



**HAL**  
open science

## Interprétabilité des entropies d'ensembles flous intuitionnistes ou définis par intervalles

Christophe Marsala, Bernadette Bouchon-Meunier

► **To cite this version:**

Christophe Marsala, Bernadette Bouchon-Meunier. Interprétabilité des entropies d'ensembles flous intuitionnistes ou définis par intervalles. 29ème rencontres francophones sur la logique floue et ses applications, Oct 2020, Sète, France. pp.141-147. hal-02971226

**HAL Id: hal-02971226**

**<https://hal.science/hal-02971226v1>**

Submitted on 19 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Interprétabilité des entropies d'ensembles flous intuitionnistes ou définis par intervalles

## Interpretability of intuitionistic and interval-valued entropies

C. Marsala<sup>1</sup>

B. Bouchon-Meunier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sorbonne Université, CNRS, LIP6, F-75005 Paris, France.

Christophe.Marsala@lip6.fr

<sup>2</sup> Sorbonne Université, CNRS, LIP6, F-75005 Paris, France.

Bernadette.Bouchon-Meunier@lip6.fr

### Résumé :

Dans cet article, deux nouvelles définitions de monotonie sont introduites pour les entropies d'ensembles flous intuitionnistes (au sens d'Atanassov) et des entropies d'ensembles flous définis par intervalles. Elles sont basées sur l'utilisation de la représentation polaire de tels ensembles qui permet alors de proposer des définitions plus interprétables et plus proches de la définition de l'entropie classique.

### Mots-clés :

Entropie, mesure d'information, ensemble flou intuitionniste, ensemble flou défini par intervalles, monotonie

### Abstract:

In this paper, two new definitions of monotony are proposed for entropies of Atanassov Intuitionistic fuzzy sets intuitionists and interval-valued fuzzy sets. These definitions are based on a polar representation of such sets that enables us to propose more interpretable definitions that appear to be closer to the definition of the classical entropy.

### Keywords:

Entropy, information measure, intuitionistic fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, monotonicity

## 1 Introduction

Une propriété majeure des mesures d'entropie réside dans leur monotonie vis-à-vis d'un ordre donné, éventuellement partiel, sur les ensembles sur lesquels elles s'appliquent [3]. Dans la littérature, il n'existe pas une unique définition pour cette monotonie qui dépend principalement du choix de l'ordre qui est utilisé pour la définir.

Dans le domaine des ensembles flous, et en particulier des ensembles flous intuitionnistes au sens d'Atanassov (SFI) [2] et des ensembles flous définis par intervalles (IVFS) [15], plu-

sieurs entropies ont été proposées, souvent à partir d'une définition spécifique de monotonie [5, 6, 7]. Ces deux modèles de représentation étant équivalents [6, 8], les entropies proposées pour un des modèles sont facilement transposables à l'autre. De telles entropies sont utiles pour mesurer l'information apportée par un SFI ou un IVFS dans des applications d'aide à la décision [14] ou de construction d'arbres de décision flous en apprentissage automatique [4] par exemple.

Dans notre approche, nous proposons d'introduire la représentation polaire pour ces ensembles flous bipolaires afin de permettre une étude plus interprétable des entropies dans ce cadre [11, 12].

Cet article est composé des sections suivantes. Dans la Section 2, un rappel sur les ensembles flous intuitionnistes au sens d'Atanassov et sur les ensembles flous définis par intervalles est présenté ainsi que le lien existant entre ces deux modèles. Dans la Section 3, nous introduisons la représentation polaire de tels ensembles et nous mettons en évidence le rôle des deux composantes de cette représentation, le module et l'argument, pour de tels ensembles flous. Dans la Section 4, après un rappel des définitions de monotonie fréquemment utilisées ainsi que des trois principales mesures d'entropie d'ensembles flous intuitionnistes, nous proposons deux nouvelles définitions de monotonie pour de telles entropies. Ces deux nou-

velles définitions sont alors utilisées pour les trois entropies présentées. Dans la Section 5, nous concluons et présentons quelques perspectives de ce travail.

## 2 Représentations intuitionniste et par intervalles

Dans ce qui suit, on considère un univers discret  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  à partir duquel on souhaite étudier des ensembles d'éléments. On se focalise dans cette section sur deux représentations de l'imprécision de l'appartenance d'un élément  $u$  à un ensemble  $A$  de  $U$ . Les *ensembles flous intuitionnistes* et les *ensembles flous définis par intervalles* sont deux modèles de représentation qui mettent en évidence deux façons différentes de représenter la même connaissance sur l'appartenance d'un élément à  $A$ .

Comme cela a déjà été montré dans la littérature, ces deux modèles sont équivalents mais on peut considérer qu'ils apportent chacun une manière différente de voir la définition de l'ensemble  $A$ .

### 2.1 Ensembles flous intuitionnistes (SFI)

Au sens d'Atanassov, un *ensemble flou intuitionniste*  $A$  de  $U$  est défini [2] par :

$$A = \{(u, \mu_A(u), \nu_A(u)) \mid u \in U\}$$

avec  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$  et  $\nu_A : U \rightarrow [0, 1]$  telles que  $0 \leq \mu_A(u) + \nu_A(u) \leq 1$ ,  $\forall u \in U$ . Ici,  $\mu_A(u)$  et  $\nu_A(u)$  représentent respectivement le degré d'appartenance et le degré de non-appartenance de  $u$  à  $A$ .

Ainsi, en particulier, l'ensemble  $U$  est donc le SFI tel que  $\mu_U(u) = 1$  et  $\nu_U(u) = 0$  pour tout  $u \in U$  et l'ensemble vide est, lui, le SFI tel que  $\mu_U(u) = 0$  et  $\nu_U(u) = 1$  pour tout  $u \in U$ .

La marge d'hésitation existant dans l'appartenance de  $u$  à  $A$ , donnée par  $\pi_A(u) = 1 - (\mu_A(u) + \nu_A(u))$ , est appelée *index intuitionniste* de  $u$  à  $A$ . Cet index renseigne sur un

manque de connaissance que l'on a sur  $A$ . Lorsque cette marge d'hésitation est nulle pour tous les éléments de  $A$ , c'est-à-dire quand  $\mu_A(u) + \nu_A(u) = 1$ ,  $\forall u \in U$  alors  $A$  est un ensemble flou classique.

Un SFI  $A$  tel que  $\mu_A(u) = \nu_A(u) = 0$ ,  $\forall u \in U$  est dit *complètement intuitionniste* [5], cela correspond à un SFI pour lequel aucune information sur l'appartenance ou la non-appartenance des éléments n'est disponible et, donc, la marge d'hésitation est maximale.

### 2.2 Ensembles flous définis par intervalles (IVFS)

Les ensembles flous définis par intervalles ("*interval-valued fuzzy sets*") ont été introduits par Lotfi Zadeh en 1975 [15]. Dans ce qui suit, on utilise les notations classiques utilisées dans la littérature [7, 8].

Un IVFS  $A$  de  $U$  est défini par une fonction  $F_A$  de  $U$  dans  $\mathbb{I}([0, 1])$ , l'ensemble des intervalles fermés de  $[0, 1]$ , telle que pour tout  $u \in U$ ,  $F_A(u) = [\underline{f}_A(u), \bar{f}_A(u)]$  avec  $\underline{f}_A(u) \leq \bar{f}_A(u)$ . On note alors l'IVFS  $A = \{(u, [\underline{f}_A(u), \bar{f}_A(u)]) \mid u \in U\}$ .

Cet intervalle représente un encadrement du degré d'appartenance de  $u$  à  $A$  :  $\underline{f}_A(u)$  représente la valeur minimale que l'on peut donner au degré d'appartenance de  $u$  à  $A$ , et  $\bar{f}_A(u)$  représente la valeur maximale que l'on peut donner à ce degré. Plus cet intervalle est grand, et moins on a de connaissance ou d'information fiable sur l'appartenance de  $u$  à  $A$ .

Dans le cas où l'on a  $\underline{f}_A(u) = \bar{f}_A(u)$  pour tout  $u \in U$  alors on se trouve dans le cas où  $A$  est un ensemble flou classique.

### 2.3 Liens entre SFI et IVFS

De nombreux auteurs ont montré que le modèle de représentation intuitionniste et celui par intervalles étaient, en fait, équivalents. En effet, il existe une bijection entre l'ensemble des SFI de

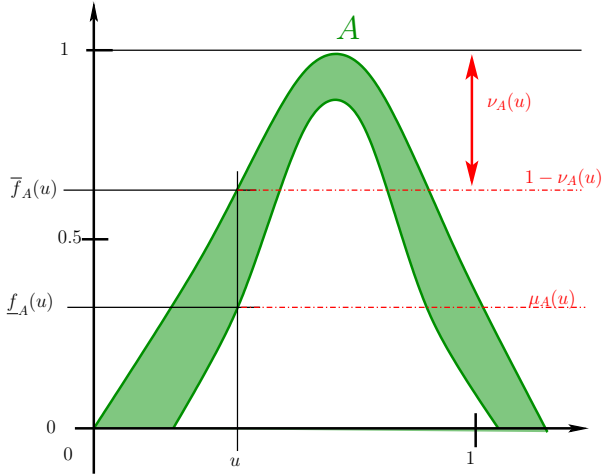


Figure 1 – Liens entre SFI et IVFS.

$U$  et l'ensemble des IVFS de  $U$  [1, 5, 7, 8]. En d'autres termes, on peut construire un SFI à partir d'un IVFS et réciproquement.

Le SFI  $A = \{(u, \mu_A(u), \nu_A(u)) \mid u \in U\}$  se représente sous la forme de l'IVFS

$$\{(u, [\mu_A(u), 1 - \nu_A(u)]) \mid u \in U\}.$$

De même, l'IVFS  $A = \{(u, [f_A(u), \bar{f}_A(u)]) \mid u \in U\}$  se représente sous la forme du SFI

$$\{(u, [f_A(u), 1 - \bar{f}_A(u)]) \mid u \in U\}.$$

La Figure 1 montre la représentation en tant qu'IVFS de  $A$  ainsi que équivalent sous la forme d'un SFI.

### 3 Représentation polaire

Un SFI  $A = \{(u, \mu_A(u), \nu_A(u)) \mid u \in U\}$  peut être représenté dans un espace cartésien par l'ensemble des points  $(\mu_A(u), \nu_A(u))$  pour tout élément  $u \in U$ , définis dans  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Il est aussi possible de choisir d'utiliser une représentation polaire pour cet ensemble de points [11, 12]. Chaque élément  $u$  est alors représenté par  $(r_A(u), \theta_A(u))$ , c'est-à-dire par son module  $r_A(u)$  et son argument  $\theta_A(u)$ . Le module est défini par  $r_A(u) =$

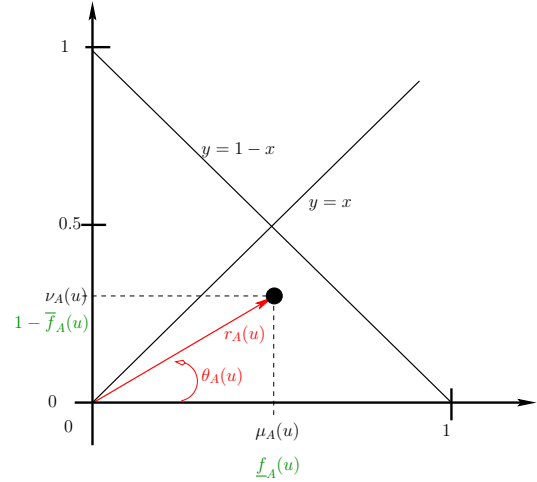


Figure 2 – Représentations de SFI et de IVFS.

$\sqrt{\mu_A(u)^2 + \nu_A(u)^2}$ , il correspond à la distance du point à l'origine. L'argument  $\theta_A(u)$ , tel que  $\tan \theta_A(u) = \frac{\nu_A(u)}{\mu_A(u)}$  si  $\mu_A(u) \neq 0$  ou  $\theta_A(u) = \frac{\pi}{2}$  sinon, est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite passant par les points  $(0, 0)$  et  $(\mu_A(u), \nu_A(u))$  (Figure 2).

Dans ce qui suit, pour alléger les notations,  $r_A(u)$  et  $\theta_A(u)$  sont notés respectivement  $r$  et  $\theta$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Dans [12], cette représentation polaire des SFI permet de réaliser une étude des variations des mesures d'entropie de SFI de façon plus aisée et plus intuitive, et elle apporte une vue plus interprétable de ces variations.

À partir de ce qui a été dit dans la Section 2.3, il est facile de voir qu'il est aussi possible de représenter ainsi un IVFS. L'IVFS  $A = \{(u, [f_A(u), \bar{f}_A(u)]) \mid u \in U\}$  est représenté dans un repère cartésien par l'ensemble des points de coordonnées  $(f_A(u), 1 - \bar{f}_A(u))$  pour tout  $u \in U$ . La transformation en coordonnées polaires se fait alors de la même façon que pour les SFI (Figure 2).

La représentation polaire des SFI et des IVFS est un outil intéressant pour les étudier, en effet, le module et l'argument combinent de façon conjointe les 2 aspects d'appartenance et de non-appartenance.

### 3.1 Rôle de $r$

Pour  $\theta$  fixé entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , le module  $r$  varie entre 0 et  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})^{-1}$  qui correspond à la distance entre le point origine  $(0, 0)$  et le point d'intersection entre la droite  $y = x - 1$  et la droite qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses. Quand  $r$  vaut 0, on se trouve alors dans un cadre complètement intuitionniste, et quand  $r$  vaut  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})^{-1}$ , cela correspond au cadre des ensembles flous classiques.

Ainsi, pour  $\theta$  fixé, la valeur de  $r$  nous renseigne donc sur la connaissance que l'on a sur l'appartenance de l'élément  $u$  de  $A$  : plus  $r$  est grand et moins on manque d'information pour savoir si  $u$  appartient ou non à  $A$ .

On retrouve ici un rôle proche de celui de l'index intuitionniste  $\pi_A(u) = 1 - (\mu_A(u) + \nu_A(u))$ .

### 3.2 Rôle de $\theta$

Lorsque  $r$  est fixé entre 0 et  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , l'argument  $\theta$  peut varier entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  (remarque : si  $r$  est plus grand que  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , les variations de  $\theta$  sont plus restreintes pour conserver la propriété des SFI).

Dans ce cas, en dehors du cas où  $A$  est complètement intuitionniste, on peut relever 3 valeurs remarquables de  $\theta$  :

- si  $\theta = 0$ , alors l'élément  $u$  correspondant se trouve sur l'axe des abscisses, et donc la valeur de  $\nu_A$  est nulle, dans ce cas c'est donc que  $u$  appartient au moins un peu à  $A$  ;
- si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , alors l'élément  $u$  correspondant se trouve sur l'axe des ordonnées, et donc la valeur de  $\mu_A$  est nulle, dans ce cas c'est donc que l'élément  $u$  n'appartient pas à  $A$  ;
- si  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , alors l'élément  $u$  correspondant se trouve sur la droite  $y = x$ , c'est-à-dire que  $\mu_A = \nu_A$ , l'information que l'on possède sur l'élément  $u$  ne nous permet pas de trancher sur son appartenance

ou sa non-appartenance à  $A$ .

Ainsi, pour  $r$  fixé, on peut remarquer que l'écart  $|\theta - \frac{\pi}{4}|$  nous donne une information sur la façon dont on peut décider si l'élément  $u$  correspondant appartient ou non à  $A$  : plus  $\theta$  s'écarte de  $\frac{\pi}{4}$  et plus un des degrés (appartenance ou non-appartenance) prend le pas sur l'autre.

## 4 Entropies et monotonies

Dans ce qui suit, nous présentons les entropies du point de vue SFI ce qui, comme cela a été vu dans la Section 2.3, est équivalent au point de vue IVFS.

Une mesure d'entropie de SFI est une mesure  $E$  qui à tout SFI associe une valeur dans  $[0, 1]$  (ou parfois, dans  $\mathbb{R}^+$ ). Cette mesure  $E$  doit être monotone selon un certain ordre  $\leq$  donné. Ainsi, toutes les entropies satisfont une propriété relative à une certaine forme de monotonie [3]. Dans le cas des entropies de SFI, la définition de cet ordre diffère selon les auteurs.

### 4.1 Ordres et entropies

Dans la littérature, la relation d'ordre qui est principalement utilisée pour définir des mesures d'entropie de SFI repose souvent sur la définition de l'ordre partiel *moins flou que*.

Nous présentons ici deux relations d'ordre utilisées dans les mesures d'entropie définies dans [5, 10, 13].

(M1)  $E(A) \leq E(B)$ , si  $A$  est *moins flou que*  $B$ ,

c'est-à-dire que  $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$  et  $\nu_A(u) \geq \nu_B(u)$  quand  $\mu_B(u) \leq \nu_B(u)$ ,  $\forall u \in U$ , ou  $\mu_A(u) \geq \mu_B(u)$  et  $\nu_A(u) \leq \nu_B(u)$  quand  $\mu_B(u) \geq \nu_B(u)$ ,  $\forall u \in U$ .

(M2)  $E(A) \leq E(B)$  si  $A \leq B$

c'est-à-dire que  $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$  et  $\nu_A(u) \leq \nu_B(u)$ ,  $\forall u \in U$ ,

Ainsi, chaque définition de la monotonie peut

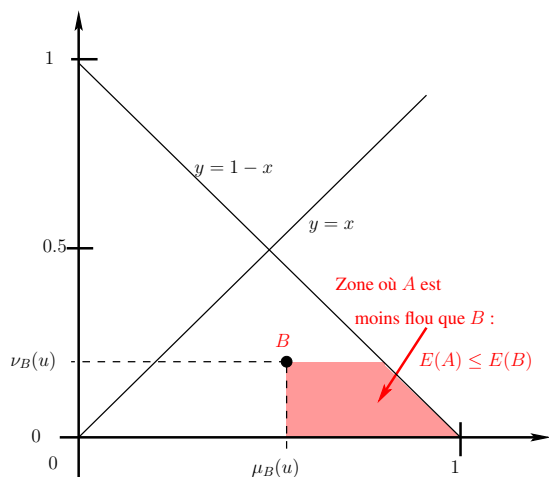


Figure 3 – Exemple pour l'ordre (M1).

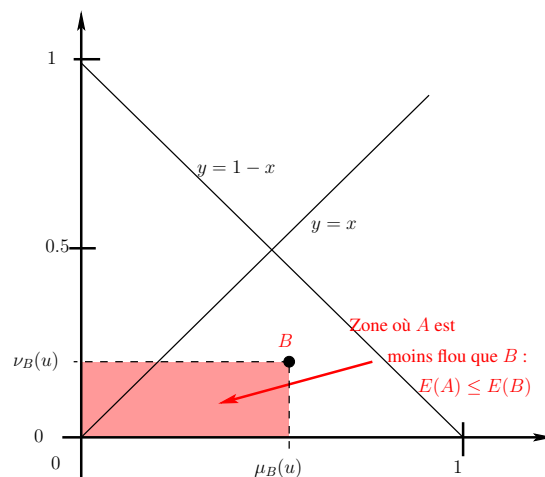


Figure 4 – Exemple pour l'ordre (M2).

être le support d'une forme particulière d'entropie  $E$  [3, 11, 12].

Cependant, l'interprétation de ces relations d'ordre peut être assez peu intuitive. On peut ainsi remarquer l'impact de la définition choisie pour la définition de l'entropie qui est illustré dans la Figure 3 pour (M1) et la Figure 4 pour (M2).

Ces deux ordres amènent donc clairement deux définitions bien distinctes de mesures d'entropie. Par contre, on peut aussi noter qu'il peut être alors difficile de donner une interprétation de la monotonie de l'entropie induite par la relation d'ordre utilisée.

## 4.2 Deux nouvelles définitions de monotonie

Dans le but de proposer une définition d'entropie qui puisse être basée sur une relation d'ordre plus interprétable (dans le sens où elle est plus proche de ce que l'on peut attendre d'une telle mesure), nous introduisons dans cette section deux nouvelles définitions de monotonie pour de telles entropies.

Dans ce qui suit, nous considérons  $A$ , un SFI (ou un IVFS) de  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ .

**Monotonie selon  $r$ .** Comme on l'a vu dans la Section 3.1, pour un élément  $u \in U$ , la valeur de

$r_A(u)$  nous apporte une connaissance sur l'appartenance ou la non-appartenance de  $u$  à  $A$ . Plus  $r_A(u)$  est grand et plus on possède d'information sur le fait que  $u$  appartient ou non à  $A$ .

On peut alors utiliser cela pour définir un ordre partiel sur des SFI (ou des IVFS) : Soit  $A$  et  $B$  deux SFI (ou IVFS) de  $U$ , on dit que  $A$  est mieux connu que  $B$  quand  $r_A(u) \geq r_B(u)$  pour tout  $u \in U$ .

Ainsi, on peut proposer la monotonie relative à  $r$  pour la mesure  $E$  suivante :

**Définition 4.1** (Monotonie relative à  $r$ ).  $E(A) \leq E(B)$  si  $A$  est mieux connu que  $B$ . C'est-à-dire :  $E(A) \leq E(B)$  si  $r_A(u) \geq r_B(u)$  pour tout  $u \in U$ .

**Monotonie selon  $\theta$ .** Comme on l'a vu dans la Section 3.2, il est d'autant plus facile de trancher entre l'appartenance ou la non-appartenance de  $u$  à  $A$  quand  $|\theta_A(u) - \frac{\pi}{4}|$  est grand. Ainsi, la valeur de  $|\theta_A(u) - \frac{\pi}{4}|$  donne une information sur la possibilité de décider entre l'appartenance de  $u$  à  $A$  ou sa non-appartenance. La décision porte donc ici sur le fait de pouvoir déterminer de quel côté de la frontière (floue) de l'ensemble se trouve l'élément considéré.

Ceci nous permet d'introduire un ordre partiel sur les SFI (ou IVFS) : Soit  $A$  et  $B$  deux SFI (ou

des IVFS) de  $U$ , on dit que  $A$  est plus informatif sur la décision que  $B$  quand  $|\theta_A(u) - \frac{\pi}{4}| \geq |\theta_B(u) - \frac{\pi}{4}|$  pour tout  $u \in U$ .

**Définition 4.2** (Monotonie relative à  $\theta$ ).  $E(A) \leq E(B)$  si  $A$  est plus informatif sur la décision que  $B$ . C'est-à-dire :  $E(A) \leq E(B)$  quand  $|\theta_A(u) - \frac{\pi}{4}| \geq |\theta_B(u) - \frac{\pi}{4}|$  pour tout  $u \in U$ .

### 4.3 Application aux entropies de SFI

Dans [12], trois mesures d'entropie de SFI ont été étudiées sous leur forme polaire. Nous présentons dans cette section cette représentation polaire de ces mesures.

Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté,  $\mu_A(u_i)$ ,  $\nu_A(u_i)$ ,  $r_A(u_i)$  et  $\theta_A(u_i)$  sont notés  $\mu_i$ ,  $\nu_i$ ,  $r_i$  et  $\theta_i$  respectivement..

La mesure d'entropie d'un SFI  $A$  de  $U$  introduite par [13] s'écrit en représentation polaire :

$$E_1(A) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2n} \sum_{i=1}^n r_i \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta_i\right) \right|.$$

La mesure introduite par [5] s'écrit :

$$E_2(A) = n - \sqrt{2} \sum_{i=1}^n r_i \sin\left(\theta_i + \frac{\pi}{4}\right).$$

Et la mesure proposée par [10] s'écrit :

$$E_3(A) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( 1 - r_i \sqrt{2} \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta_i\right) \right| \right) \cdot \left( 2 - r_i \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_i\right) \right).$$

**Monotonie selon  $r$ .** On considère  $U$  réduit à un seul élément  $u$ , on peut alors vérifier que les trois mesures  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  vérifient la monotonie selon  $r$  telle qu'elle a été définie dans la Section 4.2. Cela se vérifie aisément : les trois mesures sont décroissantes en  $r$  pour une valeur de  $\theta$  fixée.

Le fait que ces trois mesures sont monotones selon  $r$  nous renseigne sur le fait qu'elles respectent donc une caractéristique souhaitée pour les entropies. Une entropie est une mesure d'un certain désordre, l'amélioration de la connaissance sur le phénomène étudié entraîne donc une réduction de la valeur de son entropie. On retrouve ici, pour ces trois mesures, ce comportement souhaité.

**Monotonie selon  $\theta$ .** Toujours en considérant  $U$  réduit à un seul élément  $u$ , on peut remarquer un comportement différent pour les mesures.

Pour une valeur de  $r$  fixée, les deux mesures  $E_1$  et  $E_3$  sont croissantes pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  et décroissantes pour  $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ , elles sont donc monotones selon  $\theta$ .

Par contre, pour  $r$  fixé, la mesure  $E_2$  est décroissante pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  et croissante pour  $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ , elle n'est donc pas monotone selon  $\theta$ .

La monotonie selon  $\theta$  est liée à la façon dont il est possible de décider de quel côté de la frontière d'un ensemble se trouve un élément considéré. Elle est donc utile pour des mesures d'entropie qui doivent mesurer la facilité avec laquelle il est possible de prendre une décision pour un ensemble donné.

## 5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, deux nouvelles définitions de monotonie pour les mesures d'entropie d'ensembles flous intuitionnistes ou d'ensembles flous définis par intervalles sont introduites. Elles utilisent la représentation polaire de ces ensembles afin de mettre en avant une meilleure interprétabilité pour la définition de ces entropies. Ainsi, on retrouve plus particulièrement des définitions d'entropie pour ce type d'ensembles flous plus proches sémantiquement de la définition de l'entropie classique.

Dans des futurs travaux, ces définitions seront utilisées pour proposer un cadre plus général de définition d'entropies de SFI et de IVFS. De

plus, cette étude pourrait aussi être proposée pour des entropies définies à partir d'ordres différents comme, par exemple l'ordre "sharpened" [9].

## Références

- [1] K. Atanassov and G. Gargov. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 31(3) :343 – 349, 1989.
- [2] K. T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20 :87–96, 1986.
- [3] B. Bouchon-Meunier and C. Marsala. Entropy and monotonicity in artificial intelligence. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2020.
- [4] P. Bujnowski, E. Szmidt, and J. Kacprzyk. Intuitionistic fuzzy decision tree : a new classifier. In *Intelligent Systems' 2014*, pages 779–790. Springer, 2015.
- [5] P. Burillo and H. Bustince. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 78 :305–316, 1996.
- [6] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. Hagra, F. Herrera, and B. D. Baets. A historical account of types of fuzzy sets and their relationships. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24 :179–194, February 2016.
- [7] I. Couso and H. Bustince. From fuzzy sets to interval-valued and Atanassov intuitionistic fuzzy sets : A unified view of different axiomatic measures. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(2) :362–371, 2019.
- [8] D. Dubois and H. Prade. Interval-valued fuzzy sets, possibility theory and imprecise probability. In *Conference EUSFLAT-LFA'05*, pages 314–319, Barcelona, Spain, September 2005.
- [9] P. Grzegorzewski and E. Mrowka. On the entropy of intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets. In *Proc. of the IPMU 2004*, pages 1419–1426, Perugia, Italy, July 4-9 2004.
- [10] K. Guo and Q. Song. On the entropy for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets : an interpretation from the perspective of amount of knowledge. *Applied Soft Computing*, 24 :328–340, 2014.
- [11] C. Marsala and B. Bouchon-Meunier. Entropies et ensembles flous intuitionistes. In *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2019)*, pages 143–148. CEPADUES, 2019.
- [12] C. Marsala and B. Bouchon-Meunier. Polar representation of bipolar information : A case study to compare intuitionistic entropies. In M.-J. Lesot, S. Vieira, M. Z. Reformat, J. P. Carvalho, A. Wilbik, B. Bouchon-Meunier, and R. R. Yager, editors, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 107–116. Springer International Publishing, 2020.
- [13] E. Szmidt and J. Kacprzyk. New measures of entropy for intuitionistic fuzzy sets. In *Proceedings of the Ninth Int. Conf. on Intuitionistic Fuzzy Sets (NIFS)*, volume 11, pages 12–20, Sofia, Bulgaria, May 2005.
- [14] E. Szmidt, J. Kacprzyk, and P. Bujnowski. How to measure the amount of knowledge conveyed by atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *Information Sciences*, 257 :276–285, 2014.
- [15] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, part 1. *Information Sciences*, 8 :199–249, 1975. reprinted in "Fuzzy Sets and Applications : selected papers by L. A. Zadeh", R. R. Yager, S. Ovchinnikov, R. M. Tong and H. T. Nguyen eds, pp. 219–269.