



CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES SCHÉMAS FEUILLETÉS

Bertrand Toen

► To cite this version:

Bertrand Toen. CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES SCHÉMAS FEUILLETÉS. 2020. hal-02988558

HAL Id: hal-02988558

<https://hal.science/hal-02988558>

Preprint submitted on 4 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES SCHÉMAS FEUILLETÉS

BERTRAND TOËN

ABSTRACT. Dans ce travail, nous étudions la notion de feuilletages dérivés sur des schémas et schémas dérivés généraux et de caractéristiques quelconques. Nous introduisons la filtration de Hodge associée à un feuilletage dérivé, qui filtre de manière fonctorielle la cohomologie de de Rham dérivée. Nous utilisons cette filtration pour étudier les propriétés d'annulation des classes caractéristiques de complexes parfaits munis de connexion le long de feuilletages dérivés. En guise d'application, nous démontrons des extensions à la caractéristique positive, et à valeurs dans la cohomologie cristalline, du théorème d'annulation de Bott (voir [Bot70]) et d'existence de résidus pour les feuilletages avec singularités (voir [BB72]).

CONTENTS

Introduction	2
1. Préliminaires et rappels	4
1.1. Champs dérivés équivariants	4
1.2. Graduations et filtrations	5
1.3. Déformation vers le fibré normal	6
2. Feuilletages dérivés sur des schémas	7
2.1. Le cercle gradué et structures graduées mixtes	7
2.2. Feuilletages dérivés et leurs fonctorialités	8
2.3. Le cas lisse	13
3. Théorie de de Rham feuilletée	15
3.1. Cohomologie de de Rham feuilletée	15
3.2. La filtration de Hodge feuilletée	17
4. Classes caractéristiques	19
4.1. Classes de Chern en cohomologie de de Rham	19
4.2. Trivialité des classes de Chern de cristaux	22
4.3. Une formule des résidus à la Baum-Bott en caractéristique positive	25
Appendix A. Cohomologie de de Rham dérivée et cohomologie cristalline	27
References	29

INTRODUCTION

Ce travail s'insère dans la série de travaux sur l'utilisation de techniques dérivées en théorie des feuilletages algébriques (voir [TV20a, TV20b]). Nous nous intéressons ici à la notion de classes caractéristiques de feuilletages, sans pour autant se restreindre au cas de la caractéristique nulle, avec comme objectif d'étendre un résultat classique au cas de la caractéristique positive, à savoir le théorème d'existence de résidus pour les feuilletages avec singularités de [BB72].

Pour cela, nous introduisons une notion générale de *feuilletages dérivés* au-dessus d'un schéma X au-dessus d'une base S quelconque. Ces feuilletages sont définis comme certains schémas dérivés munis d'une action d'un champ en groupes, noté $\mathcal{H}$, qui contrôle les objets mixtes gradués. De manière plus précise, le groupe $\mathcal{H}$ est le produit semi-direct de $\mathbb{G}_m$ et du *cercle gradué* introduit dans [MRT19]. Il s'agit d'un objet en groupes dans la catégories des champs affines de [Toë06], et dont les représentations sont les complexes mixtes gradués : la graduation est induite par l'action de $\mathbb{G}_m$, et la structure mixte est elle codée dans l'action du cercle gradué. Ainsi, un schéma dérivé muni d'une action de $\mathcal{H}$ est-il un objet permettant de coder un objet de type "complexe de de Rham", muni de ses structures gradués (degrés des formes différentielles), mixtes (différentielle de de Rham), et multiplicative (produit des formes différentielles). Moralement, notre définition 2.2.1 voit ainsi les feuilletages à travers leurs complexes de de Rham associés (formes différentielles le long des feuilles).

Nous montrons que notre définition de feuilletages est raisonnable, tout d'abord en montrant qu'elle redonne, dans le cas lisse, la notion d'algèbroïde de Lie (voir la proposition 2.3.1). Ainsi, sur un schéma lisse X au-dessus de S , notre définition inclue les sous-fibrés $D \subset \Omega_{X/S}^1$ satisfaisant la condition d'intégrabilité usuelle $d(D) \subset V \wedge \Omega_{X/S}^1$. Nous définissons par ailleurs des images réciproques de feuilletages dérivés, pour des morphismes $X' \rightarrow X$ de S -schémas, mais aussi pour des changements de bases $S' \rightarrow S$. Cette possibilité de jouer avec la base S sera cruciale pour notre énoncé d'existence de résidus en caractéristique positive.

Une des constructions principales de ce travail est la *filtration de Hodge* associée à un feuilletage dérivé sur un schéma. Il s'agit d'une généralisation du fait bien connu qu'un feuilletage sur une variété différentielle définit une filtration naturelle sur le complexe de Rham de cette dernière. Dans le contexte dérivé général qui nous intéresse, la construction de cette filtration est plus délicate, et est basée sur la construction générale de déformation vers le fibré normal. La filtration de Hodge associée à un feuilletage dérivé $\mathcal{F}$ sur un schéma X , est alors une filtration multiplicative sur le complexe de cohomologie de de Rham (dérivé et complété) $C_{dR}^*(X/S)$ de X relativement à S . Le degré zéro du gradué associé calcule la *cohomologie feuilletée* de X , ou encore la cohomologie longitudinale des formes différentielles le long des feuilles. Les pièces graduées supérieures sont quand à elles les complexes de cohomologie de de Rham des puissances extérieures du complexe normal au feuilletage $\mathcal{F}$. En utilisant les propriétés de fonctorialité de la filtration de Hodge on démontre le théorème principal de ce travail, à savoir l'annulation des classes de Chern en cohomologie feuilletée d'un complexe muni d'une connexion plate le long

des feuilles. Le cas des feuilletages usuels sur des variétés complexes est un énoncé bien connu qui se démontre par exemple à l'aide de la théorie de Chern-Weil.

Théorème 0.0.1 (Thm. 4.2.1). *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$ un feuilletage dérivé sur un S -schéma X , et E un complexe parfait muni d'une connexion plate le long de $\mathcal{F}$. Alors, les classes de Chern $c_i(E)$ de E sont nulles dans $H_{dR}^*(X/\mathcal{F}) = Gr^0 H_{dR}^*(X/S)$, la cohomologie de de Rham feuilletée.*

Ce théorème possède un certains nombres de corollaires. Citons par exemple l'énoncé d'annulation suivant, extension du théorème d'annulation de Bott (voir [Bot70]) au cas de la caractéristique positive.

Corollaire 0.0.2 (Cor. 4.3.2). *Soit k un corps parfait de caractéristique positive et $S = \mathbf{Spec} \mathbb{W}(k)$ avec $\mathbb{W}(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k . Soit X une variété lisse sur k muni d'un sous-fibré intégrable $D \subset \Omega_{X/k}^1$ de rang d . On suppose que le feuilletage défini par D provient, par changement de base, d'un feuilletage dérivé sur X au-dessus de S (ce que l'on appelle une " S -structure"). Alors, pour tout polynôme homogène $\phi \in \mathbb{W}(k)[X_1, \dots, X_d]$ de degré $q > d$ (avec $\deg(X_i) = 2i$), on a*

$$\phi(c_1(D), \dots, c_d(D)) = 0 \in H_{cris}^{2q}(X/\mathbb{W}(k)),$$

où $H_{cris}^*(X/\mathbb{W}(k))$ désigne la cohomologie cristalline de X au-dessus de $\mathbb{W}(k)$.

Le corollaire précédent est la version en caractéristique positive du théorème d'annulation de [Bot70]. Cependant, le fait que le feuilletage doive posséder une S -structure est ici un nouvel ingrédient nécessaire pour que l'énoncé soit vrai en cohomologie cristalline. Il est important de noter aussi que, bien que V définisse un feuilletage au sens le plus classique qu'il soit, la notion de S -structure utilise de manière cruciale la notion de feuilletages dérivés, simplement car X n'est pas un S -schéma lisse. Enfin, le corollaire possède un raffinement pour les feuilletages à singularités, qui devient alors une version de l'existence des résidus au sens de [BB72] en caractéristique positive (Cor. 4.3.3).

Remerciements: Ce travail a été partiellement financé par l'ERC dans le cadre du programme Horizon 2020 (projet NEDAG ADG-741501).

Notations et conventions. On fixe k un anneau commutatif de base et on notera $S = \mathbf{Spec} k$. Les schémas, champs ou champs dérivés seront pas défaut au-dessus de S (sauf mention contraire). L' ∞ -catégorie des champs dérivés (au-dessus de k) est notée $\mathbf{dSt}_k$. La sous- ∞ -catégorie des champs tronqués (i.e. non-dérivés) est notée $\mathbf{St}_k \subset \mathbf{dSt}_k$. L'inclusion $\mathbf{St}_k \hookrightarrow \mathbf{dSt}_k$ possède un adjoint à droite, la troncation $X \mapsto t_0 X$.

Les complexes seront tous $\mathbb{Z}$ -gradués, avec une différentielle cohomologique (qui augmente le degré de 1). Les filtrations seront elles aussi $\mathbb{Z}$ -graduées, et de plus croissantes. Nous travaillerons régulièrement avec des complexes gradués, auquel cas, nous réservons le terme de "degré" pour les degrés cohomologiques, et nous utiliserons "poids" pour désigner la seconde

graduation. De manière générale, un complexe gradué E sera noté symboliquement $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E(n)$, où $E(n)$ est pur de poids n . Enfin, si E est un complexe gradué et $i \in \mathbb{Z}$, $E(i)$ désignera le complexe gradué pour lequel les poids sont décalés de i : $(E(i))(n) := E(n - i)$.

Par convention, l'action canonique de $\mathbb{G}_m$ sur la droite affine $\mathbb{A}^1$, sera de sorte à ce que la graduation induite sur l'anneau des fonctions $k[T]$ coïncide avec la graduation usuelle des polynômes où T est de poids 1. Ainsi, géométriquement, il s'agit de l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^1$ de poids -1 : pour tout corps k , l'action induite de k^* sur k et donnée par $\lambda(x) := \lambda^{-1}x$ pour $\lambda \in k^*$ et $x \in k$.

1. PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS

1.1. Champs dérivés équivariants. Le contenu de cette sous-section se trouve dans [Toë02, Toë06, TV08]

Par définition, un *champ dérivé en groupes* est un objet en groupes dans l' ∞ -topos $\mathbf{dSt}_k$. Pour un tel groupe G de $\mathbf{dSt}_k$ on dispose de son champ classifiant $BG := [* / G] \in \mathbf{dSt}_k$, qui est muni d'un point de base canonique $* \rightarrow BG$. La construction B induit un ∞ -foncteur de l' ∞ -catégorie des champs dérivés en groupes vers celle des champs dérivés pointés. Cet ∞ -foncteur est pleinement fidèle et son image essentielle consiste en tous les champs dérivés pointés F tels que le faisceau des composantes connexes soit trivial ($\pi_0(F) \simeq *$). L' ∞ -foncteur inverse de B est donné par le groupe des lacets $F \mapsto \Omega_* F = * \times_F *$.

Soit G un champ dérivé en groupes et $BG \in \mathbf{dSt}_k$ son classifiant. On dispose de l' ∞ -catégorie $G - \mathbf{dSt}_k$, des objets G -équivariants $\mathbf{dSt}_k$. Tout comme $\mathbf{dSt}_k$, il s'agit d'un ∞ -topos. On montre de plus qu'il existe une équivalence naturelle d' ∞ -catégories

$$G - \mathbf{dSt}_k \simeq (\mathbf{dSt}_k) / BG$$

entre champs dérivés G -équivariants et champs dérivés au-dessus de BG . Cette équivalence envoie un objet G -équivariant X sur le champ quotient $[X / G] \rightarrow BG$. L' ∞ -foncteur inverse envoie $X \rightarrow BG$ sur $X_* := X \times_{BG} *$ muni de sa G -action naturelle (définie en faisant opérer G sur le G -torseur universel $* \rightarrow BG$). Par la suite, nous identifierons de manière implicite ces deux ∞ -catégories à travers cette équivalence.

L' ∞ -foncteur d'oubli

$$G - \mathbf{dSt}_k \longrightarrow \mathbf{dSt}_k$$

possède des adjoints à gauche et un droite. L'adjoint à gauche associe à $X \in \mathbf{dSt}_k$ l'objet $G \times X$, muni de l'action de G par translation à gauche sur le premier facteur. L'adjoint à droite est quand à lui donné par le hom interne $X \mapsto \text{Map}(G, X)$, où G opère sur lui-même par translation à droite.

Notons enfin l'existence d'un espace classifiant des structures G -équivariantes sur un champ fixé X . Il s'agit, par définition, de la fibre de l' ∞ -foncteur d'oubli $G - \mathbf{dSt}_k \rightarrow \mathbf{dSt}_k$ prise en l'objet $X \in \mathbf{dSt}_k$. Cette fibre est un ∞ -groupeoïde dont l'espace classifiant est par définition l'espace des structures G -équivariantes sur X . Il peut aussi se décrire comme le mapping space

$$\text{Map}_{Gp(\mathbf{dSt}_k)}(G, \text{aut}(X)) \simeq \text{Map}_{*/\mathbf{dSt}_k}(BG, \text{Baut}(X)),$$

dans l' ∞ -catégorie des champs dérivés en groupes, de G vers le champ des autoéquivalences de l'objet X .

1.2. Graduations et filtrations. Suivant [Sim96, MRT19, Mou19], un champ dérivé gradué est par définition un objet $X \rightarrow B\mathbb{G}_m$, où de manière équivalente un champ dérivé $\mathbb{G}_m$ -équivariant. Notons de plus $\mathcal{A} := [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$, le champ quotient de la droite affine par l'action canonique du groupe multiplicatif¹. D'après [Sim96, MRT19, Mou19], un champ dérivé filtré est un objet au-dessus de $\mathcal{A}$. Pour un tel objet $X \rightarrow \mathcal{A}$ l'objet sous-jacent est la fibre $X_1 := 1 \times_{\mathcal{A}} X$, où $1 = * \rightarrow \mathcal{A}$ est le point global induit par l'unité $1 \in k = \mathbb{A}^1(k)$. On dit que alors que X définit une filtration sur X_1 . Le gradué associé est par définition $X^{gr} \rightarrow B\mathbb{G}_m$, le changement de base

$$X^{gr} := X \times_{\mathcal{A}} B\mathbb{G}_m$$

où $B\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathcal{A}$ est la gerbe résiduelle du champ $\mathcal{A} = [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$ au point $0 \in \mathbb{A}^1(k)$. L'objet $X^{gr} \rightarrow B\mathbb{G}_m$ définit ainsi un champ dérivé gradué, dont l'objet sous-jacent est la fibre $X_0 = 0 \times_{\mathcal{A}} X$ de $X \rightarrow \mathcal{A}$ prise en $0 = * \rightarrow \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}$. De même, on dispose d'une notion de champs filtrés relatifs à un champ de base Z , comme étant les objets de $\mathbf{dSt}_k/(\mathcal{A} \times Z)$.

Il est utile de rappeler ici le résultat de [Mou19], qui affirme l'existence d'une équivalence symétrique monoïdale d' ∞ -catégories

$$\mathbf{QCoh}(\mathcal{A}) \simeq \mathbf{dg}_k^{\text{fil}},$$

entre les quasi-cohérents sur le champ $\mathcal{A}$ et les complexes filtrés de k -modules. Ici, $\mathbf{dg}_k^{\text{fil}}$ est par définition l' ∞ -catégorie des représentations de l'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$, des entiers munis de leur ordre naturel. Ainsi, un objet E de $\mathbf{dg}_k^{\text{fil}}$ est-il donné par une suite de complexes $F^i E$, avec $i \in \mathbb{Z}$, muni de morphismes $F^i E \rightarrow F^{i+1} E$. L'objet sous-jacent à E est par définition $F^\infty E := \text{colim}_i F^i E$, et son gradué associé $\oplus_i F^i E / F^{i-1} E$, où $F^i E / F^{i-1} E$ signifie le cône du morphisme $F^{i-1} E \rightarrow F^i E$. Nous dirons aussi que l'objet filtré E est *complet*, si pour tout i , le morphisme naturel dans $\mathbf{dg}_k$

$$F^i E \longrightarrow \lim_{j \leq i} F^i E / F^j E$$

est une équivalence. Les objets complets de $\mathbf{dg}_k^{\text{fil}}$ forment une sous- ∞ -catégorie pleine et l' ∞ -foncteur d'inclusion possède un adjoint à gauche évident, à savoir l' ∞ -foncteur de complétion (qui remplace chaque $F^i E$ par $\lim_{j \leq i} F^i E / F^j E$).

Nous utiliserons souvent le résultat de [Mou19] dans la situation suivante. Si $p : X \rightarrow \mathcal{A}$ est un objet filtré, on dispose d'une image direct de complexes quasi-cohérents

$$p_* : \mathbf{QCoh}(X) \longrightarrow \mathbf{QCoh}(\mathcal{A}) \simeq \mathbf{dg}_k^{\text{fil}}.$$

Ainsi, pour tout quasi-cohérent E sur X on dispose d'un complexe filtré $p_*(E)$. Moralement, il faut entendre ce complexe $p_*(E)$ comme la cohomologie de X_1 à coefficients dans E , muni de

¹Notre convention est ici que l'action de $\mathbb{G}_m$ sur l'anneau des fonctions $k[T]$ de $\mathbb{A}^1$ définisse la graduation usuelle des polynôme où T est de poids 1. Ainsi, géométriquement, il s'agit en réalité de l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^1$ de poids -1 où $\lambda \in \mathbb{G}_m$ opère par multiplication par λ^{-1} .

la filtration induite par la filtration X sur X_1 . Ceci n'est cependant correct uniquement sous certaines hypothèses de finitudes qui permettent d'affirmer que p_* commute aux changement de bases le long des deux morphismes $0, 1 \rightarrow \mathcal{A}$. En effet, la compatibilité aux changement de bases de l' ∞ -foncteur p_* est nécessaire afin de pouvoir identifier le complexe sous-jacent au complexe filtré $p_*(E)$ avec la cohomologie de X_1 à coefficients dans E (restreint à l'ouvert $X_1 \subset X$).

1.3. Déformation vers le fibré normal. Soit l'immersion fermée $B\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathcal{A}$ donnée par la gerbe résiduelle en 0. Cette immersion définit un objet de $\mathbf{dSt}_k/\mathcal{A}$, et donc un champ dérivé filtré. Nous noterons $\mathcal{Q} \in \mathbf{dSt}_k/\mathcal{A}$ cet objet, que nous appellerons, non sans ironie, le *point quantique*. Cet objet définit une filtration sur l'objet vide $\mathcal{Q}_1 = \emptyset$, mais dont le gradué associé est

$$\mathcal{Q}_0 \simeq \mathbf{Spec}(k \oplus k[1]) = 0 \times_{\mathbb{A}^1} 0,$$

le spectre de la k -algèbre simpliciale libre sur un générateur en degré -1 (et de poids 1). En d'autres termes, $\mathcal{Q}$ produit une dégénérescence du vide vers le *point virtuellement vide* $\mathbf{Spec}(k \oplus k[1])$, qui peut faire penser à la création d'une paire particule/anti-particule par fluctuation quantique. De manière plus sérieuse, cette filtration sur le vide produit par suspension la filtration bien connue sur $S^0 = * \coprod *$ dont le gradué associé est le spectre des nombres duaux $k[\epsilon]$. Par double suspension, elle produit le cercle filtré de [MRT19].

L'objet filtré $\mathcal{Q}$ est en réalité la déformation vers le fibré normal universelle, au sens suivant. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans $\mathbf{dSt}_k$, que l'on considère comme un objet de $\mathbf{dSt}_k/Y$. On considère alors $\mathcal{Q} \times Y$, comme objet filtré de $\mathbf{dSt}_k/Y$, et l'on forme le hom interne au-dessus de $\mathcal{A} \times Y$

$$\mathbf{Map}_{/\mathcal{A} \times Y}(\mathcal{Q} \times Y, \mathcal{A} \times X) \in (\mathbf{dSt}_k)/(\mathcal{A} \times Y).$$

Le champ dérivé $\mathbf{Map}_{/\mathcal{A} \times Y}(\mathcal{Q} \times Y, \mathcal{A} \times X)$ définit ainsi un objet filtré au-dessus de Y . L'objet sous-jacent n'est autre que $\mathbf{Map}_{/Y}(\emptyset, X) = Y$, et $\mathbf{Map}_{/\mathcal{A} \times Y}(\mathcal{Q} \times Y, X)$ définit donc une filtration sur l'objet Y . L'objet sous-jacent au gradué associé est quand à lui

$$\mathbf{Map}_{/\mathcal{A} \times Y}(\mathcal{Q} \times Y, X)_1 \simeq \mathbf{Map}_{/Y}(\mathbf{Spec}(k \oplus k[1]) \times Y, X) =: \mathbb{T}_{X/Y}[1],$$

où $\mathbb{T}_{X/Y}[1]$ est le champ tangent décalé de X relativement à Y (et $\mathbb{G}_m$ opère par homothétie dans les fibres). Lorsque de plus X et Y sont des champs d'Artin dérivés, on peut alors écrire ce tangent décalé comme

$$\mathbb{T}_{X/Y}[1] = \mathbb{V}(\mathbb{L}_{X/Y}[-1]),$$

le champ linéaire associé au complexe quasi-cohérent $\mathbb{L}_{X/Y}[-1]$ (voir [TV08]). Enfin, la projection naturelle $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{A}$ dans $\mathbf{dSt}_k/\mathcal{A}$, induit un morphisme naturel de champs dérivés filtrés au-dessus de Y

$$e : \mathcal{A} \times X = \mathbf{Map}_{/\mathcal{A} \times Y}(\mathcal{A} \times Y, \mathcal{A} \times X) \longrightarrow \mathbf{Map}_{/\mathcal{A} \times Y}(\mathcal{Q} \times Y, \mathcal{A} \times X).$$

Sur les objets sous-jacents le morphisme e induit le morphisme d'origine $X \rightarrow Y$, alors que sur les gradués associés il s'agit de la section nulle $X \rightarrow \mathbb{T}_{X/Y}[1]$ du tangent décalé. Notons ici que

la graduation sur $\mathbb{T}_{X/Y}[1]$, c'est à dire l'action de $\mathbb{G}_m$, n'est autre que l'action par dilatation de poids 1 dans les fibres (la section nulle est ici $\mathbb{G}_m$ -équivariante).

Avec les constructions précédentes, nous noterons

$$Def(f) := \mathbf{Map}_{/\mathcal{A} \times Y}(\mathcal{Q} \times Y, \mathcal{A} \times X)$$

que nous considérerons comme un objet de $\mathbf{dSt}_k/\mathcal{A}$, c'est à dire comme un champ dérivé filtré. Il est muni d'un morphisme naturel de champs dérivés filtrés

$$e : X \times \mathcal{A} \longrightarrow Def(f).$$

Définition 1.3.1. *Le morphisme de champs dérivés filtrés $e : X \times \mathcal{A} \longrightarrow Def(f)$ construit ci-dessus est la déformation vers le fibré normal de $f : X \rightarrow Y$.*

Pour terminer, notons qu'il est aussi possible de travailler au-dessus d'un objet de base $Z \in \mathbf{dSt}_k$ quelconque fixé, en utilisant exactement les mêmes constructions. À un morphisme $X \rightarrow Y$ dans $\mathbf{dSt}_k/Z$, nous associons un morphisme d'objets filtrés au-dessus de Z

$$e : X \times \mathcal{A} \longrightarrow Def(f).$$

Sur les objets sous-jacents ce morphisme est le morphisme d'origine $X \rightarrow Y$, alors que le gradué associé est la section nulle $X \rightarrow \mathbb{T}_{X/Y}[-1]$. Lorsque $Z = BG$ pour un objet en groupes G , ceci nous permet de considérer une version G -équivariante de la déformation vers le fibré normal.

2. FEUILLETAGES DÉRIVÉS SUR DES SCHÉMAS

2.1. Le cercle gradué et structures graduées mixtes. Le contenu de cette sous-section est essentiellement tiré de [MRT19].

Nous considérons $k < x >$, la k -algèbre à puissance divisée libre sur un générateur. Il s'agit d'une k -algèbre de Hopf pour laquelle la comultiplication est induite par la formule usuelle $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$. Le schéma en groupes correspondant est noté $\mathbb{H} := \mathbf{Spec} k < x >$. Il s'agit d'un schéma en groupes affine abélien sur $S = \mathbf{Spec} k$. D'après [MRT19, Toë20] $\mathbb{H}$ s'identifie naturellement au sous-schéma en groupes du groupe additif $\mathbb{W}$ des gros vecteurs de Witt, formé de l'intersection des noyaux de tous les Frobenius.

La k -algèbre de Hopf $k < x >$ est naturellement graduée, par le degré en x et de ce fait $\mathbb{H}$ possède une action naturelle de $\mathbb{G}_m$. Ainsi, le groupe $\mathbb{G}_m$ opère sur le champ $B\mathbb{H}$, ce qui définit une graduation sur ce dernier. Le champ gradué $B\mathbb{H}$ n'est autre que le gradué associé au cercle filtré S_{fil}^1 de [MRT19]. Le produit semi-direct de $\mathbb{G}_m$ par $B\mathbb{H}$ sera noté $\mathcal{H}$, de sorte à ce qu'il entre dans une suite exacte, naturellement scindée, de champs en groupes

$$B\mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{G}_m.$$

Par définition, une structure graduée mixte sur un champ dérivé $X \in \mathbf{dSt}_k$ est une structure $\mathcal{H}$ -équivariante sur X au sens de notre section 1.1. Ainsi une telle structure consiste en la donnée de

- (1) un objet $[X/\mathcal{H}] \rightarrow B\mathcal{H}$ de l' ∞ -catégorie comma $(\mathbf{dSt}_k)/B\mathcal{H}$,
- (2) une équivalence dans $\mathbf{dSt}_k$

$$[X/\mathcal{H}] \times_{B\mathcal{H}} * \simeq X$$

entre la fibre de $[X/\mathcal{H}] \rightarrow B\mathcal{H}$ au point de base naturel de $B\mathcal{H}$ et l'objet X .

Définition 2.1.1. *L' ∞ -catégorie des champs dérivés gradués mixtes est*

$$\epsilon - \mathbf{dSt}_k^{gr} := \mathcal{H} - \mathbf{dSt}_k \simeq (\mathbf{dSt}_k)/B\mathcal{H},$$

l' ∞ -catégorie des champs dérivés $\mathcal{H}$ -équivalents.

Notons que la section naturelle $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{H}$ induit, par oubli de structure, un ∞ -foncteur

$$\epsilon - \mathbf{dSt}_k^{gr} \longrightarrow \mathbb{G}_m - \mathbf{dSt}_k,$$

de l' ∞ -catégorie des champs dérivés gradués mixtes vers celle des champs dérivés gradués. Nous serons amenés à considérer la fibre de cet ∞ -foncteur, prise en un objet $X \in \mathbb{G}_m - \mathbf{dSt}_k$, forme un ∞ -groupeïde, qui par définition est l'espace classifiant des *structures mixtes sur X compatibles avec la graduation*.

D'après [MRT19, Prop. 4.2.3 (ii)], on sait que l' ∞ -catégorie monoïdale symétrique $\mathbf{QCoh}(B\mathcal{H})$ s'identifie à $\epsilon \mathbf{dg}_k^{gr}$, l' ∞ -catégorie des complexes gradués mixtes. Nos conventions diffèrent ici de celles de [MRT19], du fait que la structure mixte diminue le poids de la structure graduée. Pour plus de détails, on sait que $B\mathcal{H}$ est un champ relativement affine au-dessus de $B\mathbb{G}_m$, au sens de [Toë06]. Son algèbre de Hopf cosimpliciale de fonctions est $k \oplus k[-1]$, l'extension triviale de carré nul de k par $k[-1]$, où l'action de $\mathbb{G}_m$ est de sorte à ce que le facteur $k[-1]$ soit de poids 1. Ainsi, $\mathbf{QCoh}(B\mathcal{H})$ s'identifie aux comodules gradués sur $k \oplus k[-1]$, ou encore par dualité aux modules gradués sur $k \oplus k[1]$, où maintenant le facteur $k[1]$ est de poids -1 pour l'action de $\mathbb{G}_m$. Ces modules forment, par définition, l' ∞ -catégorie des complexes gradués mixtes, et comme $k[1]$ est de poids -1 la structure mixte diminue bien les poids de 1. Par la suite, nous utiliserons régulièrement, et souvent de manière implicite, l'identification compatible aux structures monoïdales symétriques

$$\mathbf{QCoh}(B\mathcal{H}) \simeq \epsilon \mathbf{dg}_k^{gr}.$$

2.2. Feuilletages dérivés et leurs functorialités. Soit X un schéma dérivé (au-dessus de $S = \mathbf{Spec} k$). Nous allons définir une ∞ -catégorie $\mathcal{Fol}(X/S)$, des feuilletages dérivés sur X relatifs à S , comme une certaine sous- ∞ -catégorie pleine de champs dérivés gradués mixtes au-dessus de X en un certain sens.

Nous commençons par considérer l'espace des lacets gradué de X (relatif à S)

$$\mathcal{L}^{gr}(X/S) = \mathbf{Map}(B\mathbb{H}, X),$$

le champ dérivé des morphismes de $B\mathbb{H}$ dans X . L'objet $\mathcal{L}^{gr}(X/S)$ possède une action naturelle de $\mathcal{H}$, qui par construction opère naturellement sur le champ $B\mathbb{H}$ et donc sur $\mathbf{Map}(B\mathbb{H}, X)$.

De manière équivalente on peut considérer l' ∞ -foncteur d'oubli

$$\epsilon - \mathbf{dSt}_k \longrightarrow \mathbb{G}_m - \mathbf{dSt}_k,$$

des champs dérivés gradués mixtes vers les champs dérivés gradués. Cet ∞ -foncteur possède un adjoint à droite, que l'on peut appliquer à X muni de sa graduation triviale (action triviale de $\mathbb{G}_m$), pour obtenir $\mathcal{L}^{gr}(X/S)$. D'après [MRT19, Thm. 5.1.3(2)] le champ dérivé $\mathcal{L}^{gr}(X/S)$ est lui-aussi représentable par un schéma dérivé au-dessus de S dont le tronqué coïncide avec celui de X . On dispose de plus d'une formule explicite

$$\mathcal{L}^{gr}(X/S) \simeq \mathbf{Spec}_X(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/S}[1]) = \mathbb{T}_{X/S}[-1],$$

décrivant $\mathcal{L}^{gr}(X/S)$ comme le tangent décalé de X au-dessus de S . De plus, la graduation naturelle sur $\mathbb{T}_{X/S}[-1]$ est l'action de $\mathbb{G}_m$ par homotétie (de poids 1) dans les fibres de $\mathbb{T}_{X/S}[-1] \rightarrow X$. Noter que cette action se révèle être l'action de poids -1 sur le complexe $\mathbb{L}_{X/S}[1]$.

Supposons maintenant donnée un champ dérivé gradué mixte $\mathcal{F}$, muni d'un morphisme d'objets gradués mixtes $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^{gr}(X/S)$. Par adjonction, π correspond à un morphisme de champs dérivés gradués $p : \mathcal{F} \rightarrow X$, où X est muni de la graduation triviale. Supposons de plus que p soit représentable et affine, de sorte à ce que $\mathcal{F}$ soit aussi un schéma dérivé. Alors, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} := p_*(\mathcal{O})$ est un complexe quasi-cohérent $\mathbb{G}_m$ -équivariant sur X et en tant que tel se décompose en une somme de composantes isotypiques

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_F(n).$$

Par propriété universelle, l'inclusion naturelle $\mathcal{O}_F(-1) \rightarrow p_*(\mathcal{O})$ induit un morphisme de schémas dérivés gradués

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{V}(p_*(\mathcal{O}_F)(-1)) = \mathbf{Spec}_X(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(p_*(\mathcal{O}_F)(-1))).$$

Nous posons alors la définition suivante.

Définition 2.2.1. *Avec les notations précédentes, un feuilletage dérivé au-dessus de X relatif à S consiste en la donnée d'un champ dérivé gradué mixte $\mathcal{F}$, muni d'un morphisme d'objets gradués mixtes $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^{gr}(X/S)$ et vérifiant les trois conditions suivantes.*

- (1) *La projection induite $\mathcal{F} \rightarrow X$ est représentable et affine.*
- (2) *Le complexe quasi-cohérent $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1)$ est d'amplitude $] - \infty, -1]$.*
- (3) *Le morphisme naturel de schémas dérivés gradués*

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1))$$

est une équivalence.

Les feuilletages dérivés au-dessus de X forment une ∞ -catégorie $\mathcal{Fol}(X)$, pour laquelle les morphismes sont les morphismes d'objets gradués mixtes au-dessus de $\mathcal{L}^{gr}(X/S)$: $\mathcal{Fol}(X)$ est ainsi définie comme la sous- ∞ -catégorie pleine de $\epsilon - \mathbf{dSt}_k^{gr} / \mathcal{L}^{gr}(X/S)$ formée des objets vérifiant les conditions (1) – (3) de la définition 2.2.1.

Définition 2.2.2. *L'∞-catégorie des feuilletages dérivés sur X relatifs à S est notée $\mathcal{F}ol(X/S)$.*

Remarque 2.2.3. La définition précédente de feuilletages dérivés est compatible avec celle donnée dans [TV20b]. Pour voir cela, il faut noter que l'∞-catégorie des schémas affines dérivés $\mathcal{H}$ -équivariants est, en caractéristique nulle, équivalente à celle des dg-algèbres commutatives graduées mixtes et connectives sur k . Les conditions de la définition 2.2.1 sont alors équivalentes à celle de [TV20b, 1.2.1]. Notons aussi, qu'il existe une extension possible de la définition 2.2.1 au cas non-connectifs, c'est à dire en ne supposant plus que $\mathcal{F}$ soit relativement affine sur X mais seulement qu'il soit de la forme $\mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1))$. Nous n'utiliserons pas cette généralisation, qui correspond à des feuilletages induits par des actions de n -groupoïdes généraux, dans ce texte.

Remarque 2.2.4. L'∞-catégorie $\mathcal{F}ol(X/S)$ est fortement sensible à la base S , et pour des morphismes de schémas $X \rightarrow S' \rightarrow S$ les deux ∞-catégories $\mathcal{F}ol(X/S)$ et $\mathcal{F}ol(X/S')$ peuvent être très différentes.

Pour $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(X/S)$ un feuilletage dérivé (sur un schéma dérivé X), considérons la projection naturelle $p : \mathcal{F} \rightarrow X$. Rappelons que cette projection est affine et $\mathbb{G}_m$ -équivalente, et par ailleurs induit une équivalence de champs dérivés au-dessus de X

$$\mathcal{F} \simeq \mathbf{Spec}_X(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1))).$$

Le complexe quasi-cohérent $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1)[-1]$ sur X sera appelé le *complexe cotangent de $\mathcal{F}$* . Notons que la condition (2) de la définition 2.2.1 implique que $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ est connectif (i.e. d'amplitude contenue dans $] -\infty, 0]$).

Définition 2.2.5. *Le complexe cotangent d'un feuilletage dérivé $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(X/S)$ est défini par*

$$\mathbb{L}_{\mathcal{F}} := \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1)[-1].$$

Le complexe conormal d'un feuilletage dérivé $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(X/S)$ est la fibre du morphisme canonique $\mathbb{L}_{X/S} \rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$. Il est noté $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^$ de sorte à ce qu'il existe une suite exacte de fibration de complexes quasi-cohérents sur X*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^* \longrightarrow \mathbb{L}_{X/S} \longrightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{F}}.$$

La construction $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ est clairement fonctorielle en $\mathcal{F}$ et fournit un ∞-foncteur

$$\mathbb{L}_- : \mathcal{F}ol(X/S)^{op} \longrightarrow \mathbf{QCoh}(X).$$

Cet ∞-foncteur est conservatif, de sorte à ce qu'un objet $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}ol(X/S)$ puisse être raisonnablement pensé à travers le complexe $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ muni d'une structure additionnelle de structure graduée mixte sur le schéma dérivé $\mathbb{V}(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}[1])$.

Nous utiliserons les complexes cotangents et conormaux en particulier pour définir des conditions de lissité variées. La définition ci-dessous regroupe les trois plus importantes.

Définition 2.2.6. *Un feuilletage dérivé $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(X/S)$ sur un schéma dérivé X est parfait (resp. quasi-lisse, resp. lisse) si son complexe cotangent $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ est un complexe parfait (resp. un complexe parfait d'amplitude $[-1, 0]$, resp. un fibré vectoriel).*

De même, un feuilletage dérivé $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(X/S)$ sur un schéma dérivé X est transversalement parfait (resp. transversalement quasi-lisse, resp. transversalement lisse) si son complexe conormal $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^$ est un complexe parfait (resp. un complexe parfait d'amplitude $[-1, 0]$, resp. un fibré vectoriel).*

Il est important de remarquer que l' ∞ -catégorie $\mathcal{F}ol(X/S)$ possède un objet final, un objet initial et des limites arbitraires. L'objet final est clairement $\mathcal{L}^{gr}(X/S)$, muni du morphisme identité $\mathcal{L}^{gr}(X/S) \rightarrow \mathcal{L}^{gr}(X/S)$. Cet objet sera noté

$$*_{X/S} \in \mathcal{F}ol(X/S).$$

Notons ici que le complexe cotangent de $*_{X/S}$ n'est autre que $\mathbb{L}_{X/S}$, le complexe cotangent de X relatif à S . L'objet final de $\mathcal{F}ol(X/S)$ est le morphisme canonique $X \rightarrow \mathcal{L}^{gr}(X/S) = \mathbf{Map}(\mathcal{H}, X)$, donné par le *morphisme constant*, adjoint de la projection sur le premier facteur $X \times \mathcal{H} \rightarrow X$. Son complexe cotangent n'est autre que le complexe nul. Cet objet final sera noté

$$0_{X/S} \in \mathcal{F}ol(X/S).$$

Par ailleurs, il est facile de voir que les conditions (1) – (3) de la définition 2.2.1 sont stables par limites arbitraires, prises dans l' ∞ -catégorie $(\mathcal{H} - \mathbf{dSt}_k)/\mathcal{L}^{gr}(X/S)$. Ceci montre que $\mathcal{F}ol(X/S)$ possède des limites arbitraires. Pour un diagramme $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ dans $\mathcal{F}ol(X/S)$, le complexe cotangent de l'objet limite $\lim_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est donné par la colimite, prise dans l' ∞ -catégorie comma $\mathbb{L}_{X/S}/\mathbf{QCoh}(X)$, des complexes cotangents des $\mathcal{F}_i$. En formule

$$\mathbb{L}_{\lim_{i \in I} \mathcal{F}_i} \simeq \operatorname{colim}_{i \in I} \mathbb{L}_{\mathcal{F}_i} \in \mathbb{L}_{X/S}/\mathbf{QCoh}(X).$$

En particulier, les produits cartésiens existent dans $\mathcal{F}ol(X/S)$, et pour deux feuilletages dérivés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur X , le complex cotangent $\mathbb{L}_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}'}$ entre dans un diagramme cocartésien de complexes quasi-cohérents

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}_{X/S} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}_{\mathcal{F}'} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}'} \end{array}$$

Notons aussi que les ∞ -catégories $\mathcal{F}ol(X/S)$ sont fonctorielles en X par images réciproques. Pour un morphisme de schémas dérivés $f : X \rightarrow Y$ (au-dessus de S), on dispose en effet d'un ∞ -foncteur d'image réciproques

$$f^* : \mathcal{F}ol(Y/S) \longrightarrow \mathcal{F}ol(X/S).$$

L' ∞ -foncteur f^* est simplement donné par le changement de base le long du morphisme induit $\mathcal{L}^{gr}(X/S) \rightarrow \mathcal{L}^{gr}(Y/S)$. Ainsi, si $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(X)$ est défini par un champ dérivé $\mathcal{H}$ -équivalent

au-dessus de $\mathcal{L}^{gr}(X/S)$, on a

$$f^*(\mathcal{F}) := \mathcal{F} \times_{\mathcal{L}^{gr}(X/S)} \mathcal{L}^{gr}(Y/S) \longrightarrow \mathcal{L}^{gr}(Y/S),$$

où le produit fibré est pris dans $\mathcal{H} - \mathbf{dSt}_k$. Cette formule définit effectivement un ∞ -foncteur $f^* : \mathcal{Fol}(X/S) \rightarrow \mathcal{Fol}(Y/S)$ car l'on vérifie sans peine que les conditions (1) – (3) de la définition 2.2.1 sont préservées. Notons aussi que $\mathbb{L}_{f^*(\mathcal{F})}$ entre dans un diagramme cocartésien de complexes quasi-cohérents sur Y

$$\begin{array}{ccc} f^*(\mathbb{L}_{X/S}) & \longrightarrow & \mathbb{L}_{Y/S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & \mathbb{L}_{f^*(\mathcal{F})}. \end{array}$$

Pour terminer, les ∞ -catégories $\mathcal{Fol}(X/S)$ possèdent aussi des fonctorialités en le schéma de base S , qui étend les images réciproques ci-dessus au cas d'un morphisme entre paires. Supposons que l'on ait un carré commutatif de schémas dérivés

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{g} & S, \end{array}$$

où $S' \rightarrow S$ est un morphisme de schémas affines. On ne supposera pas nécessairement que ce carré est cartésien. On dispose alors d'un morphisme de champs gradués mixtes (au-dessus de S)

$$\mathcal{L}^{gr}(X'/S') \longrightarrow \mathcal{L}^{gr}(X/S).$$

On peut alors, par pull-back le long de ce morphisme, considérer l' ∞ -foncteur de changement de base $\mathcal{H} - \mathbf{dSt}_k / \mathcal{L}^{gr}(X/S) \rightarrow \mathcal{H} - \mathbf{dSt}_k / \mathcal{L}^{gr}(X'/S')$, qui envoie $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^{gr}(X/S)$ sur $\mathcal{F} \times_{\mathcal{L}^{gr}(X/S)} \mathcal{L}^{gr}(X'/S')$. Cet ∞ -foncteur préserve les conditions (1) – (3) de la définition 2.2.1 et ainsi définit un ∞ -foncteur de changement de bases

$$(f, g)^* : \mathcal{Fol}(X/S) \longrightarrow \mathcal{Fol}(X'/S').$$

Note que lorsque $g : S' \rightarrow S$ est l'identité, on retrouve les images réciproques de feuilletages au-dessus de S . Au niveau des complexes cotangents, pour $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$, on dispose d'un diagramme cocartésien de complexes quasi-cohérents sur X'

$$\begin{array}{ccc} f^*(\mathbb{L}_{X/S}) & \longrightarrow & \mathbb{L}_{X'/S'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & \mathbb{L}_{f^*(\mathcal{F})}. \end{array}$$

Un cas particulièrement intéressant pour nous sera lorsque $X' \rightarrow X$ est l'identité. Alors, pour un morphisme de S -schémas $X \rightarrow S'$, on disposera d'un ∞ -foncteur de changement de schémas de bases

$$(id, g)^* : \mathcal{F}ol(X/S) \longrightarrow \mathcal{F}ol(X/S').$$

2.3. Le cas lisse.

Proposition 2.3.1. *Soit A une k -algèbre commutative lisse et M un A -module projectif et de type fini. On considère le schéma dérivé affine $X := \mathbf{Spec}(Sym_A(M[1])) = \mathbb{V}(M[1])$, muni de sa graduation naturelle. Alors, l'espace classifiant des structures mixtes graduées sur X , compatible à la graduation, est discret et en bijection avec l'ensemble des différentielles k -linéaires et multiplicatives sur la k -algèbre commutative graduée $\bigoplus_i (\wedge_A^i M)[-i]$.*

Preuve. Supposons que $X = \mathbf{Spec}(Sym_A(M[1]))$ soit muni d'une action de $B\mathbb{H}$ compatible avec sa graduation naturelle (pour laquelle $M[1]$ est de poids -1 d'après nos conventions). On trouve ainsi une action de $\mathcal{H}$ sur le complexe $Sym_A(M[1])$, et donc une structure mixte gradué sur $\bigoplus_i (\wedge_A^i M)[-i]$ dont la graduation est la graduation naturelle. Cette structure mixte est de plus compatible à la structure multiplicative car provient d'une action de $B\mathbb{H}$ sur l'algèbre simpliciale $Sym_A(M[1])$. Cela fournit un morphisme de l'espace classifiant des structures graduées mixtes sur X compatibles à la graduation vers l'ensemble des différentielles k -linéaires et multiplicatives sur la k -algèbre commutative graduée $\bigoplus_i (\wedge_A^i M)[-i]$. Il reste à voir que cela est une équivalence d'espaces.

On procède par un argument standard de décomposition de Postnikov comme suit. On note $aut^{gr}(X)$ le champ en groupes $\mathbb{G}_m$ -équivariant des autoéquivalences de X . L'espace classifiant en question se trouve être l'espace des morphismes de champs $\mathbb{G}_m$ -équivariants

$$Map_{\mathbb{G}_m - \mathbf{dSt}_k}(B^2\mathbb{H}, Baut^{gr}(X)).$$

Tout d'abord, $B\mathbb{H}$ étant connexe, tout morphisme de champs en groupes $B\mathbb{H} \rightarrow aut^{gr}(X)$ se factorise par le sous-champ en groupes $aut_0^{gr}(X)$ formé des autoéquivalences qui sont homotopes à l'identité. Comme A est lisse on voit sans peine que $aut_0^{gr}(X)$ est simplement le groupe des autoéquivalences induisant l'identité sur les groupes d'homotopie de $Sym_A(M[1])$. Il nous faut donc décrire l'espace

$$Map_{\mathbb{G}_m - \mathbf{dSt}_k}(B^2\mathbb{H}, Baut_0^{gr}(X)).$$

Notons aussi que $B^2\mathbb{H}$ est un champ dérivé tronqué, c'est à dire un objet de $\mathbf{St}_k \subset \mathbf{dSt}_k$, et que par conséquent le champ $aut^{gr}(X)$ peut-être considéré comme un champ tronqué et que l'espace des morphismes ci-dessus peut se calculer dans $\mathbb{G}_m - \mathbf{St}_k$, l' ∞ -catégorie des champs non-dérivés $\mathbb{G}_m$ -équivariants sur k .

Nous allons procéder par décomposition de Postnikov sur $Baut_0^{gr}(X)$. Tout d'abord, $\pi_0(Baut_0^{gr}(X)) \simeq \pi_1(Baut_0^{gr}(X), *) \simeq *$. Les faisceaux d'homotopie $\pi_k := \pi_k(Baut_0^{gr}(X))$, pour $k > 1$ sont des faisceaux abéliens $\mathbb{G}_m$ -équivariants qui peuvent se décrire explicitement comme suit. Pour B une k -algèbre commutative, on note $A_B = A \otimes_k B$ et de même $M_B = M \otimes_k B$ (muni de

sa structure de A_B -module naturelle). Pour k -fixé, et B une k -algèbre commutative, $\pi_k(B)$ s'identifie aux familles d'applications k -linéaires

$$d_i : \wedge_{A_B}^i M_B \rightarrow \wedge_{A_B}^{i+k-1} M_B$$

pour $0 \leq i$, qui sont compatibles avec la structure multiplicative: c'est à dire que les d_i définissent une application $d : \text{Sym}_{A_B}(M_B[-1]) \rightarrow \text{Sym}_{A_B}(M_B[-1])$ qui est une dérivation d'algèbres commutatives graduées de degré $k-1$. Cependant, on n'impose pas plus de conditions aux d_i , par exemple nous n'imposons pas $d^2 = 0$. La compatibilité avec la structure multiplicative implique que d_0 et d_1 déterminent de manière unique les d_i pour $i > 1$. Un élément de $\pi_k(B)$ est donc donné par une paire

$$d_0 : A_B \rightarrow \wedge^{k-1} M_B \quad d_1 : M_B \rightarrow \wedge_B^k M_B,$$

où d_0 est une dérivation B -linéaire, et d_1 est un morphisme B -linéaire qui vérifie la règle de Liebnitz

$$d_1(am) = ad_1(m) + (-1)^k d_0(a) \wedge m,$$

pour $a \in A$ et $m \in M$. L'action de $\mathbb{G}_m$ sur ce faisceau est l'action naturelle de poids $k-1$ qui agit sur les d_i par $\lambda \mapsto \lambda^{k-1} \cdot d_i$.

Pour être plus précis, le faisceau π_k possède une projection naturelle vers le faisceau quasi-cohérent $B \mapsto B \otimes_k \text{Hom}_A(\Omega_{A/k}^1, \wedge^{k-1} M)$, donnée par $(d_0, d_1) \mapsto d_0$. Cette projection fait de π_k un torseur sous un second faisceau quasi-cohérent, à savoir $B \mapsto B \otimes_k \text{Hom}_A(M, \wedge^k M)$. Nous noterons cette décomposition par une suite exacte de faisceaux abéliens $\mathbb{G}_m$ -équivariants

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \wedge^k M) \longrightarrow \pi_k \longrightarrow \text{Der}(A, \wedge^{k-1} M) \longrightarrow 0,$$

où l'action de $\mathbb{G}_m$ se fait par homothéties de poids $1-k$ (i.e. induite par l'action de $\mathbb{G}_m$ de poids -1 sur M).

Nous sommes maintenant en mesure de procéder à la décomposition de Postnikov. Pour cela, on rappelle que la cohomologie de $B\mathcal{H}$ est naturellement donnée par

$$H^*(B^2\mathbb{H}, \mathcal{O}) \simeq k[u]$$

avec u en degré 2, et de poids 1 pour l'action de $\mathbb{G}_m$ (voir [MRT19, 4.1.1]). Ainsi, pour tout faisceau quasi-cohérent donné par un k -module N , sur lequel $\mathbb{G}_m$ opère par son action canonique de poids $1-k$, on trouve

$$H^*(B^2\mathbb{H}, N) \simeq N[u] \simeq \oplus_i N(i)[-2i],$$

où (i) désigne le twist de Tate pour les modules gradués, qui décale les poids de i . Ainsi, la cohomologie $\mathbb{G}_m$ -équivariante est-elle donnée par la seule composante non-nulle $i = k-1$

$$H_{\mathbb{G}_m}^{2k-2}(B^2\mathbb{H}, N) \simeq N \quad H_{\mathbb{G}_m}^i(B^2\mathbb{H}, N) = 0 \text{ si } i \neq 2k-2.$$

Il est maintenant facile, et laissé au lecteur de procéder à la théorie de l'obstruction le long de la tour de Postnikov de $B\text{aut}_0^{gr}(X)$. On commence par voir que l'espace

$$\text{Map}_{\mathbb{G}_m - \mathbf{st}_k}(B^2\mathbb{H}, (B\text{aut}_0^{gr}(X))_{\leq 2})$$

est discret et en bijection avec $H^2(B^2\mathbb{H}, \pi_2)$, qui n'est autre que l'ensemble des paires $d_0 : A \rightarrow M$ et $d_1 : M \rightarrow \wedge^2 M$, avec d_0 une dérivation et d_1 vérifiant Liebnitz par rapport à d_0 . L'obstruction à relever un tel élément à un morphisme $B^2\mathbb{H} \rightarrow (Baut_0^{gr}(X))_{\leq 3}$ se trouve dans un $H_{\mathbb{G}_m}^4(B^2\mathbb{H}, \pi_3)$, dont les éléments sont des applications k -linéaires $\wedge^i M \rightarrow \wedge^{i+2} M$ vérifiant les conditions adéquates. Cette obstruction s'annule si et seulement si les d_i vérifient $d^2 = 0$. Dans ce cas, l'espace des relèvements est en bijection avec $H_{\mathbb{G}_m}^3(B^2\mathbb{H}, \pi_3) = 0$, et ainsi de suite. $\square$

La proposition précédente permet de décrire les feuilletages lisses (au sens de la définition 2.2.6) au-dessus d'un schéma X lisse sur S , en termes de structures classiques. Pour un tel schéma lisse X , on dispose d'une notion d'algèbroïde de Lie sur X , définie comme suit. Une telle algèbroïde est la donnée d'un couple (V, d) , où V est un fibré vectoriel sur X , et d est une différentielle, k -linéaire et multiplicative sur le faisceaux d'algèbres commutatives graduées $\bigoplus_i (\wedge^i V[-i])$. La notion de morphismes entre de telles algèbroïdes est évidente. On a alors le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.2. *Soit X un schéma lisse sur S . Alors, la sous- ∞ -catégorie pleine de $\mathcal{Fol}(X/S)$ formée des feuilletages dérivés lisses est équivalente à la catégorie des algèbroïdes de Lie sur X .*

3. THEORIE DE DE RHAM FEUILLETÉE

3.1. Cohomologie de de Rham feuilletée. Soit X un schéma dérivé et $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^{gr}(X/S)$ un feuilletage dérivé au-dessus de X . Par définition $\mathcal{F}$ est équipé d'une action du champ en groupes $\mathcal{H}$, et on peut ainsi former le quotient $[\mathcal{F}/\mathcal{H}]$. Par définition, la cohomologie de de Rham feuilletée est la cohomologie, à coefficients quasi-cohérente, du champ $[\mathcal{F}/\mathcal{H}]$, ou de manière équivalente la cohomologie $\mathcal{H}$ -équivariante de $\mathcal{F}$ à coefficients quasi-cohérents. Afin de formaliser ceci, nous commençons par la définition suivante.

Définition 3.1.1. *Avec les notations précédentes, soit $f : [\mathcal{F}/\mathcal{H}] \rightarrow S$ la projection canonique. Pour tout objet $E \in \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathcal{H}])$, le complexe de Rham feuilleté de X le long de $\mathcal{F}$ et à coefficients dans E est*

$$C_{dR}^*(X/\mathcal{F}, E) := f_*(E) \in \mathbf{QCoh}(S) \simeq \mathbf{dg}_k.$$

Lorsque $\mathcal{F} = *_{X/S}$ est le feuilletage final et $E = \mathcal{O}$ on note simplement

$$C_{dR}^*(X/S) := C_{dR}^*(X/\mathcal{F}, E)$$

que l'on appelle le complexe de cohomologie de de Rham de X relatif à S .

Remarque 3.1.2. Le complexe $C_{dR}^*(X/S)$ est souvent appelé *cohomologie de de Rham dérivée de X sur S* dans la littérature, voir par exemple [Bha12]. Comme nous n'utiliserons pas la cohomologie de de Rham naïve (i.e. non dérivée) dans cet article, en dehors du cas lisse où ces deux notions coïncident, nous ne mentionnons pas l'adjectif *dérivée* dans la définition

précédente. Par ailleurs, la version que nous utiliserons ici est la cohomologie de de Rham dérivée et *complétée le long de la filtration de Hodge*. Nous renvoyons à l'appendice A pour quelques détails supplémentaires sur les aspects de complétions.

Nous utiliserons de manière essentielle les propriétés de multiplicativité de la cohomologie de de Rham feuilletée. Il s'agit ici de remarquer que l' ∞ -foncteur

$$f_* : \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}, \mathcal{H}]) \longrightarrow \mathbf{QCoh}(S)$$

est muni d'une structure naturelle lax-monoïdale symétrique, en tant qu'adjoint à droite de l' ∞ -foncteur monoïdal symétrique f^* . Ainsi, f_* s'étend naturellement en un ∞ -foncteur sur les ∞ -catégories de E_∞ -algèbres et de modules. En particulier, nous utiliserons que $C_{dR}^*(X/\mathcal{F}, \mathcal{O})$ est naturellement muni d'une structure de E_∞ -algèbre.

Les coefficients naturels pour la cohomologie de de Rham feuilletée semblent être tous les quasi-cohérents sur $[\mathcal{F}/\mathcal{H}]$. Cependant, nous allons restreindre cette classe en définissant une sous- ∞ -catégorie pleine $\mathbf{Cris}(\mathcal{F}) \subset \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathcal{H}])$ d'objets que nous appellerons des cristaux quasi-cohérents le long de $\mathcal{F}$. Dans [TV20b] cette ∞ -catégorie est notée $\mathbf{QCoh}(\mathcal{F})$, et pour éviter de la confondre avec l' ∞ -catégorie des quasi-cohérents sur le schéma dérivé $\mathcal{F}$, nous la noterons $\mathbf{Cris}(\mathcal{F})$.

Afin de la définir, considérons la projection naturelle $p : \mathcal{F} \rightarrow X$. Cette projection n'est pas $\mathcal{H}$ -équivariante, mais elle est $\mathbb{G}_m$ -équivariante (pour l'action triviale sur X). On dispose ainsi d'une image réciproque

$$p^* : \mathbf{QCoh}(X) \longrightarrow \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathbb{G}_m]).$$

Cet ∞ -foncteur s'avère être pleinement fidèle, et les objets de son image essentielle sont les quasi-cohérents $\mathbb{G}_m$ -équivariants sur $\mathcal{F}$ qui sont *libres sur leur composante de poids 0* (pour l'action de $\mathbb{G}_m$). En clair, si l'on écrit $\mathcal{F} = \mathbb{V}(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}[1])$, un objet $E \in \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathbb{G}_m])$ se décrit comme un faisceau de $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}[1])$ -modules gradués sur X . En tel faisceau est dans l'image essentielle de p^* si et seulement si l'inclusion naturelle $E(0) \rightarrow E$ de sa composante de poids 0, qui est un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules, induit une équivalence

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}[1]) \otimes_{\mathcal{O}_X} E(0) \simeq E.$$

On peut aussi voir cela en utilisant l'adjoint à droite p_* et en remarquant que l'unité de l'adjonction $id \Rightarrow p_*p^*$ est toujours une équivalence.

Rappelons enfin que la section $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{H}$ induit un morphisme naturel $[\mathcal{F}/\mathbb{G}_m] \rightarrow [\mathcal{F}/\mathcal{H}]$ et par image réciproque un ∞ -foncteur d'oubli $\mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathcal{H}]) \longrightarrow \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathbb{G}_m])$.

Définition 3.1.3. *Avec les notations précédentes, un objet $E \in \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathcal{H}])$ est un cristal le long de $\mathcal{F}$ si son image dans $\mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathbb{G}_m])$ appartient à l'image essentielle de $p^* : \mathbf{QCoh}(X) \rightarrow \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathbb{G}_m])$ (i.e. est libre sur sa composante de poids 0).*

Les cristaux le long de $\mathcal{F}$ forment une ∞ -catégorie $\mathbf{Cris}(\mathcal{F})$, qui par définition est une sous- ∞ -catégorie pleine de $\mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathcal{H}])$. Elle peut aussi se décrire comme un produit fibré

$$\mathbf{Cris}(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathcal{H}]) \times_{\mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathbb{G}_m])} \mathbf{QCoh}(X).$$

La projection naturelle $\mathbf{Cris}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{QCoh}(X)$ fournit la notion d'un quasi-cohérent sous-jacent à un cristal, et un objet de $\mathbf{Cris}(\mathcal{F})$ doit être pensé comme à un quasi-cohérent sur X muni d'une *connexion plate le long de* $\mathcal{F}$. Nous renvoyons à [TV20b] pour plus de détails sur cette notion dans le cadre de la caractéristique nulle, dans laquelle nous montrons que les cristaux peuvent aussi se décrire comme des dg-modules sur un faisceau en dg-anneaux d'opérateurs différentiels adéquat.

Les ∞ -catégories $\mathbf{Cris}(\mathcal{F})$ sont fonctorielles en $\mathcal{F}$ de la manière suivante. Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

un carré commutatif de schémas dérivés, avec $S' \rightarrow S$ un morphisme de schémas affines. Nous avons défini une image réciproque $(f, g)^* : \mathcal{Fol}(X/S) \rightarrow \mathcal{Fol}(X'/S')$. Pour $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$, nous avons un morphisme $\mathcal{H}$ -équivariant canonique $\mathcal{F} \times_{\mathcal{L}^{gr}(X/S)} \mathcal{L}^{gr}(X'/S') \rightarrow \mathcal{F}$, et donc une image réciproque quasi-cohérente

$$(f, g)^* : \mathbf{QCoh}([\mathcal{F}/\mathcal{H}]) \rightarrow \mathbf{QCoh}([(f, g)^*(\mathcal{F})/\mathcal{H}]).$$

Cette image réciproque préserve les sous- ∞ -catégories de cristaux et induit ainsi

$$(f, g)^* : \mathbf{Cris}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{Cris}((f, g)^*(\mathcal{F})).$$

3.2. La filtration de Hodge feuilletée. Soit X un schéma dérivé et $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$ un feuilletage dérivé sur X . Nous allons voir que $\mathcal{F}$ permet de définir une filtration sur la E_∞ -algèbre $C_{dR}^*(X/S)$ de cohomologie de de Rham de X relatif à S . Pour cela nous considérons le morphisme $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^{gr}(X/S)$ de schémas dérivés $\mathcal{H}$ -équivariants, et nous formons sa déformation au fibré normal comme rappelée dans la définition 1.3.1. Cela fournit un schéma dérivé $\mathcal{H}$ -équivariant filtré $Def(\pi)$. On peut en former le quotient par $\mathcal{H}$ pour obtenir un champ dérivé filtré

$$p : [Def(\pi)/\mathcal{H}] \rightarrow \mathcal{A}.$$

L'image directe $p_*(\mathcal{O})$ fournit alors une E_∞ -algèbre quasi-cohérente sur $\mathcal{A}$, ou en d'autres termes une E_∞ -algèbre filtrée.

Définition 3.2.1. La E_∞ -algèbre filtrée $p_*(\mathcal{O})$ définie ci-dessus sera notée

$$C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}} := p_*(\mathcal{O}).$$

Il n'est pas difficile de décrire l'objet sous-jacent à $C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$ ainsi que son gradué associé. En effet, si l'on oublie l'action de $\mathcal{H}$, $Def(\pi)$ est un schéma affine dérivé filtré au-dessus de X . Le schéma affine sous-jacent est $\mathcal{L}^{gr}(X/S) = \mathbb{V}(\mathbb{L}_{X/S}[1]) = \mathbb{T}_{X/S}[-1]$. La filtration est ainsi définie par une filtration sur le faisceau de $\mathcal{O}_X$ -algèbres simpliciales commutatives $Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/S}[1])$.

Cette filtration est elle-même induite en prenant le Sym d'une filtration sur le complexe $\mathbb{L}_{X/S}$, ne possédant qu'un unique cran non trivial, à savoir le morphisme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^* \longrightarrow \mathbb{L}_{X/S},$$

où $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$ est le complexe conormal au feuilletage $\mathcal{F}$ (i.e. la fibre de $\mathbb{L}_{X/S} \rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$, voir la définition 2.2.5). De manière plus claire, on a une filtration F^* définie sur $\mathbb{L}_{X/S}[1]$ en déclarant que :

- $F^i(\mathbb{L}_{X/S}[1]) = 0$ si $i < -1$
- $F^{-1}(\mathbb{L}_{X/S}[1]) = \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*[1]$
- $F^i(\mathbb{L}_{X/S}[1]) = \mathbb{L}_{X/S}[1]$ si $i \geq 0$,

avec les morphismes $F^i \rightarrow F^{i+1}$ évidents. Comme il s'agit de complexes quasi-cohérents connectifs, nous pouvons en prendre les $\mathcal{O}_X$ -algèbres simpliciales commutatives libres, et définir ainsi une filtration induite sur la k -algèbre simpliciale commutative $Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/S}[1])$. Notons que cette filtration est telle que $F^i(Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/S}[1])) = Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/S}[1])$ dès que $i \geq 0$. Par construction, nous savons aussi que son gradué associé est $Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}[1] \oplus \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*[1])$, où $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ est de poids 0 et $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$ est de poids -1 . Ainsi, la partie de poids $-i$ n'est autre que $Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}[1]) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\wedge^i \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*)[i]$. Comme la déformation vers le fibré normal est compatible avec l'action de $\mathcal{H}$, $Sym_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{\mathcal{F}}[1]) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*[i]$ est naturellement muni d'une structure $\mathcal{H}$ -équivariante en tant que quasi-cohérent $\mathbb{G}_m$ -équivariant sur $\mathcal{F}$. En d'autres termes, le quasi-cohérent $\wedge^i \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$ sur X est naturellement muni d'une structure de cristal le long de $\mathcal{F}$ au sens de la définition 3.1.3.

En résumé, nous venons de voir les faits suivants.

Proposition 3.2.2. *Pour $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$ un feuilletage dérivé sur un schéma dérivé X , la E_{∞} -algèbre filtrée $C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$ vérifie les assertions suivantes.*

- *Le filtration F^* sur $C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$ est telle que $F^i(C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}) = F^{i+1}(C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}})$ pour tout $i \geq 0$. De plus, on a*

$$F^0(C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}) \simeq C_{dR}^*(X/S).$$

En particulier, la E_{∞} -algèbre sous-jacente à $C_{dR}^(X/S)^{\mathcal{F}}$ est la E_{∞} -algèbre de cohomologie de de Rham de X/S .*

- *Les complexes quasi-cohérents $\wedge^i \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$ sont munis de structures canoniques de cristaux le long de $\mathcal{F}$.*
- *Le gradué associé à la E_{∞} -algèbre filtrée $C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$ est donnée par*

$$Gr^*(C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}) \simeq \bigoplus_i C_{dR}^*(X/\mathcal{F}, \wedge^i \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*)[i],$$

où la composante $C_{dR}^(X/\mathcal{F}, \wedge^i \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*)[i]$ est de poids $-i$ par convention.*

Remarque 3.2.3. Pour des feuilletages usuels sur des variétés lisses complexes, la structure de cristal sur le fibré conormal $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$ s'appelle parfois *la connexion de Bott*.

La filtration de Hodge habituelle sur la cohomologie de de Rham s'obtient lorsque $\mathcal{F}$ est l'objet final $0_{X/S}$. Cette filtration sera notée

$$F_{Hod}^i C_{dR}^*(X/S) \rightarrow C_{dR}^*(X/S),$$

et appelée *filtration de Hodge absolue* s'il est nécessaire d'éviter certaines ambiguïtés. Son gradué associé est comme il se doit $\oplus_i C^*(X, \wedge^i \mathbb{L}_{X/S}[-i])$, la cohomologie de Hodge de X relativement à S .

Enfin, notons que la construction de la filtration de Hodge associée à un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(X/S)$ est fonctorielle. Ainsi, si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{g} & S, \end{array}$$

et $\mathcal{F}' \rightarrow (f, g)^*(\mathcal{F})$ un morphisme dans $\mathcal{F}ol(Y/S')$, alors on dispose d'un morphisme de E_∞ -algèbres filtrées

$$C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}} \longrightarrow C_{dR}^*(Y/S')^{\mathcal{F}'},$$

dont le morphisme induit sur les E_∞ -algèbres sous-jacentes n'est autre que la fonctorialité usuelle du complexe de de Rham. En d'autres termes, la filtration de Hodge associée à un feuilletage est fonctorielle en $\mathcal{F}$ mais aussi en la paire $X \rightarrow S$.

4. CLASSES CARACTÉRISTIQUES

4.1. Classes de Chern en cohomologie de de Rham. On rappelle (voir [TV08, 2.2.4]) l'adjonction

$$i : \mathbf{St}_k \rightleftarrows \mathbf{dSt}_k : t_0,$$

où t_0 est l' ∞ -foncteur de troncation et $\mathbf{St}_k$ est l' ∞ -catégorie des champs (non-dérivés). L' ∞ -foncteur i est pleinement fidèle et son image essentielle consiste en les champs dérivés *tronqués*. Il s'agit précisément des champs dérivés qui sont extension de Kan à gauche de champs définis sur les schémas affines non-dérivés. En particulier, les champs dérivés tronqués sont stables par colimites arbitraires dans $\mathbf{dSt}_k$.

On note $Gl_\infty = \text{colim}_n Gl_n$, pour les inclusions $Gl_n \hookrightarrow Gl_{n+1}$ standard. Le champ $\mathbb{Z} \times BGl_\infty$ est un champ non-dérivé que nous considérons comme un objet de $\mathbf{St}_k$. Par ailleurs, on dispose du foncteur de K -théorie $K \in \mathbf{dSt}_k$, obtenu par construction de Waldhausen sur le champ dérivé des complexes parfaits $\mathbf{Perf} \in \mathbf{dSt}_k$. Il est notable que K et $\mathbb{Z} \times BGl_\infty$ possède les mêmes morphismes vers des champs en groupes abéliens, fait bien connu (voir par exemple [Gil81] où ce fait est utilisé pour définir les classes de Chern en K -théorie supérieure) mais que nous rappelons ci-dessous.

Proposition 4.1.1. *Soit H un champ dérivé en groupes abéliens. Alors, il existe une équivalence naturelle d'espaces de morphismes*

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}_k}(K, H) \simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{St}_k}(\mathbb{Z} \times BGl_\infty, t_0(H)).$$

Preuve. On commence par remarquer que le morphisme d'adjonction $it_0(K) \rightarrow K$ est une équivalence, ou en d'autres termes que K est champ dérivé tronqué. Pour cela on considère **Vect**, le champ des fibrés vectoriels, que l'on voit comme un champ en monoïdes à l'aide de la somme directe de fibrés. Le champ dérivé **Vect** $\in \mathbf{dSt}_k$ est tronqué, car s'écrit comme un réunion disjoint de champs classifiants de groupes lisses $\coprod_n [*/Gl_n]$. L'inclusion canonique **Vect** $\rightarrow$ **Perf**, induit une équivalence après complétion en groupes

$$Gp(\mathbf{Vect}) \simeq K.$$

Or, il est immédiat de vérifier, simplement à l'aide des propriétés universelles, que l' ∞ -foncteur de complétion en groupes préserve les objets tronqués. Ainsi, K est tronqué car **Vect** et donc $Gp(\mathbf{Vect})$ est tronqué.

Nous utilisons maintenant l'équivalence entre construction + de Quillen et construction de Waldhausen de l'espace de K -théorie (voir [Wal79, 1.7.1]). Cet énoncé affirme l'existence d'une équivalence de champs non-dérivés

$$t_0(K) \simeq Gp(\mathbf{Vect}) \simeq (\mathbb{Z} \times BGl_\infty),$$

où + fait référence ici à la construction + de Quillen. De plus, par la propriété universelle de la construction + on dispose d'une équivalence d'espaces

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{St}_k}(\mathbb{Z} \times BGl_\infty, t_0(H)) \simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{St}_k}(\mathbb{Z} \times BGl_\infty^+, t_0(H)).$$

Ainsi, on trouve une équivalence naturelle

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{St}_k}(\mathbb{Z} \times BGl_\infty, t_0(H)) \simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{St}_k}(t_0(K), t_0(H)) \simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}_k}(it_0(K), H) \simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{dSt}_k}(K, H).$$

□

Nous allons appliquer la proposition au cas particulier du champs dérivé $X \mapsto C_{dR}^*(X/S)$, sous-jacent à la cohomologie de de Rham. Pour cela nous rappelons les calculs, bien connus au moins en caractéristique nulle, de la cohomologie de de Rham des champs BGl_n .

Soit $\mathbb{T}_{BGl_n}[-1]$, le tangent décalé du champ BGl_n , qui est muni d'une structure naturelle de champs dérivé mixte gradué. Ainsi, la E_∞ -algèbre de cohomologie de $\mathbb{T}_{BGl_n}[-1]$ à coefficients dans $\mathcal{O}$ définit une E_∞ -algèbre graduée mixte. Cette dernière n'est autre que $(Sym_k(gl_n^*))^{hGl_n}$. Ici gl_n est l'algèbre de Lie de Gl_n , et gl_n^* son k -module dual, et $Sym_k(gl_n^*)$ la k -algèbre libre sur gl_n^* . Le schéma en groupe Gl_n opère sur cette dernière par l'action co-adjointe et $(Sym_k(gl_n^*))^{hGl_n}$ désigne la E_∞ -algèbre de cohomologie du schéma en groupes Gl_n à coefficients dans icelle. En caractéristique nulle, cette cohomologie est triviale en degrés non-nuls, mais dans notre cas $(Sym_k(gl_n^*))^{hGl_n}$ est une E_∞ -algèbre cohomologiquement concentrée en degrés $[0, \infty[$. Par troncation, on dispose d'un morphisme canonique de E_∞ -algèbres

$$H^0((Sym_k(gl_n^*))^{hGl_n}) \simeq Sym_k(gl_n^*)^{Gl_n} \rightarrow (Sym_k(gl_n^*))^{hGl_n}.$$

Ce morphisme est de plus un morphisme de E_∞ -algèbres graduées mixtes pour la structure mixte triviale sur le membre de gauche (il s'agit ici d'utiliser la t-structure naturelle sur $\mathbf{QCoh}(B\mathcal{H})$). Notons au passage que, d'après nos conventions, la graduation sur $Sym_k(gl_n^*)$ est de sorte à ce que gl_n^* soit de poids -1 .

Nous pouvons passer aux sections globales, ou encore à la réalisation des objets gradués mixtes au sens de [MRT19]

$$|-| : \mathbf{QCoh}(B\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbf{QCoh}(\mathrm{Spec} k) = \mathbf{dg}_k.$$

Ceci nous fournit un morphisme de E_∞ -algèbres (noté CV pour "Chern-Weil")

$$CV : |Sym_k(gl_n^*)^{Gl_n}| \simeq Sym_k(gl_n^*[-2])^{Gl_n} \longrightarrow |(Sym_k(gl_n^*))^{hGl_n}| \simeq C_{dR}^*(BGl_n/S).$$

Ce morphisme est un morphisme de E_∞ -algèbres filtrées, où la filtration sur le membre de droite est la filtration de Hodge, et la filtration sur le membre de gauche n'est autre que celle induite par la graduation naturelle. Si $i \leq 0$, sur le i -ème étage ce morphisme induit ainsi

$$Sym_k^{\geq i}(gl_n^*[-2])^{Gl_n} \longrightarrow F_{Hod}^{-i}C_{dR}^*(BGl_n/S).$$

Le i -ème coefficients de la fonction polynôme caractéristique² définit un élément canonique pour $i \geq 1$

$$c_i \in Sym^i(gl_n^*)^{Gl_n},$$

et par le morphisme de Chern-Weil on dispose ainsi de morphismes canoniques définis dans $\mathbf{dg}_k$

$$c_i : k[-2i] \longrightarrow F_{Hod}^{-i}C_{dR}^*(BGl_n/S) \longrightarrow C_{dR}^*(BGl_n/S).$$

Ces constructions sont compatibles avec les inclusions $Gl_n \hookrightarrow Gl_{n+1}$, et induisent ainsi un morphisme de Chern Weil

$$CV : Sym_k(gl_\infty^*[-2])^{Gl_\infty} \longrightarrow C_{dR}^*(BGl_\infty/S),$$

qui est un morphisme de E_∞ -algèbres filtrées. Par convention, les sources et but de ce morphisme sont obtenus comme limites

$$Sym_k(gl_\infty^*[-2])^{Gl_\infty} := \lim_n Sym_k(gl_n^*[-2])^{Gl_n} \quad C_{dR}^*(BGl_\infty/S) := \lim_n C_{dR}^*(BGl_n/S).$$

Les classes de Chern c_i deviennent alors des morphismes canoniquement définis dans $\mathbf{dg}_k$

$$c_i : k[-2i] \longrightarrow F_{Hod}^{-i}C_{dR}^*(BGl_\infty/S) \longrightarrow C_{dR}^*(BGl_\infty/S).$$

Ces morphismes peuvent aussi être vus comme des morphismes de champs

$$c_i : BGl_\infty \longrightarrow F_{Hod}^{-i}C_{dR}^*(-/S)[2i].$$

Nous appliquons alors la proposition 4.1.1 pour obtenir des morphismes canoniques de champs dérivés

$$c_i : K \longrightarrow F_{Hod}^{-i}C_{dR}^*(-/S)[2i].$$

²Ici la convention est de prendre les polynômes caractéristiques inverses: $P_A(T) := \mathrm{Det}(Id + TA)$.

En précomposant avec le morphisme canonique $\mathbf{Perf} \rightarrow K$ nous obtenons enfin la définition définitive des classes de Chern des complexes parfaits en cohomologie de de Rham

$$c_i : \mathbf{Perf} \rightarrow F_{Hod}^{-i} C_{dR}^*(-/S)[2i],$$

comme morphismes dans $\mathbf{dSt}_k$. De manière équivalente nous pouvons considérer c_i comme un morphisme dans $\mathbf{dg}_k$

$$c_i : k[-2i] \rightarrow F_{Hod}^{-i} C_{dR}^*(\mathbf{Perf}/S).$$

Définition 4.1.2. *Pour $i \geq 1$, le morphisme dans $\mathbf{dSt}_k$*

$$c_i : \mathbf{Perf} \rightarrow F_{Hod}^{-i} C_{dR}^*(-/S)[2i],$$

défini ci-dessus, est la i -ème classe de Chern.

Nous pouvons généraliser les classes caractéristique en fixant au préalable un polynôme $\phi \in k[X_1, \dots, X_i, \dots]$, homogène de degré q avec $\deg(X_i) = 2i$. Alors, $\phi(c_1, \dots, c_i, \dots)$ définit un élément dans $(Sym_k^q(gl_\infty^*)[-2q])^{Gl_\infty}$, et donc, à travers le morphisme CV un morphisme de complexes

$$c_\phi : \mathbf{Perf} \rightarrow F_{Hod}^{-q} C_{dR}^*(-/S)[qi].$$

Il s'agit de la classe caractéristique associé au polynôme ϕ .

4.2. Trivialité des classes de Chern de cristaux. Nous arrivons enfin à notre théorème principal. Soit $X \rightarrow S$ un schéma dérivé et $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$ un feuilletage dérivé sur X . Soit $E \in \mathbf{Cris}(\mathcal{F})$ un cristal le long de $\mathcal{F}$, tel que le quasi-cohérent sous-jacent soit un complexe parfait sur X . Notons $E(0)$ ce complexe parfait, qui, on le rappelle, est la partie de poids 0 de E vu comme quasi-cohérent $\mathbb{G}_m$ -équivariant sur $\mathcal{L}^{gr}(X/S)$.

Théorème 4.2.1. *Avec les notations ci-dessus, pour tout $i > 0$, le morphisme*

$$c_i(E(0)) : k[-2i] \rightarrow C_{dR}^*(X/S)$$

possède une factorisation canonique

$$k[-2i] \rightarrow F^{-1} C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}} \rightarrow C_{dR}^*(X/S).$$

Preuve. Soit $E(0) : X \rightarrow \mathbf{Perf}$ le morphisme de champs dérivés correspondant au complexe parfait $E(0)$. On considère la projection naturelle $p : \mathcal{F} \rightarrow X$. Par définition, la structure de cristal le long de $\mathcal{F}$ sur $E(0)$ est donnée par une structure $\mathcal{H}$ -équivariante sur le morphisme composé

$$\mathcal{F} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{E(0)} \mathbf{Perf},$$

où $\mathcal{H}$ opère sur $\mathbf{Perf}$ de manière triviale. En d'autres termes, le morphisme $E(0)$ se promeut en un morphisme de champs dérivés feuilletés

$$(X, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbf{Perf}, 0_{\mathbf{Perf}}),$$

où $0_{\mathbf{Perf}} \in \mathcal{Fol}(\mathbf{Perf})$ est l'objet initial. Par functorialité de la filtration de Hodge, on en déduit par image réciproque un morphisme de E_∞ -algèbres filtrés $C_{dR}^*(\mathbf{Perf}/S) \rightarrow C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$, où

le membre de droite est filtré par la filtration de Hodge usuelle (i.e. celle associée au feuilletage initial). Ceci implique, que l'image réciproque le long de $E(0) C_{dR}^*(\mathbf{Perf}/S) \rightarrow C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$ vient équipée avec une factorization $F_{Hod}^{-1} C_{dR}^*(\mathbf{Perf}/S) \rightarrow F^{-1} C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$. Comme les classes de Chern c_i sont des morphismes $k[-2i] \rightarrow F_{Hod}^{-1} C_{dR}^*(\mathbf{Perf}/S)$, le théorème s'en suit. $\square$

Remarque 4.2.2. Le théorème 4.2.1 affirme plus que l'existence d'une factorisation, sa preuve montre que la donnée d'une structure de cristal de long de $\mathcal{F}$ sur le complexe parfait $E(0)$ définit une factorisation canonique. On pourrait aller plus loin et montrer que l'on construit ici un ∞ -foncteur de l' ∞ -groupeoïde des structures de cristaux sur $E(0)$ vers l' ∞ -groupeoïde des factorisations comme dans la conclusion de 4.2.1.

En termes de classes de cohomologie, le théorème 4.2.1 possède l'implication suivante: l'annulation des classes de Chern de cristaux en cohomologie de de Rham feuilletée.

Corollaire 4.2.3. *Avec les mêmes notations et conditions que le théorème 4.2.1, toutes les images des classe de Chern $c_i(E(0)) \in H_{dR}^{2i}(X/S)$ par la projection naturelle $H_{dR}^{2i}(X/S) \rightarrow H_{dR}^{2i}(X/\mathcal{F})$ sont nulles.*

Notons cependant que le théorème 4.2.1 est plus fin que le corollaire précédent. En effet, il affirme que les classes de Chern $c_i(E(0)) : k[-2i] \rightarrow C_{dR}^*(X/\mathcal{F})$ viennent équipée d'une homotopie canonique au morphisme nul. Une des conséquence de ce fait va être l'existence de résidus pour les feuilletages dérivés, extension des résidus de feuilletages singuliers complexes de [BB72]. Pour commencer nous avons la conséquence suivante du dernier corollaire, qui est une extension du théorème d'annulation de Bott (voir [Bot70]).

Corollaire 4.2.4. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$ un feuilletage dérivé transversalement lisse (voir 2.2.6). On suppose que son fibré conormal $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$ est de rang d (nous dirons alors que $\mathcal{F}$ est de plus de codimension d). Soit $\phi \in k[X_1, \dots, X_i, \dots]$ un polynôme avec X_i de degré $2i$, et ϕ homogène de degré $q > d$. Alors, pour tout crystal $E \in \mathcal{Cris}(\mathcal{F})$, avec $E(0)$ parfait sur X , on a*

$$\phi(c_1(E), \dots, c_i(E), \dots) = 0 \in H_{dR}^{2q}(X/S).$$

Preuve du corollaire 4.2.4. Il suiffit de remarquer que pour $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$ transversalement lisse et de codimension d , la filtration de Hodge associée à $\mathcal{F}$ vérifie

$$F^{-i} C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}} = 0 \quad \text{si } i > d.$$

En effet, cet énoncé est local sur X , et on peut donc supposer que $X = \mathbf{Spec} A$ est affine. Au niveau des complexes cotangents on a suite exacte de fibration

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^* \longrightarrow \mathbb{L}_{X/S} \longrightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{F}}.$$

On peut représenter cette suite par une suite exacte de cofibration de A -modules simpliciaux cofibrants

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^* \hookrightarrow \mathbb{L}_{X/S} \twoheadrightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{F}},$$

et supposer que $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$ est un A -module libre de rang d . Dans ce cas, la filtration induite sur $Sym_A(\mathbb{L}_{X/S}[1])$ est telle que $F^{-i}Sym_A(\mathbb{L}_{X/S}[1])$ soit l'idéal simplicial engendré par $Sym^{\geq i}(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*[1]) \simeq \bigoplus_{j \geq i} \wedge^j \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*[j]$, qui est donc nul pour $i > d$. $\square$

Pour l'existence de résidus, fixons X un schéma dérivé et E un complexe parfait sur X . On se fixe un ouvert $U \subset X$, un feuilletage dérivé $\mathcal{F}_U \in \mathcal{F}ol(U/S)$ transversalement lisse de codimension d , et une structure de cristal sur E_U le long de $\mathcal{F}_U$. On note $Z = X - U \subset X$ muni de sa structure de sous-schéma réduit. On note enfin $H_{dR,Z}^*(X/S)$ la cohomologie de de Rham de X à supports dans Z , définie comme la cohomologie de la fibre du morphisme de restriction $C_{dR}^*(X/S) \rightarrow C_{dR}^*(U/S)$.

Corollaire 4.2.5. *Avec les notations et conditions précédentes, soit $\phi \in k[X_1, \dots, X_i, \dots]$ un polynôme avec X_i de degré $2i$, et ϕ homogène de degré $q > d$. Alors, il existe un élément canoniquement défini*

$$Res_{\phi}(E) \in H_{dR,Z}^{2q}(X/S)$$

tel que son image dans $H_{dR}^{2q}(X/S)$ soit égale à $\phi(c_1(E), \dots, c_i(E), \dots)$.

Preuve du corollaire 4.2.5. Notons que le corollaire 4.2.4 implique que des éléments Res_{ϕ} avec la propriété cherchée existent bien. Cependant, il est question d'en construire un plus beau que les autres. Cet élément cherché est obtenu à l'aide du théorème 4.2.1 appliqué à U et E_U . En effet, le théorème implique que le morphisme induit par ϕ à l'aide du morphisme de Chern-Weil (voir après la définition 4.1.2)

$$c_{\phi}(E_U) := \phi(c_1(E_U), \dots, c_i(E_U), \dots) : k[-2q] \longrightarrow C_{dR}^*(U/S)$$

se factorise naturellement par $F^{-q}C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$. Or, comme le feuilletage $\mathcal{F}_U$ est transversalement lisse de codimension $d < q$, nous avons déjà vu lors de la preuve du corollaire 4.2.4 que $F^{-i}C_{dR}^*(X/S)^{\mathcal{F}}$ pour tout $i > d$. Ainsi, c_{ϕ} vient avec une factorisation canonique au morphisme nul dans l' ∞ -catégorie $\mathbf{dg}_k$. Cette factorisation induit un morphisme Res_{ϕ} bien défini, de sorte à avoir un diagramme commutatif dans $\mathbf{dg}_k$

$$\begin{array}{ccccc} C_{dR,Z}^*(X/S) & \longrightarrow & C_{dR}^*(X/S) & \longrightarrow & C_{dR}^*(U/S) \\ & \nwarrow Res_{\phi} & \uparrow c_{\phi}(E) & \nearrow c_{\phi}(E_U) & \\ & & k[-2q] & & \end{array}$$

$\square$

Le corollaire 4.2.5 s'applique en particulier au cas où $\mathcal{F}$ est défini sur X tout entier, et où $E = \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$. On trouve alors l'existence de résidus associés aux feuilletages dérivés qui sont génériquement transversalement lisses, dont l'énoncé est plus proche du théorème principal de [BB72].

Corollaire 4.2.6. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/S)$ un feuilletage dérivé parfait et qui est transversalement lisse de codimension d sur un ouvert $U \subset X$. Alors, pour tout $\phi \in k[X_1, \dots, X_i, \dots]$ un polynôme avec X_i de degré $2i$, et ϕ homogène de degré $q > d$, il existe un élément canonique*

$$Res_\phi(\mathcal{F}) \in H_{dR,Z}^{2q}(X/S)$$

tel que son image dans $H_{dR}^{2q}(X/S)$ soit égale à $\phi(c_1(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^), \dots, c_i(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*), \dots)$.*

4.3. Une formule des résidus à la Baum-Bott en caractéristique positive. Pour terminer, nous allons appliquer les résultats précédents au cas particulier où X est une variété lisse sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Nous noterons $S = \mathbf{Spec} \mathbb{W}(k)$, l'anneau des vecteurs de Witt p -typiques sur k , et $i : s = \mathbf{Spec} k \hookrightarrow S$ son unique point fermé. Nous introduisons alors la notion suivante de S -structures sur des feuilletages sur X relatifs à s , qui décrit le fait que les "feuilletages sur X/s peuvent s'étendre dans la direction de S ".

Définition 4.3.1. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/s)$ un feuilletage dérivé sur la variété X relativement à s . Une S -structure sur $\mathcal{F}$ est la donnée de $\mathcal{F}' \in \mathcal{Fol}(X/S)$ et d'une équivalence $i^*(\mathcal{F}') \simeq \mathcal{F}$ dans $\mathcal{Fol}(X/s)$.*

Un des intérêts de la notion de S -structures sur un feuilletage $\mathcal{F}$, et de pouvoir étendre la filtration de Hodge de $\mathcal{F}$, définie sur $C_{dR}^*(X/s)$, en une filtration sur $C_{dR}^*(X/S)$. Par exemple, supposons qu'il existe un carré cartésien de schémas dérivés

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ s & \longrightarrow & S, \end{array}$$

de sorte à ce que $\mathcal{F}$ soit obtenu par image réciproque d'un feuilletage $\mathcal{F}_Y \in \mathcal{Fol}(Y/S)$. Alors, $\mathcal{F}_Y$ définit une S -structure sur $\mathcal{F}$, en choisissant $\mathcal{F}'$ comme étant l'image de $\mathcal{F}_Y$ par le foncteur image réciproque $\mathcal{Fol}(Y/S) \rightarrow \mathcal{Fol}(X/S)$. Cependant, la notion de S -structure garde un sens sans avoir besoin de l'existence de Y . En d'autres termes, un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/s)$ peut s'étendre au-dessus de S sans que X s'étende au-dessus de S pour autant.

Tous les feuilletages dérivés ne possèdent pas de S -structures, posséder une S -structure est ainsi une condition non-triviale. À ce sujet, les deux exemples des objets finaux et initiaux de $\mathcal{Fol}(X/S)$ sont instructifs. Pour commencer $*_{X/s}$ possède toujours une S -structure, à savoir $*_{X/S}$. Ceci se voit simplement en remarquant que les images réciproques préservent les limites et donc l'objet final. En revanche, $0_{X/s}$ ne possède pas toujours une S -structure. En effet, supposons qu'une telle S -structure $\mathcal{F}' \in \mathcal{Fol}(X/S)$ existe, et pour simplifier supposons $X = \mathbf{Spec} A$ affine et non-dérivé. Alors $C_{dR}^*(X/\mathcal{F}')$ serait alors une E_∞ -algèbre A' , $\mathbb{W}(k)$ -linéaire, et muni d'un isomorphisme de k -algèbres

$$A' \otimes_{\mathbb{W}(k)} k \simeq C_{dR}^*(X/s) \simeq A.$$

Ceci impliquerait automatiquement que A' est une $\mathbb{W}(k)$ -algèbre plate, et ainsi que X possède un relèvement à S , ce qui n'est pas vrai en général. De manière générale, l'existence d'une

S -structure sur $0_{X/s}$ est essentiellement équivalente à l'existence d'un relèvement de X à un S -schéma. Il est bon de garder l'image intuitive que la donnée d'une S -structure sur $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(X/s)$ consiste essentiellement en la donnée d'un relèvement à S de "l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$ ", bien que ce dernier n'existe pas dans la catégorie algébrique.

L'intérêt, pour nous, des S -structures est basé sur la comparaison entre cohomologie de de Rham (dérivée) et cohomologie cristalline, dans l'esprit des résultats de [Bha12]. Nous n'aurons pas besoin de résultats de comparaisons, mais simplement de l'existence d'un morphisme naturel de E_∞ -algèbres $\mathbb{W}(k)$ -linéaires

$$\psi : C_{dR}^*(X/S) \longrightarrow C_{cris}^*(X/S),$$

où le membre de droite est défini comme étant

$$C_{cris}^*(X/S) := \lim_n \mathbb{R}\Gamma((Cris(X/S_n), \mathcal{O}_{X/S_n}),$$

avec $S_n = Spec \mathbb{W}_n(k)$, et $Cris(X/S_n)$ le topos cristallin de X au-dessus de S_n muni de son faisceau structural $\mathcal{O}_{X/S_n}$ usuel. L'existence de ce morphisme est certainement bien connu. Cependant, [Bha12] construit ce morphisme uniquement pour la cohomologie de de Rham dérivée *non-complétée*, alors que par définition $C_{dR}^*(X/S)$ est la cohomologie de de Rham dérivée et complétée pour la filtration de Hodge. Fort heureusement, les phénomènes de complétions disparaissent dans notre situation car X est supposée lisse sur s . Les détails se trouvent en appendice.

Nous disposons donc d'un morphisme naturel

$$\psi : C_{dR}^*(X/S) \longrightarrow C_{cris}^*(X/S).$$

Ce morphisme est fonctoriel en X , et de plus compatible aux classes de Chern. Ainsi, pour tout complexe parfait E sur X , $\psi(c_i(E))$ est égal à la i -ème classe de Chern de E en cohomologie cristalline. Nos théorème d'annulation en cohomologie de de Rham impliquent donc les énoncés analogues en cohomologie cristalline. Le résultat suivant est un exemple d'application du corollaire 4.2.6 de la section précédente, que nous proposons comme version du théorème d'annulation de Bott de [Bot70] au-dessus de corps de caractéristique $p > 0$.

Corollaire 4.3.2. *Soit X une variété lisse sur k , et $D \subset \Omega_{X/s}^1$ un sous-fibré de rang d qui vérifie la condition d'intégrabilité $d(D) \subset D \wedge \Omega_{X/s}^1$. On suppose que l'objet $\mathcal{F}_D \in \mathcal{Fol}(X)$ définit par D (voir 2.3.2) possède une S -structure au sens de 4.3.1. Alors, pour tout polynôme $\phi \in \mathbb{W}(k)[X_1, \dots, X_d]$ avec X_i de degré $2i$, et ϕ homogène de degré $q > d$, on a*

$$\phi(c_1(D), \dots, c_d(D)) = 0 \in H_{cris}^{2q}(X/\mathbb{W}(k)).$$

Les corollaires 4.2.3, 4.2.4 et 4.2.6 possèdent eux-aussi des applications évidentes. Par exemple, nous déduisons l'énoncé suivant d'existence de résidus pour des feuilletages singuliers en caractéristique positive.

Corollaire 4.3.3. *Soit X une variété lisse sur k , et $D \subset \Omega_{X/s}^1$ un sous-faisceau cohérent vérifiant la condition d'intégrabilité $d(D) \subset D \wedge \Omega_{X/s}^1$. On suppose, que D est un sous-fibré de*

rang d sur un ouvert $U \subset X$, et on suppose donnée une S -structure sur le feuilletage que D définit sur U relatif à s . On note $Z = X - U$ muni de sa structure réduite. Alors, pour tout $\phi \in \mathbb{W}(k)[X_1, \dots, X_i, \dots]$ un polynôme avec X_i de degré $2i$, et ϕ homogène de degré $q > d$, il existe un élément canonique

$$\text{Res}_\phi \in H_{\text{cris}, Z}^{2q}(X/\mathbb{W}(k))$$

tel que son image dans $H_{\text{cris}}^{2q}(X/\mathbb{W}(k))$ soit égale à $\phi(c_1(E), \dots, c_i(E), \dots)$.

Notons que dans le corollaire précédent, le résidu Res_ϕ dépend à priori du choix de la S -structure sur le feuilletage sur U défini par D .

APPENDIX A. COHOMOLOGIE DE DE RHAM DÉRIVÉE ET COHOMOLOGIE CRISTALLINE

Soit k un corps parfait, $\mathbb{W}(k)$ son anneau des vecteurs de Witt et $S = \mathbf{Spec} \mathbb{W}(k)$. Le but de cet appendice est de rappeler l'existence d'un morphisme $\psi : C_{dR}^*(X/S) \rightarrow C_{\text{cris}}^*(X/S)$, depuis la cohomologie de de Rham d'une variété lisse X sur k , vers sa cohomologie cristalline, fonctoriellement en X . Le contenu de cette partie est principalement tirée de [Bha12].

Tout d'abord, $C_{\text{cris}}^*(X/S)$ est défini par la limite des $C_{\text{cris}}^*(X/S_n)$, où $S_n = \mathbf{Spec} \mathbb{W}_n(k)$

$$C_{\text{cris}}^*(X/S) := \lim_n C_{\text{cris}}^*(X/S_n).$$

Nous allons définir le morphisme ψ comme le composé

$$C_{dR}^*(X/S) \rightarrow \lim_n C_{dR}^*(X/S_n) \rightarrow \lim_n C_{\text{cris}}^*(X/S_n) = C_{\text{cris}}^*(X/S).$$

Ainsi, il nous suffit de construire les morphismes

$$\psi_n : C_{dR}^*(X/S_n) \rightarrow C_{\text{cris}}^*(X/S_n)$$

de manière compatible en n . De plus, si l'on dispose des morphismes ψ_n lorsque X est affine, on dispose par recollement des morphismes ψ_n pour toute variété X . Nous allons donc nous concentrer sur le cas des variétés affines lisses au-dessus k , et des cohomologies de de Rham et cristallines au-dessus de S_n pour n fixé. La globalisation est laissée au lecteur.

Soit $\mathcal{C}_n$ l' ∞ -catégorie dont les objets sont les $\mathbb{W}(k)_n$ -algèbres simpliciales commutatives qui sont des rétractes de complexes cellulaires finis (voir [TV07, §2.1]). En particulier, les objets A de $\mathcal{C}_n$ sont tels que chaque $\mathbb{W}_n(k)$ -algèbre de m -simplexes A_m est une $\mathbb{W}_n(k)$ -algèbre lisse sur k . À $A \in \mathcal{C}_n$ nous associons un objet simplicial dans $\mathbf{dg}_{\mathbb{W}_n(k)}^{\text{fil}}$, c'est à dire un complexe filtré simplicial de $\mathbb{W}_n(k)$ -module, à savoir le complexe de de Rham

$$dR(A) := [m] \mapsto \Omega_{A_m/\mathbb{W}_n(k)}^*[-*],$$

où chaque $\Omega_{A_m/\mathbb{W}_n(k)}^*[-*]$ est muni de sa différentielle usuelle et de sa filtration de de Rham. Par normalisation on obtient un complexe filtré $N(dR(A)) \in \mathbf{dg}_{\mathbb{W}_n(k)}^{\text{fil}}$. La construction $A \mapsto N(dR(A))$ définit un ∞ -foncteur

$$N(dR(-)) : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathbf{dg}_{\mathbb{W}_n(k)}^{\text{fil}}.$$

Tout objet $A \in \mathcal{C}_n$ possède une augmentation $A \rightarrow \pi_0(A)$, où $\pi_0(A)$ est vu comme un objet simplicial constant. Le noyau de cette augmentation définit un idéal simplicial $I \subset A$. Soit $D(I)$ l'enveloppe à puissance divisé de I dans A , de sorte à ce qu'il existe un diagramme commutatif d'anneaux simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & D(I) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \pi_0(A). \end{array}$$

On sait que $D(I)$, en tant que A -algèbre, est muni d'une connexion plate dont on peut former le complexe de de Rham

$$dR(D(I)) : [m] \mapsto D(I_m) \otimes_{A_m} \Omega_{A_m/\mathbb{W}_n(k)}^*[-*].$$

L'objet $dR(D(I))$ est encore un objet simplicial dans $\mathbf{dg}_{\mathbb{W}_n(k)}^{\text{fil}}$: pour m fixé la différentielle de $D(I_m) \otimes_{A_m} \Omega_{A_m/\mathbb{W}_n(k)}^*$ est encore la différentielle de de Rham, et la filtration est la filtration de Hodge PD -adique de [Ber74, V-2.3.1], convolution de la filtration PD -adique sur $D(I_m)$ et la filtration de Hodge. On rappelle que le $(-i)$ -ème cran de cette filtration est donnée par le sous-complexe

$$I_m^{[i]} \rightarrow I_m^{[i-1]} \otimes_{A_m} \Omega_{A_m/\mathbb{W}_n(k)}^1 \rightarrow I_m^{[i-2]} \otimes_{A_m} \Omega_{A_m/\mathbb{W}_n(k)}^2 \rightarrow \dots,$$

où $I_m^{[k]}$ désigne la k -ème PD -puissance de I_m dans $D(I_m)$ (avec $I_m^{[k]} = D(I)$ pour tout $k \leq 0$). De même, on dispose de son normalisé $N(dR(D(I))) \in \mathbf{dg}_{\mathbb{W}_n(k)}^{\text{fil}}$, construction qui définit un second ∞ -foncteur

$$N(dR(D(-))) : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathbf{dg}_{\mathbb{W}_n(k)}^{\text{fil}}.$$

Or le morphisme naturel $A \rightarrow D(I)$ induit un morphisme sur les complexes de de Rham, qui est clairement compatible aux filtrations, et donc un morphisme de complexes filtrés sur les normalisés correspondants

$$N(dR(A)) \longrightarrow N(dR(D(I))).$$

Ce morphisme est clairement fonctoriel en A et donc définit une transformation naturelle de $N(dR(-))$ vers $N(dR(D(-)))$.

D'après [Ber74, V-2.3.2], tous les morphismes de transitions dans la direction simpliciale $dR(D(I_0)) \rightarrow dR(D(I_m))$ sont des quasi-isomorphismes filtrés, et $dR(D(I_0))$ est naturellement équivalent au complexe de cohomologie cristalline de $\pi_0(A)$. Ainsi, la projection naturelle de complexes filtrés

$$dR(D(I_0)) \longrightarrow N(dR(D(I)))$$

est en réalité un quasi-isomorphisme filtré. On obtient ainsi un diagramme de complexes filtrés, fonctoriels en A

$$N(dR(A)) \longrightarrow N(dR(D(I))) \longleftarrow dR(D(I_0)) \simeq C_{\text{crist}}^*(\mathbf{Spec} A/S_n),$$

et le second morphisme est une équivalence dans $\mathbf{dg}_{\mathbb{W}_n(k)}^{\text{fil}}$. En passant aux complétés le long des filtrations on trouve un morphisme

$$C_{dR}^*(\mathbf{Spec} A/S_n) = N(\widehat{dR(A)}) \longrightarrow \widehat{C}_{cris}^*(\mathbf{Spec} \pi_0(A)/S_n),$$

où le membre de droite est le complété du complexe de cohomologie cristalline de $\mathbf{Spec} \pi_0(A)$ pour la filtration de Hodge PD -adique. Ce morphisme est bien entendu fonctoriel en A . Cependant, il nous reste à voir que lorsque $\pi_0(A)$ est une k -algèbre lisse alors le morphisme de complétion

$$C_{cris}^*(\mathbf{Spec} \pi_0(A)/S_n) \longrightarrow \widehat{C}_{cris}^*(\mathbf{Spec} \pi_0(A)/S_n)$$

est une équivalence de complexes de $\mathbb{W}_n(k)$ -modules.

Lemme A.0.1. *Soit A une k -algèbre lisse et $X = \mathbf{Spec} A$. Alors, le morphisme obtenu par complétion le long de la filtration de Hodge PD -adique*

$$C_{cris}^*(X/S_n) \longrightarrow \widehat{C}_{cris}^*(X/S_n)$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve du lemme. On applique [Ber74, V-2.3.2] qui nous permet de calculer la cohomologie cristalline en choisissant n'importe quel plongement $X \hookrightarrow Y$ avec Y lisse sur S_n . On prend pour $Y = \mathbf{Spec} B$ un relèvement lisse de X à S_n (qui existe car X est affine), et $X \hookrightarrow Y$ l'inclusion de la fibre spéciale. Dans ce cas, $A \simeq B/\pi$, avec π une uniformisante dans $\mathbb{W}(k)$, et B est sa propre enveloppe à puissance divisé de (π) . Ainsi, la cohomologie cristalline de X sur S_n se calcule simplement par le complexe de de Rham de Y au-dessus de S_n . La filtration de Hodge PD -adique sur ce dernier est finie, et donc complète. $\square$

Nous avons donc construit le morphisme cherché: pour $A \in \mathcal{C}_n$, tel que $\pi_0(A)$ soit une k -algèbre lisse et de plus $\pi_i(A) \simeq 0$ pour $i > 0$, on trouve le morphisme cherché

$$\psi : C_{dR}^*(\mathbf{Spec} \pi_0(A)/S_n) \longrightarrow \widehat{C}_{cris}^*(\mathbf{Spec} \pi_0(A)/S_n) \simeq C_{cris}^*(\mathbf{Spec} \pi_0(A)/S_n).$$

REFERENCES

- [BB72] Paul Baum and Raoul Bott. Singularities of holomorphic foliations. *J. Differential Geometry*, 7:279–342, 1972.
- [Ber74] Pierre Berthelot. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* . Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [Bha12] Bhargav Bhatt. p -adic derived de rham cohomology. *arXiv:1204.6560*, 2012.
- [Bot70] Raoul Bott. On a topological obstruction to integrability. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVI, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 127–131. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [Gil81] Henri Gillet. Riemann-Roch theorems for higher algebraic K -theory. *Adv. in Math.*, 40(3):203–289, 1981.
- [Mou19] Tasos Moulinos. The geometry of filtrations. *arXiv:1907.13562*, 2019.
- [MRT19] Tasos Moulinos, Marco Robalo, and Bertrand Toën. A universal HKR theorem. *arXiv:1906.00118*, 2019.

- [Sim96] Carlos Simpson. Homotopy over the complex numbers and generalized de Rham cohomology. In *Moduli of Vector Bundles (Taniguchi symposium December 1994)*, volume 189 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pages 229–264. Dekker, 1996.
- [Toë02] Bertrand Toën. Vers une interprétation galoisienne de la théorie de l’homotopie. *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.*, 43(4):257–312, 2002.
- [Toë06] Bertrand Toën. Champs affines. *Selecta Math. (N.S.)*, 12(1):39–135, 2006.
- [Toë20] Bertrand Toën. La problème de la schématisation de grothendieck revisité. *arXiv:1911.05509*, 2020.
- [TV07] Bertrand Toën and Michel Vaquié. Moduli of objects in dg-categories. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(3):387–444, 2007.
- [TV08] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 193(902):x+224, 2008.
- [TV20a] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Algebraic foliations and derived geometry i: Riemann-hilbert. *arXiv:001.05450*, 2020.
- [TV20b] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Algebraic foliations and derived geometry ii: Grothendieck-riemann-roch. *arXiv:2007.09251*, 2020.
- [Wal79] Friedhelm Waldhausen. Algebraic K -theory of topological spaces. II. In *Algebraic topology, Aarhus 1978 (Proc. Sympos., Univ. Aarhus, Aarhus, 1978)*, volume 763 of *Lecture Notes in Math.*, pages 356–394. Springer, Berlin, 1979.