



**HAL**  
open science

# Une approche pour l'hybridation des réseaux de réductances et de l'équation de Laplace pour la modélisation des dispositifs magnétiques en trois dimensions

Sara Bazhar, Julien Fontchastagner, Nouredine Takorabet, Nicolas Labbe

► **To cite this version:**

Sara Bazhar, Julien Fontchastagner, Nouredine Takorabet, Nicolas Labbe. Une approche pour l'hybridation des réseaux de réductances et de l'équation de Laplace pour la modélisation des dispositifs magnétiques en trois dimensions. Symposium de Génie Electrique, Université de Lorraine [UL], Jul 2018, Nancy, France. hal-02981918

**HAL Id: hal-02981918**

**<https://hal.science/hal-02981918>**

Submitted on 28 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une approche pour l'hybridation des réseaux de réductances et de l'équation de Laplace pour la modélisation des dispositifs magnétiques en 3D

Sara. Bazhar<sup>1,2</sup>, Julien Fontchastagner<sup>1</sup>, Nouredine Takorabet<sup>1</sup>, Nicolas Labbe<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Lorraine - GREEN, 2, av. de la Forêt de Haye, 54516, Vandoeuvre lès Nancy, France

<sup>2</sup>Valeo Electrical Systems - St.-Quentin Fallavier, France

**RESUME** – Cet article traite du développement d'un modèle analytique de machines électriques en trois dimensions (3D). Il est basé sur l'hybridation d'un réseau de réductances et la résolution de l'équation de Laplace dans l'entrefer en 3D. Ce modèle est mis en œuvre pour la détermination des performances d'une machine à griffes à courant continu. L'avantage de cette démarche réside dans la suppression des connectivités entre les réseaux de perméances statoriques et rotoriques et de faciliter ainsi la modélisation de la rotation des machines électriques. Cette démarche donne des résultats satisfaisants dans des temps de calculs très raisonnables comparés à l'usage d'un code de calcul par éléments finis en trois dimensions.

**Mots-clés**—Machine à griffes, Modèles analytiques hybrides, Equation de Laplace, Réseaux de perméances.

## 1. INTRODUCTION

Plusieurs applications industrielles utilisent des machines électriques spéciales ne pouvant pas être modélisées en deux dimensions. Les machines à flux axial ou à griffes en sont des exemples classiques bien connus. Le recours à la méthode des éléments finis en trois dimensions nécessite des puissances de calculs importantes et conduit à alourdir les modèles. Dans les problèmes d'optimisation géométrique des machines électriques à caractère tridimensionnel sous fortes saturation, il est nécessaire de réduire le temps de calcul tout en gardant une bonne précision.

Dans la littérature scientifique récente, des modèles analytiques basés sur la résolution de l'équation de Laplace dans l'entrefer ont été proposés pour le dimensionnement des machines électriques. Ces modèles ont été développés pour des machines en 2D et également pour des machines 3D et pour différentes structures [1-4]. Ces modèles sont rapides, mais ont l'inconvénient de considérer le fer infiniment perméable. L'utilisation de réseaux de perméances tient compte de la saturation si le circuit magnétique est bien modélisé à partir d'un trajet *a priori* des tubes de flux. Cette méthode est spécialement dans adaptée dispositifs dont le caractère tridimensionnel est très prononcé [6-7]. Cependant, la modélisation du mouvement du rotor est difficile car elle nécessite une restructuration des connectivités stator-rotor ou alors la définition d'un réseau complexe dans l'entrefer.

Cet article est consacré au développement d'un modèle

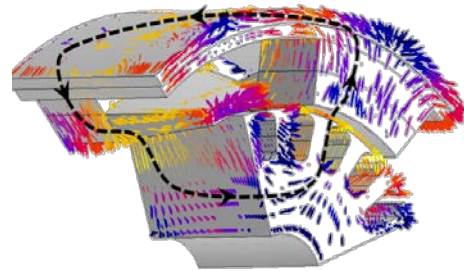


Fig. 1. Illustration en 3D de la machine à courant continu à griffes

permettant de découpler l'entrefer, qui est une région non saturable, des régions ferromagnétiques saturable dans le but de simplifier la mise en œuvre. Un modèle hybride utilisant le même principe a été développé en deux dimensions et appliqué à une machine à courant continu utilisée comme démarreur renforcé dans une application automobile Stop-Start [7] ou dans le cas d'une machine linéaire à aimants permanents [8]. Dans le même cadre, une nouvelle topologie de machine électrique à courant continu est proposée. Elle consiste à remplacer l'inducteur bobiné à  $p$  paires de pôles par une seule bobine circulaire munie de deux demi-stators à griffes sur le même principe de l'alternateur à griffes utilisé dans les véhicules automobiles (Fig. 1). Cette topologie étant purement tridimensionnelle, nous nous proposons d'établir un modèle hybride en trois dimensions, basé sur la résolution de l'équation de Laplace dans l'entrefer et la modélisation par réseaux de perméances dans le stator et le rotor.

## 2. PRINCIPE DE LA METHODE

Dans un but de simplification, dans un premier temps nous présentons le principe de la méthode à l'aide d'un schéma en deux dimensions (Fig. 2). Une machine électrique peut généralement être décomposée en trois régions (sous-domaines) :

- Le premier sous-domaine contient l'ensemble des parties fer et air du stator. Ce domaine est modélisé par un réseau de réductance.
- Le deuxième sous-domaine contient l'entrefer. Dans ce sous-

domaine, on résout l'équation de Laplace.

- Le troisième sous-domaine contient l'ensemble des parties fer et air du rotor et est modélisé par un réseau de réductances. La position relative du rotor par rapport au stator est notée  $\alpha$ .

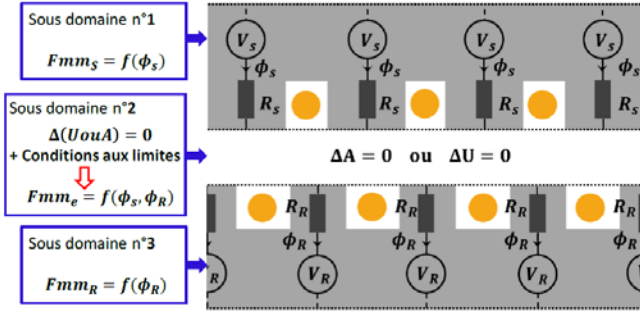


Fig. 2. Définition des trois sous-domaines et principe de l'hybridation de réseaux de réductance avec la résolution analytique de l'équation de Laplace dans l'entrefer

Pour relier ces trois sous domaines et leurs modèles associés, il faut alors réaliser un couplage fort entre eux. Pour cela, une solution consiste à résoudre l'équation de diffusion du champ magnétique analytiquement et d'en déduire les grandeurs physiques qui permettent le couplage des deux réseaux de perméances représentant le stator et le rotor. D'une manière générale, si l'on souhaite déterminer les flux dans les branches statoriques et rotoriques, de ce schéma, nous résolvons une équation de la forme :

$$V_s = R_s \phi_s + F_s \quad (1)$$

$$V_r = R_r \phi_r + F_r \quad (2)$$

où :

- $V_s$  et  $V_r$  représentent les forces magnétomotrices (FMMs) statoriques et rotoriques.
- $F_s$  et  $F_r$  représentent les forces magnétomotrices d'entrefer vues du stator ou du rotor respectivement.
- $\phi_s$  et  $\phi_r$  représentent les flux dans les branches au stator et au rotor.
- $R_s$  et  $R_r$  représentent les réductances des circuits magnétiques au stator et au rotor.

Ce modèle simplifié peut être représenté par le schéma de la Fig. 3, ci-dessous, où l'on remarque que les branches statoriques et rotoriques ont un point de référence commun noté  $P_0$ .

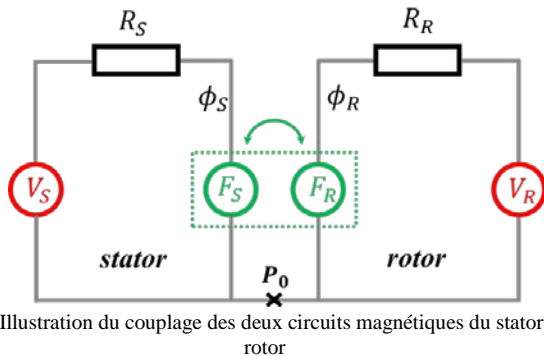


Fig. 3. Illustration du couplage des deux circuits magnétiques du stator et du rotor

La détermination des FMMs  $F_s$  et  $F_r$  peut être mise en œuvre par un calcul du champ dans l'entrefer en utilisant la résolution de l'équation de Laplace. Ces FMMs peuvent être écrites en fonction des flux statoriques et rotoriques sous la forme :

$$F_s = K_{ss} \phi_s + K_{sr} \phi_r \quad (3)$$

$$F_r = K_{rs} \phi_s + K_{rr} \phi_r \quad (4)$$

Les termes  $K_{ss}$ ,  $K_{rr}$ ,  $K_{sr}$  et  $K_{rs}$  sont des coefficients correspondants à une réductance et doivent être déterminés par l'exploitation du calcul de champ dans l'entrefer.

Dans le cadre de cet article, la détermination de la répartition du champ dans l'entrefer est effectuée analytiquement par la méthode de séparation de variables. On s'affranchit de la complexité de la modélisation de la rotation avec un ensemble de réductances qui alourdissent la matrice globale du système. Dans ce cas, le modèle permet de prendre en compte une rotation de  $360^\circ$  mécanique sans trop de difficultés. Le principe de ce modèle est illustré à travers l'exemple d'une machine électrique en deux dimensions, présentée sur la Fig. 4. De la même façon il peut s'appliquer pour le cas d'un modèle tridimensionnel.

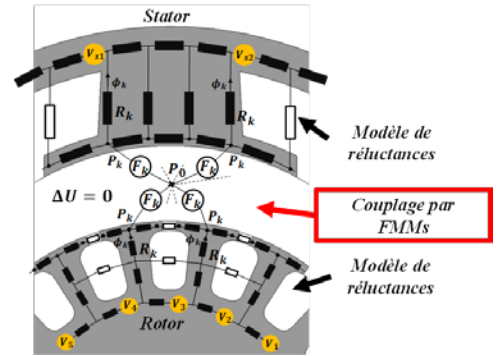


Fig. 4. Principe du couplage des réseaux par des FMM d'entrefer (en 2D)

### 2.1. Equation de Laplace dans l'entrefer

L'équation de Laplace dans l'entrefer est écrite en coordonnées cylindriques sous la forme :

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

En considérant que le potentiel scalaire  $U$  peut être projeté sur une base de fonctions  $U_n(r, \theta, z) = R_n(r) \cdot \Theta_n(\theta) \cdot Z_n(z)$ , nous pouvons transformer l'équation (5) pour obtenir trois équations indépendantes (6) permettant ainsi la mise en œuvre de la méthode de séparation des variables.

$$\begin{cases} r \frac{\partial R(r)}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - (\lambda r^2 + k) R(r) = 0 \\ \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + k \Theta(\theta) = 0 \\ \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \lambda Z(z) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

avec :

$$\begin{cases} k = \omega_1 n_1 \\ \lambda = \omega_2 n_2 \end{cases} \quad (7)$$

La solution générale est épurée des termes naturellement nuls pour des raisons de simplification. Elle est mise sous forme spectrale et tronquée à un ordre  $N_h$  suffisamment élevé.

$$U(r, \theta, z) = \sum_{\substack{n_1=-N_h \\ n_1 \neq 0}}^{N_h} \sum_{\substack{n_2=-N_h \\ n_2 \neq 0}}^{N_h} \left( C_{1n_1 n_2} I_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r) + C_{2n_1 n_2} K_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_1 n_2| r) \right) e^{i \omega_1 n_1 \theta} e^{i \omega_2 n_2 z} \quad (8)$$

où  $I$  et  $K$  sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces respectivement. Les coefficients  $C_{1n_1n_2}$  et  $C_{2n_1n_2}$  doivent être déterminés en utilisant les conditions de passage entre les domaines. Ces conditions traduisent la conservation du flux dans un même tube de flux et par conséquent la continuité de la composante normale de l'induction à l'interface entre deux domaines.

Les conditions de passage entre les différents sous domaines, nécessitent une définition de surfaces entre les deux domaines de telle façon à avoir une induction que l'on considère homogène. Le domaine de l'entrefer est une sorte de cylindre englobant tout l'air séparant le stator et le rotor. Ses surfaces intérieure et extérieure sont en contact avec les éléments du stator et du rotor respectivement. La surface supérieure de l'entrefer est en vis-à-vis avec des griffes de forme trapézoïdales et dans certaines régions avec l'air (espace inter-griffes). Si l'on développe cette surface dans le plan  $(r_s, \theta, z)$ , on obtient la représentation de la Fig. 5. Cette surface, notée  $\partial_{air-gap}^{top} = (r_s, \theta, z)$  fait apparaître les formes des griffes. Elle est décomposée en un nombre de surfaces élémentaires de forme rectangulaire ou trapézoïdale pour coller au mieux à la forme géométrique des griffes. Sur chacune de ses surfaces élémentaires, il est donc nécessaire d'exprimer le flux radial  $\phi_k = \mu_0 H_k(r_s, \theta, z) S_k$ , et l'utiliser pour mettre en œuvre le raccordement avec le circuit réductant d'en face.

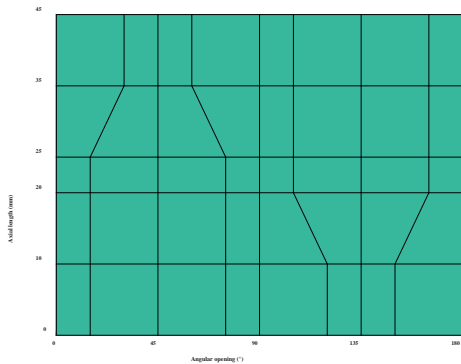


Fig. 5. Représentation graphique de la surface d'intersection entre l'entrefer et le domaine rotorique utilisée pour les conditions de passage.

La Fig. 5 montre une vue de dessus, de la surface développée de l'entrefer mettant ainsi en évidence les différentes sections auxquelles sont raccordées les réductances du stator. Les réductances montrées dans ce schéma de principe sont classées en deux catégories et représentées en deux couleurs. Les réductances qui représentent des pièces ferromagnétiques (griffes) en noir et celles qui représentent l'espace inter-griffes en bleu. Les griffes ont des formes irrégulières mais elles ont une forme générique identique trapézoïdale. La surface d'une griffe est donc découpée en plusieurs secteurs qui peuvent être rectangulaires, triangulaires ou trapézoïdaux. Le nombre de secteurs dépend de la densité de maillage en réductance considéré dans les réseaux de réductances statoriques et rotoriques.

Notons que dans cette démarche une hypothèse forte sera prise. Elle considère que les flux sont radiaux et par conséquent la composante tangentielle du champ est négligée. Cette hypothèse peut être bien vérifiée sur les surfaces ferromagnétiques mais reste un peu forte lorsqu'il s'agit des espaces inter-griffes. En d'autres termes, on négligera les flux de fuite inter-griffes dans ce modèle.

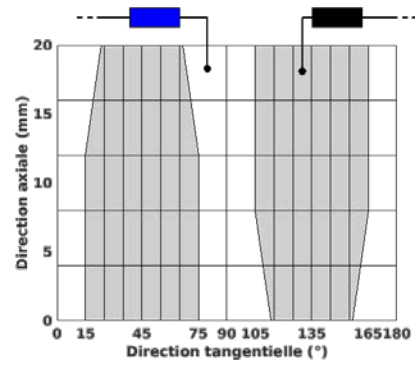


Fig. 6. Vue développée de l'interface entrefer-stator à griffes et définition des tubes de flux pour les conditions de passages

## 2.2. Mise en œuvre des conditions de passage :

La décomposition spectrale des conditions aux frontières de l'entrefer s'exprime de la même façon que le potentiel scalaire, afin de pouvoir trouver les coefficients inconnus  $C_{1n_1n_2}$ ,  $C_{2n_1n_2}$ , avec une simple égalisation de la composante normale du champ magnétique. Chaque élément du modèle réductant donne une composante normale du champ  $H$  qui s'exprime sous forme :

$$H_k(r_s, \theta, z) = \sum_{n_1=-N_h}^{N_h} \sum_{n_2=-N_h}^{N_h} h_{kn_1n_2} e^{i\omega_1 n_1 \theta} e^{i\omega_2 n_2 z} \quad (9)$$

avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les coefficients de la périodicité du champ magnétique  $H$  dans l'entrefer respectivement selon les directions  $\theta$  et  $z$ . Le potentiel  $U$  est périodique selon les deux directions, ce qui donne donc :

$$\begin{cases} \omega_1 = p \\ \omega_2 = 2\pi/L_z \end{cases} \quad (10)$$

avec  $p$  le nombre de paires de pôles et  $L_z$  la longueur axiale de la machine. Ceci permet d'exprimer le coefficient  $h_{kn_1n_2}$  en fonction du flux  $\phi_k$  grâce à l'équation :

$$h_{kn_1n_2} = \frac{p \phi_k}{2 \pi i L_z \mu_0 S_k} \int_0^{L_z} \int_0^{2\pi/p} e^{-i\omega_1 n_1 \theta} e^{-i\omega_2 n_2 z} d\theta dz \quad (11)$$

Cette forme générique des coefficients  $h_{kn_1n_2}$  doit être appliquée à chaque éléments de surface des interfaces entrefer-stator ou entrefer-rotor ; le cas de la surface rotorique étant plus simple évidemment. D'une manière générale, chaque élément de surface est défini par les coordonnées de ses quatre sommets. En se référant à la Fig. 6, on notera que l'on peut avoir plusieurs formes possibles. Les quatre sommets sont repérables par les coordonnées  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $z_1$  et  $z_2$  comme illustré sur la Fig. 7. Ainsi, l'équation (11) devient :

$$h_{kn_1n_2} = \frac{p \phi_k}{2 \pi i L_z \mu_0 S_k} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-i\omega_1 n_1 \theta} e^{-i\omega_2 n_2 z} d\theta dz \quad (12)$$

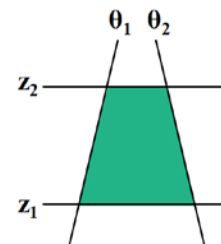


Fig. 7. Définition générique des surfaces de raccordement

Cette démarche est donc appliquée à tous les éléments de surface sur les deux interfaces considérées. Ainsi, nous obtenons une relation linéaire entre les flux  $\phi_s$ ,  $\phi_r$  est les coefficients  $h_{kn_1n_2}$ .

Le champ magnétique normal  $H_n$  total sur les deux interfaces peut être exprimé comme la somme des différents champs élémentaires  $H_k(r, \theta, z)$  précédemment définis dans (9) appliqués au niveau des rayons  $r_s$  et  $r_r$  des interfaces considérées :

$$H_s(r_s, \theta, z) = \sum_{k=1}^{N_s} H_k(r_s, \theta, z) \quad (13)$$

$$H_r(r_r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{N_r} H_k(r_r, \theta, z) \quad (14)$$

Afin de trouver l'expression des différents  $C_{1n_1n_2}$  et  $C_{2n_1n_2}$ , nous égalisons tout simplement l'expression de la composante normale du champ magnétique  $H$  obtenue ci-dessus avec celle issue de la dérivation du potentiel scalaire (8). Soit alors :

$$H_s(r_s, \theta, z) = -grad(U(r_s, \theta, z)) \cdot \vec{u}_r \quad (15)$$

$$H_r(r_r, \theta, z) = -grad(U(r_r, \theta, z)) \cdot \vec{u}_r \quad (16)$$

La combinaison de l'ensemble des équations (13-16) permet d'exprimer les coefficients  $C_{1n_1n_2}$  et  $C_{2n_1n_2}$  en fonction des flux  $\phi_s$ ,  $\phi_r$

Afin de vérifier la justesse de ces coefficients, nous avons utilisé les expressions des coefficients ainsi calculés pour tracer l'induction normale sous les griffes obtenues à un coefficient multiplicateur près. Les expressions reproduisent exactement la formes des griffes considérées dans les intégrales (11) et (12) avec des signes opposés pour les inductions de deux griffes adjacentes Fig. 8.

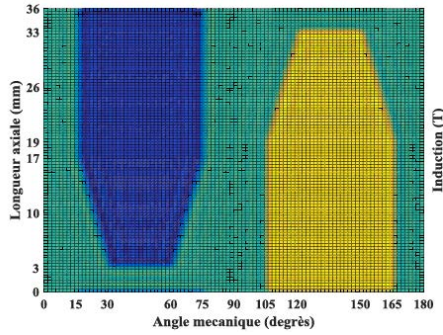


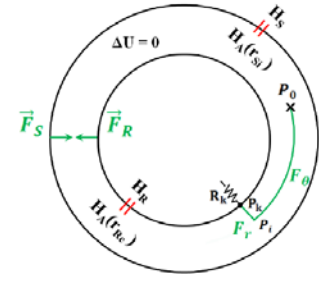
Fig. 8. Allure de l'induction normale d'entrefer sur la surface de raccordement (calculée avec la dérivation du potentiel scalaire  $U(r_s, \theta, z)$ )

### 2.3. Forces magnétomotrices d'entrefer

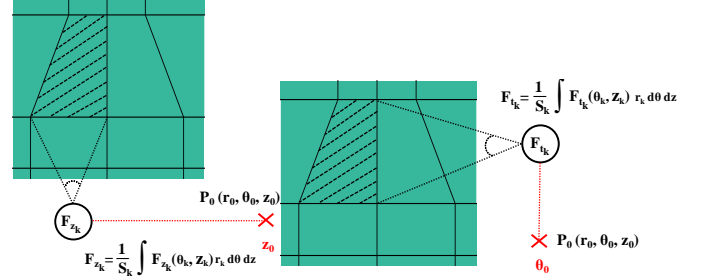
On définit un ensemble de forces magnétomotrices dans l'entrefer exprimées en fonction du potentiel scalaire magnétique défini dans l'équation (8). Celles-ci sont connectées aux différents nœuds à la frontière de l'alésage statorique et de la surface rotorique par les conditions de passages. Un potentiel de référence  $P_0$  est arbitrairement pris dans l'entrefer (Fig. 4). Chaque force magnétomotrice  $F_k$  peut être calculée par la circulation du champ  $H$  le long d'un chemin reliant le nœud  $k$  au point de référence  $P_0$ . Une manière aisée de l'évaluer consiste à effectuer les circulations sur trois chemins orthogonaux de sorte que :

$$F_k = \int_{P_k}^{P_0} H(r, \theta, z) \cdot dl = F_{nk} + F_{tk} + F_{zk} = - \int_{r_k}^{r_0} \frac{\partial U(r, \theta, z_k)}{\partial r} dr - \int_{\theta_k}^{\theta_0} \frac{\partial U(r_0, \theta, z_k)}{\partial \theta} r_0 d\theta - \int_{z_k}^{z_0} \frac{\partial U(r_0, \theta_0, z)}{\partial z} dz \quad (17)$$

Nous présentons sur la Fig. 9 (a) une illustration graphique en deux dimensions de ce calcul. La Fig. 9 (b) montre la généralisation de ce calcul au cas tridimensionnel incluant la circulation dans l'axe  $z$



(a) Exemple en 2D



(b) Cas du 3D

Fig. 9. Principe de décomposition du calcul des FMMs d'entrefer

Ces forces magnétomotrices sont exprimées sous forme spectrale jusqu'à l'ordre  $N_h$ . Les expressions exactes des trois termes de la force magnétomotrice sont données par :

$$F_{nk} = - \sum_{n_1=-N_h}^{N_h} \sum_{n_2=-N_h}^{N_h} \left( C_{1n_1n_2} \left( I_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r_0) - I_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r_k) \right) + C_{2n_1n_2} \left( K_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r_0) - K_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r_k) \right) \right) e^{i\omega_1 n_1 \theta_k} e^{i\omega_2 n_2 z_k} \quad (18)$$

$$F_{tk} = - \sum_{n_1=-N_h}^{N_h} \sum_{n_2=-N_h}^{N_h} \left( C_{1n_1n_2} I_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r_0) + C_{2n_1n_2} K_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r_0) \right) \left( e^{i\omega_1 n_1 \theta_0} - e^{i\omega_1 n_1 \theta_k} \right) e^{i\omega_2 n_2 z_k} \quad (19)$$

$$F_{zk} = - \sum_{n_1=-N_h}^{N_h} \sum_{n_2=-N_h}^{N_h} \left( C_{1n_1n_2} I_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r_0) + K_{|\omega_1 n_1|}(|\omega_2 n_2| r_0) \right) e^{i\omega_1 n_1 \theta_0} \left( e^{i\omega_2 n_2 z_0} - e^{i\omega_2 n_2 z_k} \right) \quad (20)$$

Les différentes FMMs calculées par la relation ci-dessus sont rangées dans les vecteurs  $F_s$  et  $F_r$  définis dans les équations (3) et (4). Ainsi, l'utilisation de cette définition ainsi que la connaissance des coefficients  $C_{1n_1n_2}$  et  $C_{2n_1n_2}$  en fonction des flux  $\phi_s$ ,  $\phi_r$  précédemment établies permettent d'exprimer les FMMs  $F_s$  et  $F_r$  en fonction des flux  $\phi_s$ ,  $\phi_r$ . Les termes  $K_{ss}$ ,  $K_{rr}$ ,  $K_{sr}$  et  $K_{rs}$  introduits dans les équations (3) et (4) sont donc déterminés, permettant ainsi le couplage des champs au niveau des interfaces statoriques et rotoriques.

Cette définition permet de relier les équations locales dans l'entrefer avec les équations de type « circuit » dans le stator et le rotor.

### 3. VALIDATION DU MODELE

Pour valider ce modèle, nous considérons le cas d'une machine à griffes en trois dimensions. Afin de réduire la taille du modèle et faciliter son implémentation, nous considérons une machine symétrique ayant un nombre pair d'encoches. Ainsi,

nous avons donc pris comme exemple une machine à 4 pôles au stator et 20 encoches au rotor. Cette machine est dimensionnée pour servir de démarreur dans une application automobile Stop-Start [9-10]. La machine est modélisée en utilisant un code de calcul commercial en trois dimensions (Flux3D – Cedrat). La Fig. 10 montre la carte de la norme de l'induction pour un point de fonctionnement avec un fort niveau de saturation. L'induction dans les dents rotoriques est de l'ordre de 2T pour un matériau ayant son code de saturation vers 1,6 T. Le modèle hybride est mis en œuvre dans les mêmes conditions de fonctionnements.

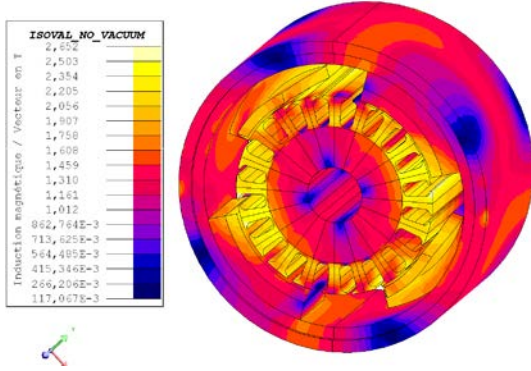


Fig. 10. Carte d'induction (norme) sur un exemple d'une machine 4 pôles au stator et 20 encoches au rotor

Pour illustrer l'importance et l'influence de certaines hypothèses prises lors de la construction de ce modèle, nous avons simulé par éléments finis une situation non physique qui permet d'éliminer les fuites inter-griffes. Pour ce faire, il suffit de considérer que l'air situé dans les espaces inter-griffes à une perméabilité relative très inférieure à celle de l'air ( $\mu_r \ll 1$ ). C'est un cas théorique qui servira pour comparer les résultats entre les deux modèles. Le cas réel est évidemment celui où l'air est simulé avec une perméabilité relative ( $\mu_r = 1$ ).

La Fig. 11 représente l'induction à vide (inducteur seul) pour un courant de 400 A, tracée sur un demi-cercle au niveau du rayon interne du stator et au milieu de la longueur  $L_z$  ( $z = L_z/2$ ). Elle montre une bonne cohérence entre les inductions obtenues par le modèle hybride et celle obtenue par éléments finis 3D indépendamment de la valeur de la perméabilité de l'aire inter-griffes. Ce test est fait pour différentes autres positions le long de l'axe  $z$  ( $z = [0, L_z]$ ). La concordance des courbes est toujours observée. Dans ces conditions, on comprend direction. bien que l'induction est globalement radiale car le fer n'est pas très saturé.

Sur les Fig. 12 (a) et Fig. 12 (b), nous traçons l'induction radiale au milieu de l'entrefer en charge ( $I = 1000 A$ ) pour deux positions axiales : ( $z = 0$  et  $z = L_z/2$ ). On remarque une bonne concordance avec le modèle théorique ( $\mu_r \ll 1$ ) dans les deux cas, mais il commence à y avoir une distorsion au niveau des extrémités ( $z = 0$ ) au niveau des pointes des griffes. Ces zones sont caractérisées par un fort taux de la composante tangentielle du champ qui n'est pas prise en compte dans le modèle. Le tracé des composantes tangentielles dans les mêmes conditions confirme ces résultats (Fig. 13 (a) et Fig. 13 (b)).

Par ailleurs, nous avons tracé l'induction en charge (inducteur et induit) dans les mêmes conditions (Figure 10.b). Nous constatons bien l'effet de la réaction magnétique de l'induit qui crée un champ tangentiel qui est bien pris en compte par le modèle hybride. Nous traçons sur la figure 11 les composantes normales et tangentielles de l'induction

Nous continuons le développement du modèle pour déterminer le couple électromagnétique développée par la machine.

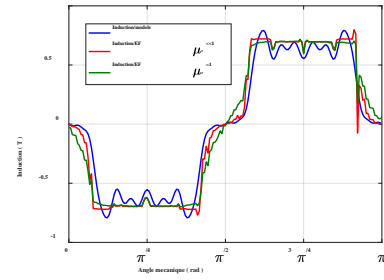
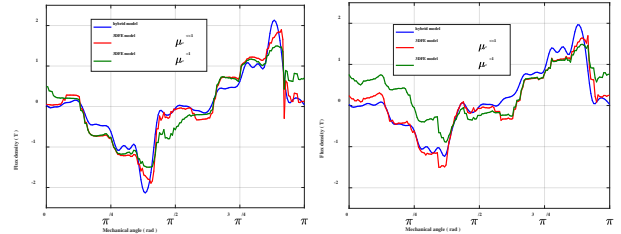
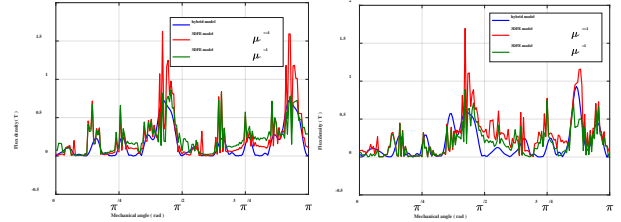


Fig. 11. Induction normale à vide au milieu de l'entrefer I=400A



(a) position  $z = L_z/2$  (b) position  $z = 0$

Fig. 12. Induction normale en charge au milieu de l'entrefer pour deux positions axiales



(a) position  $z = L_z/2$  (b) position  $z = 0$

Fig. 13. Induction tangentielle en charge au milieu de l'entrefer pour deux positions axiales

### 3.1. Calcul du couple

La détermination de la répartition du champ dans la machine sous forme spectrale permet de calculer le couple par le tenseur de contraintes de Maxwell. L'expression générale du couple est donnée par :

$$\Gamma = \mu_0 R_m^2 \int_0^{L_z} \int_0^{2\pi} H_n \cdot H_t \, d\theta \, dz \quad (21)$$

où  $R_m$  est le rayon d'une surface cylindrique passant dans l'entrefer entourant le rotor.

L'expression du potentiel scalaire permet d'obtenir les expressions des inductions normales et tangentielles de l'induction d'entrefer sur une surface cylindrique passant dans l'entrefer.

$$H_n(R_m, \theta, z) = \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{R_m} = \sum_{\substack{n_2 = -N_h \\ n_2 \neq 0}}^{N_h} \sum_{\substack{n_1 = -N_h \\ n_1 \neq 0}}^{N_h} \left( C_1 n_1 n_2 \frac{\partial I_{|n_1 \omega_1|}(|n_2 \omega_2| r)}{\partial r} \Big|_{R_m} + C_2 n_1 n_2 \frac{\partial K_{|n_1 \omega_1|}(|n_2 \omega_2| r)}{\partial r} \Big|_{R_m} \right) e^{i\omega_1 n_1 \theta} e^{i\omega_2 n_2 z} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
H_t(R_m, \theta, z = 0) &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{R_m} \\
&= \sum_{\substack{n_2=-N_h \\ n_2 \neq 0}}^{N_h} \sum_{\substack{n_1=-N_h \\ n_1 \neq 0}}^{N_h} \left( C_1 n_1 n_2 I_{|n_1 \omega_1|}(|n_2 \omega_2| R_m) + \right. \\
&\quad \left. C_2 n_1 n_2 K_{|n_1 \omega_1|}(|n_2 \omega_2| R_m) \right) \frac{i \omega_1 n_1}{R_m} e^{i \omega_1 n_1 \theta} e^{i \omega_2 n_2 z} \quad (23)
\end{aligned}$$

L'orthogonalité de la base des fonctions utilisées permet d'affirmer que l'intégrale sur  $2\pi$  des différents termes est non nulle si et seulement si l'exposant de l'exponentielle est nul.

Ainsi, l'expression du couple est réduite à une somme faisant intervenir uniquement les différents coefficients :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \mu_0 \left( \sum_{\substack{n_2=-N_h \\ n_2 \neq 0}}^{N_h} \sum_{\substack{n_1=-N_h \\ n_1 \neq 0}}^{N_h} n_1 \omega_1 \cdot \left( C_1 n_1 n_2 \frac{\partial I_{|n_1 \omega_1|}(|n_2 \omega_2| r)}{\partial r} \Big|_{R_m} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. C_2 n_1 n_2 \frac{\partial K_{|n_1 \omega_1|}(|n_2 \omega_2| r)}{\partial r} \Big|_{R_m} \right) \cdot \left( C_1 n_1 n_2 I_{|n_1 \omega_1|}(|n_2 \omega_2| R_m) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. C_2 n_1 n_2 K_{|n_1 \omega_1|}(|n_2 \omega_2| R_m) \right) \right) 2\pi R_m L_z \quad (24)
\end{aligned}$$

Ainsi ce modèle permet de déterminer la caractéristique externe  $\Gamma(I)$  de cette machine spéciale qui se comporte globalement comme une MCC à excitation série (Fig. 14). Cette figure montre une très bonne concordance en termes de valeur moyenne du couple en fonction du courant dans le cas où les fuites inter-griffes sont faibles ou inexistantes. Ce résultat montre que le modèle nécessite la prise en compte des flux de fuites. Par ailleurs, la validation sous ces conditions ( $\mu_r \ll 1$ ) montre que le principe du modèle hybride est validé. Ce modèle a donc permis de lever les difficultés liées à l'aspect 3D de la machine et aux multiples connections entre le réseau de réductances statoriques et rotoriques.

Il reste à comparer les formes d'ondes instantanée du couple sur une période. Il suffit de calculer l'évolution du couple sur une période d'ondulation par les deux modèles. La Fig. 15 montre les deux formes d'ondes obtenues par les deux modèles qui sont sensiblement identiques à un déphasage près. Notons que cette courbe a été donnée pour une valeur du courant maximale (1000 A) pour laquelle la machine est très saturée. C'est le dernier point des courbes données sur la Fig. 14.

#### 4. CONCLUSIONS

Un modèle hybride combinant la résolution de l'équation de Laplace en 3D et un réseau de réductance a été développé dans cet article. Il a été appliqué à une machine à griffes à courant continu. Son avantage consiste dans la prise en compte la rotation du rotor sur  $360^\circ$  sans difficulté et avec un seul modèle. La comparaison des grandeurs locales et globales dans l'entrefer permet de démontrer la précision du modèle par rapport aux modèles éléments finis 3D. Ce modèle permet donc d'obtenir des résultats suffisamment précis par rapport à la méthode éléments finis 3D avec des temps de simulation très raisonnables.

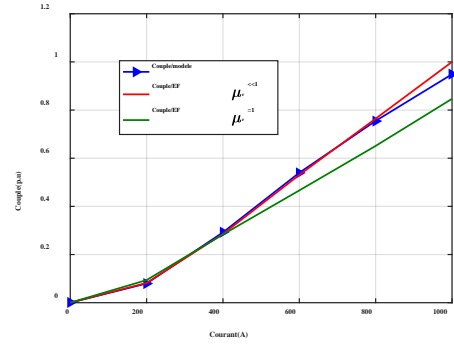


Fig. 14. Caractéristique couple-courant par différents modèles

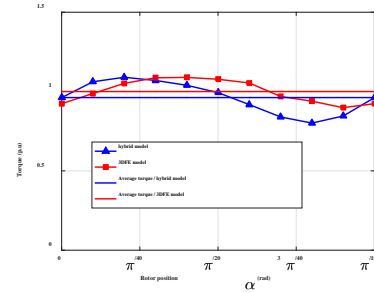


Fig. 15. Couple instantané sur une période – comparaison des deux modèles

#### 5. REFERENCES

- [1] T. Lubin, Contribution à la modélisation analytique des actionneurs électromécaniques, 2016: Habilitation à diriger des Recherches, Université de Lorraine.
- [2] T. Lubin, S. Mezani et A. Rezzoug, «Simple analytical expressions for the force and torque of axial magnetic couplings,» IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 27, n°12, pp. 536-546, Juin 2012.
- [3] Y. Amara et G. Barakat, «Analytical modeling of magnetic field in surface mounted permanent magnet tubular linear machines,» IEEE Trans. Magn, vol. 46, n° %111, pp. 3870-3884, Nov. 2010.
- [4] Y. Amara et G. Barakat, «Analytical modeling of magnetic field in surface mounted permanent magnet tubular linear machines,» IEEE Trans. Magn, vol. 46, n° %111, pp. 3870-3884, Nov. 2010.
- [5] L. Albert, Modélisation et optimisation des alternateurs à griffes, application au domaine automobile, Institut Nationale Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [6] F. Zhang, G. Liu, H. Bai et W. Bo, «Performance analysis and experimental research on multi-section claw pole machine with outer PM rotor,» chez International Conference on Electrical Machines and Systems, Beijing, 2011.
- [7] S. Bazhar, J. Fontchastagner, N. Takorabet, N. Labbe, "Hybrid Analytic Model coupling Laplace's Equation and reluctance Network for electric Machines", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 53, no. 6, June 2017.
- [8] Y. Laoubi, M. Dhifli, G. Verez, Y. Amara et G. Barakat, «Open Circuit Performance Analysis of a Permanent Magnet Linear Machine Using a New Hybrid Analytical Model,» IEEE Transactions on Magnetics, vol. 51, no.S13, pp. 1-4, March 2015.
- [9] S. Bazhar, "Modélisation, Optimisation en vue du dimensionnement d'une nouvelle structure de démarreurs à griffes pour les véhicules micro-hybrides", Thèse de Doctorat de l'université de Lorraine, juillet 2012.
- [10] S. Bazhar, B. Ristagno, J. Fontchastagner, N. Takorabet, N. Labbe, "New Topology of Direct Current Claw-Pole machines for Stop&Start application", The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL) (in Press)