Traitement du Signal et Systèmes Numériques

Christophe Krzeminski

▶ **To cite this version:**

Christophe Krzeminski. Traitement du Signal et Systèmes Numériques. École d'ingénieur. Lille, France. 2020, pp.115. hal-02988827v2

HAL Id: hal-02988827
https://hal.science/hal-02988827v2

Submitted on 4 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Traitement du signal et Systèmes Numériques

rédacteur: Christophe Krzeminski

Sommaire

I Traitement du signal numérique **5**

I.1 Introduction . . . 5
I.2 Définition chaîne de traitement numérique du signal . . . 6
I.3 Exemples de signaux numériques simples . . . 8
I.3.1 Définition de signaux numériques simples . . . 8
a) . . . 8
I.3.2 Représentation de signaux numériques simples . . . 9
I.3.3 Propriétés et classification des signaux numériques . . . 9
a) Notion d'énergie . . . 9
I.3.4 Notion de périodicité des signaux numériques . . . 10
I.4 Convertisseur domaine analogique/numérique (CAN) . . . 10
I.4.1 Echantillonnage de signaux numériques . . . 11
a) Notion d'échantillon . . . 11
b) Echantillonnage idéal mathématique . . . 11
c) Notion d'échantillonnage naturel . . . 13
d) Notion d'échantillonnage-blocage (E/B) . . . 14
e) Temps d'acquisition . . . 14
I.4.2 Echantillonnage et spectre fréquentiel . . . 15
a) Périodisation du spectre du signal échantillonné . . . 15
b) Théorème de Shannon . . . 16
c) Fréquence de Nyquist . . . 17
d) Limites du théorème de Shannon . . . 17
e) Performance globale d'un CAN . . . 17
I.4.3 Exercice . . . 18
a) Systèmes à multiple cadence . . . 19
I.4.4 Quantification de signaux numériques . . . 21
a) Principe de quantification . . . 21
b) Caractéristiques de quantification . . . 22
c) Erreur de quantification . . . 22
I.4.5 Exercice . . . 25
a) Rapport signal à bruit . . . 25
b) Rapport signal à bruit d'un signal sinusoïdal . . . 25
c) Quantification non-uniforme . . . 26
I.4.6 Exemple de quantification non-uniforme . . . 27
I.4.7 Encodage ou représentation binaire . . . 27
I.4.8 Reconstruction . . . 28
a) Interpolation idéale de Shannon . . . 28
b) Reconstruction en pratique . . . 29
c) Caractéristique de transfert d'un CNA . . . 30

I.5 Chaîne complète de traitement du signal . . . 30
I.6 Analyse d'une chaîne complète CAN-CNA . . . 32
I.6.1 Influence d'un filtre anti-recouvrement . . . 32
I.6.2 Influence d'un filtre de reconstruction, lissage . . . 34
I.7 Conclusion . . . 35

II Analyse Spectrale Signaux Numériques 37
II.1 Introduction . . . 37
II.1.1 Aspect historique . . . 37
II.1.2 Applications . . . 38
II.2 Transformée de Fourier (TF) . . . 38
II.2.1 Définition . . . 38
II.2.2 Vers la transformée discrète . . . 38
II.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD) . . . 40
II.3.1 Définition . . . 40
II.3.2 Expression matricielle de la transformée de Fourier discrète . . . 40
II.4 Transformée de Fourier Rapide (TFR) . . . 41
II.4.1 Exercice . . . 43
II.4.2 Exemple de calcul simple sur Octave&Matlab . . . 43
II.5 Transformée en Cosinus Discret (DCT) . . . 44
II.5.1 Transformée de Hartley (DHT) . . . 45
II.5.2 Transformée en Cosinus Discret de type II . . . 45
II.5.3 Transformée en Cosinus Discret Modifié (MDCT) . . . 45

III Systèmes numériques et Transformée en z 47
III.1 Introduction . . . 47
III.1.1 Aspect historique . . . 47
III.1.2 Introduction . . . 47
III.2 Description des systèmes numériques . . . 48
III.2.1 Définition . . . 48
III.2.2 Exemple de systèmes numériques simples . . . 48
III.2.3 Exercice . . . 48
III.2.4 Critère de stabilité . . . 48
III.3 Diagramme fonctionnel . . . 49
III.4 Propriétés des systèmes numériques . . . 50
III.4.1 Définition des propriétés de systèmes numériques . . . 50
a) Statique . . . 50
b) Dynamique . . . 50
c) Linéaire . . . 50
d) Stabilité . . . 50
e) Superposition . . . 50
f) Invariant . . . 51
g) Causalité . . . 51
III.4.2 Interconnection des systèmes numériques . . . 51
III.4.3 Notion de système LTI . . . 52
III.5 Définition de la transformée en z (TZ) . . . 52
III.5.1 Définition . . . 52
III.5.2 Table de transformée en z . . . 53
III.5.3 Lien entre DFT et transformée en z . . . 54

III.5.4 Résumé des propriétés de la transformée en z . . . 54
III.5.5 Concept de délai . . . 54
III.5.6 Transformée en z rationnelle . . . 55
III.5.7 Fonction de transfert d'un système numérique . . . 55
III.6 Fonctions Octave&Matlab utiles . . . 55

IV Introduction aux filtres numériques **57**
IV.1 Introduction . . . 57
IV.2 Principes d'un filtre numérique . . . 57
IV.2.1 Pourquoi filtrer ? . . . 57
IV.2.2 Définition . . . 58
IV.2.3 Filtre ARMA . . . 58
IV.2.4 Fonction de transfert . . . 58
IV.3 Catégorie de filtres numériques . . . 59
IV.4 Spécification des filtres numériques . . . 59
IV.4.1 Gabarit d'un filtre passe-bas . . . 60
IV.4.2 Gabarit du filtre . . . 60
IV.4.3 Réponse en fréquence d'un filtre . . . 60
IV.4.4 Caractérisation simple d'un filtre numérique . . . 61
a) Réponse impulsionnelle . . . 61
b) Réponse fréquentielle . . . 62
IV.5 Exercice . . . 62

V Filtre à réponse impulsionnelle finie **63**
V.1 Introduction . . . 63
V.1.1 Aspect historique . . . 63
V.2 Classification des filtres numériques . . . 63
V.3 Propriétés des filtres RIF . . . 64
V.3.1 Phase linéaire et réponse impulsionnelle . . . 64
V.3.2 Catégories de filtre RIF . . . 64
V.4 Troncature de la réponse impulsionnelle . . . 65
V.4.1 Méthode de conception globale . . . 65
V.4.2 Méthode de la troncature de la réponse impulsionnelle . . . 65
a) Modèle de filtre à phase linéaire . . . 65
V.4.3 Fenêtrage de réponse . . . 66
V.4.4 Influence de fenêtre rectangulaire . . . 67
V.4.5 Choix de la fenêtre de conception . . . 67
V.4.6 Réponse impulsionnelle idéale des différents filtres . . . 67
V.4.7 Méthode de conception de filtres basés sur Octave&Matlab . . . 68
V.4.8 Exemple implémentation filtre RIF passe-bas . . . 68
V.4.9 Implémentation de filtre RIF . . . 69
V.4.10 Exercice: Séparation des basses et hautes fréquences . . . 69
.1 Exemple de définition de signaux numériques . . . 70
.2 Exemple de calcul de transformée discrète . . . 72
.3 Exemple de quantification uniforme simple . . . 72

Nomenclature

AAF *Filtre anti-aliasing*

ARMA *(Structure de filtre) autoregressif à moyenne adaptée*

CAN *Convertisseur analogique/numérique*

CNA *Convertisseur numérique/analogique*

DCT *Transformée en cosinus discret*

DHT *Transformée de Hartley*

LSB *Bit de poids faible*

LTI *Linéaire et invariant dans le temps*

MSB *Bit de poids fort*

MDCT *Transformée en cosinus discret modifié*

RIF *Filtre à réponse impulsionnelle finie*

RII *Filtre à réponse impulsionnelle infinie*

ROC *Région de convergence (cercle unité)*

RF *Filtre de reconstruction*

SNR *Rapport signal à bruit*

TF *Transformée de Fourier*

TNS *Processeur de traitement du signal numérique*

TFD *Transformée de Fourier discrète*

TFR *Transformée de Fourier rapide*

TFR *Transformée de Fourier rapide*

TZ *Transformée en Z*

Ce document est un première ébauche destinée à être une synthèse de l'ensemble des notions et connaissances exposées lors du cours de *Conditionnement et traitement du signal numérique.* au sein de ISEN-Lille

Malgré de nombreuses années d'enseignement, ce document peut comporter des erreurs, des imprécisions indépendant de ma volonté. N'hésitez pas à m'en faire part...

Son écriture permet le fait qu'une présence physique des étudiants en cours ne soit plus obligatoire. En effet, le fait que l'essentiel des notions, connaissances, exercices soit résumé dans ce document fait qu'il peut être utilisé d'une manière avantageuse dans le contexte d'incertitude sanitaire actuel lié au virus sars-cov2 et indépendant de toute plateforme technique numérique. Sans rentrer dans un débat très complexe, l'enseignement du numérique ne passe par forcément par le numérique...

Par contre, probablement le fait d'étudier de manière autonome mais cadré exige un travail, une rigueur et une concentration soutenue peut-être plus importante qu'en enseignement interactif. Le programme et le cadre correspond à la lecture et les exercices liés à un chapitre lui-même faisant la synthèse d'une semaine de cours en présentiel.

Malheureusement, ce document ne remplace pas les interactions, les interrogations explications orales que vous auriez eu dans une séance de cours en présentiel mais rien ne vous empêche d'essayer de me les transmettre et moi d'y répondre.

En vous souhaitant bon courage et une agréable période d'apprentissage par la lecture, réflexion et peut-être d'écriture !

UNe des ruptures fondamentales en terme de technologies est l'invention du transistor en 1956. En effet, cette invention permettra le développement fulgurant de circuits intégrés permettant de réaliser des calculs, des fonctions et enfin des systèmes qui avait été envisagé mais demeurait inacessible avec les technologies disponibles. La technologie numérique marque d'une certaine manière l'avènement de tout un environnement qui se développera d'abord de manière indépendante des autres technologies principales (électricité, mécanique, chimie, agronomie, biologie) avant de coexister à l'interface voire de chercher à prendre une part non-négligeale de certaines d'entre-elles pour des enjeux économiques [1].

En français, le numérique se définit par une manière de représenter et d'implémenter l'information sous la forme de nombres. Ces nombres peuvent (ou pas) représenter ou être lié à une grandeur ou un phénomène physique. D'une certaine, le numérique propose une manière différente à la fois de définir l'information en utilisant des nombres mais aussi en terme de traitement de l'information celui-ci étant réalisé par des calculs. Il diffère du domaine de l'analogique où l'information est là représentée par une grandeur, une variable physique. Le processus de numérisation définit la migration du domaine de traitement de l'information du domaine de l'analogique au numérique. Par contre, le monde anglosaxon utilise plutôt le terme *digital* avec une conotation péjorative pour définir le numérique.

L'objectif de ce support de cours est de décrire la chaîne de traitement de signal numérique ainsi que les problématiques liés aux signaux numériques. Il peut s'agir de caractériser ces propriétés temporelles ou spectrales. La notion de système numérique qui réalise un traitement sur une entrée numérique afin d'obtenir un signal de sortie numérique correspondant à l'application envisagée.

Les systèmes numériques permettent d'implémenter des fonctions :

- Analyse et traitement de signaux
- Système numérique correcteur et systèmes automatiques
- Système numérique de communication à haut débit

Le traitement du signal numérique est une discipline scientifique en elle-même dans le sens où elle s'interesse à un vaste nombre de processus sur un signal comme sa capture, sa reconnaissance, sa détection, son codage, son analyse, son estimation et éventuellement son filtrage. L'ensemble de ces traitements nécessite une chaîne numérique composée de différents blocs ayant chacun des fonctions spécifiques (convertisseur, calculateur, interpolateur, filtre). A l'heure de l'ère tout-numérique et de l'instantanéité, les paramètres *physiques* régissant ces systèmes numériques (temps d'acquisition de conversion, résolution, compression du signal, analyse spectrale, fréquence d'échantillonnage, dynamique en amplitude, plage de conversion, non-linéarité, puissance consommée, ...) tendent probablement à être oubliés. Au niveau de la chaîne numérique, les notions exposées concernant les fonctions échantillonnage, analyse, blocage, reconstruction tendent à être confondues. Les contraintes

[1] Le risque probablement actuel est de ne considérer que l'interface numérique en oubliant *in-fine* l'ensemble du socle de connaissances et du savoir-faire sousjacent

principalement de temps réel font que les analyses spectrales s'orientent probablement vers des signaux non-stationnaires à l'aide de transformée Fourier dépendante du temps, ondelette même si la transformée en cosinus discret demeure le standard au niveau du traitement d'image ou le codage audio. Le filtrage demeure une application certes sommaire mais parfois indispensable des chaînes de traitement du signal ou d'information. Enfin, des aspects plus pratique concernant les implémentations de convertisseur analogique/numérique ou de filtres audio sur des processeurs de traitement du signal sont abordés.

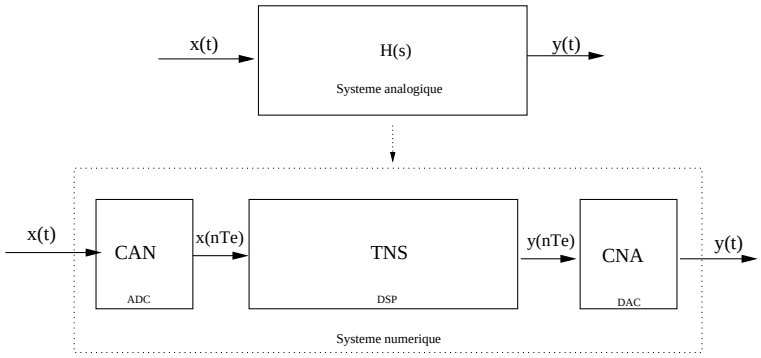


Figure .1: L'opération de numérisation consiste à remplacer un système analogique $H(s)$ par une chaîne de traitement numérique du signal.

I – Traitement du signal numérique

I.1 Introduction

Harry Nyquist (1889-1976)

Claude Elwood Shannon (1916-2001)

Les notions exposées dans ce cours sont le fruit des travaux et des découvertes de Harry Nyquist (1889-1976) et de Claude Elwood Shannon (1916-2001). Harry Nyquist était un ingénieur au Laboratoire Bell aux Etats-Unis. Il a également contribué scientifiquement aux domaines du bruit thermique, de la régulation et des communications. Claude Shannon est un mathématicien américain. Il est considéré comme le fondateur de la théorie du traitement du signal numérique.

I.2 Définition chaîne de traitement numérique du signal

Une chaîne de traitement du signal numérique simplifiée se compose en pratique de trois blocs implémentant des fonctions différentes :

- en entrée, la chaîne comporte un convertisseur analogique/numérique (CAN). Sa fonction est de transformer le signal analogique $x(t)$ en un signal numérique $x(n)$. Il permet de faire le lien entre le domaine analogique et numérique.
- le cœur de la chaîne de traitement du signal numérique est un bloc de calcul, calculateur appellé (TNS). Celui a pour fonction d'implémenter et de réaliser des calculs uniquement sur des signaux numériques. La sortie du calculateur est un signal numérique $y(n)$.
- en sortie se trouve un autre convertisseur numérique/analogique (CNA) cette fois. Sa fonction est de réaliser l'opération inverse à savoir transformer le signal numérique $y(n)$ en sortie du calculateur en un signal analogique $y(t)$.

Deux paramètres principaux caractérisent la chaîne de traitement numérique du signal à savoir:

- La période ou l'intervalle d'échantillonnage T_e qui définit la durée entre deux échantillons x(n).
- Le pas de quantification q correspond à l'écart entre deux valeurs d'amplitude du signal quantifiée.

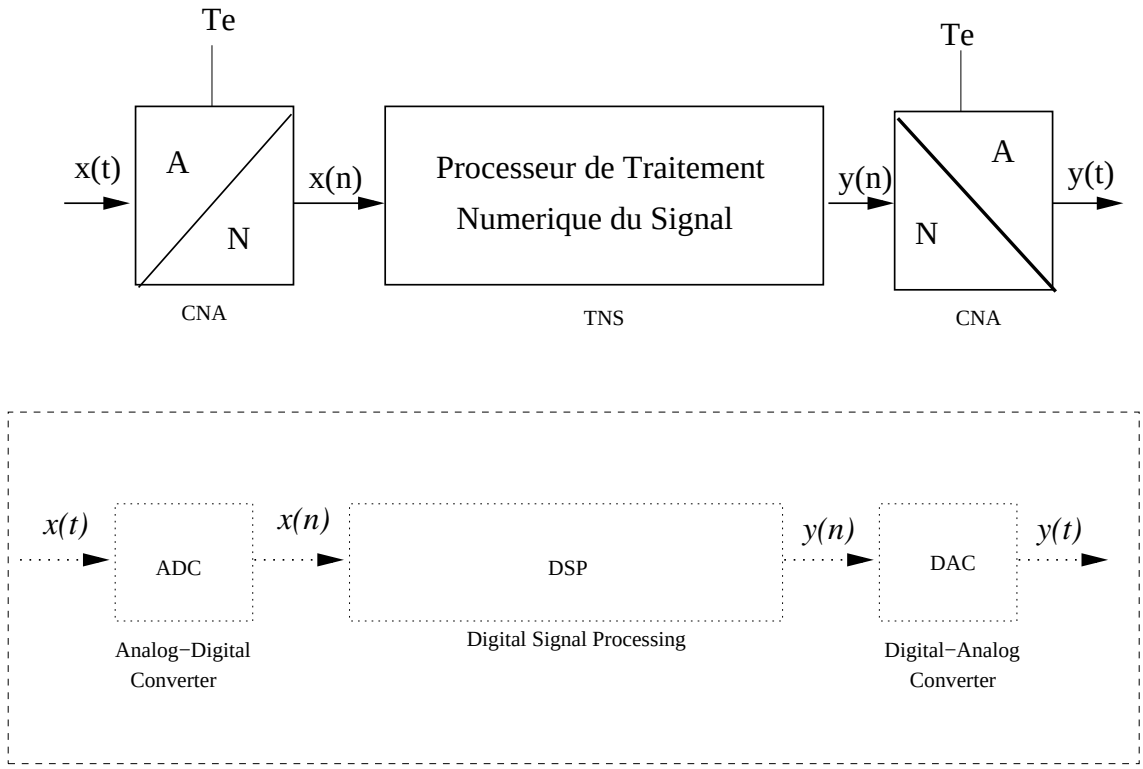


Figure I.1: Chaîne de traitement numérique du signal composé d'un convertisseur analogique/numérique (CAN), d'un processeur de traitement numérique du signal (TNS) et d'un convertisseur numérique/analogique (CNA). La vision anglosaxone un peu différente basée sur le *digital* est donnée ci-après.

I.3 Exemples de signaux numériques simples

I.3.1 Définition de signaux numériques simples

I.3.1

Les signaux numériques se distinguent des signaux analogiques par le fait qu'ils ne sont pas continus souvent c'est le domaine temporel considéré mais plutôt discret. En pratique, ils ne prennent que des valeurs d'amplitude discrète et à des instants précis.

- Le signal numérique le plus simple est l'échantillon unité. Celui-ci a une valeur d'amplitude unité à un instant donné n. Il est défini d'un point de vue mathématique par l'équation suivante:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & \neq & 0 \\ 1, & = & 0 \end{cases} \tag{I.1}$$

- Celui-ci permet de définir un signal numérique correspond à l'échelon numérique. Celui-ci prend des valeurs d'amplitude unité à des instants donné espacé d'une période T_e.

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \geq & 0 \\ 0, & < & 0 \end{cases} \tag{I.2}$$

- Il est possible de définir un signal proche caractérisé par une amplitude décroissante dans le temps. Celui-ci est similaire à une suite géométrique, l'amplitude prenant des valeurs à des instants précis espacé d'une période T_e.

$$x[n] = a^n u(n) \tag{I.3}$$

- Les formes correspondant aux signaux cos et sin sont également définies dans le domaine numérique. Ces signaux prennent des valeurs discrètes caractérisées par des amplitudes variables :

$$x[n] = \sin(n\omega_0 + \phi) \qquad \omega_0 = 2\pi f_0 T_e \tag{I.4}$$

  où $\omega_0 = 2\pi f_0 T_e$ caractérise une pulsation numérique et ϕ la phase du signal.

- Enfin, la séquence de phase permet d'avoir un signal complexe numérique avec une amplitude constante à des instants précis espacé d'une période T_e, la phase de la séquences est par contre linéaire.

$$x[n] = (a + jb)^n u(n) \tag{I.5}$$

Ces signaux numériques permettent de définir un ensemble simple de signaux numériques modèles.

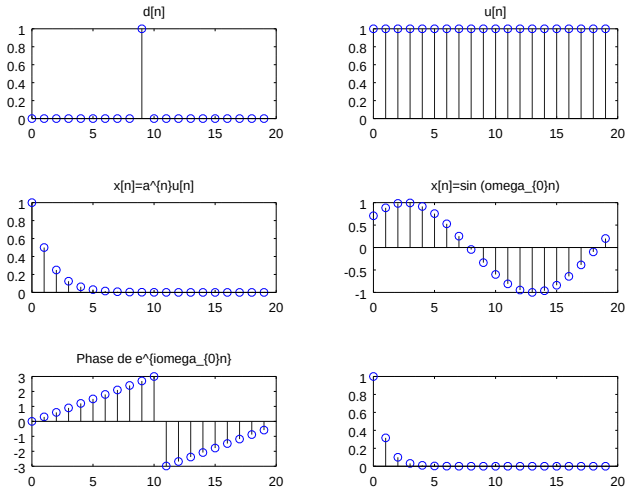


Figure I.2: Exemple de modèles de signaux numériques simples: a) échantillon unité b) échelon unité c) exponentielle numérique d)sin numérique e) séquence phase complexe numérique f) séquence complexe numérique

I.3.2 Représentation de signaux numériques simples

La figure suivante I.2 résume de manière graphique cette fois la forme de ces différents signaux modèles. En pratique, les signaux numériques obtenus par échantillonnage présentent des formes beaucoup plus complexe en lien avec les signaux analogiques ou les variables physiques étudiées.

I.3.3 Propriétés et classification des signaux numériques

Les signaux numériques peuvent être caractérisés par différentes propriétés en particulier en terme d'amplitude des signaux:

I.3.3 Notion d'énergie

- Une séquence numérique est dite *bornée* si:

$$|x[n]| \leq Max \leq +\infty \tag{I.6}$$

- Une séquence numérique est dite de *carré sommable* si:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \leq +\infty \tag{I.7}$$

Si cette propriété est satisfaite, il est possible d'aboutir à la définition de l'énergie E d'un signal numérique $x(n)$ à savoir:

- Energie d'un signal numérique:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x(n)|^2 \tag{I.8}$$

I.3.4 Notion de périodicité des signaux numériques

Pour des signaux discrets, la notion de périodicité est définie par le fait que pour un nombre d'échantillons donné N définissant la période, l'amplitude du signal sera identique à celle de la période précédente. Ceci se traduit en terme mathématique par l'équation toute simple suivante:

$$x(n) = x(n+N) \tag{I.9}$$

En pratique, le passage du domaine analogique au domaine numérique fait que la périodicité d'un signal n'est pas forcément conservée.

Par exemple, pour un signal sinusoidal, cette condition se traduit par le fait que léchantillon n soit égal à celui une période :

$$x(n) = \sin(n\omega_0 + \phi) = sin(n\omega_0 + N\omega_0 + \phi)$$

ceci implique par exemple:

$$N\omega_0 = 2k\pi N = \frac{2k\pi}{\omega_0} \tag{I.10}$$

Le fait que N soit nécessairement entier n'est pas évident si l'on fie à l'équation précédente et implique que la pulsation numérique ω_0 doit respecter certaines conditions.

I.4 Convertisseur domaine analogique/numérique (CAN)

Le bloc d'entrée implémentant la première fonction d'une chaîne de traitement numérique du signal est un convertisseur du domaine analogique vers le numérique. En pratique, pour réaliser la conversion d'un signal analogique $x(t)$ en numérique $x(n)$, il est nécessaire de réaliser trois opérations différentes

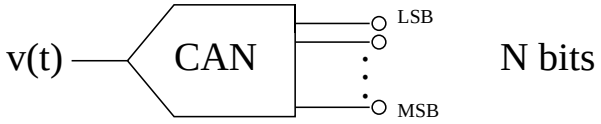


Figure I.3: Principe de fonctionnement d'un composant convertisseur analogique/numérique (CAN) qui consiste à transformer une tension analogique $v(t)$ en une séquence binaire.

à savoir:

- *Echantillonnage*: celui-ci est défini par l'opération consistant à prendre des instants discrets en pratique tous les T_e au niveau temporel.

- *Quantification*: le signal analogique d'entrée prend un ensemble de valeurs d'amplitude continu, il est nécessaire de le transformer en un signal comportant des valeurs d'amplitude discrètes défini par un ensemble de valeurs quantifiées régi par un pas de quantification q.

- *Codage*: la dernière opération implémentée par le convertisseur est de réaliser l'encodage des valeurs sur des valeurs de bits précises. Ces valeurs sont définies par l'intermédiaire d'un codage permettant d'implémenter la correspondance entre les valeurs quantifiées et les mots binaires.

I.4.1 Echantillonnage de signaux numériques

I.4.1 Notion d'échantillon

L'échantillonnage des signaux consiste à prendre des valeurs $x(n)$ du signal $x(t)$ selon quelques "instants" discrets sur un domaine continu de valeurs. D'un point de vue graphique, cette opération est ainsi résumée par la figure suivante:

Très souvent, par simplicité, la notion d'échantillon est reliée au domaine temporel où il n'est pas du tout simple de considérer son aspect continu. Mais elle est plus vaste que dans le sens où il est nécessaire d'échantillonner pour un capteur physique le domaine spatial (surface, volume) voire le domaine spectral (couleur). Le pas d'échantillonnage permettra ainsi de d'introduire la notion de pixel par exemple pour une image ou de volume élementaire pour un espace.

I.4.1 Echantillonnage idéal mathématique

L'échantillonnage idéal peut s'exprimer aussi d'un point de vue mathématique de la manière suivante:

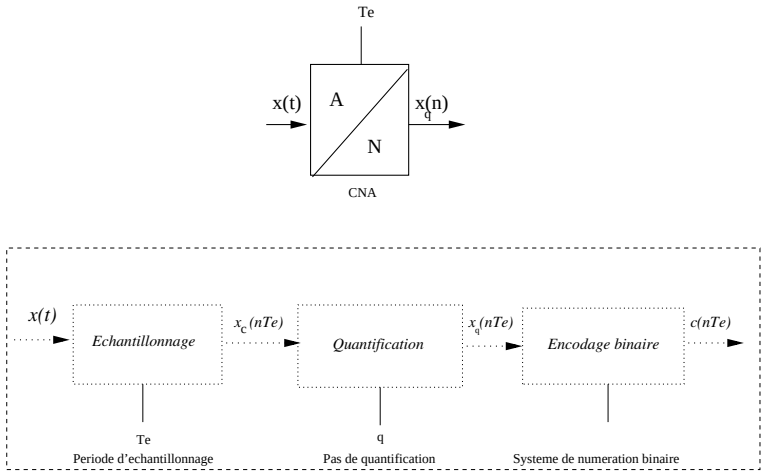


Figure I.4: Les différentes fonctions d'un convertisseur analogique/numérique. La première correspond à l'échantillonnage du signal d'entrée $x(t)$ réalisé selon la période T_e. La seconde est l'opération de quantification qui consistent à discrétiser l'amplitude continue des signaux. Enfin, la dernière consiste à encoder les valeurs quantifiées sour la forme de bits selon une règle spécifiée entre les valeurs et les mots binaires.

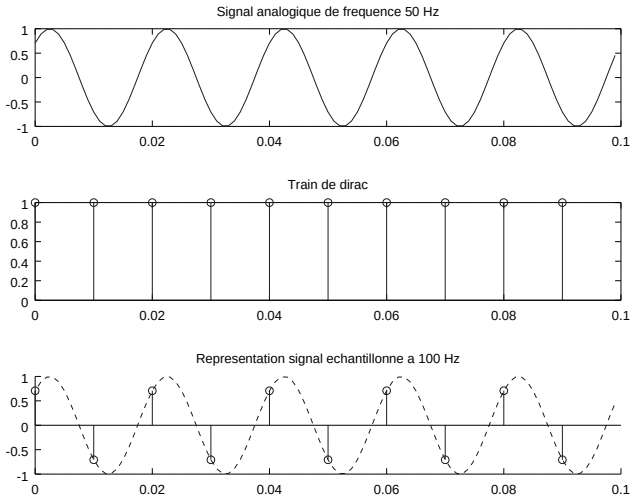


Figure I.5: La figure présente l'échantillonnage d'un signal continu sinus électrique de fréquence 50Hz. Si on respecte la fréquence maximale définie par le théorème de Shannon, l'échantillonnage discret va se faire à une fréquence deux fois supérieure représentée par un train d'impulsion ou de dirac définissant l'intervalle d'échantillonnage. Le signal échantillonné ne comportera que quelques valeurs discrètes en fonction du pas d'échantillonnage à la différence de son homologue physique.

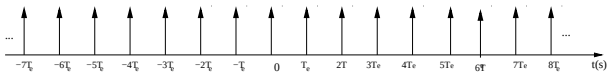


Figure I.6: Echantillonnage idéal d'un signal analogique par un train de Dirac. Les instants discrets d'échantillonnage sont définis par les impulsions du train ou du peigne de Dirac.

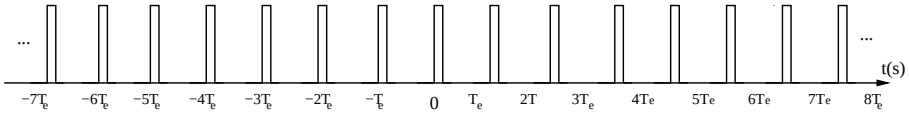


Figure I.7: Echantillonnage naturel d'un signal analogique par un train de porte. Les intervalles d'échantillonnage du signal analogique $x(t)$ sont définis par la durée de la porte T_0 c'est à dire entre $[-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}]$ de période T_e.

$$x_{ech}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \tag{I.10}$$

Il s'agit donc de multiplier le signal analogique $x(t)$ par un train de dirac $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_e)$ de période T_e. En pratique, un signal idéal proche de la vision mathématicienne à savoir un signal prenant une valeur d'amplitude unité sur un instant infiniment court et de manière périodique n'est pas réalisable. Par ailleurs, la mesure de la valeur physique d'un signal ne peut pas être immédiat mais requiert un intervalle défini.

I.4.1 Notion d'échantillonnage naturel

L'échantillonnage naturel a été introduit de manière à donner une définition plus réaliste permettant une implémentation pratique. L'échantillonnage naturel est réalisé par un signal rectangulaire périodique de largeur T_0 réduit par rapport à l'intervalle, pas d'échantillonnage T_e.

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Pi_{[-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}]}(t - nT_e) \tag{I.10}$$

Le signal échantillonné est donné par:

$$x_{ech}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Pi_{[-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}]}(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT_e) \cdot \Pi_{[-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}]}(t - nT_e) \tag{I.10}$$

Comme on peut le voir sur la figure, l'échantillonnage naturel fait que le signal analogique est multiplié par un *train de porte*. Cela se traduit au niveau du signal échantillonné par le fait que celui-ci va suivre l'amplitude du signal analogique durant la durée de l'impulsion T_0.

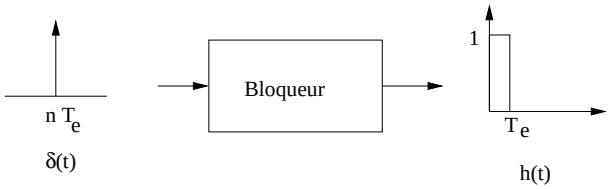


Figure I.8: Principe du bloqueur: de manière ouvoir quantifier l'amplitude d'un échantillon, son amplitude est maintenant constante durant la période d' échantillonnnage.

I.4.1 Notion d'échantillonnage-blocage (E/B)

De manière à pouvoir réaliser l'opération d'échantillonnage, l'amplitude du signal analogique à convertir varie souvent rapidement et doit demeurer constant durant le processus de numérisation c'est à dire durant la période déchantillonnage T_e:

La fonction bloqueur peut être modélisée en temporel par un système de réponse impulsionnelle de réponse rectangulaire de durée T_e:

$$x_{E/B}(t) = x(t) * h(t) \tag{I.10}$$

dont sa réponse fréquentielle $H(\nu)$ est donc donnée par léquation suivante:

$$H(\nu) = TF(h(t)) = T_e^{-i\pi\nu T_e} sinc(\frac{\nu}{\nu_e}) \tag{I.10}$$

Il s'agit de l'opération de préconditionnement du signal analogique avant létape de quantification de son amplitude. Un exemple d'échantillonnage blocage d'un signal sinusoidal est donné au niveau de la figure suivante:

En pratique, cette opération est implémentée par un circuit basé sur un principe simple à savoir un interrupteur et une capacité C du bloqueur qui va permettre de définir le temps d'acquisition.

I.4.1 Temps d'acquisition

Pour un convertisseur analogique/numérique (CAN), il s'agit du temps nécessaire pour la chaîne d'échantillonnage de capturer l'amplitude du signal d'entrée. Il est définit par la charge de la capacité de l'échantillonneur bloqueur.

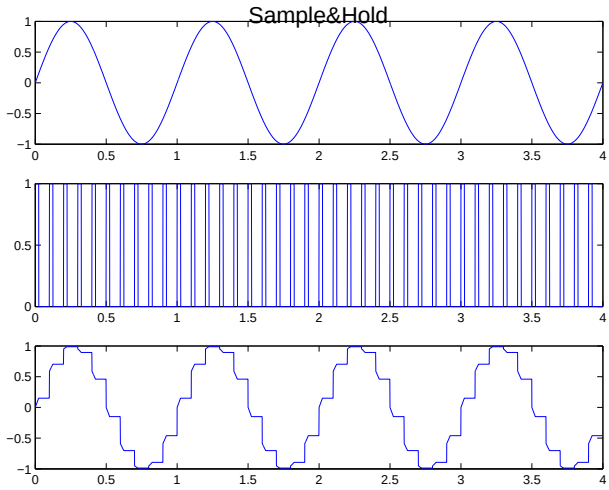


Figure I.9: Exemple d'echantillonnage blocage d'un signal sinusoidal. Le signal sinusoidal est représenté, des échantillons d'une durée courte sont prélevés et enfin l'amplitude est bloquée durant la période entière d'échantillonnage.

I.4.2 Echantillonnage et spectre fréquentiel

L'opération d'échantilonnage d'un signal a une influence non négligeable sur son spectre. Différents aspects sont abordés ici à savoir sa périodisation lors de léchantillonnage, l'introduction du théorème de Shannon et le choix d'une fréquence d'échantillonnage adaptée. Certains signaux à spectre non borné peuvent nécessiter l'introduction d'un filtre anti-repliement en entrée de la chaîne de traitement du signal.

I.4.2 Périodisation du spectre du signal échantillonné

Le fait de venir échantillonner un signal analogique n'est pas sans conséquence au niveau de son spectre fréquentiel. En effet, mathématiquement l'opération d'échantillonnage Par ailleurs sur le plan pratique, une des contraintes de la chaîne de traitement numérique du signal est le choix de la période T_e ou de la fréquence d'échantillonnage f_e. Considérons un signal analogique $x(t)$ dont le spectre fréquentiel $X(\nu)$ est continu mais borné entre les deux fréquences situées entre -f_{max} et +f_{max}:

Si l'on considère un échantillonnage idéal du signal $x(t)$:

$$x_{ech}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \tag{I.10}$$

Le spectre du signal échantillonné peut être estimé simplement à partir de l'équation précédente:

$$X_{ech}(\nu) = X(\nu) * \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\nu_e) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\nu - k\nu_e) \tag{I.10}$$

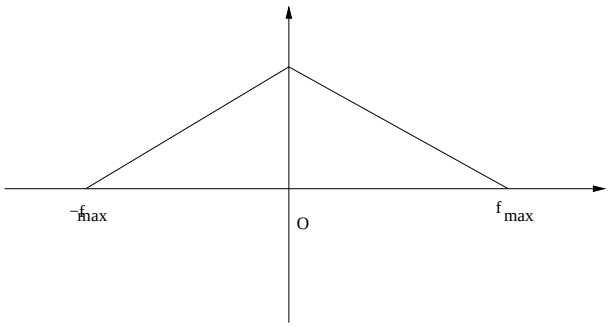


Figure I.10: Spectre fréquentiel modèle du signal $x(t)$.

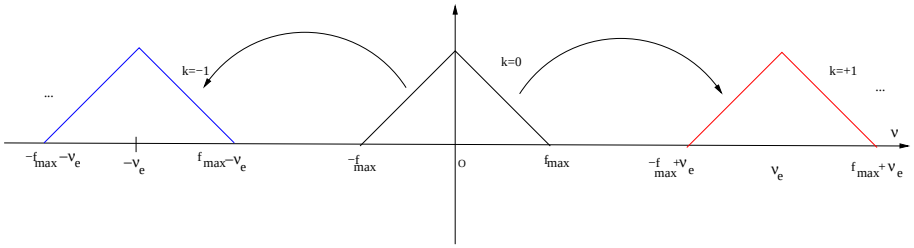


Figure I.11: Spectre fréquentiel $X_{ech}(\nu)$ du signal échantillonné $x_{ech}(t)$.

On peut remarquer que l'opération d'échantillonnage en temporel se traduit dans le domaine fréquentiel par une périodisation du spectre du signal continu au niveau des multiples de la fréquence d'échantillonnage ν_e.

I.4.2 Théorème de Shannon

En se basant sur la figure précédente, il est possible d'expliciter le théorème de Shannon. La condition pour qu'il n'y ait pas de recouvrement entre les réplicats au niveaux de la période du sprectre est $\nu_e - f_{max} \geq f_{max}$. Le thèorème de Shannon spécifie le fait que pour un spectre de fréquence maximale f_{max}, la fréquence d'échantillonnage ν_e doit respecter la règle suivante:

$$\boxed{\nu_e \geq 2f_{max}} \tag{I.10}$$

Le thèorème de Shannon indique donc que pour échantillonner correctement un signal analogique, il est nécessaire que la fréquence d'échantillonnage soit au moins deux fois égale à la fréquence maximale du spectre f_{max}. Par contre, si cette condition n'est pas respectée, un phénomène de recouvrement et de l'aliasing entre le réplicat du spectre ne peut être exclus et il sera de fait difficile dans les faits de reconstruire le signal analogique à partir de celui numérique.

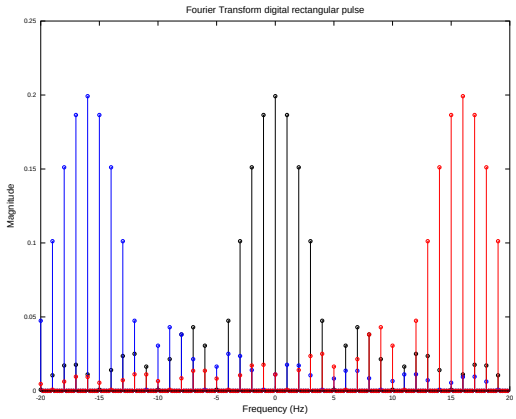


Figure I.12: Recouvrement de replicats dans le cas du spectre d'un signal rectangulaire

I.4.2 Fréquence de Nyquist

Dans le cadre du théorème de Shannon, il est intéressant de définir la fréquence de Nyquist $\nu_{nyquist}$:

$$\nu_{nyquist} = \frac{\nu_e}{2} \tag{I.10}$$

Si ce théorème est respecté, la fréquence correspond à la fréquence maximale. Il n'est pas rare que des logiciels utilisent des fréquences normalisées et notamment par rapport à la fréquence de Nyquist. Par exemple, un spectre de fréquence situé entre $[-\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e}{2}]$ correspondra à l'intervalle normalisé $[-1; +1]$.

I.4.2 Limites du théorème de Shannon

Le théorème de Shannon est basé sur le fait qu'il existe une fréquence maximale dans le spectre du signal continu $X(\nu)$. La figure suivante illustre la problématique par exemple pour des signaux carrés où il n'existe pas de fréquence maximale et l'échantillonnage va générer un recouvrement de spectres.

En pratique, dans une chaîne de traitement du signal, il est nécessaire de mettre un filtre anti-repliement ou anti-aliasing (AAF) en entrée de la chaîne de manière à pouvoir ensuite appliquer le théorème de Shannon.

I.4.2 Performance globale d'un CAN

La performance d'un convertisseur analogique/numérique est souvent estimée par sa vitesse de conversion. En effet, celle-ci est donnée par

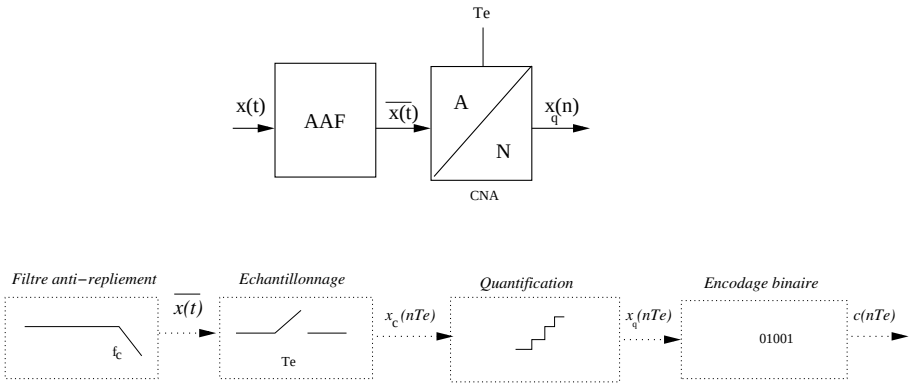


Figure I.13: Principes de base d'un convertisseur analogique/numérique

$$P = 2^{Nbits}\nu_e \tag{I.10}$$

qui représente la vitesse de conversion P c'est à dire le nombre de bits effectifs mulplié par la fréquence d'échantillonnage. Le nombre de canaux possible peut également être rajouté dans l'estimation de la vitesse de conversion dans ce cas, $P = 2^{nbitseffectif}\nu_e n$. L'unité est exprimée en franç en nombre de bits par secondes (ou en anglais sps ou SPS...).

Il est possible de renormer en introduisant la puissance moyenne dissipée P_m par le composant, un critère de mérite (FoM) est donné par le rapport de la vitesse divisé par la puissance dissipée:

$$\boxed{FoM = \frac{2^{Nbits}\nu_e}{P_m}} \tag{I.10}$$

Ce dernier critère permet de classer les convertisseurs vis à vis compromis vitesse de conversion, puissance dissipée voire surface de circuit.

I.4.3 Exercice

Considérer un signal analogique cosinusoidal de fréquence 50 Hz et d'amplitude 1V. Estimez la fréquence d'échantillonnage nécessaire. Un filtre anti-aliasing est-il obligatoire ? Ecrire l'expression de la séquence d'échantillons obtenus en considérant une fréquence d'échantillonnage double de celle de Shannon. En calculant les valeurs des premiers échantillons, représenter le signal échantillonné. Le signal numérique est-il toujours périodique ? Estimer finalement l'énergie de la séquence échantillonnée par rapport à celle du signal analogique.

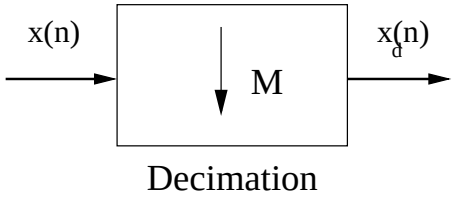


Figure I.14: Opération de décimation correspondant au fait de prendre un échantillon tous les M et de diminuer la fréquence d'échantillonnage d'un facteur M.

I.4.3 Systèmes à multiple cadence

De nombreux systèmes numériques comportent des signaux avec des fréquences différentes d'échantillonnage pour des raisons applicatives ou liés aux signaux physiques traités. Pour cela, il peut être utile de générer une nouvelle séquence numérique $\nu_e^{'}$ avec une fréquence supérieure. Inversement, il est possible de générer une séquence numérique de fréquence avec moins d'échantillons correspondant à l'opération inverse à savoir une décimation.

Selon la variation du taux d'échantillonnage désiré $R \geq 1$ ou $R \leq 1$:

$$R = \frac{\nu_e^{'}}{\nu_e} \tag{I.10}$$

il est possible de distinguer:

l'opération de décimation :

L'opération de décimation sur un signal numérique consiste sur une série d'échantillons $x(n)$ à ne prendre que M valeurs, les autres $M-1$ valeurs étant considérées comme nulles.

$$x_d(m) = \begin{cases} x(nM) & si \quad m = nM \\ 0 & autre \end{cases} \tag{I.10}$$

Cette opération permetta ainsi de diminuer la fréquence d'échantillonnage de la série numérique x_d d'un facteur M.

l'opération d'interpolation:

L'opération d'interpolation ou plutôt d'expansion de la série $x_i(n)$ consiste à insérer entre chaque valeur de la série numérique $x(n)$, $L-1$ valeurs nulles. Toutefois, en pratique, ces valeurs nulles seront remplacées par des valeurs interpolées de la série numérique.

$$x_i(m) = \begin{cases} x(n/L) & si \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \\ 0 & autre \end{cases} \tag{I.10}$$

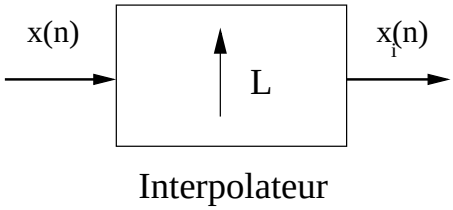


Figure I.15: Opération de d'interpolation correspondant au fait d'augmenter le nombre d'échantillons et d'augmenter la fréquence d'échantillonnage d'un facteur L.

Inversement, l'interpolation permetta ainsi d'augmenter la fréquence d'échantillonnage de la série numérique x_i d'un facteur L.

I.4.4 Quantification de signaux numériques

Les processeurs de traitement de signal numérique réalisent des calculs sur des nombres. Il est donc nécessaire que les valeurs en entrée de ce processeur soient codées sur un nombre de bits.

I.4.4 Principe de quantification

Le principe de quantification est basé sur:

- une loi de quantification Q qui va permettre de faire la correspondance entre un domaine continu de valeurs d'amplitude échantillonnée $x(n)$ et un ensemble de N valeurs discrètes $x_q(n) = Q[x(n)]$.
- une plage de conversion définissant les valeurs minimales x_{min} et maximales x_{max} de l'ensemble de quantification. La dynamique maximale D du convertisseur est alors définie par $D = x_{max} - x_{min}$.

Dans le cas d'une quantification uniforme, la plage de conversion ou pleine échelle [1] entre x_{min} et x_{max} est divisée en un pas q égal de quantification définissant l'écart entre deux valeurs quantifiées. Le pas de quantification uniforme est souvent pris égal au rapport entre la dynamique et le nombre de valeurs discrètes possible à savoir 2^{nbits} entre $[0; 2^{nbits-1}]$:

$$\boxed{q = \frac{D}{N} = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^{nbits}}} \tag{I.10}$$

La résolution R lors d'une opération de quantification est définie comme le rapport entre le pas de quantification q et la dynamique du convertisseur:

$$R = \frac{q}{D} = \frac{1}{2^{nbits}} \tag{I.10}$$

En pratique, la résolution correspond à la valeur du bits de poids ou position le plus faible (LSB). Il existe deux règles de quantification uniforme utilisée à savoir l'arrondi ou la troncature :

- **Arrondi**: $x_q(n) = k \cdot q \quad si \quad (k - \frac{1}{2}) \leq x(n) \leq (k + \frac{1}{2})$
- **Troncature**: $x_q(n) = (k + \frac{1}{2}) \cdot q \quad si \quad (k \cdot q) \leq x(n) \leq (k + 1) \cdot q$

L'adoption de l'une ou l'autre de ces règles a une influence sur la forme de la caractéristique de transfert ou la valeur maximale de l'erreur quantifiée.

[1] nota bene: la notation anglaise est FS pour Full Scale.

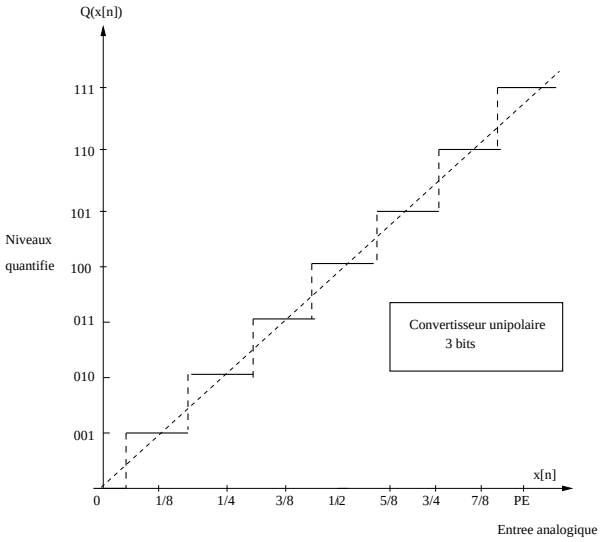


Figure I.16: Caractéristique de transfert modèle d'un convertisseur analogique/numérique centrée sur 3 bits. La pente de la caractéristique du CAN théorique illustrée en pointillé est unitaire.

I.4.4 Caractéristiques de quantification

La caractéristique de quantification résume d'une manière synthétique l'opération de quantification implémentée par le convertisseur analogique numérique. Cette caractéristique est décomposée sous la forme de niveaux qui définisse la forme de la caractéristique de transfert à savoir un escalier. A chaque quantum, valeur quantifiée est associé un code qui peut-être défini par contre de manière arbitraire à l'aide d'un dictionnaire. Par exemple, si l'on analyse la caractéristique de transfert I.17, l'entrée analogique normalisée est divisée en différents niveaux ici (2^3) correspondant au centre de chacun des niveaux de l'escalier. A chaque niveau est associé un code permettant de décrire le quantum quantifié. L'étape de quantification permet de convertir un gamme d'amplitude continue en des niveaux discrets codé par des niveaux unipolaires

I.4.4 Erreur de quantification

L'erreur de quantification est définie par la différence entre la valeur discrète $x(n)$ et celle issue de l'opération de quantification $x_q(n)$:

$$\epsilon(n) = x(n) - x_q(n) \tag{I.10}$$

Celle-ci est une notion importante car elle décrit d'une certaine manière la distortion introduite lors de l'étape de quantification du signal et peut avoir une influence significative selon le type d'applications. Lorsque le signal d'entrée demeure dans la plage de conversion $x_{max} - x_{min}$, l'erreur de quantification demeure bornée. Par contre, si le signal d'entrée n'est pas dans la plage de conversion x_{max}-x$_{min}$, l'erreur peut-être beaucoup plus importante dans la plage de saturation du convertisseur.

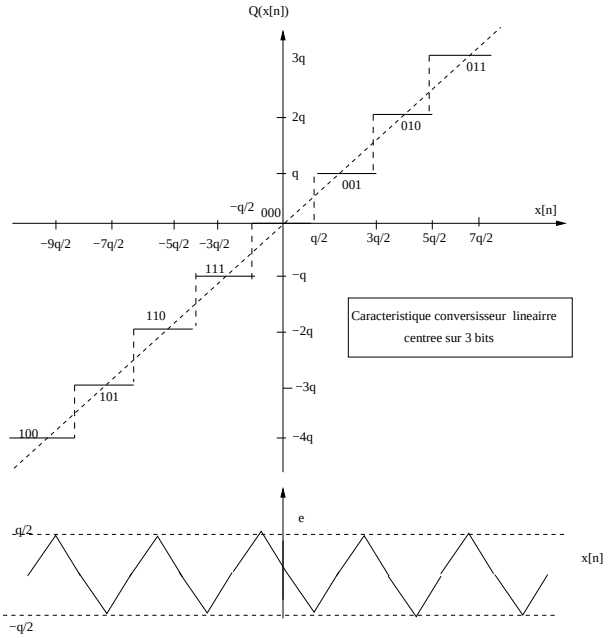


Figure I.17: Caractéristique de transfert modèle d'un convertisseur analogique/numérique centrée sur 3 bits. L'erreur de quantification générée par le convertisseur est illustrée au niveau de la figure ci-dessous .

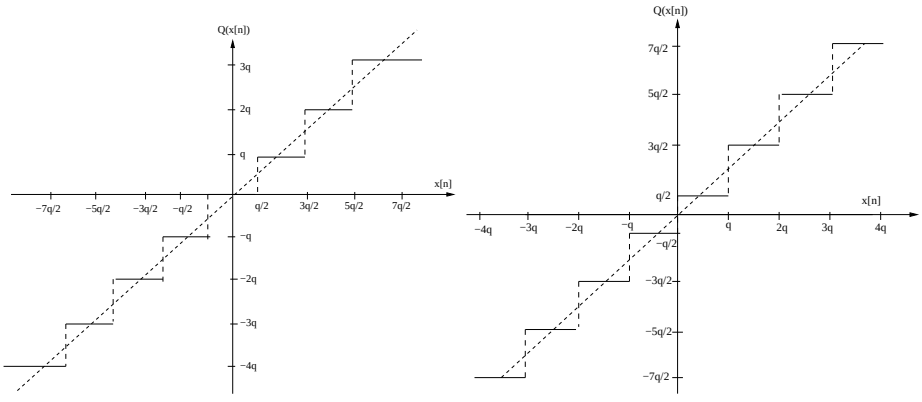


Figure I.18: Caractéristique linéaire centrée ou décalée de transfert d'un convertisseur. Dans le cas de la caractéristique centrée (méthode arrondi), le niveau 0 est un état possible de la sortie du convertisseur analogique/numérique.

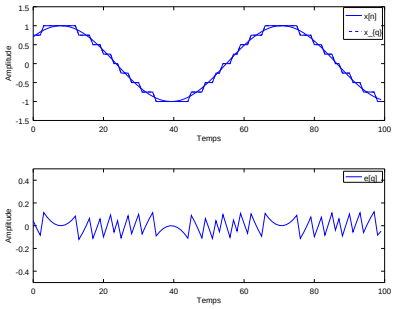


Figure I.19: Quantification d'un signal sinusoidal sur 5 bits par la méthode de l'arrondi. L'erreur de quantification du signal est extraite juste après.

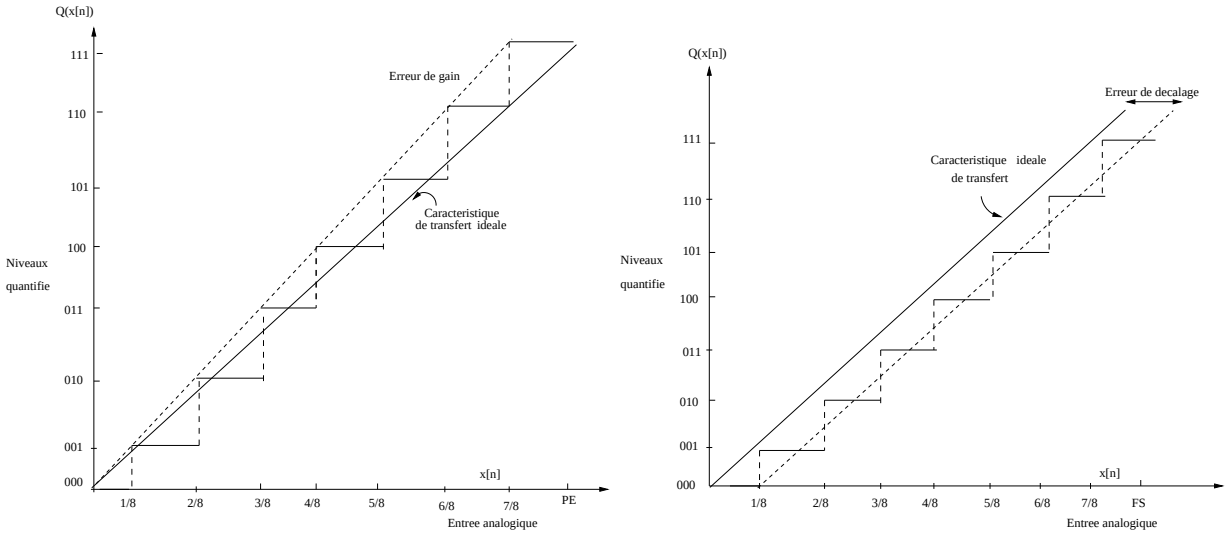


Figure I.20: Non-linéarité et caractéristiques de transfert d'un convertisseur analogique/numérique. Ces non-linéarités peuvent être a) un gain qui dévie légèrement du gain théorique unité aboutissant à la fin de la dynamique à une erreur maximale. b) la seconde linéarité est une erreur de décalage (offset) amenant à un décalage de l'ensemble de la caractértique de transfert.

I.4.5 Exercice

Un convertisseur analogique/numérique fonctionnant sur 3 bits est caractérisé par une tension d'alimentation entre $[-5V, +5V]$. En vous aidant des notions abordées dans ce document, définissez l'ensemble des paramètres caractéritiques du convertisseur analogique/numérique (CAN).

I.4.5 Rapport signal à bruit

Le rapport signal à bruit d'un convertisseur en échelle linéaire est défini par le rapport statistique de la variance du signal x_n par rapport à celui de l'érreur de quantification souvent assimilé à un bruit:

$$SNR_{A/D} = \frac{\sigma^2_{signal}}{\sigma^2_{bruit}} = \frac{E(x_n^2)}{E(\epsilon_n^2)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_n^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_n^2} \tag{I.10}$$

Celui-ci peut être défini en décibel (dB) par l'équation suivante:

$$SNR_{A/D}(dB) = 10\log(SNR_{A/D}) \tag{I.10}$$

Ce rapport exprimé (en dB) permet de caractériser le composant en terme de niveau de bruit introduit par l'opération de quantification.

I.4.5 Rapport signal à bruit d'un signal sinusoïdal

Le rapport signal à bruit peut être déterminé dans le cas d'un signal sinusoïdal. En effet, pour la partie concernant le signal sinusoidal quantifié, la variance est donnée en fonction de l'amplitude du signal sinusoïda V_{ref}:

$$\sigma^2_{signal} = \frac{V^2_{ref}}{2} \tag{I.10}$$

Il peut être montré que la variance du bruit est égale à $\frac{q^2}{12}$ en estimant l'erreur de quantification d'un signal sinusoïdal. Ceci permet d'exprimer la variance du bruit de quantification en fonction de l'amplitude du signal et du nombre de bits:

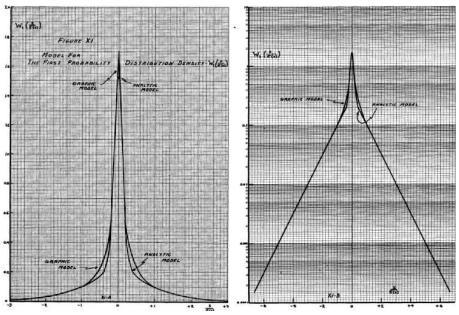


Figure I.21: Illustration de la densité de probabilité au niveau de la parole. Celle-ci est caractérisée par une distribution très pentue, la majeure partie des évenements étant d'amplitude faible similaire à une distribution de Laplace.

$$\sigma^2_{bruit} = \frac{q^2}{12} = \frac{\frac{V^2_{ref}}{2^{n-1^2}}}{12} \tag{I.10}$$

Le rapport des deux variances permet de simplifier de manière simplifier l'expression qui se réduit à:

$$SNR^2 = (\frac{\sigma_{signal}}{\sigma_{bruit}})^2 = 6 * 2^{2n-2} \tag{I.10}$$

Dans le cadre d'un signal sinusoïdal, ceci permet d'aboutir à l'expression du rapport signal à bruit (SNR) en dB pour un quantifier:

$$\boxed{SNR(dB) = 10\log_{10}(6) + 20(n-1)\log_{10}(2) = 6n + 1.8} \tag{I.10}$$

Cette expression est souvent étendue et sert en pratique à estimer le rapport signal à bruit théorique pour un nombre de bits donné.

I.4.5 Quantification non-uniforme

L'un des principales problématiques rencontrées est que certains signaux physiques se prêtent mal à une quantification uniforme. Si l'on prends l'exemple de la parole, les variations de valeur d'amplitude peuvent prendre des variations importantes. Néanmoins, la figure suivante présente la densité de probabilité expérimentale pour des enregistrements la parole et montre que la majorité des évenements correspondent à des niveaux d'amplitude relativement faible.

Une quantification de type uniforme n'est donc pas adaptée. Le principe de la quantification non-uniforme consiste à utiliser une loi logarithmique permettant d'amplifier les variations v d'amplitude

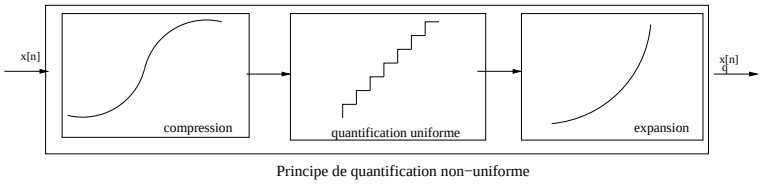


Figure I.22: La quantification non-uniforme est implémentée de la manière suivante: une étape de compression est réalisée qui va permettre de définir des intervalles non uniformes, une étape de quantification uniforme classique et enfin une étape d'expansion permettant de décompresser en amplitude le signal quantifié.

les plus faibles et à l'inverse minimiser les amplitudes les plus élevées. Le pas de quantification de plus en plus grand pour des valeurs plus importantes.

I.4.6 Exemple de quantification non-uniforme

La quantification non-uniforme est utilisée principalement en téléphonie... Par exemple, une recommandation ancienne (G.711) utilise la loi μ permettant de compresser l'amplitude des différents échantillons d'amplitude par une loi pseudo-logarithmique sur 8 bits:

$$x_c(n) = sgn(x)\frac{log(1+\mu\frac{x(n)}{D})}{log(1+\mu)} \quad o\text{ù} \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{I.10}$$

où D est la dynamique d'amplitude permettant de normaliser l'amplitude entre ± 1 et μ est un nombre entier en pratique $\mu = 255 \quad (2^8 - 1)$.

I.4.7 Encodage ou représentation binaire

L'opération de codage réalisé par le convertisseur analogique/numérique permet à l'aide de la caractéristique de transfert de transformer une tension physique analogique en un code permettant de grouper en série des niveaux binaires. Si l'on considère le codage binaire unipolaire, la relation la plus simple entre la tension du convertisseur et la :

$$V = q\sum_{i=1}^{N} a_n 2^n \quad o\text{ù} \quad a_n = 1 \quad ou \quad 0 \tag{I.10}$$

Le plus simple en terme de codage pour un convertisseur analogique/numérique est le codage binaire naturel ($a_0 a_1 a_2 a_{N-1}$) où a_0 correspond au bit de poids faible 2^0 (LSB) et a_{N-1} est celui de poids fort (MSB):

Niveaux	Signé	Binaire décentré	Complément à 1	Complément à 2
+3	011	111	011	011
+2	010	111	010	010
+1	001	101	001	001
+0	000	100	000	000
-0	100	-	111	-
-1	101	011	111	-
-2	110	010	110	111
-3	111	001	101	110
-4	-	(000)		101

Table I.1: Représentations binaires pour des convertisseurs linéaires

$$nombre = a_{N-1}2^{N-1} + a_{N-2}2^{N-2} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0 \tag{I.10}$$

Il est possible de définir les différents types de représentation binaire pour des convertisseurs analogiques/numériques comme illustre le tableau suivant :

- Signe et valeur absolue
- Binaire décentré ou décalé
- Complément à 1
- Complément à 2

I.4.8 Reconstruction

L'étape de reconstruction d'une séquence numérique $x(n)$ consiste à réaliser l'opération inverse à savoir transformer une séquence numérique en une séquence analogique voire en un signal physique interprétable par l'humain.

I.4.8 Interpolation idéale de Shannon

La clef du théorème de Shannon est probablement l'aspect reconstruction. Sur le plan théorique, il est possible de retrouver le signal analogique original $x_a(t)$ à partir des échantillons numériques $x(k)$ selon la formule d'interpolation de Whittaker-Shannon:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(t - kT_e) \quad o\grave{u} \quad h(t) = \frac{\sin(\pi\nu_e t)}{\pi\nu_e t} \tag{I.10}$$

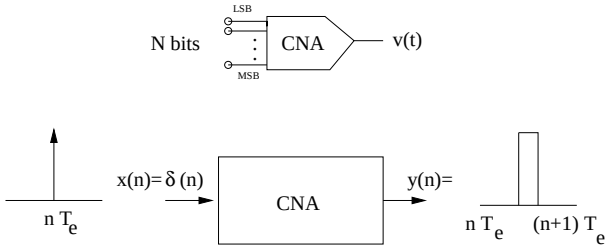


Figure I.23: Principe de fonctionnement d'un convertisseur numérique/analogique. En entrée de celui-ci, une impulsion unité representant une valeur du signal numérique, ce dernier va transformer le signal numérique en un signal porte ayant avec une amplitude identique à celle du signal d'entrée mais constant durant la période T_e.

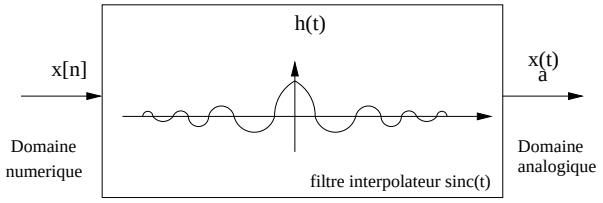


Figure I.24: Opération de reconstruction par un filtre interpolateur idéal en sinus cardinal permettant d'implémenter la formule d'interpolation de Whittaker-Shannon.

Par contre, il existe deux problèmatiques de manière à appliquer à savoir que le signal $x_a(t)$ doit être caractérisé par un spectre limité en fréquence. En outre l'implémentation du filtre en *sinc* n'est pas forcément simple, comme pour la transformée de Fourier il est en effet nécessaire de faire une somme infinie d'échantillons.

I.4.8 Reconstruction en pratique

En pratique, l'étape de reconstruction peut-être implémenté par des interpolations. Le plus simple est celui adopté dans la description du convertisseur numérique/analogique (CNA) c'est-à-dire le bloqueur d'ordre zero $h_0(t)$ qui permet de maintenir une amplitude constante entre deux valeurs numériques:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h_0(t - kT_e) \quad \text{où} \quad h_0(t) = \Pi_{[k_e,(k+1)T_e]}(t) \tag{I.10}$$

- bloqueur d'ordre un: implémente une interpolation linéaire entre deux valeurs numériques
- bloqueur d'ordre deux: implémente une interpolation parabolique entre plusieurs valeurs numériques
- ...
- Interpolateur idéal de Shannon : génère une séquence d'amplitude continue à l'aide d'un filtre en sinus cardinal (*sinc*) des valeurs numériques.

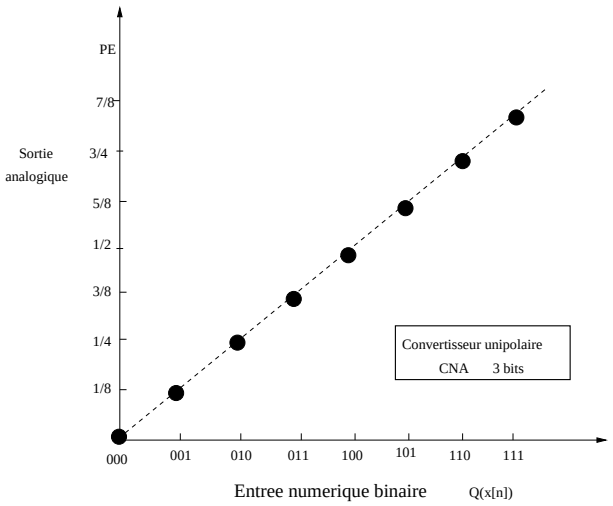


Figure I.25: Caractéristique de transfert d'un CNA sur 3 bits.

Figure I.26: Chaîne complète de traitement du signal numérique incluant en entrée un filtre anti-recouvrement (AAF) et en sortie un filtre de reconstruction ou lissage (RF).

Il existe donc une large gamme

I.4.8 Caractéristique de transfert d'un CNA

La caractéristique de transfert d'un convertisseur numérique/analogique sur 3 bits est illustrée au niveau de la figure suivante. L'ée numérique correspond à l'ensemble:

A chaque mot binaire du convertisseur numérique/analogique est associée une grandeur physique en sortie (courant ou tension):

$$v(t) = q \cdot (a_{N-1}2^{N-1} + a_{N-2}2^{N-2} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0) \tag{I.10}$$

I.5 Chaîne complète de traitement du signal

Il est possible de résumer l'ensemble des opérations (échantillonnage, quantification, filtre anti-recouvrement et filtre de reconstruction) de la chaîne complète de traitement du signal numérique:

Deux limites principales ont été identifiées dans la chaîne de traitement du signal numérique complète:

- Le recouvrement résiduel du à un filtre anti-aliasing non-idéal
- Le bruit de quantification lié à une résolution limitée

La conception d'une chaîne de traitement du signal numérique quelque soit le signal physique à traiter va concerner le choix des différents paramètres à savoir la résolution, la fréquence d'échantillonnage et la bande passante du système et enfin l'ordre du filtre anti-recouvrement. Les deux paramètres à savoir la résolution (CAN) demandée et la bande passante (ν_c):

- **Applications:** Résolution CAN ($nbits$) & bande passante (ν_c)
- **Compromis:** Fréquence d'échantillonnage (ν_e) et ordre du filtre anti-recouvrement (m)

Le recouvrement résiduel $R_{aliasing}$ au limite de la bande passante ν_c peut être estimé:

$$R_{aliasing} = |H(\nu - \nu_e)|_{\nu=\nu_c} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\nu_c - \nu_e}{\nu_c})^{2m}}} \tag{I.10}$$

Pour rappel, la résolution du convertisseur analogique/numérique (CAN) est donnée par le nombre de bits: $R_{CAN} \cong \frac{1}{2^{nbits-1}}$.

D'une manière pratique, la distortion introduite par le recouvrement de spectre soit inférieure à la distortion introduite par le convertisseur analogique/numérique:

$$R_{aliasing} < R_{CAN} \Longleftrightarrow \sqrt{1 + (\frac{\nu_c - \nu_e}{\nu_c})^{2m}} < 2^{nbits-1} \tag{I.10}$$

Le rapport entre la fréquence d'échantillonnage ν_e et la fréquence de coupure ν_c est donné par:

$$\frac{\nu_e}{\nu_c} > (1 + (2^{nbits-1})^{1/m}) \tag{I.10}$$

Il est possible de décomposer cette équation sous la forme d'un tableau avec le nombre de bits du convertisseur analogique/numérique en entrée ainsi que l'ordre du filtre:

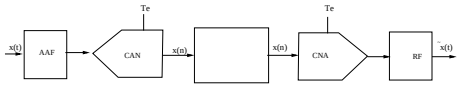


Figure I.27: Principe d'analyse d'une chaîne convertisseur analogique/numérique et numérique/analogique et estimation de la distortion introduite.

	CAN Nombre de bits:				
Ordre du filtre m:					
	8	10	12	14	16
4	4.4	5.8	7.7	10.6	14.5
6	3.3	3.9	4.6	5.5	6.7
8	2.9	3.2	3.6	4.1	4.7

Si l'on fait l'hypothèse d'un filtre anti-recouvrement d'ordre 8, la dernière ligne du tableau permet d'estimer un ordre de grandeur situé entre 3 et 5 pour le rapport entre ν_e et la fréquence de coupure du filtre définissant la bande passante:

$$\nu_e \cong 3...5\nu_c \tag{I.10}$$

I.6 Analyse d'une chaîne complète CAN-CNA

L'objectif de cette section est de modéliser une chaîne complète CAN-CNA et de représenter l'influence ou l'absence d'un des composants clefs de la chaîne de traitement numérique du signal c'est à dire la présence ou l'absence d'un filtre anti-aliasing pour le convertisseur analogique/numérique ou d'un filtre de reconstruction ou lissage pour le convertisseur numérique/analogique.

Il s'agit d'envoyer dans la chaîne de traitement un signal analogique bref mais de forme et d'amplitude différente des signaux usuels. La figure suivante présente la forme du signal considéré, sa forme échantillonnée et le recouvrement de spectre non négligeable du à l'échantillonnage au centre de la bande passante. Il est maximum à 0.5 ν_e.

I.6.1 Influence d'un filtre anti-recouvrement

La figure suivante présente l'influence de la présence d'un filtre anti-recouvrement (AAF). En coupant les composantes à haute fréquence, il est possible d'observer que le recouvrement de spectre est effectivement fortement diminué. Par contre, l'influence du filtre se traduit en temporel par une légère distorsion et l'introduction d'un délai.

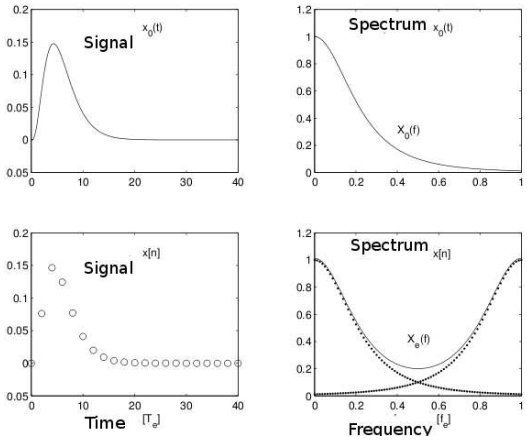


Figure I.28: Recouvrement spectral et absence de filtre anti-aliasing.

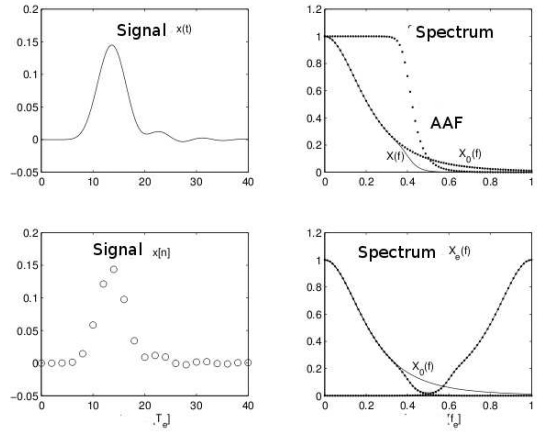


Figure I.29: Attenuation du recouvrement spectral par filtrage.

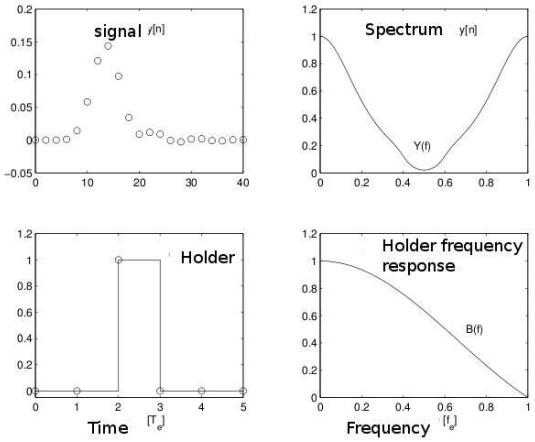


Figure I.30: Influence d'un bloqueur d'ordre zero.

I.6.2 Influence d'un filtre de reconstruction, lissage

La figure suivante présente le signal vers la sortie de la chaîne de traitement numérique, le recouvrement de spectre fortement atténué. La partie suivante présente le bloqueur d'ordre zero ainsi que sa réponse en fréquence.

La figure suivante résume l'influence du convertisseur numérique/analogique où l'on retrouve le signal analogique d'entrée mais avec une distorsion importante introduite par les paliers du bloqueur. Cela se traduit au niveau du spectre par la présence d'une composante à haute fréquence absente dans le signal $x(t)$ initial. L'utilisation d'un filtre de reconstruction ou de lissage (RF) permet effectivement de filtrer cette partie à plus haute fréquence, de lisser le signal extrait de la sortie du bloqueur et enfin de retrouver un signal analogique proche de celui initial. Il est intéressant de noter que l'ensemble de la chaîne se traduit par la présence d'un délai et d'une distorsion du signal dans le signal échantillonné puis reconstruit.

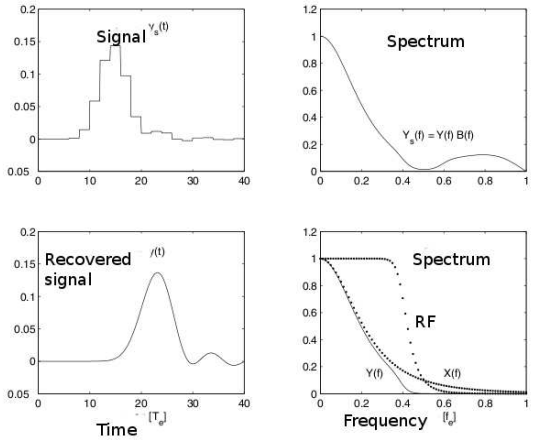


Figure I.31: Influence d'un filtre de reconstruction sur le signal extrait d'un bloqueur d'ordre zero.

I.7 Conclusion

Ce cours a présenté la structure simple d'une chaîne de traitement du signal numérique principe de base de très nombreuses applications. Il insiste sur le rôle clef des convertisseurs analogiques/numériques et numériques/analogiques dans les fonctions d'échantillonnage, de quantification et de reconstruction. Au delà de la simple fréquence d'échantillonnage et du nombre de bits utilisés, d'autres nombreux paramètres clefs permettent de définir finement la performance et le domaine d'application du système numérique comme l'architecture (non présenté), le temps d'acquisition, de conversion, l'ordre des filtres, le critère de mérite estimant la vitesse de conversion en lien avec l'énergie consommée par le système notamment pour des applications embarquées où celle-ci est précieuse...

Applications	Paramètres importants de la chaîne numérique
Audio	Résolution (ex: 16 bits, 96 dB)
Contrôle, automatique	Monotonie, stabilité
Analyse image	Résolution, rapidité de conversion
Mesures physiques	Résolution, temps d'acquisition (ex: 18 bits, SNR $\geq$ 100 dB)
Analyse spectrale	Rapport signal à bruit
Télécommunication	Compression signal, énergie (ex: 8 bits, 50 dB)
Vidéo	Réponse en fréquence, rapidité de conversion
...	

II – Analyse Spectrale de Signaux Numériques

II.1 Introduction

II.1.1 Aspect historique

John Tukey (1915-2000)

James Cooley (1926-2016)

Nasir Ahmed (1940-)

Les notions abordées dans ce cours et principalement la transformée de Fourier rapide sont principalement le résultat des études de John Tukey et James Cooley. John Tukey était un statisticien américain, professeur de statistiques à l'université de Princeton et chercheur au laboratoire Bell. James Cooley était un mathématicien américain et l'un des pionners dans le domaine du traitement du signal numérique. Il a travaillé à IBM Watson et co-développé l'algorithme de calcul de transformée de Fourier rapide (FFT) avec John Tukey dans les années 1965. La transformée en cosinus discret est plus récente et concerne le travail de recherche de Nasir Ahmed (1940-) en 1972 pour la compression d'image.

II.1.2 Applications

De nombreuses applications de la vie de tous les jours (son, image) requièrent une connaissance ou tout du moins une estimation du spectre fréquentiel du signal:

- Son (MP3): encodage et compression des données
- Image (format Jpeg): encodage et compression des données
- Videos : encodage, compression au niveau des codecs
- Télecommunication: formation et le décodage d'un signal ADSL
- Mesure: analyse fréquentielle de signaux complexes

II.2 Transformée de Fourier (TF)

II.2.1 Définition

La définition mathématique de la transformée de Fourier permet de calculer le spectre $X(\nu)$ d'un signal temporel continu $x(t)$:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt \tag{II.0}$$

Sur le plan applicatif, différentes contraintes (contrainte mémoire, temps de calcul) ne permettent pas directement une implémentation de la transformée de Fourier classique sur un dispositif de calcul:

- le signal $x(t)$ est un signal temporel continu
- le domaine d'intégration est infini
- le spectre $X(\nu)$ est également continu

Il est donc nécessaire de simplifier l'équation II.2.1 ou tout du moins d'essayer de formuler une version proche.

II.2.2 Vers la transformée discrète

L'un des premiers verrous est sur le plan mathématique, le signal $x(t)$ est continu à la fois en temporel et en amplitude. La première approximation va donc consister à échantillonner le signal continu afin

de générer en un signal discret $x(nT_e)$. Si l'on introduit la période déchantillonnage comme étant T_e, n correspondant au numéro d'échantillons, il est possible de définir une transformée de Fourier numérique, le spectre $X(\nu)$ est pour l'instant continu:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \exp(-2i\pi\nu nT_e) \tag{II.0}$$

Une seconde approximation importante consiste à réduire l'intervalle d'intégration qui est supposé infini. Pour cela, l'integration va se limiter à N valeurs.

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{N} x(nT_e) \exp(-2i\pi\nu nT_e) \tag{II.0}$$

Cette approximation de fait correspond à l'opération de fenêtrage du signal $x(nT_e)$ par une fenêtre rectangulaire, ce dernier étant considéré comme causal, les échantillons négatifs étant supposés de valeur nulle.

Enfin, la dernière limitation vient du fait que le spectre calculé $X(\nu)$ demeure pour l'instant continu. Il est nécessaire de venir également échantillonner le spectre signal c'est à dire qu'il ne sera évalué que sur quelques fréquences spécifiques $X(\nu = k\nu_s)$. Afin d'éviter un recouvrement, cette fois-ci, dans le domaine temporal d'imposer le fait:

$$(N-1)T_e < \frac{1}{\nu_s} \tag{II.0}$$

La durée d'observation de la série temporelle correspondant aux N échantillons doit être inférieure à l'inverse de la période des échantillons fréquentiels (ν_s). Classiquement, le choix de la résolution $\Delta\nu$ de la transformée de Fourier discrète est fait de telle manière que les échantillons spectraux ν_s soient réparties de manière uniforme entre $[0 - \nu_e]$:

$$\nu_s = k\frac{1}{NT_e} \text{où} 0 \leq k \leq N-1 \tag{II.0}$$

Ceci aboutit à la définition de la transformée de Fourier discrète (TFD):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp -\frac{2i\pi kn}{N} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq k < N-1 \tag{II.0}$$

Contrairement à la transformée de Fourier continue II.2.1, cette transformée proche de la définition est désormais implémentable sur un processeur de calcul. Par contre, il est important d'avoir à l'esprit que l'ensemble des approximations qui ont été entreprises à savoir l'échantillonnage temporel,

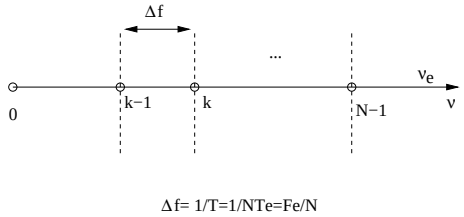


Figure II.1: Résolution $\Delta\nu$ des échantillons spectraux. Chaque échantillon spectral k de DFT est espacé de $\Delta f = \frac{\nu_e}{N}$ de $[0; \nu_e]$.

un fenêtrage du signal temporel sur N échantillons, échantillonnage fréquentiel pour aboutir à la définition d'une transformée implémentable.

II.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

II.3.1 Définition

La transformée discrète (**TFD**) d'une séquence numérique $x(n)$ est définie par l'équation suivante :

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq k < N-1} \tag{II.0}$$

avec W l'opérateur $W_N^{nk} = \exp -\frac{2i\pi kn}{N}$

D'une manière équivalente, la transformée discrète inverse (**IDFT**) peut être définie par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp \frac{2i\pi kn}{N} \qquad n = 0, \ldots, N-1 \tag{II.0}$$

II.3.2 Expression matricielle de la transformée de Fourier discrète

Il est possible d'exprimer la suite d'échantillons temporels sous la forme d'un vecteur :

$$x(n) = \Big[x(0) \cdots x(n) \cdots x(N-1)\Big]^T \tag{II.0}$$

Egalement la matrice de transformée discrète (TFD):

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \exp(\frac{-2i\pi nk}{N}) & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{II.0}$$

Le vecteur d'échantillons spectraux est alors donné simplement par le produit de la matrice de transformée discrète (TFD) et les échantillons temporels de la suite numérique:

$$X = T_n \cdot x \tag{II.0}$$

ou plus précisèment:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X(k) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \exp(\frac{-2i\pi nk}{N}) & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(n) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \tag{II.0}$$

L'implémentation directe de la transformée de Fourier discrète nécessite donc $N \cdot (N-1)$ additions, N^2 multiplications correspondant à une complexité de l'algorithme en o(N^2).

Considérer la transformée discrète sur 4 points de la séquence numérique $x(n)$ suivante:

$$x(n) = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0 \end{bmatrix} \tag{II.1}$$

Ecrire la matrice de TFD permettant le calcul. Calculer les échantillons spectraux

II.4 Transformée de Fourier Rapide (TFR)

Il existe différentes implementations d'algorithme cherchant à simplifier la transformée de Fourier discrète mais avec moins d'opérations implémentant

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} \tag{II.1}$$

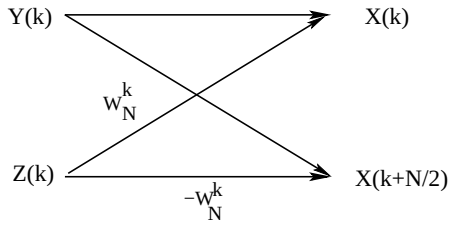


Figure II.2: Définition de l'opérateur papillon permettant d'implémenter l'opération d'entrelacement pour la définition de la transformée rapide.

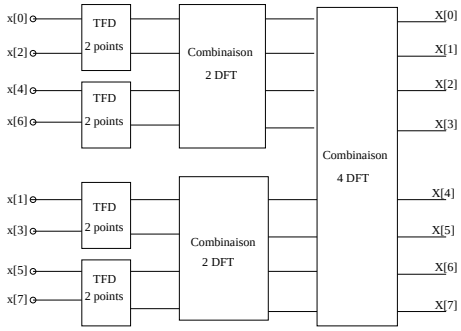


Figure II.3: .

Ces implémentations utilisent des propriétés de l'opérateur exponentiel complexe W_N^{k+N} à savoir :

$$\begin{cases} W_N^{k+N/2} = -W_N^k & (Symétrie) \\ W_N^{k+N} = W_N^k & (Périodicité) \end{cases} \tag{II.1}$$

L'approche afin de simplifier le calcul de cette expression adopée à l'époque est de supposer que le signal soit de longeur composite c'est à dire décomposer cette série de N en deux sous-series $N = ab$ ou de puissance de 2. Le plus simple étant par exemple de séparer la somme en deux partie N/2 les terms pairs (2n) et impairs (2n+1):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k} \tag{II.1}$$

L'introduction de l'opérateur papillon permet de décrire l'opération d'entrelacement en temporel:

$$\begin{cases} X(k) = X_0(k) + W_N^k X_1(k) \quad k = 0,1,...N/2-1 \\ X(k+N/2) = X_0 - W_N^k X_1(k) \quad k = 0,1,...N/2-1 \end{cases} \tag{II.1}$$

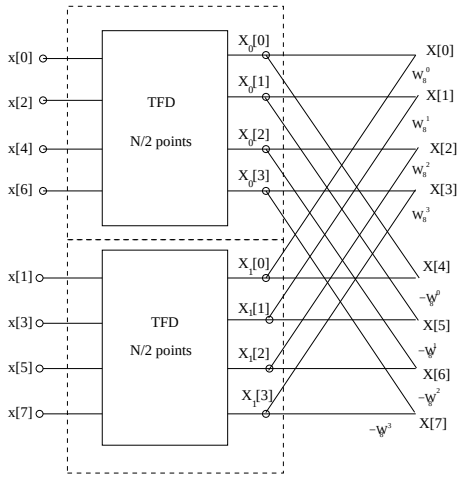


Figure II.4: .

II.4.1 Exercice

Ci-joint un exemple de représentation de transformée de Fourier rapide d'ordre 4 à entrelacement temporel. Développer les relations entre échantillons temporels et spectraux. Retrouvez-vous l'expression de la matrice de TFD d'ordre 4 ?

II.4.2 Exemple de calcul simple sur Octave&Matlab

Afin de réaliser une implémentation de calcul simple sur Octave, il est nécessaire de définir un tableau d'échantillon à la période d'échantillonage fixée ainsi que la séquence numérique :

```
f0=200;f1=400;fe=4000;Te=1/fe;n=[0:1:100];t=n*Te;
x=sin(2*pi*f0*t)+4*sin((2*pi*f1*t+pi/6));
```

Les logiciels octave ou matlab ne définisse pas par défaut d'echelle de fréquences discrètes afin de représenter la transformée de Fourier discrète calculées sur dix échantillons.

```
N=10;n2=[0:1:N-1];
vk=(1/(N*Te))*n2;
```

La fonction fft.m implémente un algorithme de calcul rapide de transformée de Fourier discrète:

```
y=fft(x,N);

figure(1)
```

Figure II.5

```
subplot(211)
stem(t,x)
xlabel('temps (s)')
ylabel('x(nTe)')

subplot(212)
stem(vk,abs(y));
xlabel('frequence (Hz)')
ylabel('TFD')
```

La fonction fftshift.m permet également de réordonner les échantillons de transformée discrète $[-\nu_{nyquist}; \nu_{nyquist}]$

II.5 Transformée en Cosinus Discret (DCT)

L'une des problématique de la transformée de Fourier discrète est de réaliser des calculs dans l'espace complexe et nécessite un volume de calcul plus important notamment si on considè re des applications de type temps réels comme de la vidéo. L'objectif est donc de simplifier les calculs d'échantillons spectraux en adoptant une transformée ayant les propriétés suivantes:

- Transformée à coefficients réels
- Transformée bijective c'est à dire que la transformée inverse de l'espace fréquentiel vers temporel existe
- Transformée permettant d'estimer le spectre ou l'énergie dans le domaine fréquentiel

II.5.1 Transformée de Hartley (DHT)

L'analyse de Fourier est basée sur une projection d'exponentielle complexe qui peut s'exprimer de la manière suivante:

$$\exp^{2i\pi\nu t} = \cos(2i\pi\nu t) + i\sin(2ß\pi\nu t) \tag{II.1}$$

Il est ainsi possible d'introduire une base un peu différente qui ne fait pas intervenir de nombres complexes:

$$cas(2i\pi\nu t) = \cos(2i\pi\nu t) + \sin(2i\pi\nu t) \tag{II.1}$$

II.5.2 Transformée en Cosinus Discret de type II

La transformée en cosinus discret (DCT) est une transformée proche de la transformée de Fourier discrète classique mais uniquement sur une projection de cosinusoides permettant que les échantillons spectraux X_{DCT} soient des coefficients réels. Les propriétés principales sont:

$$\boxed{X_{DCT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} 2x[n]\cos[\frac{\pi k(2n+1)}{2N}], \quad 0 \leq k \leq N-1} \tag{II.1}$$

II.5.3 Transformée en Cosinus Discret Modifié (MDCT)

$$\begin{cases} X_{DCT}[k] = \sqrt{\dfrac{2}{N}}\beta[k]\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left[\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right] & k = 0 \leq k \leq N-1 \\ x[n] = \sqrt{\dfrac{2}{N}}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \beta[k]x_{DCT}[k]\cos\left[\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right] & n = 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \tag{II.1}$$

III – Systèmes numériques et Transformée en z

III.1 Introduction

III.1.1 Aspect historique

Witold Hurewicz (1904-1956) était un mathématicien polonais et émigré aux Etats-Unis d'Amérique. Il était un expert en topologie lorsque durant le seconde guerre mondiale, il a contribué à la modélisation du système radar permettant ainsi de contribuber au domaine des mathématiques appliquées avec la découverte de la transformée en z en 1947.

III.1.2 Introduction

Les notions abordées dans ce cours s'inscrivent dans le cadre de la transformée en z sont celles développés par Witold Hurewicz (1904-1956). Wiltold Hurewicz était un mathématicien polonais et émigré aux Etats-Unis d'Amérique. Il était un expert en topologie lorsque durant le seconde guerre mondiale, il a contribué à la modélisation du système radar permettant ainsi de contribuber au domaine des mathématiques appliquées avec la découverte de la transformée en z en 1947. Cette dernière est un outil mathématique indispensable et similaire à la transformée de Laplace pour la description des systèmes discrets permettant également la définition des systèmes simples, l'analyse de leurs propriétés et enfin les calculs des fonctions de transfert.

III.2 Description des systèmes numériques

III.2.1 Définition

Un système numérique est une fonction matérielle ou un algorithme permettant d'implémenter une transformée TZ permettant de transformer le signal numérique d'entrée en une sortie également numérique. Il est possible de décrire mathématiquement un système numérique par l'équation suivante:

$$Y[n] = Z\{x[n]\} \tag{III.0}$$

où $x[n]$ est l'entrée du signal, $y[n]$ la sortie du système et T la transformée implémentée par le système. D'une manière similaire au système continu, la représentation sous forme de diagramme fonctionnel d'un système numérique est souvent préférée.

III.2.2 Exemple de systèmes numériques simples

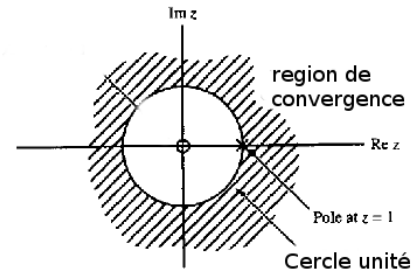
- $y[n] = x[n]$
- $y[n] = x[n-1]$
- $y[n] = x[n+1]$
- $y[n] = max\{x[n-1], x[n], x[n+1]\}$
- $y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[k]$
- $y[n] = x[n] - x[n-1]$

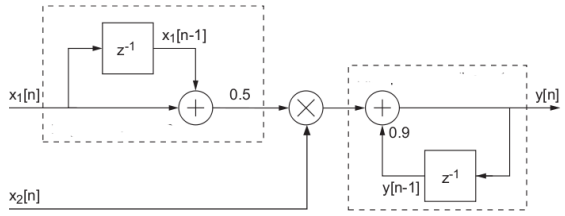
III.2.3 Exercice

Qualifier (donner un nom) aux systèmes précédents. En considérant la séquence numérique suivante: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, ...\}$, estimer la réponse de ces systèmes numériques simples.

III.2.4 Critère de stabilité

Un système est stable si les modules des pôles ($p_i \leq |1|$) de sa fonction de transfert sont inclus dans le cercle unité (ROC).

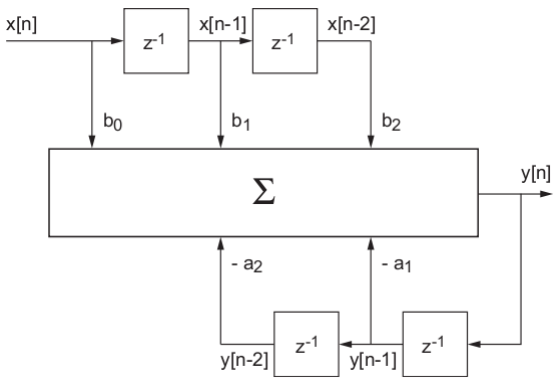




III.3 Diagramme fonctionnel

La description d'un système numérique est souvent décrit par un diagramme fonctionnel. Ce dernier est souvent composé des opérations suivantes:

- Addition: $\bigoplus$
- Multiplication entre deux signaux: $\bigotimes$
- Multiplication par un coefficient: $\rightarrow$
- Retard: z^{-1}
- Avance: z



III.4 Propriétés des systèmes numériques

III.4.1 Définition des propriétés de systèmes numériques

III.4.1 Statique

Un système statique est un système où la sortie est dépendante seulement de l'entrée du signal à un instant ($t = nT_e$) ou échantillon (n) donné nT_e:

$$y[n] = ax[n] + bx[n]^2$$

.

III.4.1 Dynamique

Un système dynamique est un système où la sortie dépend des états précédents ou futurs du signal d'entrée: $y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n+1]$. Par exemple, le système dépend de l'instant précédent mais également de l'instant suivant.

III.4.1 Linéaire

Un système linéaire satisfait au principe de superposition :

$$\begin{aligned} y[n] &= T\{ax_1[n]\} + b\{x_2[n]\} \\ &= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

III.4.1 Stabilité

Un système est dit (inconditionellement) stable si la sortie ne diverge pas quelle que soit la séquence numérique ou digitale en entrée.

III.4.1 Superposition

Un système linéaire satisfait au principe de superposition:

$$\begin{aligned} y[n] &= T\{ax_1[n]\} + b\{x_2[n]\} \\ &= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

III.4.1 Invariant

Un système invariant est un système où le retard à l'entrée se traduit simplement par un retard de la sortie d'amplitude équivalente.

$$T\{x[n+d]\} = y[n+d] \tag{III.0}$$

III.4.1 Causalité

Un système causal est un système où la sortie ne dépends que des états actuels ou précédents de la séquence d'entrée.

Quelles propriétés sont satisfaites par les systèmes suivants:

un accumulateur numérique implémentant une fonction équivalente à celle d'un intégrateur:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

un dérivateur numérique:

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

un système invariant et quadratique:

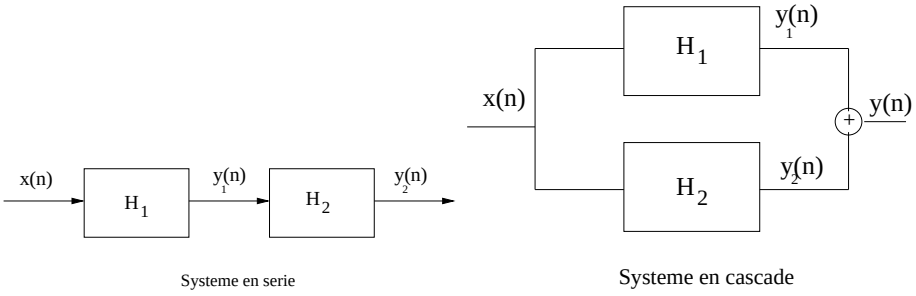
$$y[n] = x[n]^2$$

un système invariant et sous-échantillonnage:

$$y[n] = x[2n]$$

III.4.2 Interconnection des systèmes numériques

Au niveau de l'interconnection des systèmes numériques, il y a deux manières de les connecter à savoir en cascade ou en parallèle:



Dans un sysèmes connecté en série, les fonctions de transfert sont reliés de manière consécutive entre elles, l'entrée du premier correspondant à la sortie du second:

$$y[n] = H_2\{H_1\{x[n]\}\} \tag{III.0}$$

Pour un système en parallèle par contre, la connection se fait au niveau de la sortie, la sortie globale étant l'addition des deux signaux de sortie.

$$y[n] = H_2\{x[n]\} + H_1\{x[n]\} \tag{III.0}$$

III.4.3 Notion de système LTI

Les systèmes numériques ne sont pas forcèments simples et seuls pour les systèmes linéaire et invariant dans le temps (LTI), les concepts introduit pour les systèmes continus demeurent valides :

- Reponse impulsionnelle
- Produit de convolution
- Fonction de transfert

III.5 Définition de la transformée en z (TZ)

III.5.1 Définition

La transformée en z (TZ) est une généralisation de la transformée discrète DFT. D'une manière similaire à la transformée de Laplace, l'usage de la transformée en z permet de décrire des opérations simples pour des systèmes numériques. Cette transformée en z est également un outil d'analyse et de conception de systèmes numériques au sens large comme on le verra dans les chapitres suivants. Si l'on considère une séquence discrète numérique $x[n]$, sa transformée en z est définit par l'équation suivante:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}} \tag{III.0}$$

où z est cette fois une variable complexe continue dans l'espace complexe $\mathbb{C}$. Elle s'exprime souvent sous la forme d'un opérateur Z qui permet le lien entre le domaine temporel discret $x(n)$ et le domaine en z.

$$\boxed{Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}} \tag{III.0}$$

Cette relation peut s'exprimer de la manière suivante:

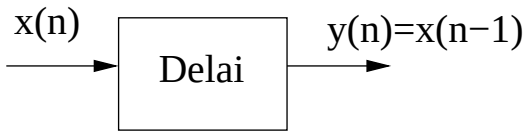
$$x[n] \leftrightarrow X(z) \tag{III.0}$$

Considérant un dirac ou un échelon unitaire, calculer la transformée en z du signal numérique.

III.5.2 Table de transformée en z

Le calcul de la transformée en z de sequence numérique plus complexe peut nécessiter des calculs fastidieux notamment par l'intermédiaire des résidus. La table suivante résume les transformées en z principales utiles.

Signaux numeriques	Transformee en z	Domaine de convergence
$\delta(n)$	1	$\mathbb{C}$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert \geq 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert \geq \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert \geq \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert \geq 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert \geq 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert \geq 1$
$a^n\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert \geq 1$



III.5.3 Lien entre DFT et transformée en z

Si l'on pose $z = re^{(j\omega)}$, la définition de la transformée en z aboutit à:

$$X(e^{(j\omega)}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]e^{(-j\omega n)} \tag{III.0}$$

En comparant avec la transformée de la DFT $X(e^{(j\omega)}$ de la séquence $x[n]$:

$$X(e^{(j\omega)}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]e^{(-j\omega n)} \tag{III.0}$$

c'est-à-dire $X(re^{(j\omega)})$ est la TFD de la séquence $\{x[n]r^{-n}\}$.

III.5.4 Résumé des propriétés de la transformée en z

Propriété	Séquence numérique	Transformée en z
	$g(n)$	$G(z)$
	$h(n)$	$H(z)$
Conjugaison	$g^*(n)$	$G^*(z^*)$
Renversement temporel	$g(-n)$	$G(1/z)$
Linearité	$ag(n) + bh(n)$	$aG(z) + bH(z)$
Décalage temporel	$g(n - n0)$	$z^{-n0}G(z)$
Multiplication $a^n u(n)$	$a^n g(n)$	$G(z/a)$
Convolution	$g(n) \otimes h(n)$	$G(z)H(z)$

III.5.5 Concept de délai

La notion de délai temporel est importante dans les systèmes numériques. L'introduction volontaire de délai au niveau temporel permet d'utiliser des détats précédents de l'entrée. Celle-ci est réalisé facilement à l'aide d'une porte logique qui se traduit dans le domaine en z par la multiplication par un facteur z^{-1}:

Dans le domaine en z, le délai se traduit de la manière suivante :

$$Y(z) = z^{-1}X(z)$$

. Sa notation est variable dans le sens où il s'écrit sous la forme de l'opérateur z^{-1} ou T.

III.5.6 Transformée en z rationnelle

Dans le cadre des systèmes linéaire et invariant (LTI) c'est l'attrait principal de la transformée en z, les systèmes à temps discrets sont des fonctions rationnelles en z^{-1}:

$$\boxed{H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{n_0 + n_1 z^{-1} + ... + n_{M-1} z^{M-1} + n_M z^{-M}}{d_0 + d_1 z^{-1} + ... + d_{N-1} z^{N-1} + d_N z^{-N}}} \quad \text{(III.0)}$$

où le degré du numérateur $N(z)$ et $D(z)$ et M est le degré du dénominateur est N. Le degré de la fonction rationnelle $H(z)$ est le maximum du de gré du numérateur $N(z)$ ou du dénominateur $D(z)$.

La fonction $H(z)$ peut être factorisée en utilisant les pôles (p_i) et les zéros (λ_i):

$$H(z) = \frac{p_0}{d_0} \frac{\Pi_{i=1}^{M}(1 - p_i z^{-1})}{\Pi_{i=1}^{N}(1 - \lambda_i z^{-1})} \quad \text{(III.0)}$$

III.5.7 Fonction de transfert d'un système numérique

Un système numérique est stable si le module de l'ensemble des pôles sont inclus dans le cercle unité $p_i \leq |1|$. Un système numérique est souvent décrit par une équation recursive définis pour des instants discrets:

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0} b_k x(n-k) \quad \text{(III.0)}$$

En utilisant les différentes propriétés (linéarité, décalage temporel) de la transformée en z, l'équation aux différences finies est:

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) \quad \text{(III.0)}$$

III.6 Fonctions Octave&Matlab utiles

Différentes fonctions sont disponibles sous Octave ou Matlab permettent d'analyser les différents systèmes numériques :

- Il est possible en définissant les numérateurs et dénominateurs sous la forme de tableau, de définir la fonction de transfert d'un système numérique à l'aide de la fonction : TF. Contrairement au système analogique, il est nécessaire de préciser la fréquence d'échantillonnage F_e

```
A=[1 1];B=[1 1 1];tf(A,B,1/Fe);
```

- Pour des fonctions de transfert complexe, le calcul des pôles et zéros à la main peut s'avérer fastidieux. Il est possible d'estimer numériquement la stabilité des pôles : TF2ZP,ZPLANE

```
[zero,pole]=tf2zp(A,B);zplane(A,B);
```

- Réponse impulsionnelle et en fréquence IMPULSE et FREQZ

```
[y,t]=impulse(H,1,10,100);
[G2,f]=freqz(A2,B,500,Fe);
plot(t,y);plot(f,G2)
```

IV – Introduction aux filtres numériques

IV.1 Introduction

L'opération de filtrage est un dispositif permettant de filtrer un signal d'entrée de manière à générer un signal de sortie dont une partie du spectre est filtrée. Initialement, les filtres ont été implémenté de manière analogique par des composants électroniques passifs et des amplificateurs. Ils présentent ces inconvénients suivant:

- La fréquence de bande passante est limitée
- La sensibilité au bruit est importante ainsi que la présence de non-linéarité
- La stabilité et la flexibilité sont limitées

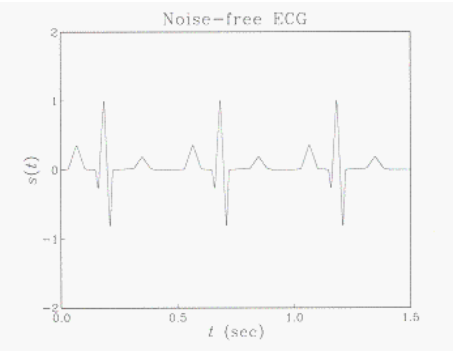
Les implémentations des filtres numériques sur le plan technologique ont été souvent préférées parce qu'il est communément admis comme étant plus fiable, stable et adaptable. Par contre, les implémentations analogiques demeurent en terme de coût ou pour des fréquences élevées moins fiables.

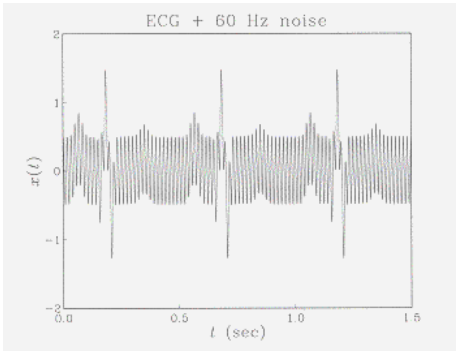
IV.2 Principes d'un filtre numérique

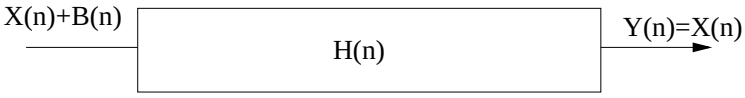
IV.2.1 Pourquoi filtrer ?

L'example suivant illustre le fait qu'un signal extrait d'un dispositif médical comme un electrocardiogramme (ECG) peut-être perturbé par la présence d'un bruit:

Un filtre est nécessaire afin d'extraire le signal utile du bruit.







IV.2.2 Définition

Un filtre numérique est un système permettant sur le plan fonctionnel de transformer un signal numérique $X(n)$ à l'entrée en un signal $Y(n)$ en enlevant le bruit $B(n)$ à l'entrée et éventuellement une partie du spectre non désiré:

Un filtre numérique respecte le principe de causalité dans le sens où la sortie du filtre n'est pas défini et est nulle pour des instants négatifs $Y(n) = 0 \quad \nabla n \leq 0$.

IV.2.3 Filtre ARMA

En pratique, un filtre étant un système numérique, il est défini par une équation aux différences finies d'ordre N avec des coefficients constants a_k et b_k:

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)} \tag{IV.0}$$

La première partie de l'équation du filtre correspond aux coefficients $b_k x(n-k)$ est une moyenne mobile (MA) des échantillons de l'entrée tandis que la seconde partie est auto-regressive ($\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$) de l'equation (AR). Cette structure est souvent qualifiée de structure de filtre ARMA et est un modèle dit à "autoregressif à moyenne adaptée". Cette structure de filtre permet d'implémenter des filtres RII.

IV.2.4 Fonction de transfert

A l'aide de la transformée en z en transformant les retards sous la forme d'un opérateur z^{-1}, il est possible de mettre l'équation aux différences finies sous la forme d'une fonction de transfert définie

de la manière suivante :

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}} \tag{IV.0}$$

Au niveau d'un filtre numérique, sa réponse en fréquence est définie par les coefficients a_k, b_k et tout le problème va consister à définir ces coefficients de manière à avoir la réponse du filtre désirée.

IV.3 Catégorie de filtres numériques

Il existe principalement deux catégories différentes de filtres numériques à savoir des filtres dits RIF ou RII. Les filtres non-récursif RIF sont caractérisés par :

- Un filtre RIF est un filtre non récursif avec une réponse impulsionnelle infinie

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{IV.0}$$

  Le filtre RIF est caractérisé par une relation directe entre les échantillons de la séquence numérique de l'entrée $x(n)$ et ceux de la sortie $y(n)$. Il est caractérisé par une réponse impulsionnelle finie dans le sens où l'entrée d'un dirac va provoquer une réponse en sortie qui est fonction des coefficients b_k.

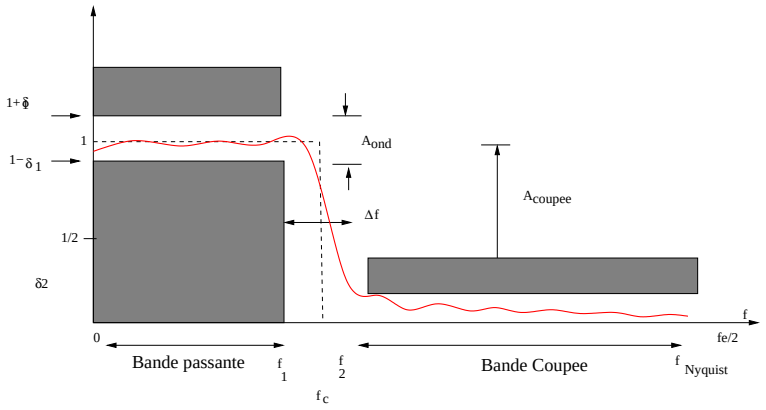
- Un filtre RII est un filtre récursif avec une réponse impulsionnelle infinie

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \tag{IV.0}$$

  Le filtre RII est caractérisé par une relation entre les échantillons de l'entrée et des états précédents de la sortie.

IV.4 Spécification des filtres numériques

Un filtre numérique est défini par un gabarit. Ce dernier est souvent précisé par un cahier des charges en fonction de l'application et des différentes spécificités.



IV.4.1 Gabarit d'un filtre passe-bas

La figure ci-dessous montre la définition d'un exemple de filtre passe-bas définit par la présence de deux régions bien spécifiques. La première correspond à la région où la réponse idéale du filtre est caractérisée par un gain unitaire dans la bande passante et un gain en théorie nul dans la bande coupée. La région du gabarit entre la partie passante et la partie coupée est caractérisée par une largeur de la zone de transition Δf. La réponse idéale du filtre correspond à la courbe en pointillée.

IV.4.2 Gabarit du filtre

En pratique, il n'est pas possible d'implémenter ce filtre idéal, sa réponse impulsionnelle n'étant malheureusement pas causale. Il est nécessaire d'autoriser de l'ondulation définie par le paramètre δ_1 dans la bande passante au niveau du gain unitaire et la variation tolérée se situe entre $1+\delta_1$ et $1-\delta_1$. La transition entre la région de gain unité et celle de gain nul ne peut être immédiate et en pratique, il est également nécessaire de définir la largeur fréquentielle de la zone de transition. Ce paramètre est appellé $\Delta f = f_2 - f_1$. La raideur de la pente de transition (raideur de coupure) entre la fréquence de bande passante f_1 et f_2 permet de définir la selectivité k du filtre:

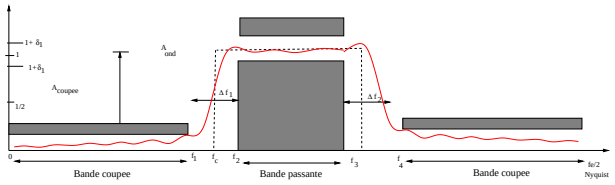
$$k = f_1/f_2 \tag{IV.0}$$

Le temps de propagation de groupe:

$$\tau = -\frac{1}{2\pi} \tag{IV.0}$$

IV.4.3 Réponse en fréquence d'un filtre

La réponse en fréquence $H(\nu)$ d'un filtre est définie par le système d'équations suivant:



$$\boxed{\begin{cases} 1-\delta_1 \leq |H(\nu)| \leq 1+\delta_1 & \forall \nu \in [0;\nu_1] \\ 0 \leq |H(\nu)| \leq \delta_2 & \forall \nu \in [\nu_2;+\infty] \end{cases}} \quad \text{(IV.0)}$$

Les différents paramètres peuvent être également exprimés en dB. L'ondulation A_{ond} en bande passante vaut:

$$\boxed{A_{ond} = 20\log(\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}) \quad en \quad dB} \quad \text{(IV.0)}$$

Dans le cas de l'atténuation en bande coupée, celle-ci vaut:

$$A_{coupee} = 0 - 20\log(\delta_2) \quad \text{(IV.0)}$$

$$\boxed{A_{coupee} = -20\log(\delta_2)} \quad \text{(IV.0)}$$

Il est possible d'étendre la définition d'un gabarit de filtre passe-bas afin de définir le gabarit d'un filtre passe-bande. Ce filtre est caractérisé par deux bandes coupées à la fois pour les basses et les hautes fréquences. Ce filtre va couper les fréquences de $[0 - f_1]$ et de $[f_4 - f_{Nyquist}]$ et par contre va conserver la gamme de fréquences entre $[f_3 - f_4]$.

IV.4.4 Caractérisation simple d'un filtre numérique

IV.4.4 Réponse impulsionnelle

La caractérisation primaire d'un filtre numérique se fait par sa réponse impulsionnelle c'est-à-dire par sa réponse à un dirac:

$$X(n) = \delta(n) = \begin{cases} X(0) = 1 \\ X(n \neq 0) = 0 \end{cases} \quad \text{(IV.0)}$$

Cette réponse impulsionnelle $h(n)$ peut être utilisée pour calculer d'autres réponses en utilisant la propriété de convolution, en effet,

$$y(n) = (h * x)(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(k-n)x(n) \tag{IV.0}$$

IV.4.4 Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle d'un filtre est donnée par la transformée de Fourier discrète de la réponse impulsionnelle:

$$H(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-2i\pi\nu n T_e} \tag{IV.0}$$

où plus simplement en utilisant la fonction de transfert en z:

$$\boxed{H(\nu) = H(z = e^{i\omega} \quad avec \quad \omega = \frac{2\pi\nu}{\nu_e})} \tag{IV.0}$$

Cette réponse peut être complexe dans le sens où la réponse du filtre est un nombre complexe caractérisé par un module $H(\nu)$ et une phase $\phi(\nu)$.

IV.5 Exercice

Exercice: un filtre est défini par la fonction de transfert suivante

$$H(z) = 0.25 + 0.05z^{-1} + z^{-2} + 0.05z^{-3} + 0.25z^{-4} \tag{IV.1}$$

1. Déterminer l'équation aux différences
2. S'agit-il d'un filtre FIR ou IIR ?
3. Donner la réponse impulsionnelle
4. Evaluer la stabilité du filtre
5. Déterminer la réponse fréquentielle
6. Déterminer le module et la phase du filtre
7. Dessiner la réponse en fréquence

V – Filtre à réponse impulsionnelle finie

V.1 Introduction

V.1.1 Aspect historique

Ronald Schafer est un ingénieur en génie électrique qui a contribué de manière significative au traitement du signal numérique. Titulaire d'un doctorat au MIT en 1968, il a me né l'ensemble de ces recherches au département d'acoustique des laboratoires Bell où il a mené ces études de recherche sur le traitement du signal et l'encodage de la voix. Il a rejoint Hewlett Packard en mars 2005.

James F. Kaiser est un professeur de l'école d'ingénieur de Duke. Sa contribution principale est l'invention de la fenêtre de Kaiser pour de l'analyse spectrale en 1980.

V.2 Classification des filtres numériques

Il existe deux catégories de filtre numérique différentes:

- RIF non récursif avec une réponse impulsionnelle finie

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{V.0}$$

- RII: filtre non-récurfif avec une réponse impulsionnelle infinie

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \tag{V.0}$$

La méthode de conception afin de générer un filtre (RIF ou RII) est différent selon qu'ils soient à réponse impulsionnelle finie ou infinie.

V.3 Propriétés des filtres RIF

V.3.1 Phase linéaire et réponse impulsionnelle

Dans le cadre d'applications sonore, les filtres utilisés doivent être à phase linéaire de manière à ne pas introduire de distorsion. C'est-à-dire, si la réponse en fréquence d'un filtre est définie comme étant le produit $|H(\nu)|\phi(\nu))$, la phase doît donc être linéaire en fonction de la fréquence ν:

$$\phi(\nu) = \alpha\nu + \beta \tag{V.0}$$

Un filtre RIF est à phase linéaire si et seulement si sa réponse impulsionnelle est symétrique ou anti-symétrique.

V.3.2 Catégories de filtre RIF

Type	I	II	III	IV
Ordre	Pair	Impair	Pair	Impair
$h(n)$	symétrique	symétrique	anti-symétrique	anti-symétrique
$\|H(\nu)\|$	symétrique	symétrique	anti-symétrique	anti-symétrique
$\|H(0)\|$	$\sum_{n=0}^{M} h(n)$	$\sum_{n=0}^{M} h(n)$	0	0
$\|H(\frac{\nu_e}{2})\|$	arbitraire	0	0	arbitraire
Applications	Passe-bas Passe-haut Passe-bande Coupé	Passe-bas Passe-bande Derivé	Dérivé Derivé	Passe-haut

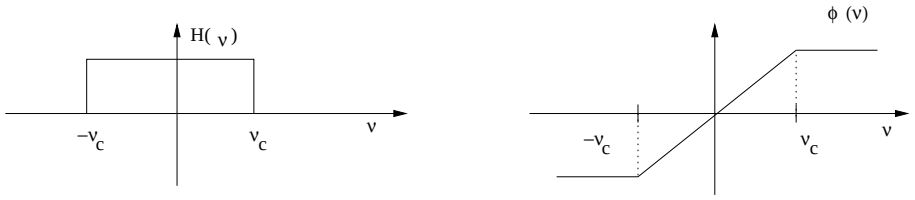


Figure V.1: Réponse d'un filtre idéal passe-bas de phase linéaire de fréquence ν_c

V.4 Troncature de la réponse impulsionnelle

V.4.1 Méthode de conception globale

La méthode de conception globale d'un filtre est la suivante:

1. Déterminer les spécifications du gabarit du filtre.
2. Déterminer les coefficients de la fonction de transfert a_k et b_k.
3. Implémenter la structure du filtre qui permet d'organiser les calculs.
4. Estimer les effets d'encodage.
5. Implémentation du filtre: matériel ou logiciel.

V.4.2 Méthode de la troncature de la réponse impulsionnelle

V.4.2 Modèle de filtre à phase linéaire

De manière à concevoir un filtre numérique RIF, il est nécessaire de partir d'un modèle de filtre à phase linéaire. Cette réponse de filtre idéale est définie de la manière suivante à savoir.

Le gain est unitaire $|H(\nu)|$ dans la bande coupée $[-\nu_c; \nu_c]$ et à phase linéaire $\phi(\nu)$:

$$\begin{cases} |H(\nu)| = 1 & \forall \nu \in [-\nu_c; \nu_c] \\ \phi(\nu) = \exp -2i\pi\nu T_e & \forall \nu \in [-\nu_c; \nu_c] \end{cases} \tag{V.0}$$

La réponse impulsionnelle du filtre peut être estimée en prenant la transformée de Fourier inverse de la réponse en fréquence désirée:

Cette réponse impulsionnelle est non-causale, infinie et symétrique par rapport à k. Il est nécessaire de la fenêtrer, c'est-à-dire de limiter le nombre d'échantillons.

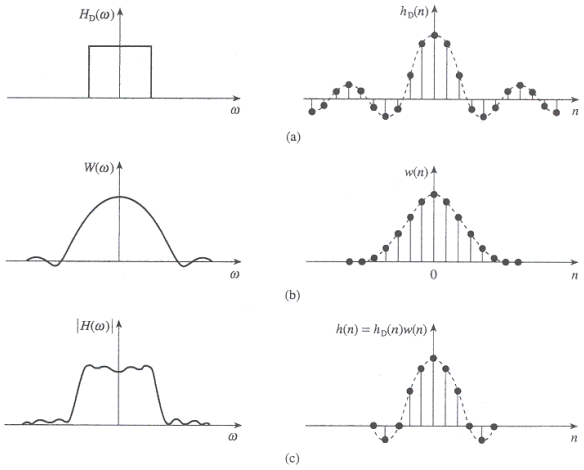


Figure V.2

V.4.3 Fenêtrage de réponse

Un fenêtrage de la réponse impulsionnelle idéale est réalisée de manière à obtenir une réponse finie et causale par une fenêtre rectangulaire:

$$\begin{cases} h_r(n) = h(n) & n \in \{0,1,2...,2k\} \\ h_r = 0 & autre \end{cases} \tag{V.0}$$

c'est-à-dire que la réponse impulsionnelle réelle h_r est donnée par le produit de $h(n)$ par la fenêtre:

$$\boxed{h_r = h(n) \cdot w(n)} \tag{V.0}$$

La réponse en fréquence est donnée par:

$$H_r(\nu) = H(\nu) \otimes R(\nu) \tag{V.0}$$

où $R(\nu)$ est le spectre d'une fenêtre rectangulaire.

V.4.4 Influence de fenêtre rectangulaire

V.4.5 Choix de la fenêtre de conception

Il est possible de choisir d'autres fenêtres de manière à obtenir d'autres réponses en fréquences et de diminuer les lobes secondaires. Le choix de la fenêtre du filtre est principalement gouverné par l'atténuation en bande coupée (A_{coupee}) souhaitée. Le tableau ci-dessous illustre les caractéristiques du filtre attendues au niveau de l'atténuation en bande coupée (A_{coupee}) et l'ondulation en bande passante. Les expressions mathématiques des différentes fenêtres possible sont les suivantes où $-M \leq n \leq M$:

Fenêtre	Expression mathématique
Rectangulaire	$wn] = 1$
Barlett	$w[n] = 1 - \frac{\|n\|}{M+1}$
Hann	$w[n] = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi n}{M})$
Hamming	$w[n] = 0.54 + 0.46\cos(\frac{\pi n}{M})$
Blackmann	$w[n] = 0.42 + 0.5\cos(\frac{\pi n}{M}) + 0.08\cos(\frac{2\pi n}{M})$
Kaiser	$w[n] = \frac{\beta\sqrt{1-(\frac{n}{M}^2)}}{I_0(\beta)}$

Contrairement aux autres fenêtres où les performances attendues en terme d'atténuation ou de largeur de transition sont fixes, la fenêtre de Kaiser (β) permet d'avoir des performances variables à l'aide d'un paramètre additionnel caractérisant la fenêtre.

Fenêtre	δ	A_{coupee}	A_{ond}	Largeur lobe principal
Rectangulaire	8.9 %	20.9 dB	1.55 dB	0
Bartlett				
Hann		43.9 dB		
Hamming	0.2 %	54.5 dB	0.03 dB	3.21
Blackman		75.3 dB		
Kaiser	variable	$-20log(\delta)$	17.372δ	$\frac{A-7.95}{14.36}$

V.4.6 Réponse impulsionnelle idéale des différents filtres

L'expression des différentes réponses impulsionnelles idéales est nécessaire afin de définir pouvoir définir le filtre.

- filtre passe-bas: $h(n) = \dfrac{\sin\omega_c(n-k)}{\pi(n-k)}$
- filtre passe-haut: $h(n) = \delta(n-k) - \dfrac{\sin\omega_c(n-k)}{\pi(n-k)}$
- filtre passe-bande: $h(n) = \dfrac{\sin\omega_b(n-k)}{\pi(n-k)} - \dfrac{\sin\omega_a(n-k)}{\pi(n-k)}$

- filtre rejecteur: $h(n) = \delta(n-k) - \frac{\sin \omega_b(n-k)}{\pi(n-k)} - \frac{\sin \omega_a(n-k)}{\pi(n-k)} \quad n \quad \in \{0, 1, ...2k\}$

V.4.7 Méthode de conception de filtres basés sur Octave&Matlab

Comme nous l'avons vu, la méthode de conception d'un filtre standard est la troncature de la réponse impulsionnelle, où la réponse impulsionnelle d'un filtre est fenêtrée en fonction des performances désirées :

1. fir1.m: méthode basée sur le fenêtrage pour des filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et bande coupée

Il existe également des méthodes permettant d'optimiser la réponse fréquentielle d'un filtre:

1. fir2.m: Conception de filtre FIR fenêtrage optimale
2. remez.m: Parks-McClellan algorithme de minimisation

Il est possible de définir les fenêtres suivantes:

1. Hamming.m: fenêtre de Hamming
2. Hanning.m: fenêtre de Hanning
3. Kaiser.m: fenêtre de Kaiser
4. Triang.m: fenêtre Triangulaire

V.4.8 Exemple implémentation filtre RIF passe-bas

```
%Parametres specifiques (frequence de coupure normalisee)
%
Fc=1000;Fe=10000;N=10;Wstop=Fc/(Fe/2);
%
%Fenetre rectangulaire  (Filtre Ordre N=> N+1 coefficients)
w=window('rectwin',N+1);
%
%Conception filtre passe-bas=> N coefficients
```

```
B=fir1(N,Wstop,w);
stem(B);
%
```

V.4.9 Implémentation de filtre RIF

L'implémentation logicielle ou matérielle d'un filtre RIF

V.4.10 Exercice: Séparation des basses et hautes fréquences

La norme CD considère une fréquence d'échantillonnage de 44.1 kHz, une atténuation en bande coupée importante de 65 dB et une largeur de transition de 2 kHz. Concevoir un filtre permttant de séparer la partie à haute fréquence ("high-pitched") de celle à basse fréquence. Proposer une implémentation efficace du filtre.

.1 Exemple de définition de signaux numériques

L'implémentation sous octave de signaux numériques nécessitent la déclaration d'un tableau d'échantillon. Les fonctions zeros.m, ones.m sont utiles pour la construction des différents signaux ainsi que la fonction stem.m pour des aspects de représentation.

```
N=20;
n=[0:1:N-1];
%
echantillon=[zeros(1,9) 1 zeros(1,10)];
%
uechelon=ones(1,N);
a=0.5;
ugeom=(a.^n).*uechelon;
%
omega0=0.3;
phi=pi/4;
usin=sin(omega0*n+phi);
%
omega0=0.3;
phi=pi/4;
uexp=exp(i*omega0*n+phi);
%
a=0.3
b=0.1;
ucomplex=((a+i*b).^n).*uechelon;
%R\'esum\'e et trac\'e des diff\'erents signaux num\'eriques
figure(1)
subplot(321)
stem(n,echantillon);
title('d[n]');
subplot(322)
stem(n,uechelon);
title('u[n]');
subplot(323)
stem(n,ugeom);
title('x[n]=a^{n}u[n]');
subplot(324)
stem(n,usin);
title('x[n]=sin (\omega_{0}n)');
subplot(325)
stem(n,arg(uexp));
title('Phase de e^{i\omega_{0}n}');
```

```
subplot(326)
stem(n,abs(ucomplex));
title=('Module de (a+ib)^{n}');
```

figure(1) subplot(211) stem(t,x) xlabel('temp (s)') ylabel('x(nTe)')

subplot(212) stem(vk,abs(y)); xlabel('frequence (Hz)') ylabel('TFD')

Les signaux analogiques n'existent pas en tant que tel sur octave/matlab, il est nécessaire d'introduire fictivement une période échantillonnage élevée pour représenter un signal (pseudo) continu. L'échantillonnage d'un signal à 50 Hz est réalisé à une fréquence de 100 Hz.

```
%

f0=50;
fe=1000;
D=0.1;
N=D*fe;
n=[0:1:N-1];
%la frequence elevee
t=n/fe;
phi=pi/4;
%
u=sin(2*pi*f0*t+phi);
plot(n/fe,u);
%
D=0.1;
fshannon=100;
%frequence du theoreme de Shannon
N2=D*fshannon;
n2=[0:1:N2-1];
t2=n2/fshannon;
train_dirac=ones(1,N2);
%
%pulsation numerique fonction de fe
omega0=2*pi*(f0/fshannon);
usin=sin(omega0*n2+phi);

%
figure(1)
subplot(311)
plot(t,u);
title('Signal analogique de frequence 50 Hz');
%
```

```
subplot(312)
stem(n2/fshannon,train_dirac)
title('Train de dirac');
%
subplot(313)
hold on
stem(n2/fshannon,usin)
plot(n/fe,u,'--')
title('Representation signal echantillonne a 100 Hz');
```

.2 Exemple de calcul de transformée discrète

```
f0=200;f1=400;fe=4000;N=100;Te=1/fe;n=[0:1:N-1];t=n*Te;
x=sin(2*pi*f0*t)+4*sin((2*pi*f1*t+pi/6));
```

Les logiciels octave ou matlab ne définisse pas par défaut d'echelle de fréquences discrètes afin de représenter la transformée de Fourier discrète calculées sur dix échantillons.

```
N=20;n2=[0:1:N-1];
vk=(1/(N*Te))*n2;
```

La fonction fft.m implémente un algorithme de calcul rapide de transformée de Fourier discrète:

```
y=fft(x,N);

figure(1)
subplot(211)
stem(t,x)
xlabel('Temps (s)')
ylabel('x(nTe)')

subplot(212)
stem(vk,abs(y));
xlabel('Frequence (Hz)')
ylabel('TFD')
```

.3 Exemple de quantification uniforme simple

```
N=100;
```

```
n=[0:1:N-1];
%
omega0=0.1;
phi=pi/4;
usin=sin(omega0*n+phi);
%
nbits=5;
D=8;
q=D/2^(nbits);
k=round(usin/q);
uq=k*q;

%
eq=uq-usin;
%
figure(1)
subplot(211)
plot(n,usin,"--;x[n];");
hold on
plot(n,uq,  "--;x_{q}[n];");
xlabel('Temps');
ylabel('Amplitude');
axis([0 100 -1.5 1.5]);
%
hold on;
plot(n,uq);
subplot(212)
plot(n,eq,'-;\epsilon_{[q]};');
xlabel('Temps');
ylabel('Amplitude');
axis([0 100 -0.5 0.5]);
legend show
```