



HAL
open science

L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration

Nicolas Balacheff

► **To cite this version:**

Nicolas Balacheff. L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. XXVIe Colloque CORFEM, Jun 2019, Strasbourg, France. hal-02981131

HAL Id: hal-02981131

<https://hal.science/hal-02981131>

Submitted on 27 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'ARGUMENTATION MATHÉMATIQUE
PRÉCURSEUR PROBLÉMATIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Nicolas Balacheff¹

Résumé. Ce texte reprend l'exposé prononcé lors du colloque CORFEM 2019. Une première partie contribue à préciser les termes *expliquer, argumenter, prouver, démontrer* et leurs relations. La seconde partie souligne l'importance du lien entre conceptions et argumentation. La troisième, à propos des preuves empiriques, aborde la question du rôle du langage. Enfin, le retour sur les situations de validation permet de poser le problème de l'argumentation mathématique sur lequel se conclut l'exposé.

Introduction

Un problème : l'argumentation

« On vient toujours à l'argumentation avec un savoir substantiel de "ce qu'est" l'argumentation », remarque Christian Plantin (1996, p. 25) dans le cours de son introduction d'une synthèse dans laquelle il met en perspective les diverses approches de ce concept. Outre les usages communs qui contribuent à la diversité des acceptions de ce mot, plusieurs disciplines contribuent à sa signification telles la philosophie, l'épistémologie, la logique, les sciences cognitives, les sciences du langage et même l'intelligence artificielle. Pour le sujet qui m'occupe aujourd'hui, celui de *l'apprentissage de la preuve dans le contexte de la classe de mathématique*, je retiendrai principalement l'apport des sciences du langage sans toutefois me priver de recourir à d'autres disciplines lorsque leurs apports peuvent contribuer à la compréhension et la résolution des problèmes que nous nous posons.

Il n'y a pas, au sein même des sciences du langage, une problématique unique de l'argumentation, mais une diversité d'approches qui diffèrent substantiellement bien que sans frontières infranchissables (ibid. p. 12 sqq.). Aussi convient-il, avant d'utiliser ce mot, d'en préciser le sens aussi précisément que possible. Il ne s'agit pas de faire œuvre de linguiste, mais de disposer d'une caractérisation efficace pour avancer sur les questions que nous nous posons sans créer de conflit insurmontable avec les sciences du langage ; il s'agit de circonscrire l'objet de l'étude pour en permettre une certaine théorisation, en reprenant les mots de Christian Plantin (ibid. p. 27).

Le terme argumentation désigne dans l'usage commun à la fois l'action d'argumenter et, par extension, son produit. Le processus associé est celui de la manipulation d'objets et de relations par le moyen d'un langage et dans le cours d'une interaction actuelle ou potentielle entre des protagonistes qui cherchent à s'assurer de la validité d'un énoncé cible ou, au contraire, s'opposent et confrontent leurs positions. Pour faire la part du processus et du produit, je retiendrai l'usage du verbe « argumenter » pour évoquer le premier, et le substantif « argumentation » pour le second. Cette distinction sera respectée autant que possible, mais il se peut qu'elle ne le soit pas lorsqu'il est question de travaux dont les usages sont différents, le contexte devrait suffire à écarter les confusions.

¹ Laboratoire d'informatique de Grenoble - Université Grenoble Alpes CNRS

Plus précisément, puisant dans les synthèses de Christian Plantin (1990, 1996), je retiendrai la caractérisation suivante :

- L'argumentation est un discours
 - Orienté : il vise la validité d'un énoncé ;
 - Critique : il analyse, soutient et défend ;
 - Intentionnel : il cherche à modifier un jugement ;
- Argumenter est un processus
 - Qui instrumente le langage ;
 - Qui change la valeur épistémique d'un énoncé ;
 - Qui modifie le rapport à la connaissance ;
 - Qui structure la socialisation ;

Un cadre : l'institution

La problématique de la validation, fondatrice de la culture scientifique et citoyenne, traverse toute la scolarité obligatoire. Elle occupe une place particulière dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques (Balacheff, 2019, p. 424-427). Le rapport remis au gouvernement français en février 2018 l'affirme très clairement :

« la notion de preuve est au cœur de l'activité mathématique, quel que soit le niveau (de façon adaptée, cette assertion est valable de la maternelle à l'université) » (Villani & Torossian, 2018, p. 25).

Les programmes et leurs commentaires attestent la présence de cette problématique en utilisant des termes dont la signification varie nécessairement, puisque démontrer ne peut avoir la même signification au cycle 2 et au cycle 4, sans que leurs relations ne soient clairement élucidées. Les extraits suivants en témoignent :

Cycle 2 (MENESR, 2018 Domaine 4)

« Le discours produit est argumenté et prend appui sur des observations et des recherches et non sur des croyances. »

Cycle 3 (MENESR, 2018 Domaine 3)

« Les mathématiques contribuent à construire chez les élèves l'idée de preuve et d'argumentation. »

Cycle 4 (EDUSCOL, 2016, p. 1-2)

Démontrer : « utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion » ;

« Moyen mathématique d'accès à la vérité » en donnant à voir « les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent. »

« Défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation ».

La lecture du rapport de Cédric Villani et Charles Torossian (2018) rencontre les mêmes difficultés. La section dédiée à « La preuve » (ibid. pp.25-26) recourt à des formulations telles que : « démarche de justification argumentée », « formes d'argumentation propres aux mathématiques », « démonstration » dont on comprend l'intention mais plus difficilement les nuances : comment distinguer une argumentation propre aux mathématiques de la démonstration ? Ces désignations seraient-elles équivalentes comme preuve et démonstration seraient synonymes selon l'un des auteurs exprimant la position des mathématiciens² ? Des réponses précises à ces questions sont nécessaires à la mise en œuvre des programmes et à l'exercice quotidien de l'enseignement de mathématiques.

² Cédric Villani, à l'occasion d'un bref échange de courriels à propos du rapport sur l'enseignement des mathématiques (30 mars 2018).

Le texte des programmes articule un volet éducatif et un volet didactique, non exclusifs d'autres aspects, complémentaires et fortement liées. Dans le volet éducatif, l'enseignement doit amener les élèves à prendre conscience de la distinction entre croyance et connaissance en s'appuyant sur des interactions sociales réglées par les principes du débat scientifique. Dans le volet didactique, il s'agit de répondre à la question du vrai en mathématique, avec des moyens adaptés, dès les premiers apprentissages. L'objectif au terme de la scolarité obligatoire est que les élèves comprennent et pratiquent la démonstration comme un type de preuve spécifique des mathématiques. Une telle ambition requiert d'éclaircir les rapports entre preuve et démonstration et de préciser ce que peuvent être les types de preuve qui pourraient être pratiqués par les élèves et les enseignants et enseignantes aux niveaux élémentaires. Le problème pris sous l'angle de l'enseignement et pas seulement celui de l'apprentissage fait apparaître une complexité qui n'échappe pas à l'institution :

« Il n'est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme »
« Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d'une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation. »
Le travail de la classe comprend ainsi « des temps de mise en commun et d'argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées) »
(EDUSCOL, 2016, p. 3-4)

Je reviens, dans la section suivante sur le vocabulaire utilisé par les programmes et les documents d'accompagnement à la lumière de ce que peut apporter la recherche en didactique des mathématiques. J'aborderai ensuite la relation entre preuve, argumentation et connaissance en introduisant la notion de « conception ». Enfin, je m'intéresserai au rôle et aux caractéristiques des situations de validation—au sens de la théorie des situations didactiques—pour comprendre la complexité de l'enseignement de la preuve lorsque la démonstration n'est pas inscrite dans la pratique ordinaire de la classe. Je conclurai par une ouverture sur la question de l'argumentation mathématique comme précurseur de la démonstration.

Vocabulaire

Raisonnement

La compétence « raisonner », c'est-à-dire le raisonnement, constitue le cadre général dans lequel l'institution situe résoudre et démontrer. Par raisonnement elle entend « [un] processus mental permettant d'effectuer des inférences. [Rappelant] qu'une inférence est une opération mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie en vertu de sa liaison avec d'autres propositions » (EDUSCOL, 2016a, p. 1). J'ai utilisé une définition très proche au début de mon travail sur l'apprentissage de la preuve, en désignant par raisonnement une activité intellectuelle consistant à obtenir de nouvelles informations à partir d'informations données (Balacheff, 1987b, p. 148). Cette formulation était maladroite dans la mesure où le problème posé n'est pas de modéliser les activités mentales mais de les caractériser grâce à leurs manifestations tangibles pour pouvoir créer des situations propres à susciter leur évolution par l'effet des retours spécifiques qu'elles permettraient ; c'est-à-dire des situations didactiques au sens de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998, p. 104-112) ; cadre dans lequel je me plaçais explicitement.

Je pense plus pertinent de retenir la définition donnée par Raymond Duval qui, d'une part, est congruente avec les cadres théoriques dans lesquels je me place et, d'autre part, n'introduit pas de contradiction avec un problématique psychologique :

Le raisonnement « [est l'] organisation de propositions qui est orientée vers un énoncé-cible pour modifier la valeur épistémique que cet énoncé-cible a dans un état de connaissance donné, ou dans un milieu social donné, et, qui par voie de conséquence, en modifie la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation sont remplies » (Duval, 1992, p. 52).

Par valeur épistémique il faut comprendre « le degré de certitude ou de conviction attaché à une proposition » (Duval, 1991, p. 254). Le rôle de cette valeur est particulièrement sensible lors des échanges dans la classe ou lors de la résolution collaborative de problèmes. Cette définition fait de l'analyse du raisonnement – pour l'enseignement comme pour la recherche – un travail sur le discours et sur le texte dont on prendra en compte le caractère contextualisé par l'état des connaissances, les niveaux de langage et les contraintes de situation.

Les « conditions particulières d'organisation » mentionnées par Raymond Duval sont une référence à la fois à la structure logique et à la norme particulière du discours de preuve. La compréhension de la nature et du rôle de cette norme est l'un des enjeux essentiels de l'enseignement de la démonstration. J'en aborderai certains aspects dans la section sur les types de preuve.

Explication

« Explication » n'est pas un mot-clé saillant des textes des programmes ni de leurs commentaires. Il est en revanche, avec « argumentation », le terme le plus clivant au sein de la communauté scientifique lorsqu'est en question la distinction entre preuve qui prouve et preuve qui explique, pour reprendre la formulation de Gila Hanna (1990) qui très tôt a porté cette problématique. Les problèmes sous-jacents sont celui de la compréhension de la preuve et celui de sa capacité à répondre à la question de savoir pourquoi un énoncé est vrai au-delà de la bonne forme du discours qui garantit cette validité. C'est donc la question du lien entre preuve et connaissance. Voire celui du lien entre calcul, qui réduit la validité au respect de règles syntaxiques, et raisonnement dans lequel subsiste une part d'exigence sémantique.

Dans ce qui suit « explication » est utilisé pour désigner un « système de relations au sein duquel la donnée à expliquer trouve sa place » (Duval, 1992, p. 40). En effet, « la question de la valeur épistémique résolue, se pose celle de la construction de la cohérence ou appartenance de la nouvelle production au système de connaissance. » (ibid.). L'explication est ainsi la mise en relation de l'énoncé produit de la résolution d'un problème avec les connaissances explicitement disponibles : il y a compréhension s'il y a fermeture pour cette mise en relation.

Raymond Duval (1992) affirmait un clivage entre explication et raisonnement. La première, écrivait-il, « donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée (un phénomène, un résultat, un comportement, ...) » (ibid. p.40), alors que pour le second « le rôle des raisons avancées y est tout différent : il est de "communiquer" aux affirmations qui sont à justifier leur force d'argument » (ibid. p.41).

Explication, argumentation, preuve et démonstration

En soutenant l'existence d'un clivage entre explication et raisonnement, Raymond Duval induit celui entre explication et preuve que rejette Gila Hanna :

« a proof actually becomes legitimate and convincing to a mathematician only when it leads to real mathematical understanding » (Hanna, 1995, p. 42).

J'avais pour ma part fortement lié explication et preuve dans un effort de clarification et de définition (Balacheff, 1987b, p. 148). Mon choix a suscité quelques difficultés tant avec Raymond Duval en raison même de ce lien, qu'avec Gila Hanna en raison de la disjonction qu'elle affirmait entre preuves qui prouvent et preuves qui expliquent. Je reviens et précise ici

ces distinctions dans la perspective d'une réduction des contradictions. Pour cela il faut revenir sur le terme « argumentation ».

L'argumentation, précise Raymond Duval (1992, p. 37), est acceptée ou rejetée selon deux critères : sa pertinence (cohérence sémantique) et sa force (valeur épistémique 'positive') (ibid. p.39) ; c'est-à-dire la force de la croyance que l'on attache à ses énoncés pour de bonnes ou de mauvaises raisons.

L'introduction de la distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique (ibid. p.51) a permis de rapprocher cette acception générale d'argumentation et une acception congruente aux exigences de l'activité mathématique. En effet, selon cette distinction, l'argumentation rhétorique vise à convaincre un interlocuteur, alors que l'argumentation heuristique guide la résolution du problème en favorisant des choix stratégiques ou en soutenant la validité supposée d'un énoncé par la seule recours à celle de ceux auxquels le raisonnement le lie.

On peut remarquer que si Raymond Duval a forgé la notion de « valeur épistémique » des énoncés – force de la croyance en leur validité – d'une argumentation rhétorique, il ne propose pas de terme particulier pour la valeur de ceux de l'argumentation heuristique. Une proposition récente de Gila Hanna (2017) offre la possibilité de combler ce manque en reprenant la distinction introduite par les philosophes Frans Delarivière et Bart van Kerkhove (2017) entre *valeur épistémique qui implique l'existence d'un agent*, et *valeur ontique indépendante de tout agent*. Il s'agissait pour ces auteurs de qualifier le caractère intrinsèque ou relatif de la valeur explicative d'une preuve – cette distinction tient aussi bien pour l'argumentation. Voici ce qu'ils écrivent :

« A mathematical proof can be seen as an argument by which one convinces oneself or others that something is true, so it might seem hard to go beyond epistemic talk about an explanatory proof. However, while the content of any particular proof is the fruit of a person's epistemic work, it can be separated as an object independent of a particular mind. Other people can read this proof and be convinced by it. This leads us to the question whether showing why a theorem is true is a feature of the proof itself or a feature of communicative acts, texts or representations. » (ibid. p.3)

Ceci est à rapprocher du critère de reconnaissance du caractère heuristique ou épistémique d'un argument « [qui] tient ou bien à l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation, ou à l'absence d'une telle organisation théorique. » (Duval, 1992, p. 51). « Une argumentation heuristique requiert l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentations dans lequel se déroule l'argumentation » et « que l'on soit en mesure de comprendre ou de produire une relation de justification entre des propositions qui soit de nature déductive et non pas seulement de nature sémantique. » (ibid. p.52). Ainsi la distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique, revient-elle à l'évaluation de la valeur épistémique et de la valeur ontique des énoncés. Nous pouvons alors avancer qu'*une argumentation sera recevable au sens des mathématiques si la valeur épistémique de ses énoncés est conditionnée par leur valeur ontique* ; c'est ce critère qui permettra de lui reconnaître le statut de preuve en mathématique. La structure normalisée des démonstrations est un moyen technique pour effectuer cette évaluation.

La distinction entre argumentation rhétorique et argumentation heuristique, et entre valeur épistémique et valeur ontique d'un énoncé, permet de reformuler et de préciser l'opposition entre argumentation et démonstration parfois trop abrupte comme ici :

« Duval's model of deductive reasoning is formal derivation, while for us it is only a model for the final product, not adequate for the school approach to theorems and proof » (Boero et al., 2010, p. 17).

Cette discussion me permet de revenir et de préciser le schéma (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) que j'ai proposé en 1988, repris nombre de fois, pour lequel j'ai longtemps sous-estimé le risque de malentendu.

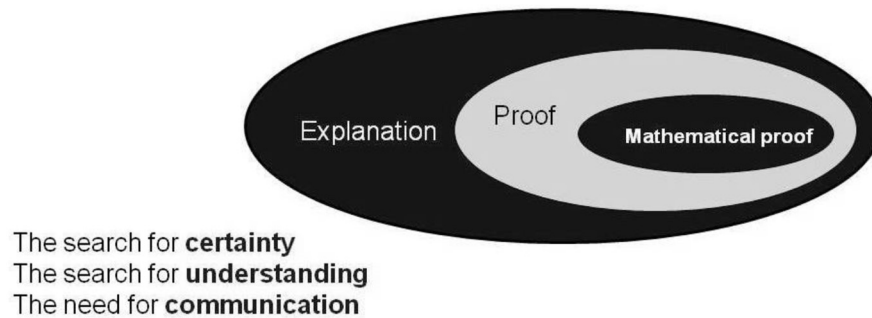


Figure 1

Je n'ai pris conscience de l'importance de revenir sur ce schéma à la lecture d'une première version d'une communication que Gila Hanna a mise en libre accès sur Research Gate (Hanna, 2018, fol. 3), dans laquelle elle fait commentaire suivant à son propos : « If one were to take the position that an explanation is simply a deductive argument, then all proofs would automatically be explanations ». Cette remarque est légitimement induite par la représentation proposée pour autant que le lecteur ignore le texte qui l'accompagnait. Je reprends ci-dessous la version anglaise de ce texte publiée en 2010 pour rester dans le contexte de lecture que put faire Gila Hanna :

« This structuration [of the relations between explanation, proof and mathematical proof] distinguished between pragmatic and intellectual proof, and within both it identified categories related first to the nature of the student knowing and his or her available means of representation.

The rationale for this organisation (sketched [here figure 1.]) is the postulate that the explaining power of a text (or non-textual "discourse") is directly related to the quality and density of its roots in the learner's (or even mathematician's) knowing. What is produced first is an "explanation" of the validity of a statement from the subject's own perspective. This text can achieve the status of proof if it gets enough support from a community that accepts and values it as such. Finally, it can be claimed as mathematical proof if it meets the current standards of mathematical practice. So, the keystone of a *problématiques* of proof in mathematics (and possibly any field) is the nature of the relation between the subject's knowing and what is involved in the 'proof'. » (Balacheff, 2010, p. 130)

Ces relations entre explication, preuve et démonstration étaient précisées dans la perspective de l'individu engagé dans la résolution d'un problème et la validation de sa solution. La qualification d'explication d'une énonciation ne préjuge pas de la valeur épistémique ou ontique en soi de ses énoncés ; tel énoncé peut avoir la valeur ontique positive d'un théorème-en-acte (c.-à-d. croyance empiriquement fondée sur une invariance observée et objectivée). En restant dans le cadre de Duval, le passage de l'explication à l'argumentation est celui qu'impose le besoin de formuler les raisons et leur organisation, que cela soit pour soi-même ou pour autrui. Faire accepter par autrui qu'une argumentation établit la validité d'une solution change son statut et sa valeur par le caractère public qu'elle acquiert. Elle

gagne le statut de preuve. Parmi ces preuves certaines ont une structure particulière qui satisfait des normes collectives, telles en mathématiques celles de la démonstration.

Je me suis essayé à dessiner un nouveau croquis (Figure 2) qui pourrait limiter les malentendus mais il n'est pas sûr qu'un dessin vaille mieux qu'un (long) discours...

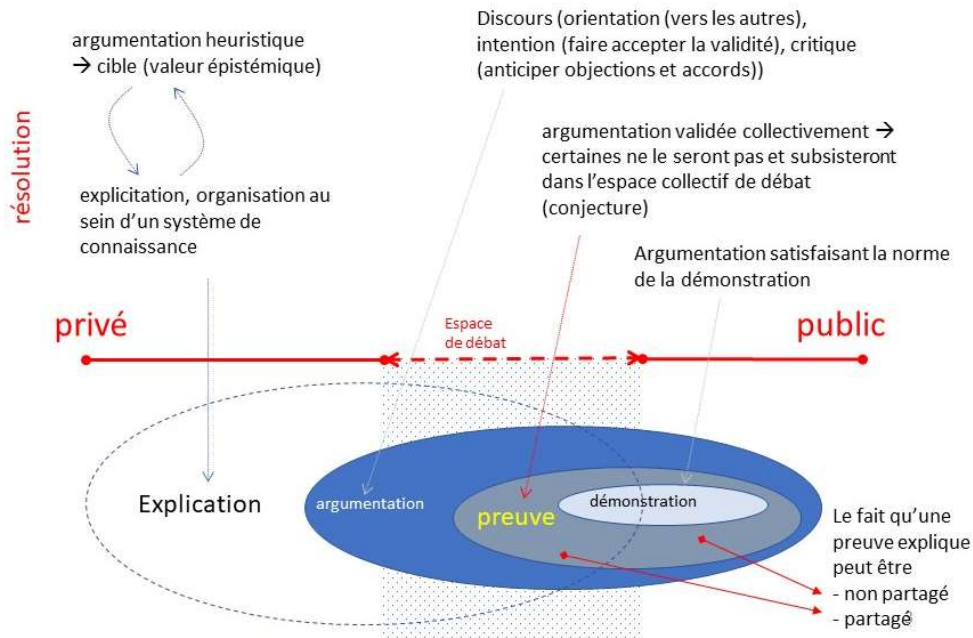


Figure 2³

Le point important est la mise en évidence de l'existence d'une frontière entre sphère privée et sphère publique. Dans la sphère privée, l'explication travaille sur les objets et leurs relations, elle est le socle de la construction de l'argumentation qui sera le moyen de convaincre de la validité de la solution d'un problème, que ce travail assure ou non la soumission de la valeur épistémique à la valeur ontique. Le franchissement de cette frontière implique la recherche d'un consensus, c'est-à-dire un processus social qui, par nature, ne saurait garantir qu'individuellement les protagonistes reconnaîtront le caractère explicatif de l'argumentation – la preuve – collectivement acceptée. Cette incertitude est plus forte encore dans le cas de la démonstration du fait de son caractère normatif qui prend le pas sur ses propriétés rhétoriques.

Conception et argumentation

Illustration 1 – où il est question du défi de l'usage commun

Lors des premiers apprentissages d'aire et de périmètre, de nombreux élèves tendent à considérer ces deux mesures comme des « mesures » rendant compte de la surface ou de l'encombrement d'une forme plane (Douady & Perrin-Glorian, 1989, p. 387 et 404). La difficulté à distinguer précisément périmètre, contour, aire, surface et encombrement d'une forme plane est observée jusqu'à la fin du cycle 3 voire au-delà.

Cette confusion est favorisée par l'usage commun de la langue tel que, par exemple, le dictionnaire en rend compte : le périmètre est « [la] ligne qui délimite une surface plane » et par métonymie c'est « [la] longueur de cette ligne », l'aire est d'abord un « espace assigné à

³ Cette version du schéma bénéficie des remarques de Marie-Line Gardes que je remercie.

une activité ou à un phénomène en expansion » et techniquement « la superficie d'une figure » cependant que la « superficie » est une « étendue géométriquement mesurable » (CNRTL, s. d.).

Les significations que reflètent ces usages persistent alors qu'avance l'apprentissage. J'ai choisi d'aller sur ce terrain pour analyser la gestion des contradictions, dans une dialectique des preuves et réfutations, par des élèves de 5° et de 4° (Balacheff, 1988a, p. 281-320). La tâche retenue, reprise de (Walsch, 1983), porte sur le cas du rectangle, une figure familière pour laquelle les élèves connaissent les formules de calcul de l'aire et du périmètre :

Dans une classe, les élèves travaillent sur l'aire et le périmètre d'un rectangle. Voici ce qu'en disent certains d'entre eux :

David : deux rectangles qui ont le même périmètre ont la même aire.

Suzanne : deux rectangles qui ont la même aire ont le même périmètre.

Guy : si on augmente le périmètre d'un rectangle son aire augmente aussi.

Serge : si on augmente l'aire d'un rectangle son périmètre augmente aussi.

Brigitte : tous les rectangles qui ont une aire de 36cm² ont un périmètre qui ne fait pas moins de 24cm.

Louise : pour tout rectangle il en existe un autre qui a la même aire mais dont le périmètre est plus grand.

Que pensez-vous de ce que raconte chacun de ces élèves : êtes-vous d'accord ou non ? Expliquez pourquoi.

Les élèves travaillaient en binômes avec une contrainte choisie pour favoriser leurs interactions : papier à volonté mais un unique stylo. Le temps n'était pas limité, il a été en moyenne de 45 minutes. L'observateur ne devait pas intervenir jusqu'à l'accord des élèves sur des réponses et des explications communes. Les extraits suivants illustrent la place des connaissances dans la construction des argumentations construites par les élèves à l'appui de leurs jugements.

Un binôme, disons C&P, accepte l'assertion « deux rectangles qui ont le même périmètre ont la même aire » dont ils proposent la justification suivante :

« Oui, car ils ont le même périmètre donc ils sont isométriques, sinon ils n'auraient pas la même aire, car la surface est délimitée par le périmètre donc comme le périmètre est [le] même, l'aire est le même. » (ibid. p.297)

Cette explication est explicitement sous-tendue par le principe commun selon lequel si deux formes sont différentes alors le sont aussi les mesures associées.

Un autre binôme, disons A&C, juge positivement l'assertion « si on augmente l'aire d'un rectangle son périmètre augmente aussi ». Mais il ne voit pas d'emblée comment l'expliquer :

« C'est bête parce que c'est évident [...] comment on peut y démontrer ? » (ibid. p.301).

A&C revient sur cette question de preuve après avoir considéré l'assertion « tous les rectangles qui ont une aire de 36cm² ont un périmètre qui ne fait pas moins de 24cm. » qui les conduit à utiliser les formules de l'aire et du périmètre. Sans changer leur jugement initial, ils invoquent des propriétés arithmétiques :

« Quand tu augmentes le périmètre, les nombres tu les augmentes ... là, les nombres qui se multiplient ... qui s'ajoutent [...] ben oui, parce que quand tu augmentes le périmètre, la longueur et la largeur augmentent. Donc lorsqu'on les multiplie tous les deux, ça augmente aussi. » (ibid. p.302).

Cette explication est associée à un usage explicite des formules d'aire et périmètre (Figure 3).

$$\begin{array}{l}
 \text{P: } \frac{\text{surface}}{(l+L) \times ?} \\
 \text{air: } l \times L.
 \end{array}
 \quad \text{augmente:} \quad
 \begin{array}{l}
 \text{P: } \frac{[(P+L) \times 2]}{?} \times ? \\
 \text{aire: } (l \times L) \times 2
 \end{array}$$

Figure 3 (ibid. p.303)

Le cas C&P illustre une conception surface-contour qui peut être caractérisée par le cadre spatio-graphique dans lequel l'activité porte sur le dessin et relève d'une « appréhension globale en donnant à voir des relations spatiales » (Laborde, 2003, p. 140). Cette activité est sous le contrôle du principe : plus les formes sont grandes plus les mesures attachées sont grandes.

Le cas de A&P illustre une conception aire-périmètre qui se développe dans le cadre de l'*arithmétique symbolique* (Balacheff, 2001) dans lequel les formules canoniques fournissent une représentation dont la manipulation et l'interprétation sont sous le contrôle de leur référent (c.-à-d. ce qu'elles modélisent). Le principe d'une covariation monotone croissante de l'aire et du périmètre est assez fort pour s'imposer et contrôler la manipulation des formules. Les échanges, reproduits ci-dessous, entre les deux élèves d'un autre binôme, C&S, et le texte (Figure 4) qu'ils produisent en témoignent :

- S339 - là ça sera plus du tout les mêmes mesures, si on augmente le périmètre.
- S354 - le périmètre a et l'aire b ... on augmente le périmètre a, par exemple +2.
- C357 - pour l'instant, son aire elle augmente pas.
- S358 - pour l'instant son aire elle augmente pas?! [. . .] Mais si, euh ... si on augmente le périmètre, il faut changer longueur et largeur du rectangle ... Ça marchera plus [...] si tu laisses ton a, ton b [...] donc l'aire changera obligatoirement ... et on sait pas si ... elle augmente ou si ... elle diminue ... mais j'pense qu'elle augmentera si on ajoute.
- C368 - obligatoirement ? Tu l'as prouvé ? T'as fait tous les cas ... Tout, tout, tout ?
- S369 - si on ajoute c'est obligatoirement ... si on ajoute elle va pas baisser.
- C370 - ah ouais, parce que si t'ajoutes au périmètre il faut aussi ajouter à l'aire.
- S371 - mais non, si t'ajoutes au périmètre, l'aire elle bouge pas.
- C374 - il faut changer les chiffres
- S375/381 - ça va changer les chiffres [...] donc l'aire elle changera.

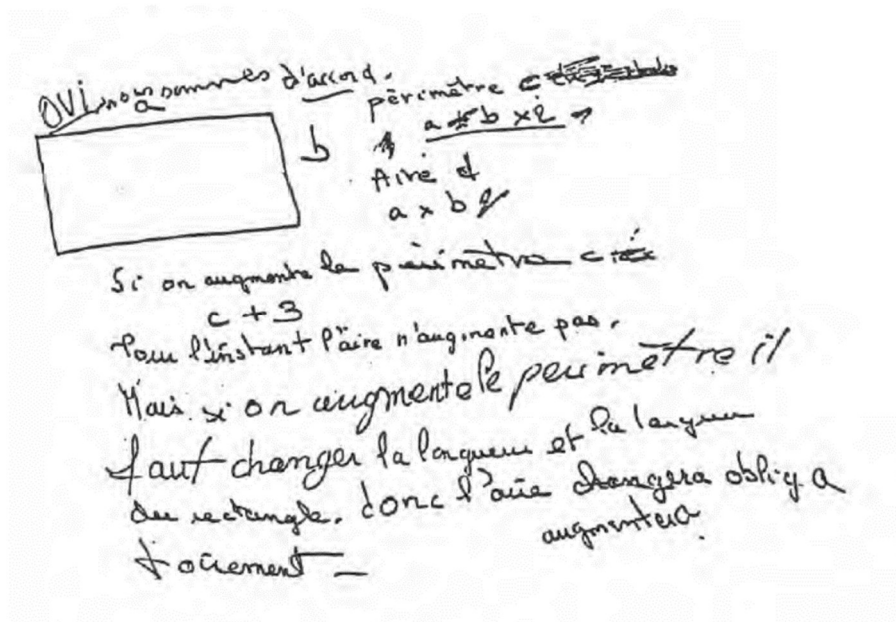


Figure 4 – (ibid. p.306)

Des élèves prennent en charge le problème de la validation et manifestent leur conscience du décalage entre ce qu'ils produisent et le standard de preuve souhaité dans la classe de mathématique :

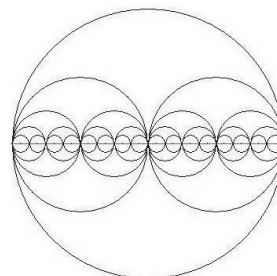
- L170 - Là faut démontrer avec des lettres ...
- O155/161 - il y aurait fallu faire toutes les démonstrations et tout [...] toute façon on peut pas, on a pas pris les axiomes, tout ça ...
- L129 - on pourrait faire des énoncés, tout ça ... on peut faire compliqué, ça dépend [...] on pourrait mettre des phrases, p't'être que ce serait mieux

Ces élèves ne parviennent pas à dépasser les difficultés qu'ils identifient faute de disposer d'une conception permettant la modélisation algébrique en s'appuyant sur les formules qui leur sont familières.

Illustration 2 – où il est question de limite

Vincent et Ludovic sont deux élèves de collège. Ils n'ont pas de difficultés particulières en mathématiques. Ils se sont portés volontaires pour participer à une expérience organisée par Betina Pedemonte pour étudier l'unité cognitive entre résolution de problème et preuve (Pedemonte, 2002, p. 157). Le problème était le suivant :

Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.



Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre ?

Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre ?

Sans hésiter, les deux élèves expriment, avec les formules usuelles, le périmètre et l'aire des figures pour les premières étapes de la construction. Puis ils conjecturent que le périmètre est constant et que l'aire décroît vers zéro. Mais Vincent remarque :

« L'aire elle est toujours divisée par 2... donc, à la limite ? La limite est une ligne, le segment dont on est parti ... »,

Et il continue :

41. Vincent : ça tombe sur le segment... si les cercles sont tellement petits.
42. Ludovic : hum... mais ce sera toujours 2π .
43. Vincent : oui mais quand l'aire tend à zéro ça sera presque égal...
44. Ludovic : non, je pense non.
45. Vincent : si on fait tendre à zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi...
je ne sais pas...
46. Ludovic : Je finis la première démonstration.

Vincent et Ludovic collaborent activement et paraissent partager les mathématiques en jeu dans cette situation, cependant les contrôles qu'ils mettent en œuvre sont de natures différentes. Ludovic travaille dans le *cadre algébrique* au sens de Régine Douady (1986) ; le contrôle porte sur le respect des règles de l'algèbre élémentaire. Vincent, quant à lui, travaille dans le *cadre de l'arithmétique symbolique* dans lequel le contrôle vient d'une confrontation constante de l'expression littérale à ce qui est observé dans l'espace graphique de la feuille. Les deux élèves ont compris le problème de la même façon, tous les deux manipulent la représentation symbolique en respectant la syntaxe des écritures littérales mais les contrôles qu'ils mobilisent sont fondamentalement distincts.

Connaissance, conception, argumentation

Nous avons l'expérience personnelle et quotidienne d'une mise en œuvre d'une même connaissance, ou plutôt ce que nous reconnaissons pour tel, sous des formes différentes selon les situations et les contextes. Ainsi, la représentation d'un nombre décimal n'est-elle pas traitée de la même façon selon qu'elle représente un prix que l'on doit payer en monnaie ou la mesure d'une longueur avec des contraintes de précision. Le concept de « conception » est utile pour rendre compte de cette diversité en désignant par ce mot l'instance d'une connaissance en situation. Ainsi pourrions-nous rendre compte d'une connaissance en décrivant les conceptions qui la composent, chacune étant empiriquement attestée par la spécificité de son rattachement à une situation, un problème ou une tâche particulière. Cette diversité est transparente lorsqu'elle est maîtrisée, l'activation d'une conception se faisant sur des critères de pertinence et d'efficacité dans une situation donnée. En revanche, elle est problématique lorsque l'activation est inadaptée et conduit à des erreurs ou à des mises en œuvre coûteuses.

Il était d'usage de parler de « misconceptions » dans les années 80 pour désigner ces instances « fautives » de la connaissance. Cette position conduisait à penser l'apprentissage en termes de correction de l'erreur⁴ plus qu'en termes d'évolution de la connaissance. Cette critique fait partie des fondements de la didactique des mathématiques :

“L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée” (Brousseau, 1976, p. 171).

⁴ Cette acception de misconception restera dominante internationalement jusque dans les années 90, elle évoluera (Confrey, 1990) mais elle porte aujourd'hui encore le poids de son histoire.

Un ensemble de problèmes étant précisé, une conception peut être caractérisée par la donnée conjointe et reliée d'un *système de représentation*, d'un *ensemble d'opérateurs* et d'une *structure de contrôle* qui permet de juger, choisir et décider (Balacheff, 2017, 1995; Balacheff & Margolinas, 2005). Si la différence des systèmes de représentation est un bon indicateur de conceptions différentes, leur identité est insuffisante pour celles des conceptions qui pourraient rendre compte de l'activité de deux élèves. Ainsi, le cas de Vincent et Ludovic (cf. illustration 2), illustre comment l'usage partagé de l'expression littérale d'aire et de périmètre permet la collaboration des deux élèves -- elle joue le rôle d'un *médiateur sémiotique* (Mariotti & Cerulli, 2001) – alors que leurs conceptions sont essentiellement différentes ; cette différence a son origine dans celle des structures de contrôle qui déterminent leurs jugements.

Les structures de contrôle règlent l'activité de résolution de problème depuis les premiers instants jusqu'à celui, final, de la décision de sa bonne fin. Ainsi, la validité d'une solution est-elle fondamentalement dépendante des conceptions. Les *conditions minimales* (Pedemonte, 2005, p. 331) pour que sa validité mathématique soit assurée est qu'il existe des théorèmes correspondant aux opérateurs et un cadre—au sens de Douady—qui puissent être substitué à la conception et fournir le socle théorique, c'est-à-dire des objets et un système de déduction et de principes admis (Mariotti et al., 1997).

Les approches cognitives de l'apprentissage de la démonstration ont insisté sur la difficulté que constitue la maîtrise de la logique sous-jacente et fait dépendre le moment de cet apprentissage de celui que la psychologie du développement repérait dans l'évolution de la pensée rationnelle. C'est ainsi que les programmes anciens prescrivait l'enseignement de la démonstration à partir de la classe de quatrième, et que dans les pays anglo-saxons cet enseignement pouvait n'apparaître que tardivement :

« Children or novices do not initially think deductively. » [...] « It is only much later—usually at college level—that axiomatic formal proof arises in terms of formal definitions and deductions. » (Tall et al., 2012, p. 15)

Ce que nous disent les recherches récentes sur l'activité mathématique des élèves, et celle des mathématiciens au cours de l'histoire, permet d'avancer deux objections :

- La rationalité mathématique des élèves se forge dès les premiers apprentissages leur permettant d'entrer dans une problématique de la validation bien avant que les objets mathématiques soient formalisés.
- La validation de la solution d'un énoncé dépend des moyens de représenter, de relier et de traiter des objets en jeu, ainsi que des moyens de contrôles associés.

De plus, la résolution et la validation ne constituent pas des phases distinctes de l'activité de résolution de problèmes, mais des moments reliés et intriqués qui nécessitent des jugements, des choix et des décisions qui dépendent des représentations et des mises en relation des objets en jeu. L'activité argumentative apporte des éléments dont la transformation et la réorganisation donneront ceux d'une explication voire d'une preuve. Ces liens ressortent d'une *unité cognitive des théorèmes* (Boero, 2017, p. 99) qui peut être rompue si les conditions minimales posées par Bettina Pedemonte ne sont pas satisfaites.

Pour autant les élèves font des propositions qu'il est nécessaire de comprendre et de situer les unes par rapport aux autres soit qu'elles aient un sens acceptable au regard d'une évaluation mathématique, soit qu'elles constituent un point de départ pour susciter une évolution des conceptions sous-jacentes.

Type d'argumentation et de preuve

Preuves empiriques et intellectuelles

La dépendance mutuelle des conceptions, des systèmes de représentation et des systèmes de validation oblige à distinguer différents types de preuve pour pouvoir modéliser les évolutions possibles et leurs conditions. Cette nécessité est classiquement affirmée dans le cadre d'une problématique cognitive (Tall, 1998, p. 196). Cependant, si le développement de l'enfant est l'un des déterminants des niveaux de validation – on le sait depuis les travaux de Jean Piaget – ils ne sont pas les seuls, loin s'en faut. Il faut aller au-delà des problématiques cognitives (Balacheff, 1990) en prenant en compte, au moins, l'économie propre des situations de validation et la nature des conceptions disponibles.

La typologie des preuves que j'ai proposée à la fin des années 80 a souvent été utilisée en l'interprétant comme une suite de « stades », ce qu'elle n'est pas. Les observations, sur lesquelles elle s'appuyait, attestaient que les élèves acceptent un type de preuve selon ce que leurs conceptions permettent de construire et leur perception de la situation. Cette dépendance est particulièrement manifeste lors du traitement de contre-exemples (Balacheff, 1987b, p. 166 sq.). De fait, plusieurs types de preuves peuvent être identifiés dans le cours de la résolution d'un problème ou dans le cours d'un débat contradictoire. Les enjeux de l'interaction sociale ou ceux de la situation peuvent susciter l'effacement de l'argumentation au profit d'un discours visant à persuader.

En fait, un type de preuve est moins une information sur l'élève que sur *l'élève en situation à un moment donné de son histoire mathématique*.

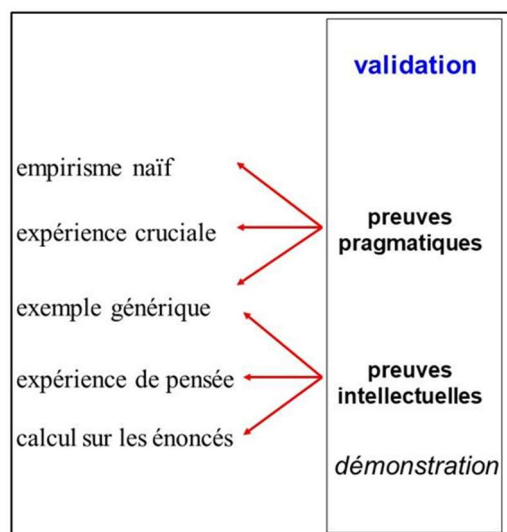


Figure 5

La figure ci-dessus présente sous une forme synthétique les types de preuves et rappelle les deux catégories auxquelles ils peuvent être rattachés.

Le passage de l'empirisme naïf à la démonstration peut, en une formule rapide, décrire le mouvement de l'apprentissage de la preuve en mathématique. Ce passage de preuves pragmatiques à des preuves intellectuelles nécessaire pour aller vers la démonstration, est aussi celui d'une problématique pragmatique à une problématique théorique et donc d'une évolution de la lecture des situations dans lesquels l'activité mathématique se déploie et celle du statut des connaissances mobilisées.

L'exemple générique

L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même mais en tant que bon représentant d'une classe d'objets partageant les mêmes caractéristiques. La formulation met en avant et relie les propriétés caractéristiques et les structures de la classe d'objets en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants sans pour autant dépendre de ses propriétés singulières.

Cherchant à établir leur conjecture sur le calcul du nombre des diagonales d'un polygone (Balacheff, 1988a, p. 124-131), deux élèves (classe de 4^e, 1982) expriment d'abord leur conjecture en utilisant l'hexagone qui a dans leur projet une valeur d'exemple générique que

Dans un polygone à 6 sommets, il y a 3 diagonales par sommets donc il y a 18 diagonales; mais comme une diagonale joint deux points: il n'y a que 9 diagonales. $18 : 2 = 9$ et de même avec 7 sommets 8, 9, 10, 11, ... etc
alors a 7 sommets il partira 4 diagonales par sommets.
~~Comme~~ à chaque fois que l'on ajoute un sommet on ajoute une diagonale par sommets ^{en partant de chaque sommet} et on divise par 2 le nombre de toutes les diagonales et on trouve le nombre de diagonales du polygone. et pour trouver le nombre de diagonales partant de chaque sommet on ~~est~~ ^{est} ~~est~~ ^{est} soustrait au nombre de sommets, trois ~~et on trouve~~ ^{et on trouve} ~~le nombre~~ ^{le nombre}
mais pour les concaves on n'enlève pas 1 diagonale

Figure 6 (ibid. p.95)

souligne le « de même », puis ils évoluent vers une formulation qui se dégage des marques du particulier (Figure 6).

L'exemple générique se trouve à la frontière des preuves pragmatiques et des preuves intellectuelles. Le franchissement de cette frontière est suscité par la prise de conscience du caractère générique du cas support de l'argumentation. En voici une illustration (Figure)⁵ dans laquelle le caractère générique de l'exemple utilisé par l'élève est attesté. La rédaction

⁵ Tiré de (Balacheff, 1978)

que proposent ces élèves achève le mouvement vers une représentation qui rende compte de la généralité, en conservant cependant un contrôle sur le fil des écritures qui reflète celui de la construction de la solution ; ainsi peut-on comprendre « donc $a-a=0$ ».

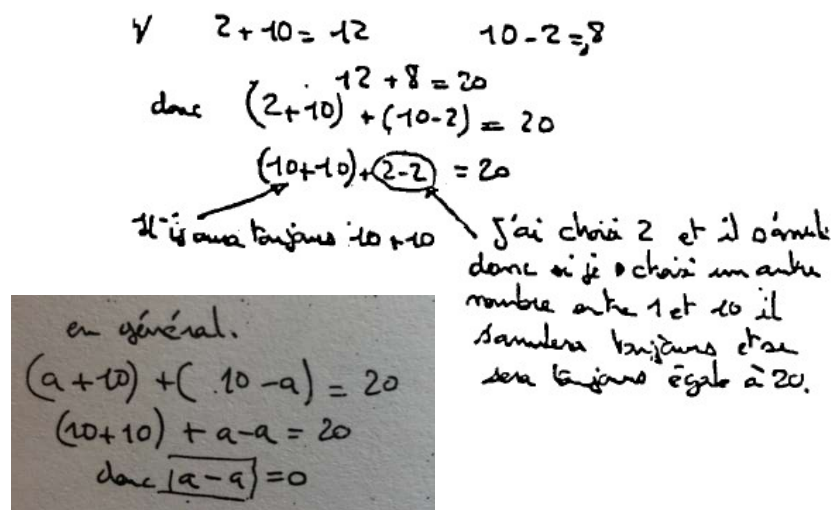


Figure 7

Dès le cycle 3, engagés dans la résolution d'un problème portant sur la parité de la somme de deux nombres dont la parité est connue, des élèves évoluent de preuves empiriques naïves vers l'utilisation d'un exemple pour exprimer la généralité de leur argumentation. Je reprends ici un exemple tiré de Teo Kwee Huang & Ng Swee Fong, (2017) qui illustre bien l'usage de l'exemple générique et la possible transition vers l'expérience mentale sur laquelle je reviens dans la section suivante.

“(draws) so there is one pair in 3 and two pairs in 5 and then ... as you can see right... there is one... there is always an odd one out ... so if you plus them together ... it's another pair. So it equals to another even number.” – Jarle



(tout en dessinant) donc il y a une paire dans 3 et deux paires dans 5 puis... comme tu peux le voir... il y a toujours un de côté... alors si tu les mets ensemble... c'est une autre paire. Donc c'est égal à un autre nombre pair.

“(O + E) Because the odd number has a remainder but the even number does not have a remainder. Then if you put the remainder somewhere, beside, aside first, then both of them add together, then plus the remainder equals to an odd number.” – Stacy

Parce que le nombre impair a un reste mais le nombre pair n'a pas de reste. Donc si tu mets le reste de côté, alors les deux s'additionnent, et plus le reste c'est égal à un nombre impair.

Figure 8

L'expérience mentale

L'expérience mentale invoque l'action en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier (p.ex. fig. 9). Prise dans la perspective de l'évolution de la résolution d'un problème, elle s'inscrit dans une dynamique de conceptualisation et de modélisation. Bien qu'inscrits dans un contexte temporel et spatial, indissociable de l'expression d'une action, les constituants fondateurs de la preuve sont décontextualisés. L'expression d'une expérience mentale rencontre le défi de la représentation des objets, de leurs propriétés et relations, et celui de l'expression des raisons. La généralisation est associée à une représentation opératoire, elle engage l'évolution d'une argumentation rhétorique vers une argumentation heuristique, qui requiert celle de la valeur épistémique vers la valeur ontique des énoncés qui constituent le discours.

en sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaque point, le nombre de sommets - (ses deux voisins + lui-même)

~~il partira de chaque point, le nombre de sommets - (ses deux voisins + lui-même)~~

~~il partira de chaque point, le nombre de sommets - (ses deux voisins + lui-même)~~

il faut multiplier ce qui on a trouvé par le nombre de sommets (par chaque sommet, partit le même nombre de diagonales).

~~MATIS, on compte chaque diagonale deux fois.~~

MATIS, on compte chaque diagonale deux fois.

Le nombre de diagonales est donc à diviser par deux et on obtient une fois chaque diagonale.

Figure 9

C'est entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, le marqueur de cette transition est l'évolution des moyens de représentation et d'expression du raisonnement.

Le rôle du langage

La question de l'acquisition des représentations et des formes langagières particulières des mathématiques est d'une importance reconnue, mais le plus souvent sans que soit posée précisément et en référence au contenu mathématique celle, technique, de *l'interaction entre développement du langage et conceptualisation*. Les mathématiques ne sont pas singulières sur ce point, mais elles ont une caractéristique qui les distingue parmi les disciplines scientifiques qui tient au caractère substantiellement abstrait de ses objets. L'histoire des mathématiques est jalonnée par les « inventions » de représentations dont le caractère instrumental permet l'expression du raisonnement avec une rigueur qui le rapproche du calcul. L'invention et le développement de l'écriture algébrique en est, bien sûr, l'exemple le plus remarquable.

Pour comprendre ce rôle des systèmes de représentation, langagier ou non langagier, il faut revenir sur l'histoire des mathématiques en se replaçant dans le contexte technique et épistémologique des mathématiciens de l'époque. C'est ce que fait Gilbert Arzac (2013) dans son livre sur la naissance du concept de convergence uniforme d'une série de fonctions d'une

variable réelle. Ce travail, que je ne présenterai pas ici⁶, montre le poids du langage et de l'absence d'une formalisation opératoire. Au début du XIX^e siècle, la notion of variable domine celle de fonction (variable indépendante versus variable dépendante). Le raisonnement est guidé par une conception cinématique de la continuité et de la convergence, et par le principe de continuité. La notation algébrique de la valeur absolue est manquante, la continuité est définie sur un intervalle—et non en un point—et est intimement liée à la continuité du dessin de la courbe. De plus, l'indisponibilité des quantificateurs rend difficile l'identification des dépendances et la négation des énoncés qui les impliquent (e.g. la discontinuité comme négation de la continuité). La conceptualisation n'a pu avancer qu'avec l'invention d'une technologie symbolique, en reprenant l'expression d'Alan Bishop (1988, p. 82 sqq), pour d'une part saisir et exprimer la convergence uniforme, telle que nous la connaissons aujourd'hui, et d'autre part assurer la construction d'une preuve que les mathématiciens reconnaissent irréfutable en même temps qu'ils la comprennent. Preuve qui prouve et qui explique.

Gilbert Arsac montre que pour échapper aux réécritures anachronique la connaissance peut être caractérisée par la donnée simultanée et reliée d'une part du problème en jeu, ici la conservation d'une propriété lors d'un passage à la limite, les systèmes de représentation disponibles, les opérations possibles et les moyens de validation accessibles. Ainsi, différents niveaux de validation se succèdent depuis l'argumentation de Cauchy dans le cours d'Analyse de 1821 jusqu'à sa révision dans un compte-rendu à l'académie des sciences en 1853. Cette évolution s'est poursuivie jusqu'à la formulation contemporaine du critère de Cauchy uniforme, passant de l'argumentation à de la démonstration.

Ce détour par l'histoire souligne la pertinence de la question posée par les enseignants de l'équipe académique Mathématiques de Bordeaux (2003, p. 5) : *n'est-il pas préférable de laisser l'élève s'exprimer dans son langage ?* L'institution, comme cela est signalé au début de cet exposé, apportera sûrement une réponse positive afin « de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation ». C'est peut-être l'idée des enseignants auteurs de la question qui souhaitent utiliser l'expression de l'élève pour « détecter les éléments positifs de son discours » (ibid.). Peut-être peut-on aller plus loin en créant les conditions pour que l'expression de l'élève soit un point de départ pour susciter son évolution et la compréhension de ses raisons.

Contrôle, preuve et validation

L'étude de la genèse de la preuve m'avait conduit à remarquer que « [des] contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution. » (Balacheff, 1988a, p. 36). Souligner ce caractère local était une négligence alors que j'observais par ailleurs la dépendance de ces contrôles aux conceptions engagées par les élèves (ibid. p. 305), leur place dans le choix d'une stratégie de résolution et leur rôle dans la décision de bonne fin — par exemple en revenant aux définitions. Il fallait lier contrôle, validation et preuve. Claire Margolinas va dans ce sens lors de son étude sur *l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, en mettant en évidence le lien fort entre contrôle et validation qu'elle exprime dans la définition qu'elle propose : « nous appellerons processus de contrôle le processus d'anticipation de la validation. » (Margolinas, 1993, p. 213).

⁶ Je reprends plus précisément la contribution de Gilbert Arsac à propos de l'apprentissages de la preuve dans (Balacheff, 2019) et à propos du lien entre preuve et conception dans (Balacheff, 2017).

Claire Margolinas distingue trois types de processus : (1) choix de la méthode, (2) procédé et procédure de résolution, (3) fin de résolution, (4) interprétation—distinction résultat/réponse (ibid. pp.214-215). Ces processus puisent dans le répertoire des moyens stratégiques ou tactiques, globaux ou locaux, qui permettent de juger, vérifier, choisir et valider une décision. L'ensemble de ces moyens, en relation avec des systèmes de représentation et des opérateurs dont ils dépendent et dont ils règlent l'usage, constitue la « structure de contrôle » qui entre dans la caractérisation d'une conception (Balacheff, 1995, 2017; Balacheff & Margolinas, 2005).

Les processus de contrôle fournissent le matériau de l'argumentation heuristique qui prend forme dans la phase privée de la résolution d'un problème. Dans cette phase, résolution et validation sont intriquées sans qu'il y ait le besoin pour l'élève, ou le groupe d'élèves, d'explicitier systématiquement ou précisément les raisons des actions mises en œuvre. Toutefois, cette explicitation est nécessaire à l'apprentissage de la preuve. Le problème de l'enseignant est donc de créer les conditions qui la sollicitent. Pour cela, les principaux leviers sont la création d'un défi peu tolérant à l'incertitude, un contexte d'interaction sociale (e.g. prise de décision collective) suscitant la formulation de l'argumentation dans un contexte susceptible de porter la contradiction, et un transfert vers les élèves de la responsabilité de la preuve. Le concept de *situation de validation* (Brousseau, 1998, p. 109-110) modélise les situations qui associent ces trois leviers. Le travail sur la validation y domine celui de la résolution en donnant une place prépondérante aux processus de contrôle. Il rend difficilement évitable leur explicitation, en particulier dans la phase de fin de la résolution. Alors que la solution est assurée du point de vue de celui ou celle qui l'a produite, il faut la faire accepter par d'autres, passer de l'explication (privée) à l'argumentation (publique) dans le but de la faire reconnaître comme preuve (institutionnalisée). Au cours du débat de preuve, la solution défendue peut être modifiée voire même rejetée. Ce rejet relance la résolution du problème.

L'idée, souvent reprise, qu'il y ait d'une part la résolution du problème et d'autre part la preuve (ou démonstration) n'est pas en contradiction avec l'observation de l'imbrication de la résolution et de la validation. Mais le discours clivant de l'institution induit leur séparation dans la pratique de l'enseignement alors que la résolution ne perd pas de vue la validation. La bonne fin de la phase conclusive dépend de la possibilité de construire un lien opérationnel en termes de connaissance ou de structuration logique entre résolution et validation (Garuti et al., 1998; Pedemonte, 2005).

En résumé, les processus de validation – contrôle, validation, preuve – se construisent sous au moins trois contraintes :

- Les *conceptions* mobilisées que caractérisent les opérateurs, les représentations et les contrôles disponibles.
- Le *langage et son organisation dans le discours* que l'on distinguera de la représentation des objets et de leur fonctionnement technique dans la résolution du problème. Ce langage décrit les mises en œuvre qu'il permet de communiquer et d'analyser.
- La *situation* qui fait peser des enjeux de validation plus ou moins forts qui règlent des principes d'économies de logique liés à toute pratique. Parmi ces situations celles incluant un débat de preuve engagent la personne au risque d'un glissement du projet de convaincre vers celui de persuader.
- Le *contrat didactique* qui, pour une situation donnée, détermine les responsabilités de la charge de la preuve.

De l'importance de la situation

Illustration 3 – la somme des angles d'un triangle

Le théorème sur l'invariance de la somme des angles d'un triangle est l'un des apprentissages fondamentaux de la géométrie au début du cycle 4. Une façon fréquente de l'introduire est de proposer une activité telle que par exemple :

- (a) Tracer un triangle ABC et mesurer ses trois angles.
 - (b) Calculer la somme de ces trois mesures.
- Que remarque-t-on ?
Cette conjecture semble-t-elle vraie pour n'importe quel triangle ?
(d'après Barnet, 2016, p. 201)

Une telle introduction manque l'opportunité qu'offrirait une mise en situation qui problématiserait la conjecture en amont du théorème. En effet, avant que le théorème soit connu, la plupart des élèves pensent que plus un triangle est grand plus la somme de ses angles est grande⁷. Il est possible de s'appuyer sur cette conception pour susciter la prise de conscience de l'invariant et, mieux encore, pour provoquer l'intérêt pour une preuve intellectuelle parce que les preuves empiriques seraient disqualifiées.

Ce qui suit décrit les grandes lignes d'une séquence de situations didactiques pour aller de la conjecture dans un sens fort, c'est-à-dire qu'il y a de bonnes raisons de penser que l'invariant géométrique est vrai, à la recherche d'une preuve mathématique du théorème « la somme des angles d'un triangle est 180° ». Les premières utilisations de cette séquence remontent au milieu des années 80, en classe de 5^e, je reprends la description de l'époque (Balacheff, 1987a). Le principe est (1) de mobiliser la conception qui doit être déstabilisée et reconsidérée, (2) obtenir la formulation de la conjecture, (3) disqualifier le recours aux mesures comme moyen de preuve pragmatique pour permettre l'exigence légitime de preuves intellectuelles.

La première situation met en place le cadre de l'activité. Elle ne cherche pas l'explicitation ou la discussion de la conception dont l'évolution est visée, ni à susciter la conjecture.

- l'enseignant demande que chaque élève trace un triangle, qu'il en mesure les angles, puis qu'il fasse la somme des résultats obtenus ;
- l'enseignant justifie cette activité en expliquant qu'il s'agit de poursuivre l'étude de l'usage du rapporteur et de la mesure des angles ;
- à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme, les résultats obtenus. Il demande un commentaire aux élèves.

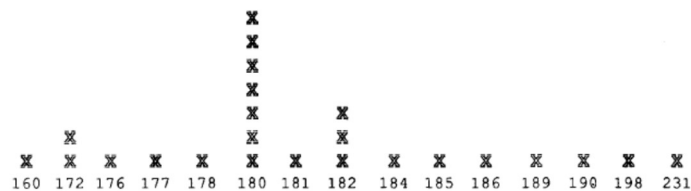


Figure 11 - exemple d'historgramme à l'issue de la première situation

Tous les résultats proposés sont acceptés. En effet, à cette étape, dans le référentiel des élèves, la diversité n'a pas de signification particulière : elle reflète à leurs yeux la diversité

⁷ Voir ci-dessus le cas de l'aire et du périmètre d'une rectangle.

des triangles dessinés. Le commentaire demandé n'est là que pour "clôre" cette première situation, il peut se limiter à une remarque sur la dispersion des valeurs ou au contraire sur la fréquence de telle ou telle valeur. *L'enseignant reste en retrait.*

Pour différencier ce qui tient à l'incertitude des mesures de ce qui tient aux conceptions des élèves, il faut que toute la classe soit confrontée à la mesure des angles d'un même triangle. C'est ce que réalise la deuxième situation :

- l'enseignant remet à chaque élève une copie d'un même triangle assez « grand » pour favoriser l'engagement de la conception attendue, en effet, le premier triangle dessiné par les élèves occupe rarement plus de la moitié de la page ;
- l'enseignant demande à chaque élève de formuler un pari sur la somme des mesures des angles de ce triangle et de l'inscrire sur une feuille qui sera récoltée ;
- l'enseignant demande ensuite que chaque élève mesure les angles du triangle donné puis qu'il calcule la somme des nombres obtenus ;
- à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme, les résultats obtenus ;
- pour chaque élève les résultats sont confrontés aux paris, un commentaire est demandé à l'élève ;
- l'enseignant demande à la classe des commentaires sur l'histogramme.

Pour parier, les élèves recourent à une estimation de la mesure des angles, ce qui leur est parfois demandé pour la reconnaissance des angles de 45° ou 90° , et à la comparaison du triangle qui leur est proposé avec leur triangle initial. C'est de cette dernière comparaison que sont issus les paris sur des nombres très sensiblement plus grands que ceux obtenus au cours de la première activité.

Il est attendu que des commentaires sur l'histogramme formulent l'exigence que tous les élèves aient trouvé la même mesure pour le même triangle. Les différences qui ne manquent pas d'apparaître sont explicables par les incertitudes sur les mesures ; incertitudes propres aux instruments ou dues aux pratiques. *L'enseignant le souligne.*

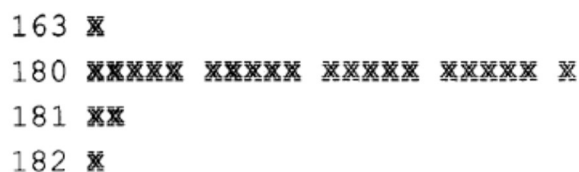
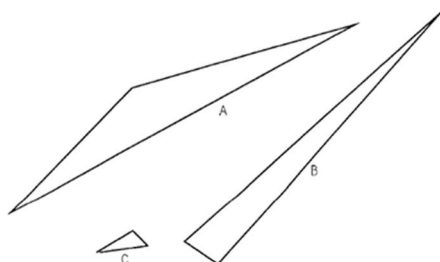


Figure 8 – exemple d'histogramme à l'issue de la deuxième situation

À cette étape, la conjecture n'a pas de légitimité bien que certains (p. ex. les redoublants) puisse la proposer. Pour favoriser l'explicitation de conceptions et leurs discussions la troisième situation est organisée en constituant des petites équipes selon le schéma suivant :



- l'enseignant remet une feuille sur laquelle sont dessinés trois triangles ;
- il demande à chaque groupe de formuler un pari sur la somme des mesures des angles pour chacun des triangles puis d'inscrire ce pari sur une feuille qui sera récoltée ;
- l'enseignant demande aux équipes de mesurer les angles pour chaque triangle, et de calculer la somme des nombres obtenus ;

- à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme pour chaque triangle, les résultats proposés ;
- pour chaque équipe les résultats sont confrontés aux paris et un commentaire est demandé par l'enseignant

Le recensement des mesures, avec la réalisation d'un histogramme pour chacun des triangles, est l'occasion pour chacun des groupes d'une confrontation des paris aux résultats des mesures. Le commentaire demandé, favorise l'explicitation des conceptions et souligne la contradiction éventuelle entre pari et mesure.

C'est à ce moment que la conjecture sur l'invariance de la somme des angles peut être formulée comme telle et le problème de sa validation ou de sa réfutation est posé.

On peut observer des élèves qui refusent longtemps la conjecture ne pouvant imaginer, par exemple, qu'un triangle très « pointu » ne puisse avoir une somme des angles plus en rapport avec sa forme (l'angle de la pointe est si petit). Pour le plus grand nombre la recherche d'une preuve devient *le problème à résoudre*. *Le défi collectivement relevé est celui de la construction d'une preuve qui ne peut être empirique car le recourt au dessin et aux mesures a été disqualifié.*

L'observation de la séquence a en particulier été conduite dans deux classes, l'une sans position particulière affichée sur la question de la preuve, l'autre qui avait été introduite aux « règles du débat scientifique » (Balacheff, 1988b). Dans le premier cas, sans que cela soit abouti, le travail a progressé vers une preuve intellectuelle mais ses caractéristiques n'ont pu être discutées ; l'action prévalant, l'enseignant n'avait pas de leviers pour susciter cette discussion. Dans le second cas, les élèves cherchent à s'en tenir aux règles du débat que certains instrumentalisent dans le jeu procédurier d'une injonction à prouver ou à réfuter ; l'enseignant est interpellé comme arbitre du respect des règles. Dans les deux cas, alors que la séquence conduit efficacement à poser le problème de la preuve, l'enseignant se trouve confronté au problème de la conclusion et de l'institutionnalisation qui peut difficilement se porter sur autre chose que la validité de la preuve apportée alors que ce c'est la reconnaissance des principes d'une telle preuve qui était visée.

Cette limite, confirmée par les travaux les plus récents (p. ex. Stylianides, 2007), est le problème le plus important sur lequel nous devons avancer.

Situation de validation au sens de la théorie des situations didactiques

Les caractéristiques de la situation dans laquelle se trouve l'élève conditionne, tout particulièrement aux niveaux élémentaires, le fait qu'il prenne ou non la responsabilité de la validité de la solution d'un problème. Prendre cette responsabilité, c'est-à-dire ne pas la laisser à l'enseignant ou la déléguer à un autre élève, est le moteur de l'apprentissage de la preuve, de son rôle, de ses méthodes et critères, de ses formes. La théorie des situations didactiques modélise de telles situations pour les comprendre et les concevoir. Je ne présenterai pas de façon détaillée le concept de situation de validation, je rappelle simplement l'idée que Brousseau avait en le forgeant à la fin des années 60 parce qu'elle donne une direction à la réflexion que nous devons mener aujourd'hui pour satisfaire aux ambitions des programmes :

« L'élève doit établir la validité d'une assertion, il doit s'adresser en tant que sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. Ces échanges contribuent à faire expliciter les théories mathématiques mais aussi à mettre en place les mathématiques en tant que moyen d'éprouver celles que l'on conçoit. Une démarche de preuve est construite dans une dialectique de la validation qui conduit l'élève, successivement à user spontanément des figures

de rhétorique puis à y renoncer. Les relations que l'élève doit pouvoir établir pour cela sont spécifiques de cette dialectique. » (Brousseau, 1998, p. 127).

Le modèle d'une situation de validation est un jeu social dont l'enjeu est la validité d'un énoncé qui doit pouvoir être explicitement défendu ou rejeté par les protagonistes sur un pied d'égalité quant à la légitimité de prétendre la validité ou de la réfuter. Les échanges requièrent le partage d'un système de représentation, langagier et/ou non langagier, et d'une référence (savoirs, milieu matériel, ressources documentaires).

Une situation de validation orientée vers un apprentissage *explicite* de la preuve devra inclure le besoin de reconnaître la nécessité de règles, de les énoncer et dans convenir collectivement, ainsi que celle d'un accord sur la structure du discours et ses critères d'acceptation. La situation de résolution de problème sur laquelle se construit la situation de validation doit susciter non seulement le débat de preuve, mais aussi celui sur la nature et la légitimité de cette preuve. Pour cela, chaque élève a pour « antagoniste »⁸ le milieu « contre lequel » il résout le problème et les autres élèves « contre qui » il ou elle défend la validité de sa solution ou la légitimité de sa réfutation d'une solution par ailleurs soutenue.

Le schéma ci-dessous (fig. 12) reprend le schéma initial des situations de validation (ibid. p.110) en explicitant, dans le modèle du jeu à deux joueurs tour à tour proposant et opposants, du point de vue du « joueur A », le milieu pour la validation qui inclut le milieu pour la résolution du problème, et le « joueur B ».

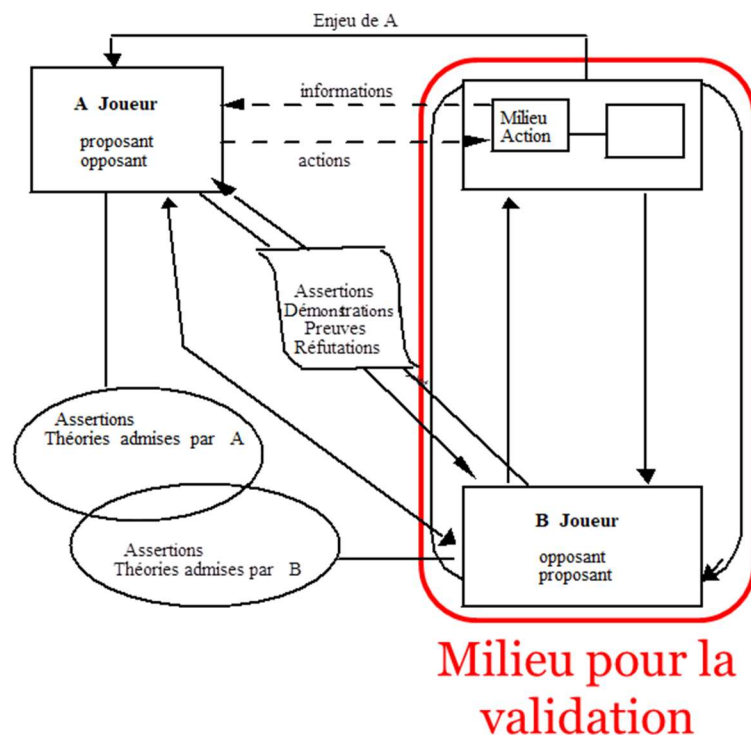


Figure 12

⁸ Je reprends ici les termes utilisés par Guy Brousseau (Brousseau, 1998, p. 93) pour définir le milieu au sens de théorie des situations didactiques.

Ainsi, l'interaction sociale est-elle nécessaire aux situations dont l'objet est l'apprentissage explicite de la preuve, le milieu matériel ne suffit pas (Margolinas, 1993, p. 84). Dans ce jeu de la validation, la compétence langagière est l'instrument de la dialectique du vrai et du faux, il inclut les techniques propres aux registres sémiotiques des mathématiques (e.g. écriture algébrique, représentation et codage des objets géométriques), et les figures rhétoriques de la discipline. L'apprentissage de la preuve, au-delà de l'apprentissage de techniques, passe par l'acculturation à des pratiques discursives.

De l'argumentation outil à la preuve objet

Lors de son cours intitulé « Rationalité et démonstration mathématiques » donné lors de la cinquième école d'été de didactique des mathématiques, Marc Legrand formulait l'hypothèse selon laquelle « Il n'est pas beaucoup plus raisonnable d'espérer pouvoir introduire inductivement et naturellement les élèves ou les étudiants dans la rationalité mathématique, à partir d'une pédagogie centrée sur les situations-problèmes, qu'il ne l'est de croire qu'ils finiront bien par entrer dans cette rationalité grâce à une pédagogie de simple monstration. » (Legrand, 1990, p. 386). Cette hypothèse est confortée tant par la pratique de l'enseignement que par la recherche expérimentale qui a bien des difficultés à situer le rôle de l'enseignant et ses moyens. Les situations de « débat scientifique » (Legrand et al., 2011) cherchent à donner une réponse opérationnelle pour sortir de ce qui apparaît comme un dilemme tant pour l'enseignement que pour l'institution. Elles reposent sur un engagement fort de l'enseignant initiateur de situations ayant une « consistance épistémologique », une « bonne adéquation avec la nature des savoirs à enseigner [...] au milieu des connaissances effectivement disponibles chez les élèves/étudiants » (ibid. p. 115) puis son relatif retrait en arbitre des échanges jusqu'au moment d'une nécessaire institutionnalisation « pour mettre de l'ordre dans le désordre qu'introduit fatalement le débat et pour introduire et expliquer ce qu'aucun débat ne peut introduire et/ou expliquer à un coût raisonnable. » (ibid. p.116).

Ce que Marc Legrand désigne, et sur quoi il insiste, est l'ensemble des règles du débat pour l'acceptation de la preuve et, corrélativement, de la réfutation en mathématique. Il faut, pour expliciter ces règles, *passer de l'argumentation outil de la validation* qui repose sur des règles tacites, au débat sur *l'argumentation comme objet dont les caractéristiques explicitées conditionnent sa recevabilité comme preuve*. En d'autres termes, la question de la validité de la solution du problème précisément en jeu doit être dépassée pour laisser la place à celle des critères du vrai qui n'est pas autre chose que poser les bases de la production des connaissances mathématiques.

Les difficultés de l'enseignement de la démonstration ont souvent conduit à privilégier celui des règles de production de la preuve et des formes de sa formulation ramenées à un apprentissage de la logique. Ainsi l'acquisition du schéma fondamental du modus ponens ($A, A \rightarrow B \vdash B$) et de ses conditions d'utilisation apparaît-elle être le principal objectif. Cette priorité met au second plan le fait que la validation d'un énoncé ne tire pas sa légitimité du seul statut des énoncés mobilisés par le problème considéré, mais de celui de l'ensemble de ceux auxquels ils sont liés au sein d'un ensemble structuré ; une théorie qui doit être reconnue pour telle. Avec toutes les précautions qu'appelle l'utilisation de ce vocabulaire, ce qui est à l'ordre du jour est l'entrée des élèves dans une problématique théorique.

La comparaison de l'enseignement en France et dans d'autres pays conforte cette observation : le caractère localement organisé des connaissances impliquées dans la production d'une preuve dans les livres scolaires français contraste avec l'organisation quasi-axiomatique au Japon (Miyakawa, 2016, sect. 3.3.3), ce qui n'exclut pas l'existence et l'usage d'un répertoire de théorèmes qui constitue le savoir officiel (Knipping, 2003, p. 6/10) mais c'est autre chose.

La référence à un cadre théorique explicite en tant que contexte de l'activité mathématique est présente dans nombre de recherches mais n'a pas été thématifiée jusqu'à la proposition de définir « théorème mathématique » comme le système des relations mutuelles entre trois composantes : un énoncé, sa preuve et la théorie au sein de laquelle cette preuve prend sens (Mariotti et al., 1997, p. 182-183).

Outre la maîtrise de compétences de raisonnement (logique), l'apprentissage de la preuve en mathématique implique la prise de conscience de ce qui la sépare de l'argumentation naturelle acquise au fil des interactions sociales quotidiennes, et une rupture épistémologique pour entrer dans une problématique théorique dont la nature est essentiellement différente de celle de la connaissance commune.

Modéliser les situations qui permettent de prendre en charge cette rupture reste le principal problème auquel nous sommes confrontés. De telles situations doivent réunir les conditions pour que l'argumentation, coeur de la résolution de problèmes, soit prise comme objet pour comprendre et apprendre ce qu'est une preuve en mathématique. L'apprentissage se fera dans une dialectique du pratique et du théorique au sens de la dialectique outil-objet conceptualisée par Régine Douady dans laquelle, il faut le rappeler, l'objet est plus que la somme de ses caractéristiques logiques et discursives :

« Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine. » (Douady, 1992, p. 134)

Conclusion : l'argumentation, un précurseur problématique

Contrôle, preuve et démonstration sont trois régimes de la validation dont les poids respectifs changent au long du continuum qui va de la résolution d'un problème à la communication de sa solution selon une norme édictée par l'institution. Leurs interactions mutuelles et leur dépendance aux conceptions sous-jacentes, qui les rendent possibles et dont ils suscitent l'évolution, les constituent en un système dont la nature détermine celle des mathématiques elles-mêmes.

Au cours des dernières décades, la doctrine institutionnelle a cherché à établir un rapport aux mathématiques plus proche des caractéristiques épistémologiques de la discipline. Ainsi l'acquisition de savoirs est-elle complétée – ou peut-être contextualisée – par celle de « compétences » parmi lesquelles les programmes actuels désignent *chercher*, *raisonner* et *communiquer*. La définition assez large et non réductible à des techniques de ces compétences pourrait-elle permettre l'émergence d'une activité qui donne de l'épaisseur au discours mathématique et pourrait *faire vivre dans la classe une véritable petite société mathématique* ? En reprenant, pour formuler cette question, les mots de Guy Brousseau (1998, p. 111). Bien sûr, il n'y a pas de réponse tranchée. En revanche, les résultats de la recherche tant sur l'amont épistémologique que sur l'ingénierie de situations pratiquées effectivement ou conçues à des fins expérimentales constituent une base solide pour construire un programme scientifique qui permettra d'y répondre.

Lorsque Guy Brousseau utilise les expressions que j'emprunte ci-dessus, il fait référence à des « situations de preuve ». Cette expression ne se retrouve que trois fois dans l'ouvrage de référence « Théorie des situations didactiques » (Brousseau, 1998, p. 43, 111 & 313), notamment dans la section consacrée au schéma de la validation explicite (ibid p.109 sqq). Comme on le sait, c'est le concept de « situation de validation » qui est retenu comme l'un

des concepts fondateurs de la théorie. Il apparaît, pour les questions que nous considérons ici, nécessaire mais insuffisant : les situations de preuve doivent avoir les caractéristiques des situations de validation avec la contrainte supplémentaire de créer les conditions d'un besoin intrinsèque d'analyse, de certification et d'institutionnalisation des moyens de la preuve dans le cadre collectif de la classe. Ces conditions et les moyens de les créer ne sont pas encore déterminés, en particulier parce que si on sait assez précisément ce qu'est une preuve en termes d'objectif d'acquisition à la fin du cycle 4, en revanche il n'y a pas de caractérisation précise et partagée qui puisse servir de référence dans le cours de la scolarité qui précède, dès le cycle 2.

Ainsi, deux grands sujets devraient structurer le programme scientifique à venir : la caractérisation de l'argumentation mathématique et les formes de l'institutionnalisation des preuves en amont du moment si particulier de l'affirmation de la démonstration comme « moyen mathématique d'accès à la vérité » ainsi que le formule les commentateurs.

Une *argumentation mathématique* doit au moins être potentiellement recevable au regard des normes de la classe de mathématiques, c'est-à-dire être acceptée pour preuve par la classe et confirmée par l'enseignant. Il ne s'agit là que d'une clarification minimale prenant en compte la dimension sociale. Je propose de partir, pour ce qui concerne le contenu et la forme, de la proposition d'Andreas Stylianides (2007, p. 291) dans laquelle les termes « proof » et « mathematical argument » semblent synonymes, ce qui est souvent le cas dans la littérature anglo-saxonne. :

« Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics: 1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification; 2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and 3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community. ».

L'intérêt de cette proposition est de mettre en évidence trois dimensions qui correspondent raisonnablement à trois problèmes qui seront à résoudre pour disposer d'une caractérisation opérationnelle. La première caractéristique soulève la question de la création d'une référence dont il faut modéliser la forme et préciser les conditions de création ; elle correspond au premier terme, Théorie, du triplet définitoire de Théorème mathématique au sens d'Alessandra Mariotti. La mémoire institutionnelle en est une prémisse mais elle ne suffit pas dans la mesure où elle n'apparaîtrait que comme un répertoire de ressources. La deuxième et la troisième caractéristiques distinguent deux aspects de l'argumentation, sa nature (*mode of argumentation*) et son expression (*argument representation*). Ces deux caractéristiques sont en fait, comme je me suis attaché à le montrer, intriquées dans le processus de production de l'argumentation. Les problèmes nombreux qu'elles soulèvent incluent notamment celui de la dépendance du raisonnement (*mode of reasoning*) à son expression qui ne peut être abstraite des connaissances qui le sous-tendent—que l'on pense, par exemple, au cas de l'exemple générique et à celui de l'expérience mentale.

Bien que les racines historiques de la démonstration lui donneraient une légitimité (Arsac, 1987), le concept d'argumentation mathématique sera un concept didactique et non la transposition d'un savoir mathématique. On ne peut le concevoir comme transposition de la démonstration sauf à considérer que à la fonction « sociale » de celle-ci, au sein de la communauté scientifique, lui serait constitutive. Ce serait une erreur tant épistémologique que théorique : bien que le produit d'une activité humaine objet d'une certification au terme d'un processus social, la démonstration est indépendante d'une personne ou d'un groupe particulier. La normalisation de la preuve en mathématique, outre le caractère institutionnel de

sa référence (le *savoir* mathématique), a requis sa dépersonnalisation, sa décontextualisation et son atemporalité. Or l'argumentation est intrinsèquement portée par un agent, individuel ou collectif, et dépendante des circonstances de sa production. Il s'agit là d'une difficulté attestée par la vigueur des débats sur la recevabilité des preuves « sans mots » ou celle des exemples génériques.

Les caractéristiques de l'argumentation mathématique doivent non seulement la distinguer d'autres types d'argumentation, garantir la possibilité de la transition vers la norme de la démonstration, mais aussi être opérationnelles lorsqu'il s'agit d'arbitrer les propositions des élèves et éventuellement de les institutionnaliser pour les organiser et les capitaliser dans la classe. L'argumentation mathématique ne peut se soustraire aux exigences de l'institutionnalisation et la reconnaissance de son caractère mathématique ne peut être réduit au jugement sur sa seule forme. Comment, par exemple, arbitrer le cas de l'exemple générique qui met en balance le général et le particulier dont l'équilibre se trouve au terme d'un débat contradictoire recherchant un accord aussi peu que possible entaché de compromis ?

Enfin, les preuves sont à la fois fondatrices et organisatrices des connaissances. Dans le cours de l'apprentissage elles contribuent à conforter leur évolution et à outiller leur organisation. Dans l'enseignement, elles légitiment les nouveaux savoirs et les constituent en système : savoirs et preuves reliés font Théorie. La fonction d'institutionnalisation des situations de preuve place la validation explicite sous l'arbitrage de l'enseignant qui est in fine le garant de son caractère mathématique. Cette dimension sociale, au sens où le fonctionnement scientifique dépend d'une organisation construite et acceptée, est au cœur de la difficulté de l'enseignement de la preuve en mathématiques.

Bibliographie

- Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration : Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 8(3), 48.
- Arsac, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme : De la difficulté historique du raisonnement sur les limites*. Hermann.
- Balacheff, N. (1987a). *Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture* (N° 39 ; Cahier de didactique des mathématiques). IREM de Paris VII.
- Balacheff, N. (1987b). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Balacheff, N. (1988a). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* [Doctorat ès-sciences]. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 2-8.
- Balacheff, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs Algebra the Core of a Didactical Dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Éd.), *Perspectives on School Algebra* (p. 249-260). Springer Netherlands.
- Balacheff, N. (2010). *Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective*. 36.
- Balacheff, N. (2017). CK ϵ , a model to understand learners' understanding – Discussing the case of functions. *El Calculo y Su Enseñanza*, IX (Jul-Dic), 1-23.
- Balacheff, N. (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Éd.), *Actes de la VII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques* (p. 215-229). IREM de Clermont-Ferrand.

- Balacheff, N. (2019). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In J. Pilet & C. Venda (Éd.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018* (p. 423-456). ARDM et IREM de Paris - Université de Paris Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02333720>
- Balacheff, N. (1988b). Le contrat et la coutume, deux registres des interactions didactiques. In C. Laborde (Éd.), *Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques* (p. 15-26). La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (1978). Une utilisation et une étude de la classification proposée par A. W. Bell pour l'étude des preuves formulées par des élèves. *Publications du séminaire de pédagogie des mathématiques*. 1-22.
- Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). CK ϕ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Éd.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1 – 32).
- Barnet, C. (Éd.). (2016). *Maths Cycle 4: Vol. 5°*. Hachette éducation.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
- Boero, P. (2017). Cognitive unity of theorems, theories and related rationalities. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 99-106. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01873224>
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Éd.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 179-209). PME.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, (1983) 4(2), 164-198.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. La Pensée Sauvage.
- CNRTL. (s. d.). *Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales* [Outils et ressources pour un traitement optimisé de la langue]. Consulté 28 janvier 2020, à l'adresse <https://www.cnrtl.fr/definition/>
- Confrey, J. (1990). A review of the research on students' conceptions in mathematics, science, and programming. In: Courtney C. (ed.) *Review of research in education*. American Educational Research Association 16, 3-56.
- Delarivière, S., Frans, J., & Van Kerkhove, B. (2017). Mathematical Explanation: A Contextual Approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, 34(2), 309-329.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Douady, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-424.
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233-261.
- Duval, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, 37-61.
- EDUSCOL. (2016). *Mathématiques—Raisonnement*. MENESR-DGESCO; http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

- Équipe académique Mathématiques. (2003). *Initiation au raisonnement*. Académie de Bordeaux. http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedaclg/dosped/raisonnement/brochure_init_raison/brochure_intro.htm
- Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulties of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Éd.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 345-352).
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.
- Hanna, G. (2017, septembre 22). Connecting two different views of mathematical explanation. *Enabling Mathematical Cultures*. Enabling Mathematical Cultures, Mathematical Institute, University of Oxford. <https://enablingmaths.wordpress.com/abstracts/>
- Knipping, C. (2003). Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement – analyses comparatives des classes allemandes et françaises en 4ème Introduction. *Bulletin de l'APMEP*, 10.
- Laborde, C. (2003). Géométrie–période 2000 et après. *Proceedings of the EM–ICMI Symposium Geneva*, 20-22.
- Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 365-406.
- Legrand, M., Lecorre, T., Leroux, L., & Parreau, A. (2011). *Le principe du « débat scientifique » dans un enseignement*. IREM de Grenoble.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée Sauvage.
- Mariotti, M. A., Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Éd.), *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, p. 180-195). University of Helsinki.
- Mariotti, M. A., & Cerulli, M. (2001). *Semiotic mediation for algebra teaching and learning*. 3, 8.
- MENESR. (2018). Cycle 2. *Bulletin officiel de l'éducation nationale*, 30 (26-07-2018), 30.
- Miyakawa, T. (2016). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: The cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, 92(2), 37-54.
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(3), 313-347.
- Plantin, C. (1990). *Essai sur l'argumentation*. Éditions Kimé.
- Plantin, C. (1996). *L'Argumentation*. Seuil.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, 38(3), 289-321.
- Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Éd.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (p. 117-136). Reston, Virginia: NCTM. <https://pdfs.semanticscholar.org/d850/5fa1c58102b6a8e1ba3618f99cf3824ebe30.pdf>
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Éd.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 15, p. 13-49). Springer Netherlands.

- Teo Kwee Huang, & Ng Swee Fong. (2017). *Relational understanding triumphs over instrumental understanding: The case of Singapore primary four children's understandings of odd and even numbers*. [Poster]. Educational Research Association of Singapore.
- Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (La documentation française, p. 96) [Rapport public]. Ministère de l'éducation nationale. <https://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/184000086/>
- Walsch, W. (1983). *Mathematische Aufgaben für die Klassen 6 bis 10*. Volk und Wissen Volkseigener Verlag.