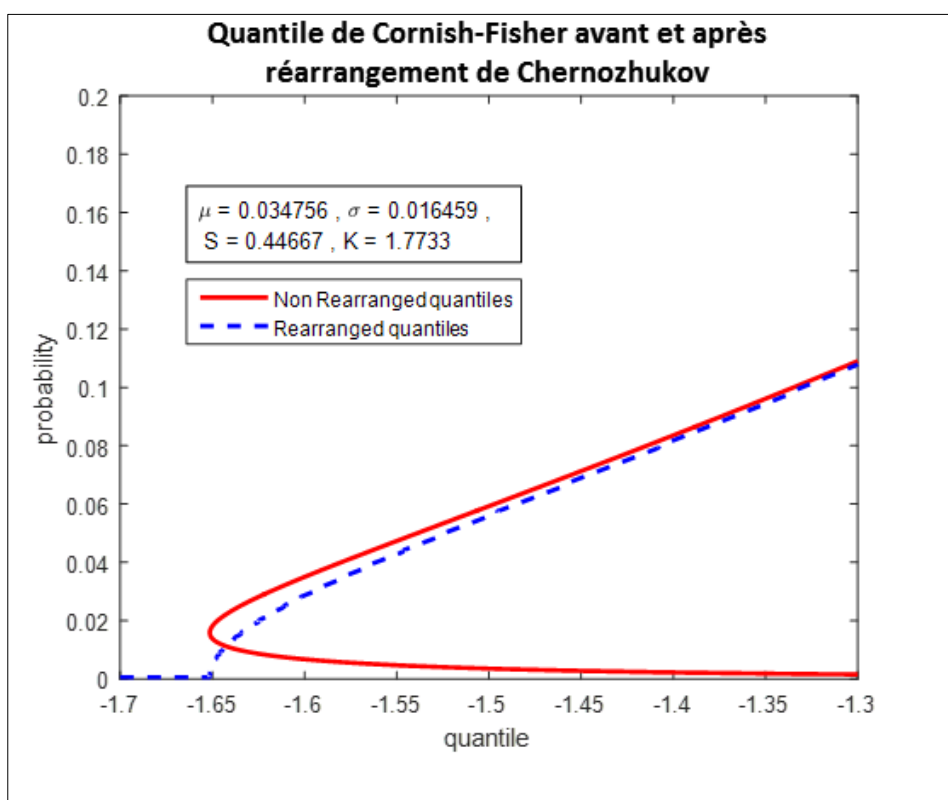
Ce qui se traduit directement par la condition nécessaire et suffisante suivante:

$$\frac{S^2}{9} - 4 \left(\frac{K}{8} - \frac{S^2}{6} \right) \left(1 - \frac{K}{8} - \frac{5S^2}{36} \right) \leq 0$$

Le non-respect de cette condition fait apparaître une importante lacune des expansions Cornish-Fisher : les approximations qui en résultent ne sont pas nécessairement monotones. Pour pallier le problème, Chernozhukov et al. (2010) ont présenté une méthode dénommée « increasing rearrangement » qui permet de restaurer la monotonie de l'expansion quand le skewness et ou le kurtosis des distributions tombent hors du domaine de validité du modèle.

L'exemple de la correction par la procédure de l'« increasing rearrangement » est donné sur le graphique ci-dessous qui montre la fonction de distribution obtenue avec un skewness de 0,446 et un kurtosis de 1,773. La fonction est clairement non monotone (ligne continue sur le graphique 10) et détermine des Value-at-Risk incohérentes pour différents seuils de confiance. En appliquant la procédure de réarrangement à cette fonction, on obtient la transformation corrigée de Cornish-Fisher des quantiles gaussiens (ligne pointillée). Dans les programmes d'optimisation de la VaR semi-paramétrique, nous avons utilisé cette procédure pour rétablir la monotonie des expansions calculées avec des paires « skewness-kurtosis » invalides.

Graphique 10 – Increasing rearrangement procedure



2.1.1. Programme d'optimisation de la VaR paramétrique

Le programme d'optimisation de la VaR paramétrique pour un portefeuille sur la frontière efficiente (moyenne – variance) est le suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min_w (\text{VaR}_\alpha(w)) \\ \text{S.C : } \begin{cases} w' * \mu = \mu_P \\ \sum_{i=1}^3 w_i = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Avec :

$$\text{VaR}_\alpha = w' * \mu + z_\alpha * \sqrt{w' \Sigma w}$$

⇔

$$\text{VaR}_\alpha = w' * \mu + z_\alpha * \sigma$$

Σ : matrice de variance covariance

2.1.2. Programme d'optimisation de la VaR de Cornish-Fisher

Le programme d'optimisation de la VaR de Cornish-Fisher d'un portefeuille sur la frontière pour un rendement donné est un problème d'optimisation non lisse (ou non différentiable).

Pour le résoudre, nous nous sommes directement inspiré des travaux de Curtis et Que (2012) qui ont développé une variante du « gradient sampling (GS) algorithm » de Burke et al (2005). L'algorithme développé par Frank E. Curtis⁹ diffère des précédents GS en ce qu'il s'agit d'un programme de minimisation à métrique variable (VMM) et en ce qu'il détermine un algorithme plus efficace : selon la notation « O » de Landau, le GS développé par Curtis ramène le problème d'une complexité linéaire $O(n)$ à une complexité constante $O(1)$, indépendante de la taille de la donnée. Pratiquement le programme d'optimisation s'écrit :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min_w (\widehat{\text{VaR}}_\alpha(w)) \\ \text{S.C : } \begin{cases} w' * \mu = \mu_P \\ \sum_{i=1}^3 w_i = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Avec :

μ_P : rendement ciblé (fixé)

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = w' * \mu + Z_\alpha^{\text{Cornish - Fisher}} * \sqrt{w' \Sigma w}$$

\Leftrightarrow

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = w' * \mu + Z_\alpha^{\text{Cornish - Fisher}} * \sigma$$

Σ : matrice de variance covariance

$$Z_\alpha^{\text{Cornish - Fisher}} \approx Z_\alpha + \frac{1}{6}(Z_\alpha^2 - 1) * S + \frac{1}{24}(Z_\alpha^3 - 3Z_\alpha) * K - \frac{1}{36}(2Z_\alpha^3 - 5Z_\alpha) * S^2$$

$$S(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} : \text{Skewness}$$

$$\tilde{K}(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} : \text{Kurtosis}$$

$$K = \tilde{K} - 3 : \text{excès d'aplatissement}$$

μ : vecteur des rendements moyens des classes d'actifs

w_i : poids de l'actif i dans le portefeuille tel que $\sum w_i = 1$

⁹ Nous tenons à remercier particulièrement Frank E. Curtis du Department of Industrial and Systems Engineering Lehigh University, qui nous a personnellement aidé à implémenter « an adaptive gradient sampling algorithm for nonsmooth optimization » qu'il décrit dans Curtis, F. E. and Que, X. (2012).

2.1.3. Prise en compte la « mean reversion » dans la dynamique du prix des actions

Pour capturer simplement l'effet de retour vers la moyenne dans la volatilité du rendement des actions, on estime une matrice de covariance théorique dans le cas du modèle paramétrique et une matrice de covariance empirique dans l'hypothèse semi-paramétrique.

- **Calcul des rendements**

Soit $(P_i^j)_{0 \leq i \leq T}$ l'indice des prix mensuel d'un actif financier j. Alors, on calcule les log-returns de l'actif j à l'horizon h par:

$$r_{i,h}^j = \frac{1}{h} \log \left(\frac{P_i^j}{P_{i-h}^j} \right), \quad h \leq i \leq T$$

- **Estimation des covariances**

Pour l'échantillon multivarié des rendements centrés $(r_{t,h})_{h \leq t \leq T}$, on définit le vecteur des K-actifs correspondant, au temps t et à l'horizon h par:

$$r_{t,h} = \begin{pmatrix} r_{t,h}^1 - \mu^1 \\ \vdots \\ r_{t,h}^K - \mu^K \end{pmatrix}$$

Alors, dans le cas semi-paramétrique, la matrice de covariance utilisée pour estimer la nième frontière « Mean-VaR » efficiente est la matrice empirique donnée par:

$$\Omega_h = \frac{1}{T-h} \sum_{t=h}^T r_{t,h} \times r_{t,h}^t$$

Dans l'hypothèse paramétrique, on suppose que les prix suivent une marche aléatoire dont la variance augmente linéairement avec le temps.

$$\Omega_h = \frac{h}{T-1} \sum_{t=1}^T r_{t,1} \times r_{t,1}^t = h \times \Omega_1$$

On peut montrer à travers une illustration simple que cette spécification conduit à une meilleure estimation de la « vraie » exposition au risque alors que l'optimisation « rendement-risque » peut conduire à des estimations biaisées.

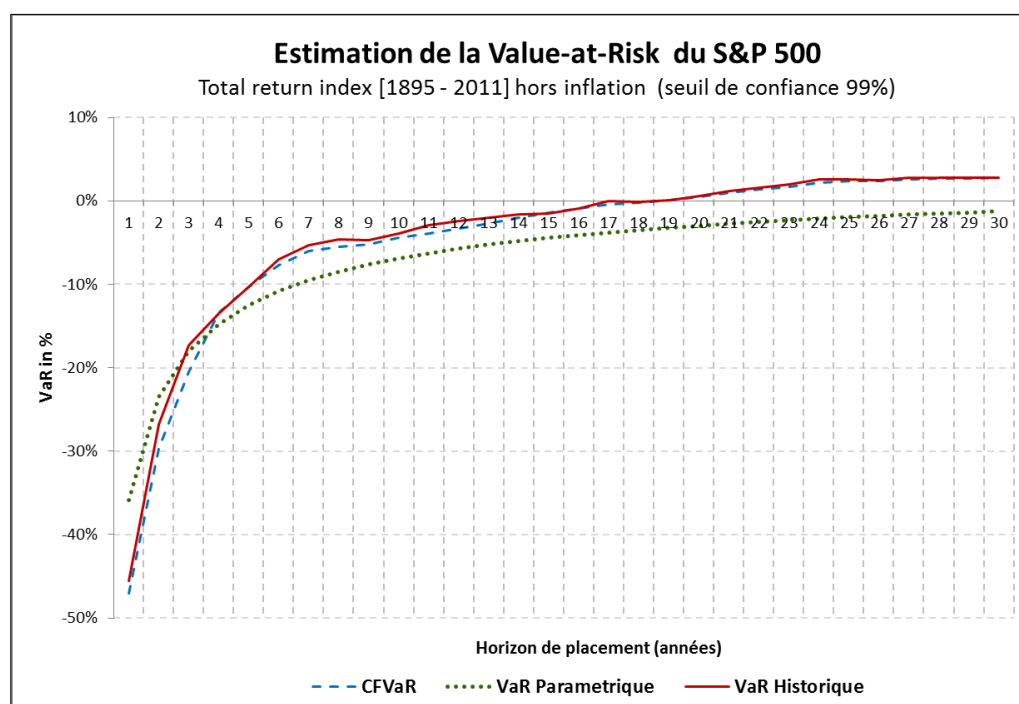
- **L'exemple du S&P 500.**

On a illustré les conséquences de la prise en compte simultanée des moments d'ordre supérieure et de la réduction empiriques de la variance des rendements à partir des chroniques longues des prix du S&P 500.

En premier lieu, nous calculons la « VaR historique ». La technique la plus fréquente pour calculer la VaR d'un actif consiste à classer ses rendements en ordre croissant sur une fenêtre glissante d'une largeur donnée. La VaR est alors définie comme la valeur en deçà de laquelle un pourcentage $\alpha \in (0,1)$ des observations ordonnées ont une valeur plus faible.

La seconde étape consiste à estimer la « VaR paramétrique », en faisant l'hypothèse que les log-returns suivent une loi normale, puis une « VaR semi-paramétrique » qui permet de corriger les quantiles, d'une loi normale en intégrant les moments d'ordre supérieur. Dans le cas paramétrique, on suppose que la variance croît linéairement avec le temps, tandis que dans le modèle semi-paramétrique, les moments sont estimés à partir de moyennes mobiles. Sur le graphique 11 ci-après, le trait plein représente la « vraie » exposition au risque (VaR historique) pour différents horizons de placement. La ligne pointillée indique la VaR paramétrique au seuil de 99% enfin la ligne tiretée symbolise la VaR de Cornish-Fisher pour le même seuil de confiance.

Graphique 11 – Value-at-Risk du S&P 500 (1895-2011)



Les résultats montrent clairement que la VaR paramétrique a tendance à sous-estimer la « vraie » exposition au risque sur les horizons courts et à la surestimer sur les horizons longs. En revanche, la spécification CFVaR « capture » l'exposition au risque que l'approche moyenne-variance ne parvient pas à quantifier. L'approximation de Cornish-Fisher détermine sans conteste une mesure du « vrai » risque plus précise que la VaR paramétrique.

2.2. Résultats : l'hypothèse d'une VaR de 3%

Une fois posés les programmes d'optimisation, la construction des grilles d'allocation dans le temps répond à une logique différenciée selon que l'on se place dans un univers où le risque est paramétrique ou semi-paramétrique.

2.2.1. La conjecture d'une VaR paramétrique de 3%

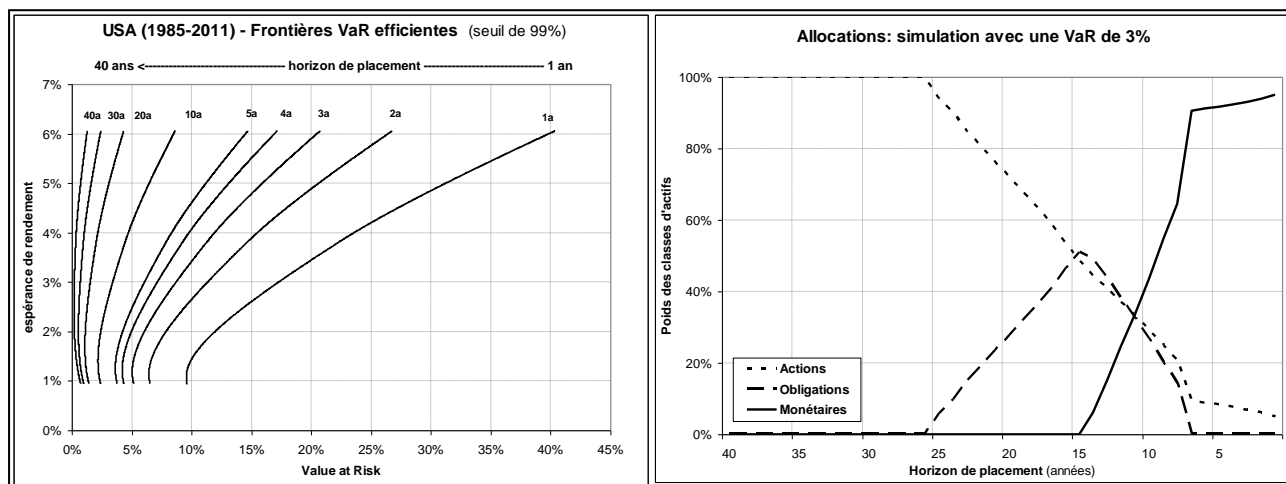
Dans le cas où le risque est évalué par la variance des rendements, on simule la réduction du risque à partir des propriétés d'une loi normale. La volatilité des rendements se réduit donc en fonction de la racine de la durée de placement et ce, sans différenciation entre les classes d'actifs. La frontière est obtenue par minimisation de la VaR pour une plage de rendement donnée. Dans nos scénarios, le risque pris par un investisseur est concrétisé par une acceptation de perte en capital. Sa stratégie va consister à chercher sur chacune des frontières VaR efficaces qui le séparent du terme de son placement, la structure de portefeuille w_i qui respecte son critère de perte. Compte tenu de la dilution du risque avec l'horizon, la proportion d'actifs

risqués du portefeuille souhaité par notre cas type sera d'autant plus importante que le terme de l'investissement est éloigné.

Naturellement l'allocation présentant les caractéristiques requises par l'épargnant ne figure pas nécessairement parmi l'ensemble des allocations constitutives des frontières de la période d'investissement. Dans ce cas, on lui attribuera logiquement l'allocation offrant la plus petite VaR de la frontière. A l'opposé, sur des horizons longs, les VaR de tous les portefeuilles d'une frontière peuvent être négatives (c'est-à-dire correspondre à des gains en capital). Lorsque cette configuration se présente, on sélectionne l'allocation à rendement maximum.

Les grilles d'allocations déterminées par l'optimisation pour un profil de risque donné (une VaR), sont ensuite utilisées pour les simulations rétrospectives (*back test*) des stratégies sur des fenêtres glissantes d'une largeur fonction de la durée d'investissement sur la période de l'analyse, soit de 1895 à 2011. Dans cet exemple qui se concentre sur les performances des classes d'actifs aux Etats-Unis, on prend le cas d'un individu qui accepte une perte en capital de 3% maximum (précisément une VaR de 3% au seuil de confiance de 99%) et dont l'horizon de placement est de quarante ans. Le programme d'optimisation cherche sur chaque frontière l'allocation dont la VaR est la plus proche de la VaR désirée. On constate dans notre exemple (graphiques 12a et 12b) que la VaR minimum de la frontière calculée pour un placement d'une année est de 10%, soit un niveau bien supérieur à celui accepté par l'épargnant. Jusqu'à la cinquième année, les allocations sont trop risquées par rapport au profil de l'épargnant. Sur notre historique, après 25 ans de placement, soit avec un horizon résiduel de moins de 15 ans (à gauche du graphique 12b), les placements en actions nord-américaines ne présentent plus de risque de perte, notre investisseur est donc logiquement entièrement investi en actifs risqués.

Graphiques 12a et 12b – Frontières efficaces et allocations – VaR paramétrique - USA

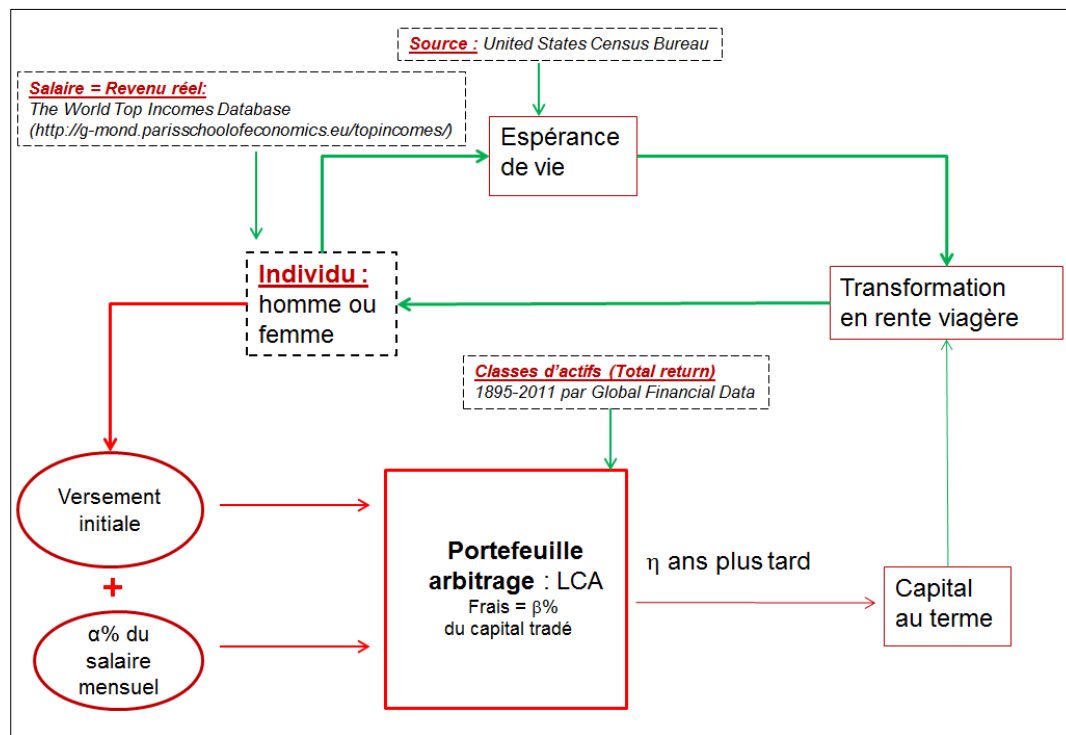


La grille d'allocation déterminée en fonction du profil de risque, permet de simuler la performance de la stratégie (*back test*) sur fenêtres glissantes d'une largeur de 480 mois de 1895 à 2011. Le verdict du *back test* montre qu'aucun des 912 placements distincts effectués à partir de la même grille de désensibilisation ne débouche sur une perte en capital. Le rendement réel médian des placements est estimé à 4.30% tandis que le celui associé au premier percentile est de 2.3%. Cette surperformance par rapport au critère de VaR de l'investisseur est due à la règle qui veut que lorsque tous les portefeuilles d'une frontière ont une VaR négative, qui représente selon nos critères un gain minimum, on sélectionne l'allocation à rendement maximum. Pour donner une autre illustration de la même stratégie, on a estimé les taux de remplacement (ratios pension/revenu) correspondant à la conversion en rentes viagères des capitaux acquis au terme. Faute de statistiques historiques disponibles, on a retenu le revenu disponible¹⁰ réel par

¹⁰ Source: The World Top Incomes Database (<http://g-mond.parisschoolofeconomics.eu/topincomes/>)

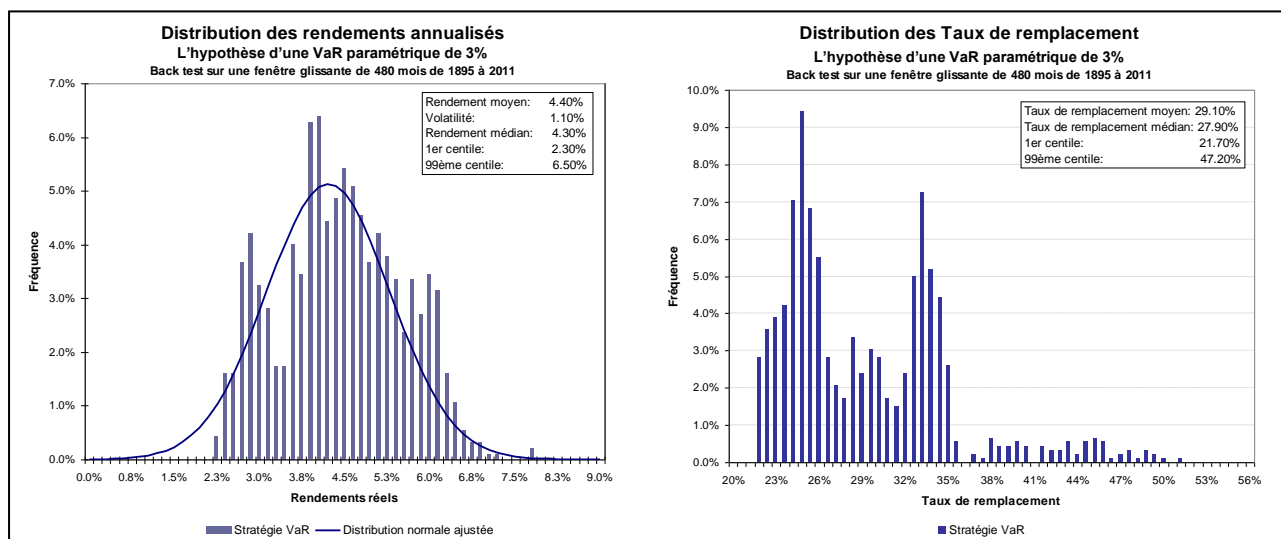
ménages comme approximation des salaires, une approximation discutable mais peu contournable. Les individus sont sensés épargner 6% de leur revenu pour se constituer une épargne de cycle de vie. On suppose qu'à l'âge de 65 ans, le capital est converti en rente en fonction des espérances de vie calculées par l'*United States Census Bureau*.

Graphiques 13 – Programme de Back test des stratégies d'allocation d'actifs



Les résultats (graphiques 14a et 14b) déterminent un taux de remplacement médian de 27.9% du revenu disponible des ménages. Cette statistique n'a pas d'autre ambition que d'exprimer une distribution de rendements en une unité plus intelligible. Elle n'a pas pour objectif d'être comparée avec un calcul classique de taux de remplacement dans un régime à prestation définies qui, pour un profil de carrière donné n'a pas de dispersion et en outre repose sur la comparaison entre une première pension de retraite et le dernier salaire d'une chronique dont la progression est généralement plus rapide que celle du salaire moyen.

Graphiques 14a et 14b – Rendements et taux de remplacement – VaR paramétrique - USA



2.2.2. La conjecture d'une CF VaR semi-paramétrique de 3%

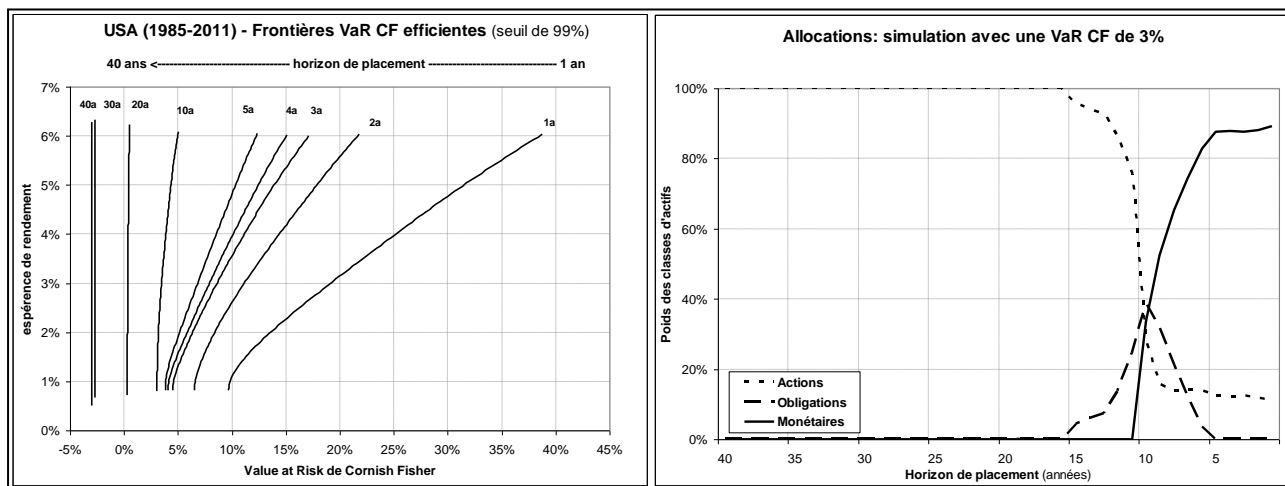
Dans le cas non paramétrique, les moments de la distribution sont recalculés, pour chaque horizon de placement, à partir des chroniques des rendements historiques des actifs. Il en découle notamment que la réduction de la variance des actions est plus rapide que dans une loi gaussienne. Chaque frontière est construite par minimisation de la CF VaR en fonction des quatre premiers moments calculés sur les moyennes mobiles d'ordre $k \leq 12$, pour $k=1$ à 40, puisque nos chroniques de rendements sont mensuelles et que nous envisageons un horizon de 40 ans.

On constate (graphiques 15a et 15b) que les frontières se verticalisent plus rapidement que dans l'exercice paramétrique. En effet, la réduction de la variance est propre à chaque actif et n'est plus dictée par une règle gaussienne. Or nous avons vu dans l'analyse consacrée aux grandes classes d'actifs, que les actions dominaient les placements à revenus fixes. Il en découle, pour un même niveau de VaR, une structure d'allocation plus risquée que dans le cas paramétrique.

Comme précédemment, la séquence d'allocations déterminées par l'optimisation semi paramétrique pour un profil de risque donné (ici une CF VaR), est utilisée pour le *back test* de la stratégie sur une fenêtre glissante.

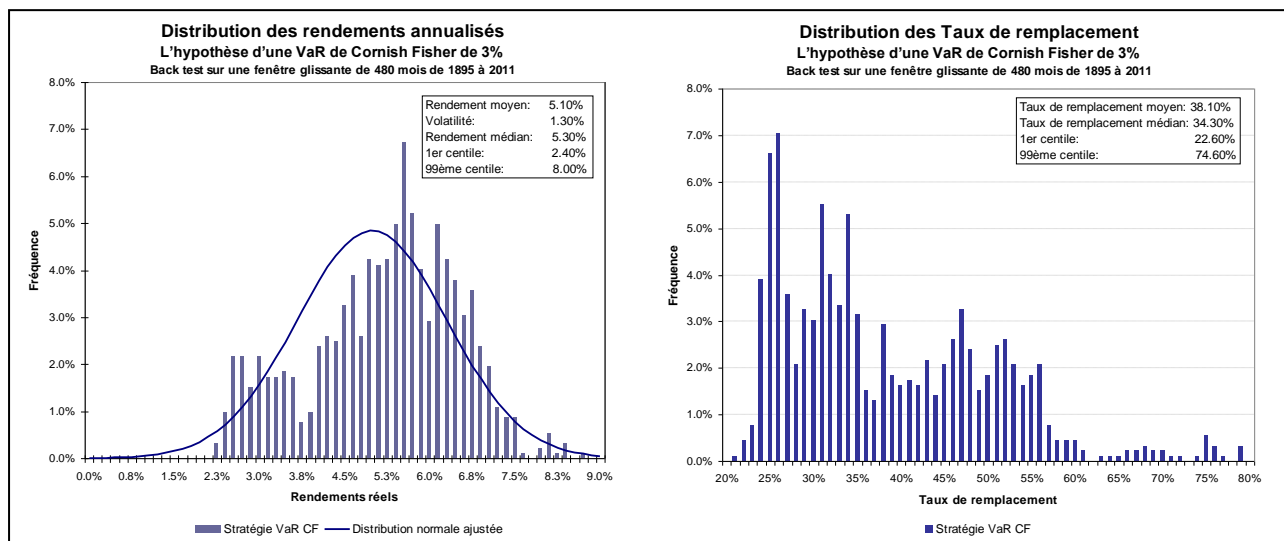
La structure des allocations déterminées sur les indices nord-américains montrent que la prise en compte simultanée des moments d'ordre supérieur et de la vitesse effective - et non plus théorique - de la réduction de la variance dans la détermination des portefeuilles optimaux est loin d'être neutre. Pour une perte acceptée d'un maximum de 3% notre investisseur se retrouve entièrement investi en actions après 15 ans donc pendant une durée voisine de 25 ans. Le poids des supports obligataires est presque devenu négligeable.

Graphiques 15a et 15b – Frontières efficaces et allocations – VaR semi-paramétrique - USA



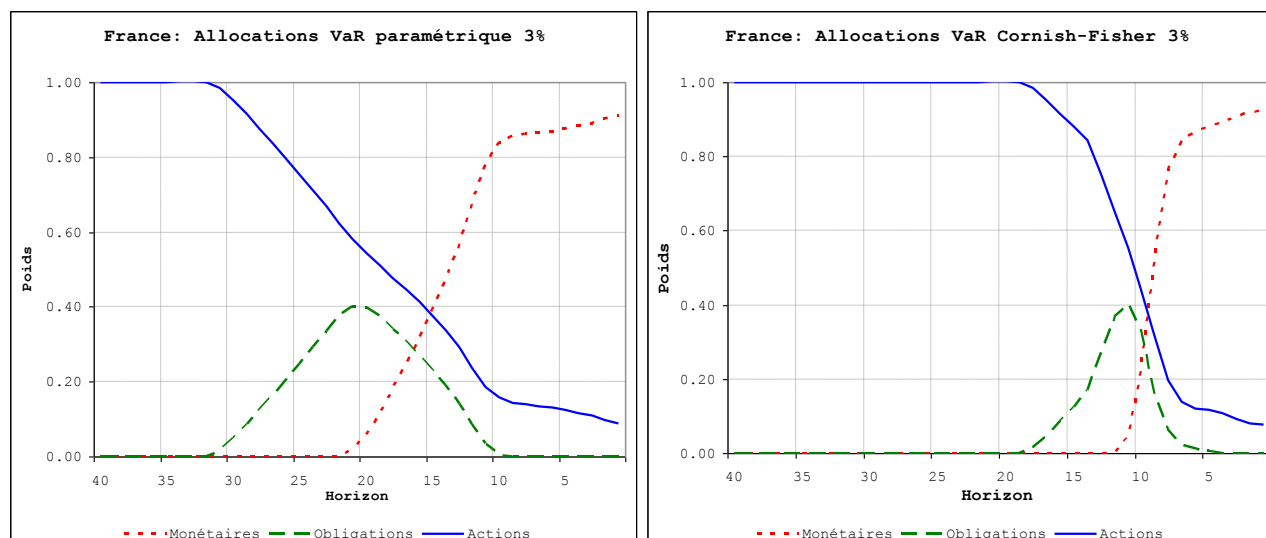
La valeur médiane de la distribution des rendements est supérieure à celle déterminée par le programme paramétrique (5.30% contre 4.30%, graphiques 16a et 16b). Il en va de même pour le premier percentile (2.4% contre 2.3%). Le taux de remplacement médian domine également celui estimé à partir de la grille des allocations paramétriques. Il ressort à pratiquement 34.3% du revenu disponible des ménages contre 27.9% précédemment.

Graphiques 16a et 16b – Rendements et taux de remplacement – VaR semi-paramétrique - USA



On retrouve les mêmes caractéristiques sur les séries françaises déflatées hors périodes de guerre (graphiques 17a et 17b) : pour une probabilité de perte donnée (en l'occurrence une VaR de 3% au seuil de confiance de 99%), les frontières VaR optimales déterminent une plus grande quantité d'actifs risqués dans le cas semi paramétrique où les moments d'ordre supérieur et la vitesse de réduction de la variance propre à chaque actif sont pris en compte.

Graphiques 17a et 17b – Allocations – VaR paramétrique vs VaR semi-paramétrique : France



2.3. Le classement des stratégies

En dehors des représentations usuelles, afin de hiérarchiser la performance des stratégies d'allocations simulées, une solution consiste à se référer au critère de dominance stochastique du premier et du second ordre. Rappelons qu'au premier ordre, une variable aléatoire F domine une variable aléatoire G si leur fonction de répartition vérifie la relation : $F(x) \leq G(x), \forall x \in [a, b]$

C'est-à-dire que la distribution de F accorde des probabilités plus faibles aux valeurs risquées (faibles) de x et des probabilités plus fortes aux valeurs élevées de x . Ce qui revient à dire que

les probabilités sont faiblement concentrées sur les rendements faibles et fortement concentrés sur les forts rendements.

Dans les cas plus équivoques, on peut recourir à la notion de dominance stochastique du second ordre pour trancher entre la performance des stratégies d'investissement. On parle de dominance stochastique de second ordre de F sur G si :

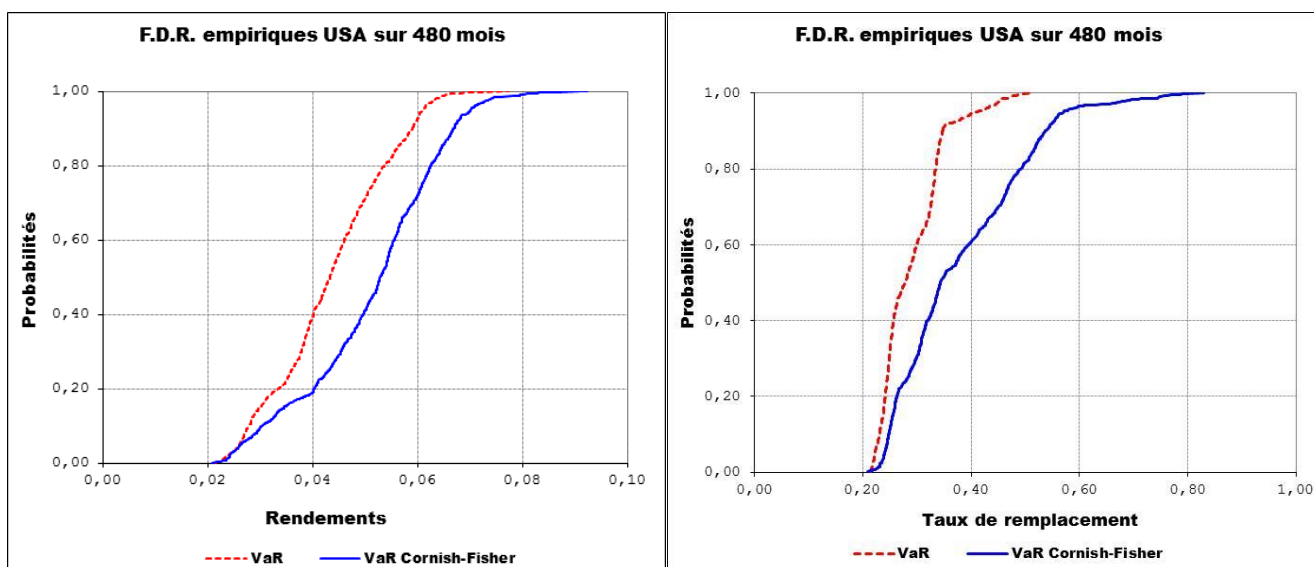
$$\forall x \in [a, b], T(x) = \int_a^x (G(t) - F(t)) dt \geq 0$$

Cela signifie que pour tout x , la masse des probabilités où F est supérieur à G est supérieure à la masse des probabilités où G est supérieur à F .

On l'a vu, la prise en compte des moments d'ordre supérieur et de la vitesse observée de réduction du risque des placements, déterminent des espérances de rendement supérieures à celles calculées à partir du modèle théorique qui reproduit les caractéristiques d'une loi gaussienne. La hiérarchie des stratégies ne peut toutefois pas être établie à partir d'une simple comparaison des rendements médian ou moyen. Il est également nécessaire de tenir compte de la volatilité des rendements autour de leur moyenne. Afin de classer la performance des stratégies d'allocations simulées, une solution consiste à se référer au critère de dominance stochastique qui, au premier ordre, repose sur la comparaison des fonctions de répartition des rendements.

Sur les graphiques qui représentent les fonctions cumulatives de probabilités des rendements (graphiques 18a et 18c), on constate que la stratégie CFVaR domine stochastiquement à l'ordre 1 la stratégie déterminée par le critère de VaR. La comparaison des distributions de taux de remplacement (graphiques 18b et 18d) confirme sans équivoque la supériorité¹¹ des allocations calculées à partir du programme semi-paramétrique qui, en dépit d'une proportion d'actions beaucoup plus substantielle, détermine des taux de remplacement minimum supérieurs à ceux calculés à partir de l'autre modèle¹² de gestion.

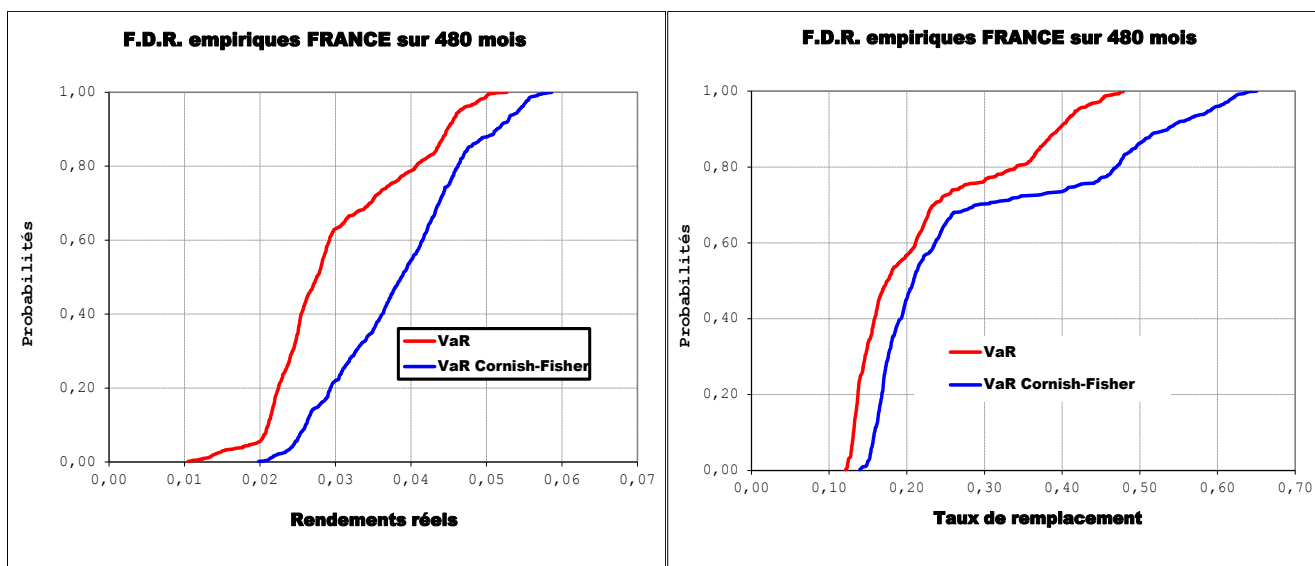
Graphiques 18a et 18b – fonctions cumulatives de probabilités de rendements et de taux de remplacement – VaR paramétrique vs non paramétrique (CF VaR) – US



¹¹ Les tests de dominance stochastique ont été corroborés par des tests de Kolmogorov-Smirnov (voir annexe 4 en fin de document).

¹² Nous avons également fait une comparaison avec les techniques les plus courantes d'assurance de portefeuille, notamment le « Stop-Loss » et le « CPPI ». Les résultats montrent que la stratégie CFVaR détermine des fonctions de répartition des rendements plus concentrées que les autres méthodes d'assurance (voir annexe 3 en fin de document).

Graphiques 18c et 18d – fonctions cumulatives de probabilités de rendements et de taux de remplacement – VaR paramétrique vs non paramétrique (CF VaR) – France

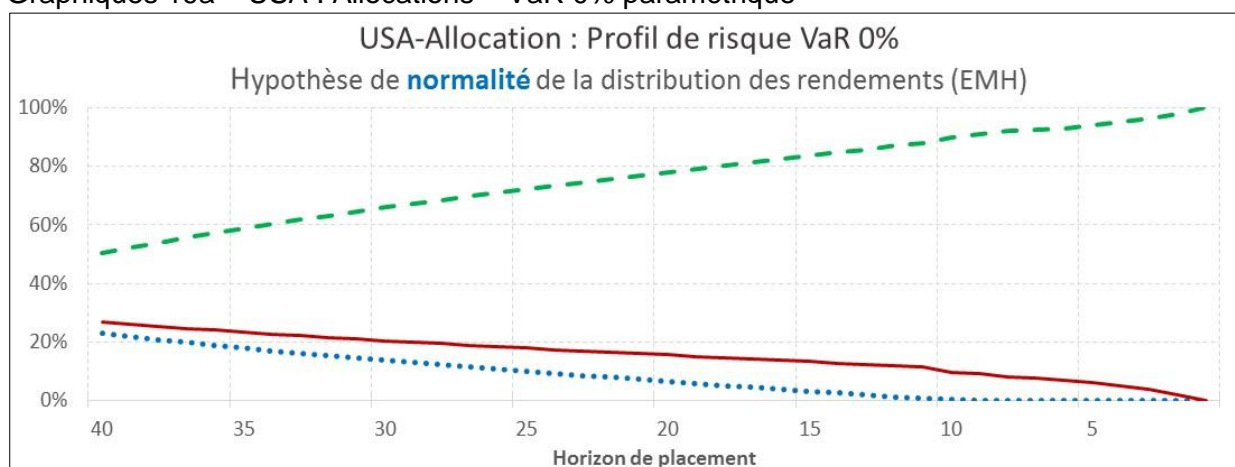


En termes de dominance stochastique, nous obtenons des résultats similaires dans les deux pays, pour des investisseurs dont l'horizon de placement est compris entre 10 et 40 ans (voir en annexe).

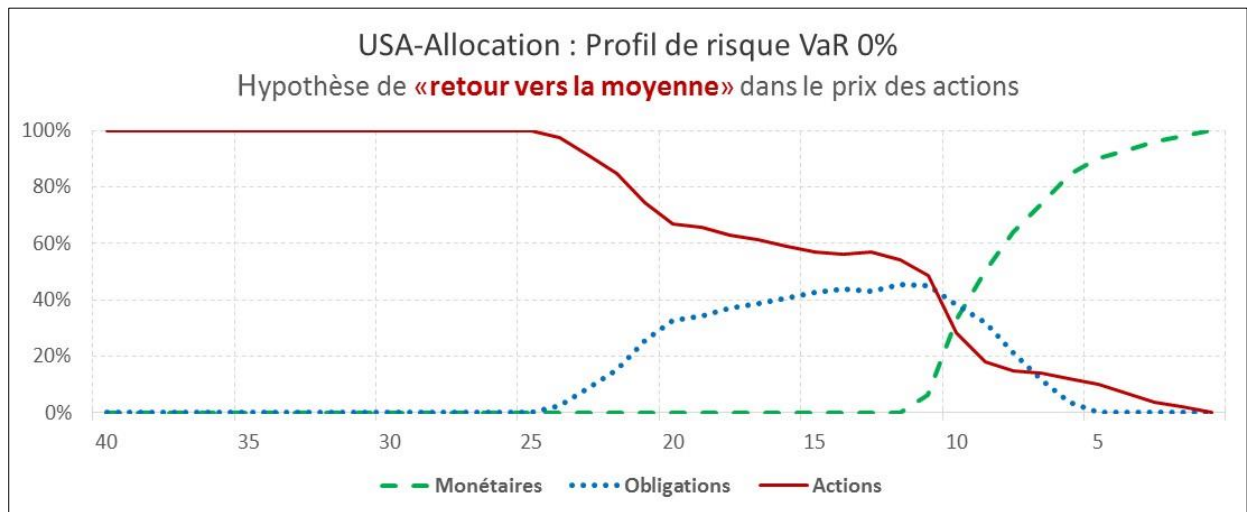
2.4. L'exemple d'une Value-at-Risk nulle

Le cas où le risque de perte en capital accepté par un agent est nul (VaR de 0%) détermine des résultats beaucoup plus contrastés que pour l'exemple détaillé plus haut pour une VaR de 3%. Les grilles de désensibilisation en fonction de la distance à l'échéance sont radicalement différentes dans les cas paramétrique et semi-paramétrique (cf. graphiques 19a et 19b). Pour le même agent totalement averse au risque, l'hypothèse articulée autour d'une stratégie gaussienne détermine un poids maximum de 27% pour les actions dans la structure des allocations de cycle de vie, tandis que l'hypothèse alternative définit un investissement massif en actifs risqués (100% d'actions à 25 ans du terme).

Graphiques 19a – USA : Allocations – VaR 0% paramétrique

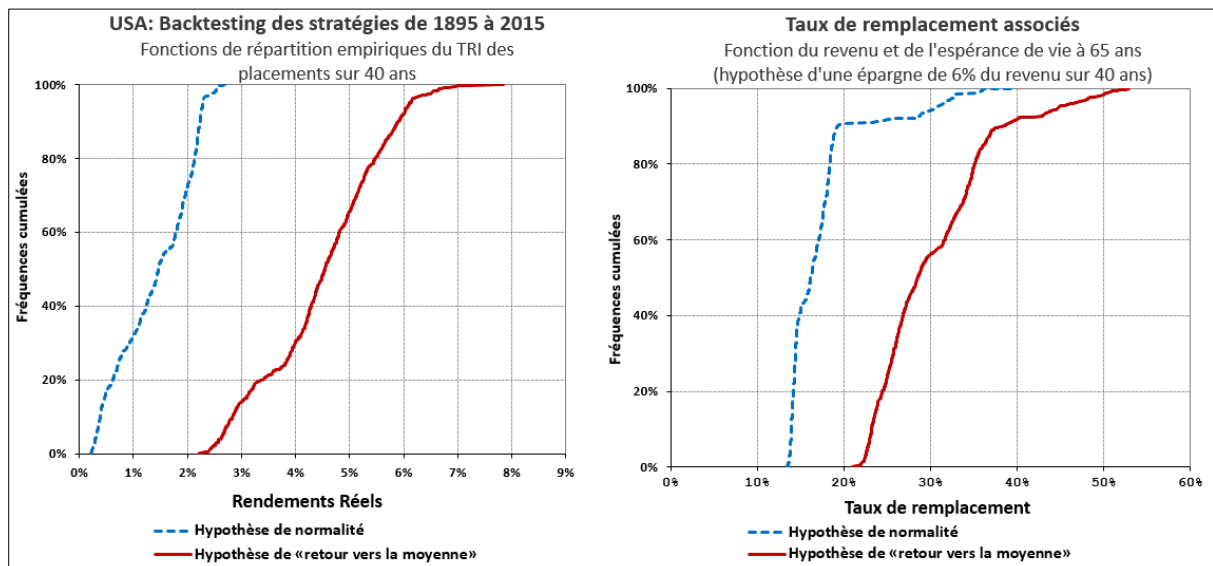


Graphiques 19b – USA : Allocations – VaR 0% semi-paramétrique



Sans surprise, on constate que le backtesting sur une fenêtre glissante de 480 mois de 1895 à 2015 aux Etats-Unis, détermine une dominance sans équivoque de la stratégie semi-paramétrique qui intègre la « vraie » réduction de la variance (graphique 20). On déduit de cet exercice que plus un individu aura tendance à être averse au risque, plus les résultats en termes de performances seront divergents entre les deux stratégies d'allocation envisagées. A l'inverse le contraste entre les allocations de cycle de vie sera moins prononcé pour un agent « risk lover ».

Graphiques 20 – USA : Fonctions de répartition des rendements et des taux de remplacement : VaR 0% paramétrique vs non paramétrique



Cette remarque n'est pas neutre car la proportion d'individus « risk averse » est prépondérante. Arrondel et Masson (op.cit.) évaluent dans le cadre de l'enquête PATER¹³ l'aversion au risque γ

¹³ Enquête PATER-CEPREMAP : PATrimoine et préférences vis-à-vis du TEmps et du Risque.

en s'appuyant sur la méthodologie initiée par Barsky¹⁴ et al. (1997). Elle est fondée sur des choix hypothétiques de loteries concernant le revenu permanent de l'individu. Ce dernier se voit offrir différents contrats de travail (notés A, B, C en fonction de leur caractère plus ou moins risqué) à la place de celui actuel, générant un revenu de cycle de vie R : par exemple, un contrat où il a une probabilité 1/2 de doubler ce revenu et une probabilité 1/2 de gagner seulement λR ($\lambda < 1$). Dans le cadre standard de l'utilité espérée, un individu ayant une fonction d'utilité isoélastique V d'élasticité γ , préférera conserver son revenu R si et seulement si : $1/2V(2R) + 1/2V(\lambda R) \geq V(R)$. En faisant varier la valeur de λ , il est alors possible d'en déduire un intervalle pour l'aversion relative pour le risque γ : par exemple, si l'individu refuse le contrat pour $\lambda=2/3$ mais l'accepte pour $\lambda=4/5$, la valeur de γ se situe dans l'intervalle [2 ; 3,76].

En dépit l'instabilité inhérente à cette méthodologie – qui découle de son caractère abstrait, artificiel et trop complexe – la ventilation des individus dans les quatre classes de risque déterminées par l'enchaînement des loteries est éloquent. Les résultats, qui sont reproduits dans le tableau 6, pour la France (panel Pater) et les Etats-Unis (PSID¹⁵ survey) montrent que la classe des individus les plus risquophobes est prédominante (entre 44% et 53% en France d'après les enquêtes PATER 2007 et 2009, 49% aux Etats-Unis d'après l'enquête PSID 1996).

Tableau 6 – Aversion relative pour le risque en % de la population totale : comparaison France-Etats-Unis

Aversion relative pour le risque (γ)	Rejet du contrat A		Acceptation du contrat A	
	Rejet du contrat C	Acceptation du contrat C	Rejet du contrat B	Acceptation du contrat B
	$3,76 = <\gamma$	$2 = <\gamma < 3,76$	$1 = <\gamma < 2$	$\gamma < 1$
<i>États-Unis, 1996 (PSID)</i>	49,1	15,6	15,0	20,3
<i>France, 1998 (Insee)</i>	43,1	39,4	11,2	6,3
<i>France, 2007 (Pater)</i>	44,2	25,9	21,9	8,0
<i>France, 2009 (Pater)</i>	52,8	22,4	18,1	6,7

Source : enquêtes « Patrimoine », Insee, 1998 ; Pater, 2007 et 2009 ; PSID, 1996.

L'intérêt des questionnaires basés sur des choix hypothétiques de loteries réside dans le fait qu'il existe un lien entre la valeur du paramètre quantitatif d'aversion au risque γ , mesuré par l'enchaînement des loteries, et la demande d'actifs risqués. En effet, dans le cas le plus simple (théorie standard), concernant le choix entre un actif risqué dont le rendement a une espérance (μ) et un écart-type (σ), et un actif sans risque de rendement (r), la demande (p) d'actifs risqués dans le patrimoine s'écrit:

$$p = (\mu - r) / \sigma^2 \gamma$$

La demande (p) d'actifs risqués dépend donc:

=> de l'aversion relative au risque (γ)

Des anticipations des agents sur:

=> l'espérance l'actif risqué (μ)

¹⁴ Barsky R.B., Kimball M.S., Juster F.T. et Shapiro M.D. (1997), «Preference Parameters and Behavioral Heterogeneity: An Experimental Approach in the Health and Retirement Survey», Quarterly Journal of Economics, 112 (2), pp. 537-580.

¹⁵ Panel Study of Income Dynamics (1996) - 4, 800 households.

- => la volatilité l'actif risqué (σ)
- => l'espérance l'actif sans risque (r)

Sous certaines hypothèses, l'aversion au risque permet donc le calcul d'une Value-at-Risk. Dans le cas paramétrique – hypothèse de distribution gaussienne des rendements des actifs – la VaR s'exprime en fonction de la moyenne et de la variance déterminées par la demande (p) d'actifs risqués :

$$VaR_{(T,p)} = p \cdot (\mu_T - r) + p \cdot \sigma_T \cdot k_{(1-\alpha)}$$

avec :

$k_{(1-\alpha)}$: le quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ au seuil de probabilité $1-\alpha$

Ce type de questionnaire permet donc d'estimer la Value-at-Risk moyenne acceptée par les individus risquophobes (rejet du contrat A et rejet du contrat C).

On constate que l'aversion au risque des individus de la classe qui refusent tous les contrats n'est pas bornée $\gamma \in [7.53 ; +\infty]$. Pour évaluer la VaR moyenne de la classe, on retient la valeur moyenne estimée dans le panel PSID 1996, soit $\gamma=33,9$. Sous cette hypothèse, en reprenant les valeurs moyennes de rendements réels des actifs aux Etats-Unis (Tableau 2a) on détermine une VaR à 95% proche de 0% pour la classe qui regroupe les plus risquophobes.

Les stratégies d'allocation d'actifs reposant sur le critère classique « espérance-variance », qui restent majoritairement préconisées par les intermédiaires financiers, pénalisent donc presque 50% des individus, puisque les divergences de performances entre les stratégies paramétrique et semi-paramétrique sont d'autant plus importantes que les épargnants sont averse aux risques.

2.5. En guise de conclusion

Les propriétés statistiques des différents actifs font apparaître qu'à long terme les actions procurent un risque sensiblement moins élevé que les autres actifs financiers. En outre, les propriétés de retour à la moyenne des actions justifient qu'elles soient utilisées dans une stratégie de cycle de vie comme « option par défaut » de plans d'épargne retraite.

Cela dit, la distribution non gaussienne des actions justifie également d'utiliser comme critère d'allocation non plus une VaR paramétrique mais une VaR semi-paramétrique, ici la VaR de Cornish-Fisher (CF VaR). En comparatif, les résultats sont saisissants : la VaR semi paramétrique aboutit à une allocation en actions bien plus riche que l'allocation par la VaR paramétrique. En outre, la comparaison des distributions de taux de remplacement confirme sans équivoque la supériorité des allocations calculées à partir du programme semi-paramétrique aboutit à des taux de remplacement minimum supérieurs à ceux calculés à partir de l'autre modèle de gestion.

Cette conclusion dépasse la question technique de l'estimation de VaR dans un contexte de distribution non gaussienne ; elle dit que le caractère non gaussien de la distribution des actions doit être pris en compte dans toute allocation à long terme et que les simulations stochastiques traditionnelles donnent des résultats biaisés et des conclusions erronées sur les modes de gestion de l'épargne de long terme.

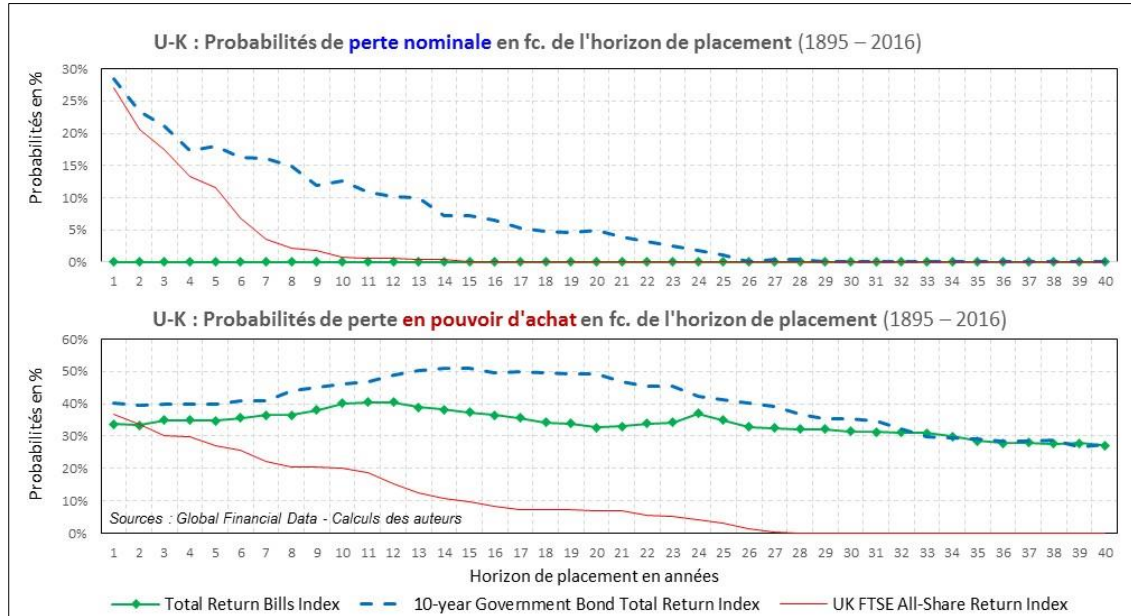
Naturellement, les conclusions relatives à la distribution du rendement des actifs financiers sont sujettes aux critiques traditionnelles des procédures de backtesting et n'ont pas de caractère prédictif. Par exemple, la généralisation des politiques d'assouplissement quantitatif (QE) pourrait nourrir de nouvelles bulles spéculatives en gonflant artificiellement le prix des actifs et modifier temporairement leurs caractéristiques « rendement-risque ».

3. Annexes

3.1. Annexe 1 : Profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs

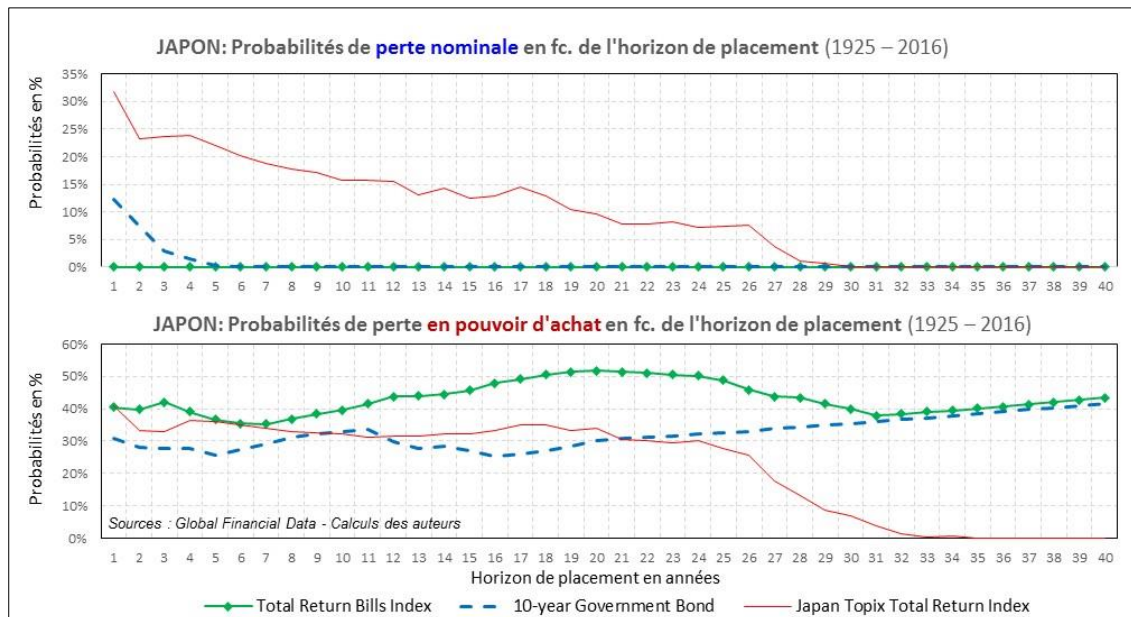
Le calcul des probabilités de pertes en fonction de l'horizon de placement a été réalisé pour le Royaume-Uni et le Japon afin de conforter les résultats établis pour la France et les USA.

Graphique 21 – profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs – UK



Les probabilités calculées pour ces deux nouveaux pays situés sur des continents distincts confirment que sur les horizons longs, seuls les placements en actifs risqués ont surperformé l'évolution des prix.

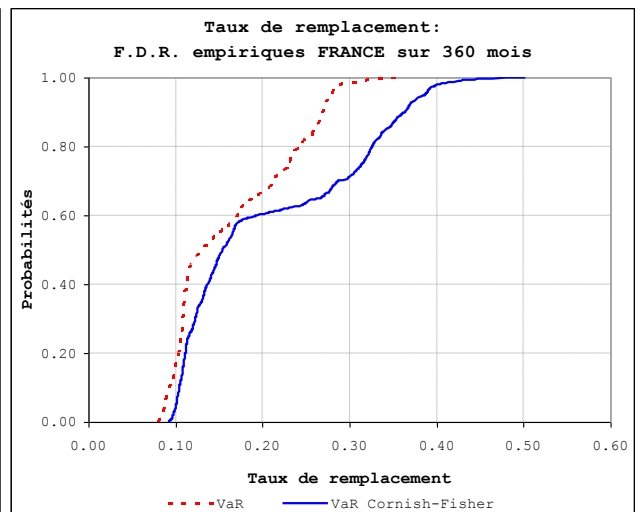
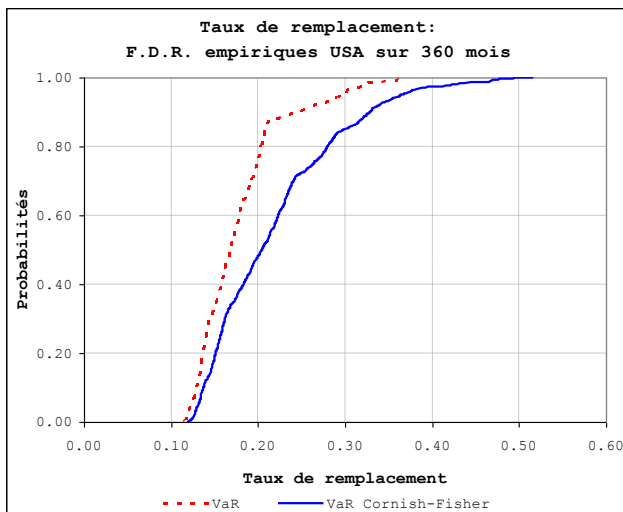
Graphique 22 – profils de pertes en fonction de la durée de détention des actifs – Japon



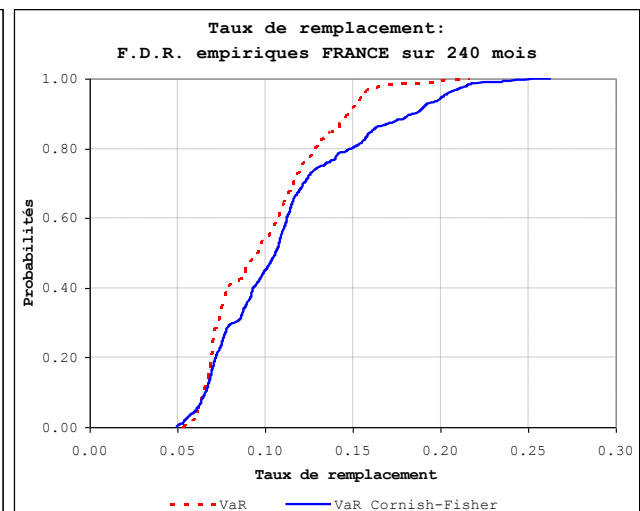
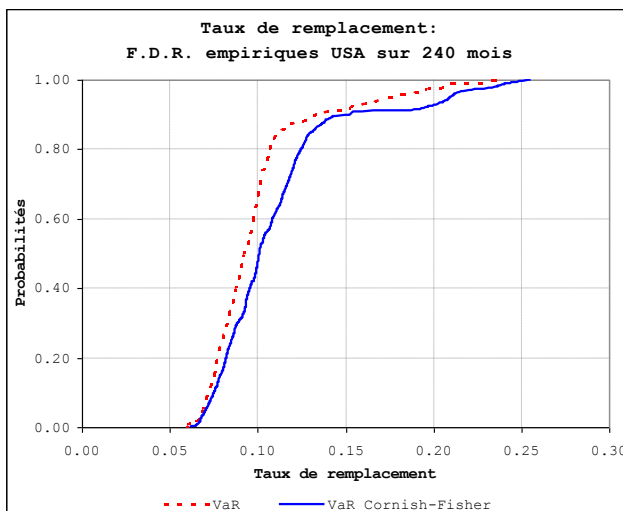
3.2. Annexe 2 : Synthèse des résultats pour des durées de placement < à 40 ans.

Graphiques 23a à 23f – fonctions de répartition des taux de remplacement – VaR vs CFVaR

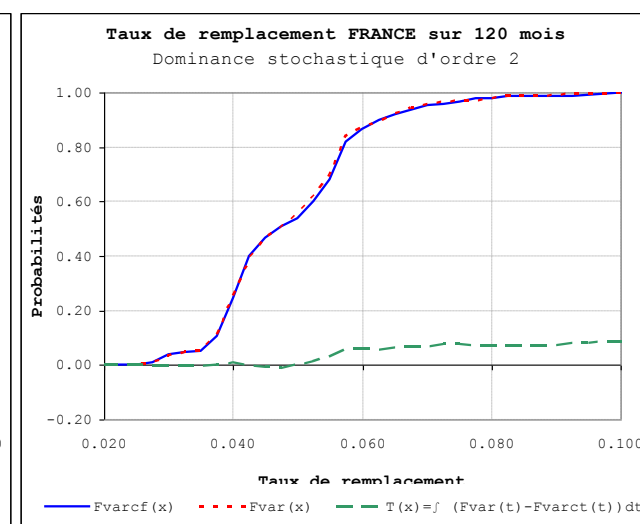
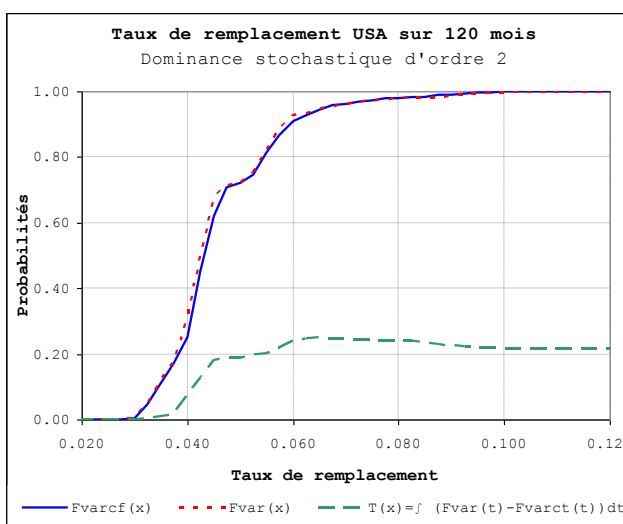
- **Horizon d'investissement 360 mois**



- **Horizon d'investissement 240 mois**



- **Horizon d'investissement 120 mois**



Contrairement aux horizons longs, pour les investissements sur 10 années, la lecture des graphiques des fonctions de répartition ne donne pas une information directe sur la hiérarchie des stratégies d'investissement. Il est nécessaire de recourir au critère de dominance stochastique de second ordre pour juger de la supériorité des stratégies semi paramétriques. Concernant les USA, le test de dominance stochastique d'ordre 2 est sans ambiguïté:

$$F_{CFVaR} \text{ domine } F_{VaR} \text{ à l'ordre 2, en effet, } \forall x \in [a, b], T(x) = \int_a^x (F_{var}(t) - F_{CFVaR}(t))dt \geq 0$$

Les allocations calculées à partir d'une VaR de Cornish-Fisher dominant donc celles déterminées à partir d'une VaR paramétrique. Dans le cas de la France les conditions de la dominance de second ordre ne sont pas respectées sur le début de la distribution des taux de remplacement. On ne peut donc pas établir de hiérarchie stricte des stratégies d'investissement.

Tableau 7a – USA : Résumé des principaux résultats

USA: LifeCycle Asset Allocation [1895-2011]									
Summary Statistics									
	CF VaR strategy				VaR strategy				
	10 years	20 years	30 years	40 years	10 years	20 years	30 years	40 years	
Holding periods	10 years	20 years	30 years	40 years	10 years	20 years	30 years	40 years	
Risk criteria	CFVaR=3%	CFVaR=3%	CFVaR=3%	CFVaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	
Average return	1.7%	3.9%	4.7%	5.1%	1.6%	2.7%	3.7%	4.4%	
Standard deviation	2.5%	2.8%	1.8%	1.3%	2.6%	2.1%	1.5%	1.1%	
Median Return	2.2%	3.6%	4.2%	5.3%	2.1%	2.5%	3.5%	4.3%	
1st centile (return)	-3.8%	-1.9%	1.5%	2.4%	-4.3%	-1.7%	0.5%	2.3%	
99th centile (return)	7.2%	9.4%	8.5%	8.0%	7.1%	7.1%	6.7%	6.5%	
Skewness	-0.15	0.08	0.46	-0.31	-0.21	0.13	0.31	0.06	
Kurtosis	2.51	2.01	2.10	2.63	2.63	2.05	2.43	2.30	
Average replacement rate	4.6%	11.1%	21.9%	38.1%	4.6%	9.9%	17.8%	29.1%	
Median replacement rate	4.4%	10.1%	20.4%	34.3%	4.3%	9.2%	16.8%	27.9%	
1st centile (replacement rate)	3.1%	6.6%	12.5%	22.6%	3.1%	6.2%	11.7%	21.7%	
99th centile (replacement rate)	8.8%	24.1%	46.7%	74.6%	9.2%	21.5%	35.8%	47.2%	
Stochastic dominance tests									
F_{CFVaR} vs F_{VaR}	10 years		20 years		30 years		40 years		
	F_{CFVaR}	SOSD	F_{VaR}	F_{CFVaR}	FOSD	F_{VaR}	F_{CFVaR}	FOSD	F_{VaR}

FOSD : first-order stochastically dominates – SOSD : second-order stochastically dominates

Tableau 7b – France : Résumé des principaux résultats

FRANCE: LifeCycle Asset Allocation [1895-2011] hors périodes de guerre [1915-1920] and [1940-1948]

FRANCE: LifeCycle Asset Allocation [1895-2011] hors périodes de guerre [1915-1920] and [1940-1948]									
Summary Statistics									
	CF VaR strategy				VaR strategy				
	10 years	20 years	30 years	40 years	10 years	20 years	30 years	40 years	
Holding periods	10 years	20 years	30 years	40 years	10 years	20 years	30 years	40 years	
Risk criteria	CFVaR=3%	CFVaR=3%	CFVaR=3%	CFVaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	VaR=3%	
Average return	1.8%	3.3%	3.8%	3.9%	1.5%	2.1%	2.6%	3.0%	
Standard deviation	3.2%	3.4%	2.1%	0.9%	2.8%	2.4%	1.8%	0.9%	
Median Return	1.8%	3.2%	4.0%	3.9%	1.1%	1.7%	2.2%	2.8%	
1st centile (return)	-6.4%	-3.6%	0.0%	2.1%	-5.7%	-2.2%	-0.7%	1.3%	
99th centile (return)	9.4%	10.5%	8.9%	5.6%	7.2%	8.3%	7.5%	5.0%	
Skewness	-0.07	0.06	0.28	0.05	-0.22	0.56	0.84	0.54	
Kurtosis	3.24	2.33	2.51	2.16	3.26	2.82	3.41	2.31	
Average replacement rate	4.9%	11.2%	20.7%	28.4%	4.9%	10.0%	16.4%	22.2%	
Median replacement rate	4.7%	10.6%	15.4%	20.9%	4.7%	9.6%	13.1%	17.5%	
1st centile (replacement rate)	2.7%	5.3%	9.5%	14.4%	2.8%	5.7%	8.3%	12.3%	
99th centile (replacement rate)	9.3%	22.6%	42.5%	62.5%	8.9%	19.5%	31.9%	46.2%	
Stochastic dominance tests									
F_{CFVaR} vs F_{VaR}	10 years		20 years		30 years		40 years		
	F_{CFVaR}	<i>Inconclusive</i>	F_{VaR}	F_{CFVaR}	FOSD	F_{VaR}	F_{CFVaR}	FOSD	F_{VaR}

FOSD : first-order stochastically dominates – SOSD : second-order stochastically dominates

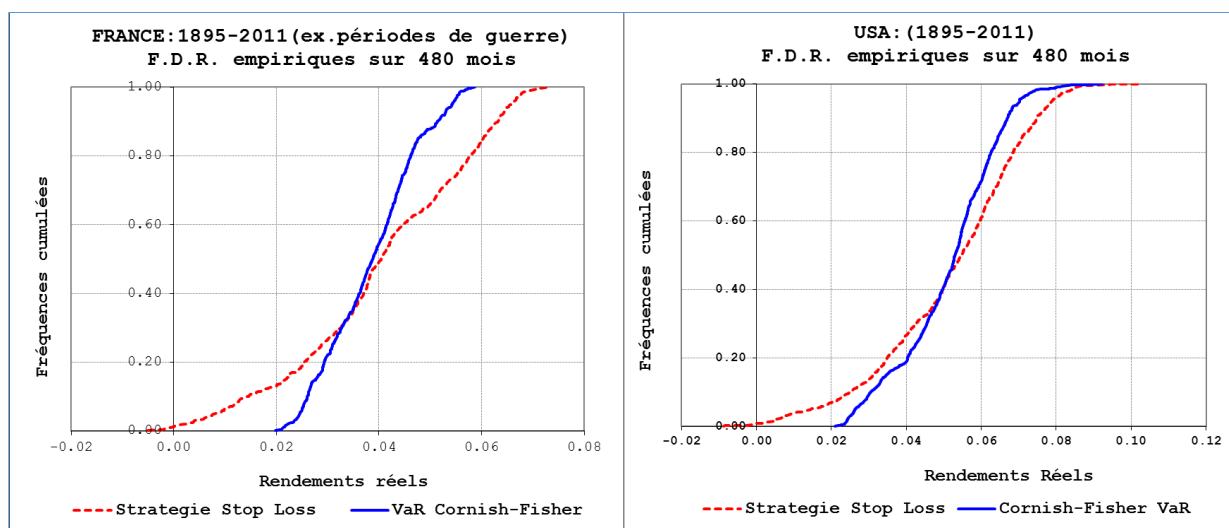
3.3. Annexes 3 : Stratégies alternatives d'assurance de portefeuille

3.3.1. STOP-LOSS

La méthode « Stop-Loss » est la stratégie d'assurance de portefeuille la plus intuitive. Si, par simplification, on limite l'univers de gestion deux actifs, l'un risqué et l'autre non, alors la méthode Stop-Loss consiste à vendre l'indice risqué lorsque la valeur de ce dernier touche la « valeur plancher », et consécutivement à placer l'argent au taux sans risque. La valeur plancher est définie comme le montant investi actualisé en fonction de du taux sans risque et de l'horizon de placement. Le plancher est progressivement désactualisé. On achètera à nouveau l'indice risqué lorsque sa rentabilité cumulée depuis l'origine, sera supérieure à celle de l'investissement sans risque.

Nous avons procédé à un back test de la stratégie Stop-Loss à partir des historiques des performances des placements monétaires, obligataires et actions. Nous présentons les résultats sur une fenêtre glissante de 480 mois de 1895 à 2011. La distribution des rendements au terme est comparée à celle obtenue par la stratégie CFVaR. Les graphiques ci-dessous comparent les fonctions de répartition des rendements associées à ces deux stratégies.

Graphiques 24 – Stratégie « Stop Loss » vs « CFVaR »

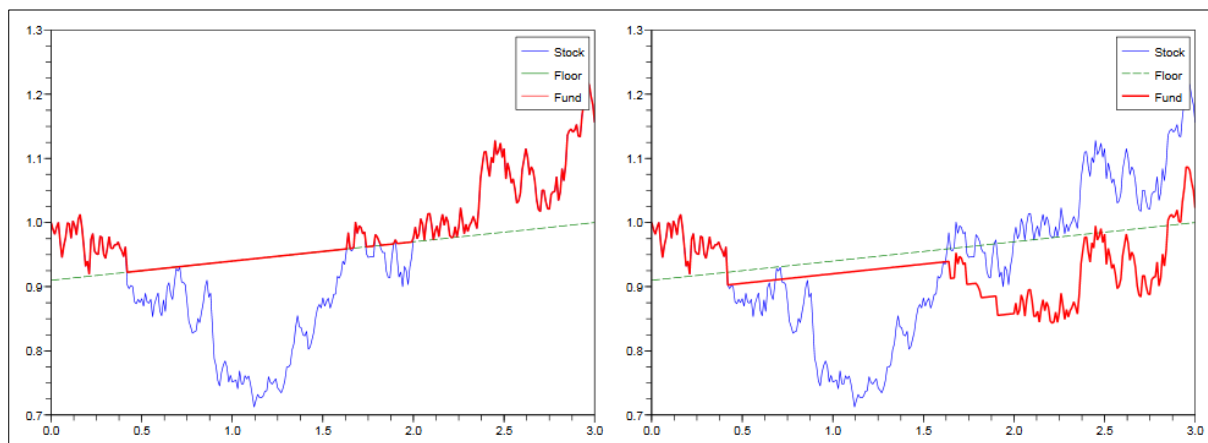


La comparaison montre qu'il n'y a pas de dominance stochastique d'une stratégie sur l'autre. Toutefois, la fonction de distribution cumulée des rendements réels est plus concentrée pour la stratégie CFVaR que pour la stratégie stop-loss. On en conclut qu'un investisseur averse au risque préférera la stratégie VaR plutôt que la stratégie Stop-Loss. La remarque est valable tant pour la France que pour les Etats-Unis.

Indépendamment des coûts de transaction qui peuvent être prohibitifs, on note que la garantie en capital n'est pas assurée avec la stratégie Stop-Loss dans un marché volatil, sauf à supposer que les arbitrages entre actif risqué et sans risque sont réalisés au moment où le portefeuille touche le plancher, ce qui n'est pas réaliste en pratique. Les graphiques¹⁶ ci-dessous, qui présentent les performances théoriques (à gauche) et pratiques (à droite) des stratégies Stop-Loss, illustrent clairement le phénomène.

¹⁶ Ce graphique est emprunté à Peter Tankov « Introduction to portfolio insurance » (http://www.cmap.polytechnique.fr/IMG/pdf/Peter_Tankov_2411.pdf)

Graphiques 25 – Performances théorique et pratique du Stop-Loss



3.3.2. CPPI

Le CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) ou gestion à "cousin" est une méthode alternative à l'assurance de portefeuille à base d'options (OBPI). L'intérêt de la technique est qu'elle évite la manipulation d'instruments financiers sophistiqués qui sont rarement émis à des horizons longs et, de ce fait, peu adaptés aux placements de cycle de vie.

En outre, la méthode des options ne garantit la valeur du capital qu'à l'échéance, alors que la gestion à coussin donne l'assurance théorique de ne pas descendre en dessous du plancher tout au long de la période d'épargne.

La gestion CPPI est relativement récente. Elle a été introduite par Perold (1986) sur des instruments à taux fixes, puis Black et Jones (1987) ont étendu cette technique en utilisant des sous-jacents de type actions. Plus récemment, Bertrand et Prigent (2002) ont utilisés la théorie des valeurs extrêmes afin de déterminer les paramètres de la méthode.

En pratique une gestion CPPI consiste à gérer de façon dynamique l'exposition aux actifs risqués et non risqués, afin de garantir un niveau prédéterminé du capital investi. La méthode peut se formaliser de la manière suivante :

Soit un portefeuille composé d'un actif risqué, qui suit un mouvement brownien géométrique, en quantité A et d'un actif sans risque, qui croît au taux constant r , en quantité M , alors, au temps t , la valeur totale du portefeuille V se note :

$$V_t = A_t + M_t$$

Le coussin C est égal à la valeur V du portefeuille minoré du niveau « plancher » P .

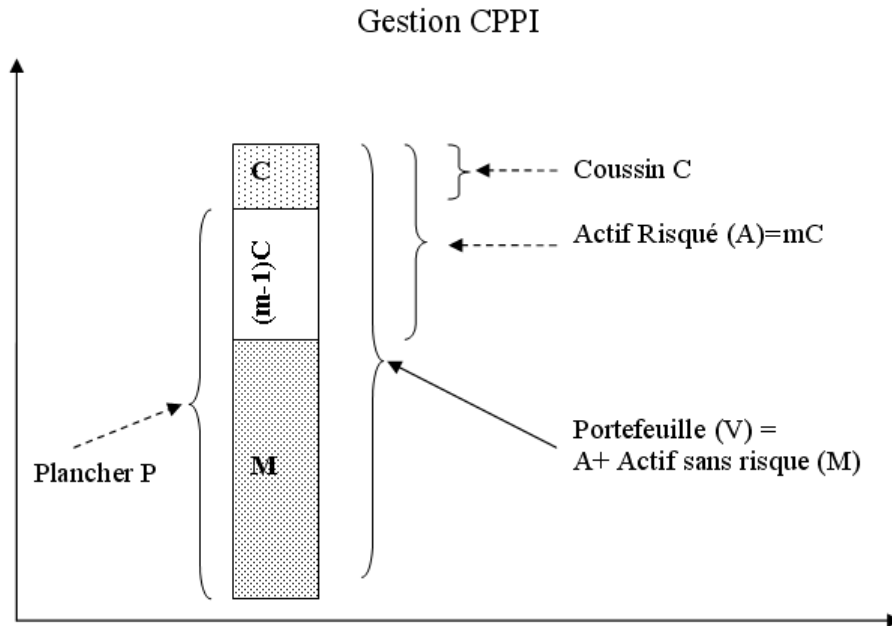
$$C_t = V_t - P_t$$

Le plancher P à l'instant t est obtenu en calculant la valeur actuelle du capital garanti G à l'échéance T au taux sans risque r .

$$P_t = Ge^{-r(T-t)}$$

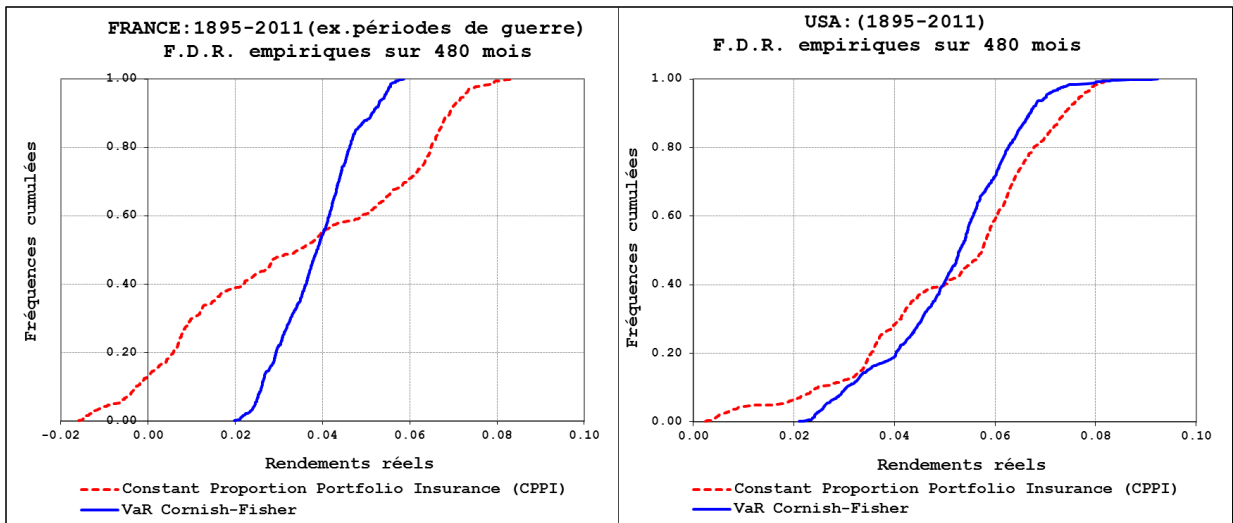
L'exposition au risque du portefeuille est déterminée par la relation $A_t = mC_t$ dans laquelle la valeur de l'actif risqué est un multiple constant du coussin. Le reste du portefeuille est investi sur l'actif sans risque à hauteur de $M_t = V_t - A_t$.

Graphiques 26 – assurance de portefeuille par la méthode du coussin (CPPI)



La stratégie de gestion consiste à arbitrer entre actif risqué et non risqué afin de respecter sur toute la période d'investissement l'égalité $A_t = mC_t$. L'exposition au risque est fonction du levier m . La baisse maximale tolérée sur A sans mise en cause de la garantie est égale à $1/m$. En effet, la baisse ΔA de la valeur de l'actif risqué qui annule le coussin correspond à un recul relatif de $\Delta A/A = C/mC$, soit $1/m$. Pour m donné, son inverse représente l'amplitude de perte maximale que l'on peut accepter sur l'actif risqué entre deux rebalancements.

Graphiques 27 – Stratégie « CPPI » vs « CFVaR »



Comme précédemment décrit, la comparaison entre les fonctions de distribution cumulées montre que la variance des rendements au terme déterminés par la stratégie CFVaR, est plus faible que celle induite par une assurance de type CPPI. Un épargnant averse au risque choisira la stratégie CFVaR plutôt que la « Constant Proportion Portfolio Insurance ».

3.4. Annexe 4 : Test de dominance stochastique de Kolmogorov-Smirnov pour deux échantillons

Le test de dominance stochastique du premier ordre de F sur G suppose que $\forall x \in \mathbb{R} F(x) \leq G(x)$. Ce critère détermine un classement partiel des distributions (en termes d'ordre). On peut corroborer le verdict de la méthode en faisant appel à un test statistique non paramétrique plus formel de type Kolmogorov-Smirnov. Soient F et G les fonctions de répartition empiriques (CDF) des rendements de deux stratégies d'investissement que l'on désire comparer. On considère deux échantillons indépendants X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. de CDF F de taille n et $X_{\{n+1\}}, X_{\{n+2\}}, \dots, X_{\{n+m\}}$ de CDF G de taille m . Alors le test bilatéral de test de Kolmogorov-Smirnov pour deux échantillons s'écrit :

$$H_0 : F(x) - G(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$H_1 : F(x) - G(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le test d'ajustement bilatéral permet de tester si deux échantillons indépendants sont extraits de la même population (ou de populations ayant la même distribution). Le rejet de l'hypothèse nulle H_0 par le test bilatéral indique que les distributions empiriques sont dissemblables. Dans ce cas, pour statuer sur la dominance stochastique de la CDF F sur celle de G , on applique le test unilatéral de Kolmogorov-Smirnov :

$$H_0 : F(x) - G(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$H_1 : F(x) - G(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée on en déduit qu'il y a dominance stochastique de premier ordre de F sur G . L'enchaînement des deux tests permet donc de juger du degré de similarité entre les distributions empiriques des rendements associés à deux stratégies d'allocation d'actifs et de la domination stochastique potentielle de l'une des deux stratégies. Afin de développer un test formel, les tests unilatéral et bilatéral peuvent être reformulés comme suit:

$$H_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| = 0 \quad vs \quad H_1 : \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \neq 0$$

et

$$H_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) - G(x)\} = 0 \quad vs \quad H_1 : \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) - G(x)\} > 0$$

Le test bilatéral de Kolmogorov-Smirnov s'écrit alors:

$$\delta_N = \sqrt{\frac{n * m}{N}} \max_{1 \leq t \leq N} |T_N(Z_t)|$$

Le test unilatéral est donné par la formule:

$$\eta_N = \sqrt{\frac{n * m}{N}} \max_{1 \leq i \leq N} \{T_N(Z_i)\}$$

avec $T_N(Z_i) = F_n(X_i) - G_m(X_i)$, et $N = n + m$

F_n et G_m représentent les fonctions de répartition empiriques pour F et G . Kolmogorov et Smirnov donnent la distribution asymptotique de δ_N et η_N sous H_0 telle que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\delta_N > v) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 v^2) \text{ et } \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\eta_N > v) = \exp(-2v^2)$$

Le tableau des résultats concernant les tests de dominance entre les deux stratégies d'investissement VaR et est CFVaR dans le cas des Etats-Unis est restitué ci-dessous:

Tableau 8 – Résultats des tests de dominance stochastique de Kolmogorov-Smirnov

Tests de Dominance Stochastique USA (1895-2011) : stratégies VaR vs CF-VaR (480 mois)			
Rendements			
H0: $F(x) - G(x) = 0$ vs H1: $F(x) - G(x) \neq 0$ & H0: $F(x) - G(x) \leq 0$ vs H1: $F(x) - G(x) > 0$			
Test bilatéral		Tests unilatéral	
Diagnosis	H1	Diagnosis	H0
P-Value	0,0000%	P-Value	99,8906%
Test Statistic	0,3106	Test Statistic	0,0011
Taux de remplacement			
H0: $F(x) - G(x) = 0$ vs H1: $F(x) - G(x) \neq 0$ & H0: $F(x) - G(x) \leq 0$ vs H1: $F(x) - G(x) > 0$			
Test bilatéral		Tests unilatéral	
Diagnosis	H1	Diagnosis	H0
P-Value	0,0000%	P-Value	99,0194%
Test Statistic	0,397186147	Test Statistic	0,003246753
<i>F correspond à la cdf de la stratégie CFVaR et G à celle de la stratégie VaR paramétrique. Seuil de signification: 5%</i>			

Comme on pouvait s'y attendre, tant pour la distribution des rendements que des taux de remplacement, les résultats montrent que le test bilatéral rejette l'hypothèse nulle de l'égalité des distributions avec une très faible p-value. Les tests unilatéraux confirment avec des p-value très élevées (>99%) l'hypothèse nulle H_0 , en d'autres termes on a : $F(x) \leq G(x) \quad \forall x$. On en déduit que la stratégie CFVaR domine stochastiquement à l'ordre 1 la stratégie déterminée par le critère de VaR.

3.5. Annexe 5 : « Great Recession » et « Great Depression » aux Etats-Unis

Les conclusions relatives à la distribution du rendement des actifs financiers sont sujettes aux critiques traditionnelles des procédures de backtesting et notamment à la décision d'intégrer ou non les événements rares dans l'analyse. Par exemple, la prise en compte de la période de crise de 2008 ou « Great Recession », est susceptible d'introduire un surcroît d'asymétrie négative. L'inclusion de cette crise exceptionnelle peut ainsi contribuer à donner plus d'importance au skewness qu'il n'en a durant les périodes de croissance "normales" ou de récessions passagères. Si la remarque est vraie, elle mérite toutefois d'être relativisée. L'effet de la « Great Recession » sur le prix des actifs est clairement visible : entre 2008 et 2014, le rendement des actions est caractérisé par un coefficient de skewness négatif plus prononcé et un excès de kurtosis manifeste (cf. tableau 9 ci-dessous).

Tableau 9 – Caractéristiques du S&P 500 de 1895 -2014

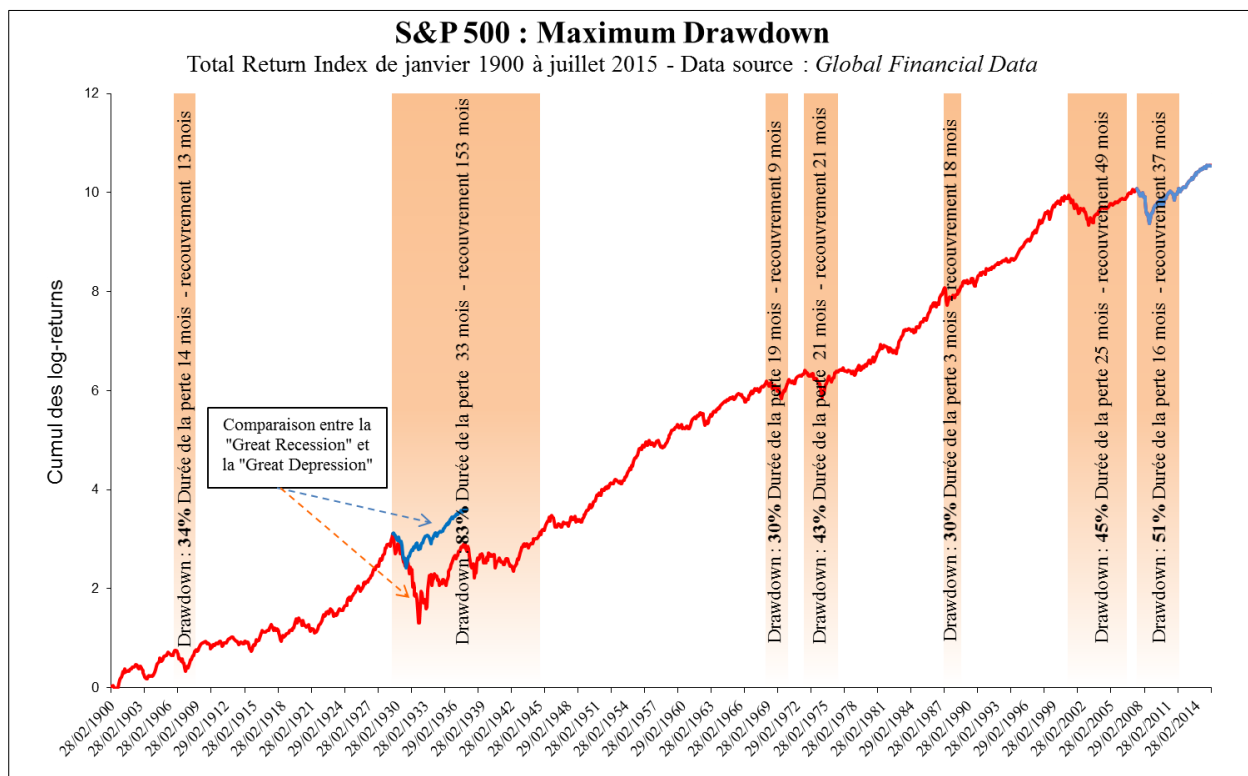
S&P 500 1895 -2014 (Total Returns annualisés)	
du 31-Jan-1895 au 31-Déc-2014	
	Horizon 12 mois
Nb. Observation	1428
1er percentile	-48.31%
Moyenne	6.23%
99ème percentile	45.12%
Volatilité	19.81%
Skewness	-0.57
Kurtosis (excess)	1.93
du 31-Jan-1950 au 31-Déc-2007	
	Horizon 12 mois
Nb. Observation.	684
1er percentile	-33.20%
Moyenne	7.36%
99ème percentile	39.36%
Volatilité	15.69%
Skewness	-0.52
Kurtosis (excess)	0.53
du 31-Jan-2008 au 31-Déc-2014	
	Horizon 12 mois
Nb. Observation.	72
1er percentile	-55.22%
Moyenne	8.64%
99ème percentile	40.21%
Volatilité	19.04%
Skewness	-1.8
Kurtosis (excess)	3.23

Cependant, l'impact de la crise financière sur les caractéristiques de la distribution du rendement des actions doit être tempéré. En effet, la « Great Recession » de 2008 concerne 72 observations mensuelles sur un total de 1428. De plus la comparaison entre la « Great

Recession» et la « Great Depression» de 1929 montre que la « Great Depression» reste sans conteste la plus profonde et la plus longue récession de l'histoire du monde industrialisé occidental.

Le graphique qui suit représente le "maximum drawdown"¹⁷ du S&P 500 calculé sur des données mensuelles de janvier-1900 à juillet-2015. L'analyse favorise la comparaison entre les deux crises. Pendant la « Great Depression» le S&P 500 a chuté de 83% en moins de 3 ans (33 mois). Il n'a rejoint son pic d'avant crise qu'en 1945 (soit un délai de recouvrement de 153 mois). Par comparaison, au cours de la « Great Recession» le S&P 500 a reculé de 51% en 16 mois et a rejoint son précédent sommet en 37 mois.

Graphiques 28 – SP 500 Maximum Drawdown de 1900-2015



¹⁷ Le max drawdown, ou « perte successive maximale », mesure la plus forte baisse dans la valeur d'un portefeuille. Précisément, il correspond à la perte maximale historique supportée par un investisseur qui aurait acheté au plus haut et revendu au plus bas.

4. Bibliographie

Antolin, P., Payet, S., and Yermo, J. (2010) "Assessing default investment strategies in Defined Contribution Pension Plans", OECD Journal: Financial Markets Trends, Vol. 2010, Issue n°1.

Arbulu P. (1998) Le marché parisien des actions au XIXe siècle : performance et efficience d'un marché émergent, Thèse de doctorat, Université d'Orléans.

Arrondel, L., Masson, A., (2011), L'épargnant dans un monde en crise : ce qui a changé, Collection du Cepremap, éditions Rue d'Ulm, Paris.

Balvers, R., Wu, Y. and Gilliland, E. (2000) "Mean reversion across national stock markets and parametric contrarian investment strategies", Journal of Finance, 55(2), 745-772.

Barsky R.B., Kimball M.S., Juster F.T. et Shapiro M.D. (1997), «Preference Parameters and Behavioral Heterogeneity: An Experimental Approach in the Health and Retirement Survey», Quarterly Journal of Economics, 112 (2), pp. 537-580.

Bec F., and Gollier C. (2007) "Assets Returns Volatility and Investment Horizon", IDEI Working Paper n° 467, IDEI, Toulouse, 2007.

Bekaert, G., and Wu, G. (2000) "Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets", Review of Financial Studies 13, 1-42.

Belaire-Franch, J., Contreras, D. (2004). "Ranks and signs-based multiple variance ratio tests", Working paper, Department of Economic Analysis, University of Valencia.

Bertrand, P., et Prigent, J-L., (2002), "Portfolio Insurance: the extreme value approach to the CPPI method", Finance, vol 23, 68-86.

Beshears J., Choi J., Laibson D., Madrian B. (2006) "The Importance of Default Options for Retirement Savings Outcomes: Evidence from the United States", NBER Working Paper No. 12009, National bureau of economic research, Cambridge, United states, February.

Black, F. et Jones, R., (1987), "Simplifying portfolio insurance", The Journal of Portfolio Management, 48-51.

Black, F., Scholes, M., (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81, pp.637-654.

Bodie, Z. (1995), « On the Risk of Stocks in the Long Run », Financial Analysts' Journal, mai-juin, pp. 18-22.

Borges, M. R. (2008) "Efficient market hypothesis in European stock markets", Technical University of Lisbon Working Paper Series, Working Paper No. WP 20/2008/DE/CIEF.

Bry, G., et Boschan, C., (1971), « Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Programs », National Bureau of Economic Research.

Burke J.V., Lewis A.S., and Overton M.L. (2005) "A Robust Gradient Sampling Algorithm for Nonsmooth, Nonconvex Optimization", SIAM Journal of Optimization, volume 15, No 3, pp. 751-779.

Chan, Kam C., Benton E. Gup, and Ming-Shiun Pan. "International stock market efficiency and integration: A study of eighteen nations." Journal of Business Finance & Accounting 24.6 (1997): 803-813.

Chernozhukov, V., Fernandez-Val, I., and Galichon, A. (2010) "Rearranging Edgeworth-Cornish-Fisher Expansions", Economic Theory, vol. 42, issue 2, pages 419-435.

Chetouane, M., (2011), Strategic asset allocation challenges for DC plan members, thèse de doctorat, Université Paris Dauphine.

Chow, K.V., Denning K.C. (1993) "A simple multiple variance ratio test", Journal of Econometrics, 58: 385-401.

Curtis F. E. and Overton, M. L. (2012) "A Sequential Quadratic Programming Algorithm for Nonconvex, Nonsmooth Constrained Optimization", Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 22, No. 2, pp. 474–500.

Curtis, F. E., and Que, X. (2013) "An Adaptive Gradient Sampling Algorithm for Nonsmooth Optimization", Optimization Methods and Software, vol. 28, iss. 6, pp. 1302-1324, 2013.

De Laulanié, J.-F., (2003), Les Placements de l'Épargne à long terme, 2^{ème} édition - Paris - Economica

Fama, E.F. (1965) "The Behavior of Stock Market Prices", Journal of Business, Volume 38, No1, pp. 34-105.

Fama, E., Fisher, L., Jensen, M., Roll R. (1969) "The adjustment of stock prices to new information ", International Economics Review, pp 2-21.

Fama, E., French, K. (1988). "Permanent and Temporary Components of Stock Prices", Journal of Political Economy, Vol. 96, No. 2: 247-273.

Friggit J., (2010), Le prix des logements sur le long terme, Conseil général de l'Environnement et du Développement durable, CGEDD. Mars.

Gollier, C., et Zeckhauser, R., (1997), « Horizon Length and Portfolio Risk », NBER working paper, 216, octobre.

Hamayon, S., and Legros, F. (2008) "La gestion stratégique d'actifs d'un fonds de réserve face au risque financier", *Revue d'économie financière*, special issue june, pp. 205-217.

Harri, A., and B.W. Brorsen., (2009), «The Overlapping Data Problem. », *Quantitative and Qualitative Analysis in Social Sciences* 3, pp. 78–115.

Harvey, C.R., Liechty, J.C., Liechty, M.W., Müller, P. (2010) "Portfolio selection with higher moments", *Quantitative Finance*, volume 10, No 5, pp. 469-85.

Hawawini, G.A., Michels P.A. (1984) "European Equity Markets: Risk, Return and Efficiency", New York and London: Garland Publishing, Inc.

Hibbert, A. M., Daigler, R. T., Dupoyet, B. (2008) "A behavioral explanation for the negative asymmetric return–volatility relation", *Journal of Banking & Finance*, 32(10), 2254-2266.

Hodrick, R., et Prescott, E., (1981), "Post-war U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation", Working Paper, Carnegie-Mellon, University. Reprinted in *Journal of Money Credit and Banking*, Vol. 29, No. 1, February 1997.

Jorion, P. (2003) "The Long-Term Risks of Global Stock Markets", *Financial Management*, vol. 32, n° 4.

Kim, M. J., Nelson, C. R. Startz, R. (1991) "Mean reversion in stock prices? A reappraisal of the empirical evidence", *The Review of Economic Studies* 58(3), 515–528.

Knight, F. H. (1921) *Risk, uncertainty and profit*. Boston: Houghton Mifflin.

Lai K. K., Yu L., and Wang S. (2006) "Mean-variance-skewness-kurtosis-based portfolio optimization", *Proceedings of the First International Multi-Symposiums on Computer and Computational Sciences - Volume 2 (IMSCCS'06)* pp 292-297.

Le Bris D. (2010) "Les krachs boursiers en France depuis 1854", *Revue Economique*, Volume 61, No 3, pp. 421-430.

Lewis, N.D., and Okunev, J. (2009) "Using Value at Risk to Enhance Asset Allocation in Life Cycle Investment Funds", *The Journal of Investing*, volume 18, No 1, spring, pp 87-91.

Lien D., Stroud Ch., Ye K. (2013) "Comparing VaR approximation methods which use the first four moments as inputs", Working Paper, WP # 0050MSS-202-2013, University of Texas at San Antonio.

Lo, A.W., and MacKinlay, A.C. (1988) "Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test", *Review of Financial Studies*, volume 1, No 1, pp. 41-66.

Maillard, D. (2012) "A User's guide to the Cornish-Fisher expansion", SSRN Working Papers Series.

Male R. (2010) "Developing country business cycles: characterising the cycle", Queen Mary working paper n°663, may, University of London; Great-Britain.

Malkiel, Burton G. "The efficient market hypothesis and its critics." *The Journal of Economic Perspectives* 17.1 (2003): 59-82.

Markowitz H. (1952) "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, volume 7, No 1, p.77-91.

Mitchell, O.S., Mottola, G.R., Utkus, S.P., and Yamagushi, T. (2006) "The Inattentive Participant Portfolio Trading Behaviour in 401(k) Plans", Working Paper WP115, University of Michigan, Michigan Retirement Research Center, United States.

Perold, A., (1986), "Constant portfolio insurance", Harvard Business School, Unpublished manuscript.

Perold, A., et Sharpe, W., (1988), "Dynamic strategies for asset allocation", *Financial Analyst Journal*, January-February, 16-27.

Poterba, J., and Summers, L. (1988) "Mean reversion in stock returns: Evidence and Implications" *Journal of Financial Economics*, volume 22, pp. 27-59.

Poterba, J., Rauh, J., Venti, S., and Wise, D. (2007) "Defined Contribution Plans, Defined Benefits Plans, and the Accumulation of Retirement Wealth", *Journal of Public Economics*, Elsevier, volume 91, No 10, pp. 2062-2086.

Prigent, J. L., and Mhiri M. (2010) "International portfolio optimization with higher moments", *International Journal of Economics and Finance*, volume 2, No 5, p.157-169.

Sewell, M. (2012) "The Efficient Market Hypothesis: Empirical Evidence", *International Journal of Statistics and Probability*, 1.

Siegel Jeremy J. (2014) *Stocks for the Long Run*, Edition 5, McGraw-Hill Professional Publishing.

Spierdijk, L., Bikker J.A., van den Hoek. P. (2012) "Mean reversion in international stock markets: an empirical analysis of the 20th century", *Journal of International Money and Finance* 31,228-249.

Thaler, R., and Sunstein, C., (2008), *Nudge: Improving Decisions about Health, Wealth, and Happiness*, Yale University Press, New Haven pp. 293.

Veronesi, P. (1999) "Stock Market Overreaction to Bad News in Good Times: A Rational Expectations Equilibrium Model", *Review of Financial Economics* 12, 975-1007.

Wilkie, A. David (2001). "On the Risk of Stocks in the Long Run: A Response to Zvi Bodie", *The 11th International Actuarial Approach for Financial Risks (AFIR) Colloquium (Toronto, Canada)*, 719-739. (Disponible à : <http://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Toronto/Wilkie.pdf>)

Wright, J. (2000) "Alternative variance-ratio tests using ranks and signs", *Journal of Business and Economics Statistics*, volume 18, pp. 1-9.

Yen, G., Lee, C. (2008) "Efficient market hypothesis (EMH): Past, present and future", *Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies* 11(2), 305–329