

# Optimisation Combinatoire et les Ordinateurs Quantiques



Alexandre Gondran,  
*École Nationale de l'Aviation Civile - ENAC -  
Toulouse*  
et Michel Gondran  
*Académie Européenne Interdisciplinaire des  
Sciences - AEIS - Paris*

ROADEF 2020, Montpellier  
19 février 2020

- 1 Les Différents Ordinateurs Quantiques
- 2 Problème n°1 : Incomplétude des Qubits
- 3 Problème n°2 : Interprétations de la mécanique quantique
- 4 Conclusions

- 1 Les Différents Ordinateurs Quantiques
- 2 Problème n°1 : Incomplétude des Qubits
- 3 Problème n°2 : Interprétations de la mécanique quantique
- 4 Conclusions

## Les Simulateurs Quantiques

## Les Simulateurs Quantiques

- 1 Ordinateurs à la Feynman
  - *“a quantum machine that could imitate any quantum system, including the physical world.”*  
[1982]
  - ⇒ Ordinateur analogique quantique

## Les Simulateurs Quantiques

### 1 Ordinateurs à la Feynman

- *“a quantum machine that could imitate any quantum system, including the physical world.”*  
[1982]

⇒ Ordinateur analogique  
quantique

### 2 Ordinateurs adiabatiques

- D-Wave : recuit quantique
- Sans garantie d'optimalité

## Les Simulateurs Quantiques

- 1 Ordinateurs à la Feynman
  - *“a quantum machine that could imitate any quantum system, including the physical world.”*  
[1982]
  - ⇒ Ordinateur analogique quantique
- 2 Ordinateurs adiabatiques
  - D-Wave : recuit quantique
  - Sans garantie d'optimalité

## Les Calculateurs Quantiques

Qubits et portes logiques quantiques [Deutsch 1985]  
Parallélisme quantique

## Les Simulateurs Quantiques

- 1 Ordinateurs à la Feynman
  - *“a quantum machine that could imitate any quantum system, including the physical world.”* [1982]

⇒ Ordinateur analogique quantique
- 2 Ordinateurs adiabatiques
  - D-Wave : recuit quantique
  - Sans garantie d'optimalité

## Les Calculateurs Quantiques

Qubits et portes logiques quantiques [Deutsch 1985]  
Parallélisme quantique

- 1 Sans correcteur d'erreur
  - Récentes déclarations de Google, IBM... (7 à 50 Qubits)

## Les Simulateurs Quantiques

- 1 Ordinateurs à la Feynman
  - *“a quantum machine that could imitate any quantum system, including the physical world.”* [1982]

⇒ Ordinateur analogique quantique
- 2 Ordinateurs adiabatiques
  - D-Wave : recuit quantique
  - Sans garantie d'optimalité

## Les Calculateurs Quantiques

Qubits et portes logiques quantiques [Deutsch 1985]

Parallélisme quantique

- 1 Sans correcteur d'erreur
  - Récentes déclarations de Google, IBM... (7 à 50 Qubits)
- 2 Avec correcteur d'erreur
  - Factorisation en nombres premiers [Chuang 1998, 2001]

⇒ Nécessite des codes correcteurs d'erreurs quantiques

⇒ Passage à l'échelle difficile voir non réalisable en pratique : factorisation de 15 en 2001, de 21 en 2012...

## Problèmes évoqués : problèmes pratiques

- Interaction avec l'environnement : phénomène de décohérence
- ⇒ Codes correcteurs d'erreurs quantiques (non clonage)
- Pour 1 Qubit de calcul : 1000 Qubits de correction. Plus il y a de Qubits de calcul, plus il faut de Qubits de correction.

## Problèmes évoqués : problèmes pratiques

- Interaction avec l'environnement : phénomène de décohérence
- ⇒ Codes correcteurs d'erreurs quantiques (non clonage)
- Pour 1 Qubit de calcul : 1000 Qubits de correction. Plus il y a de Qubits de calcul, plus il faut de Qubits de correction.

## Y-a-t-il pas des problèmes théoriques plus fondamentaux ?

*“Si les technologies pour réaliser le rêve de l'ordinateur quantique semblent d'une difficulté extraordinaire, aucune loi fondamentale de la physique n'interdit de les envisager”*

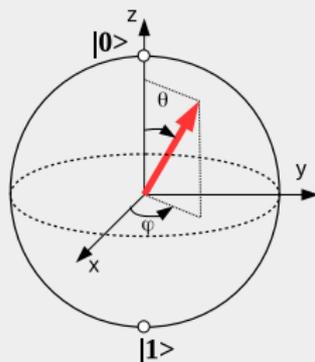
M. Leduc and S. Tanzilli, 2018.

- 1 Les Différents Ordinateurs Quantiques
- 2** Problème n°1 : Incomplétude des Qubits
- 3 Problème n°2 : Interprétations de la mécanique quantique
- 4 Conclusions

# Qu'est ce qu'un qubit ?

## Généralisation du bit classique

- Système à deux états : spin 1/2 d'un atome, deux états d'énergie d'un atome (fondamental et excité)...
- Superposition de ces 2 états



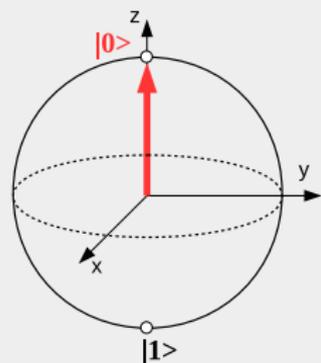
$$\begin{aligned}\psi &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{-\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle\end{aligned}$$

Si  $\theta = 0$  alors l'atome est dans l'état  $|0\rangle$   
Si  $\theta = \pi$  alors l'atome est dans l'état  $|1\rangle$   
Sinon superposition des 2 états (combinaison linéaire)

# Qu'est ce qu'un qubit ?

## Généralisation du bit classique

- Système à deux états : spin 1/2 d'un atome, deux états d'énergie d'un atome (fondamental et excité)...
- Superposition de ces 2 états



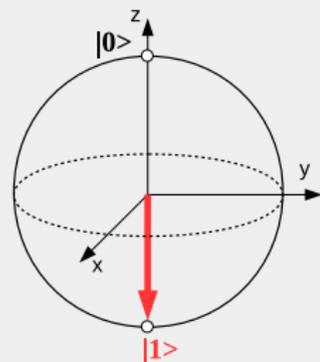
$$\begin{aligned}\psi &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{-\varphi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle\end{aligned}$$

Si  $\theta = 0$  alors l'atome est dans l'état  $|0\rangle$   
Si  $\theta = \pi$  alors l'atome est dans l'état  $|1\rangle$   
Sinon superposition des 2 états (combinaison linéaire)

# Qu'est ce qu'un qubit ?

## Généralisation du bit classique

- Système à deux états : spin 1/2 d'un atome, deux états d'énergie d'un atome (fondamental et excité)...
- Superposition de ces 2 états



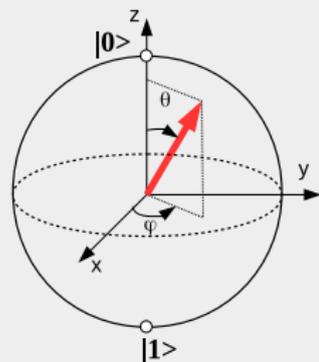
$$\begin{aligned}\psi &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{-\varphi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle\end{aligned}$$

Si  $\theta = 0$  alors l'atome est dans l'état  $|0\rangle$   
Si  $\theta = \pi$  alors l'atome est dans l'état  $|1\rangle$   
Sinon superposition des 2 états (combinaison linéaire)

# Qu'est ce qu'un qubit ?

## Généralisation du bit classique

- Système à deux états : spin 1/2 d'un atome, deux états d'énergie d'un atome (fondamental et excité)...
- Superposition de ces 2 états



$$\begin{aligned}\psi &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{-\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle\end{aligned}$$

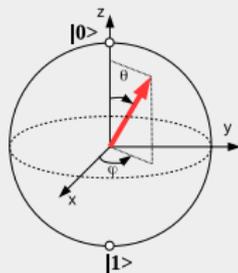
Si  $\theta = 0$  alors l'atome est dans l'état  $|0\rangle$   
Si  $\theta = \pi$  alors l'atome est dans l'état  $|1\rangle$   
Sinon superposition des 2 états (combinaison linéaire)

# Problème n°1 : Incomplétude des Qubits

En mécanique quantique, la fonction d'onde n'est **jamais ponctuelle**.

Qubit ponctuel : idéal - utilisé en informatique quantique

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{-\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$



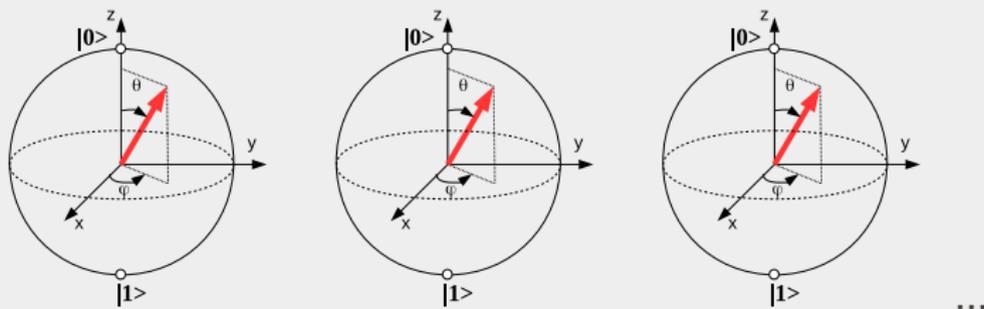
Qubit non ponctuel : réel, avec extension spatiale

Fonction d'onde **gaussienne** écart type  $\sigma_0$

$$\Psi(z) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/4} \times e^{-z^2/4\sigma_0^2} \times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{-\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

# Problème n°1 : le Qubit ponctuel

Dès que l'on a plusieurs Qubits, la factorisation n'est plus exacte



- Analogue à :  $ab + ac + ad = a(b + c + d)$

(2 additions et 1 ou 3 multiplications)

si  $a \simeq a' \simeq a''$ , alors  $ab + a'c + a''d \simeq a(b + c + d)$

⇒ le calcul est alors approché

- Plus il y a de Qubits, plus l'approximation est importante
- Explique les codes correcteurs d'erreurs

- 1 Les Différents Ordinateurs Quantiques
- 2 Problème n°1 : Incomplétude des Qubits
- 3 Problème n°2 : Interprétations de la mécanique quantique**
- 4 Conclusions

# Magie de la superposition ?

## Superposition

- Avec 4 bits, on code les entiers de 0 à 15.
  - Avec 4 Qubits, on code les entiers de 0 à 15, mais aussi toutes superpositions de ces 16 entiers.
- ⇒ On peut être dans un état qui est la combinaison linéaire des 16 états à la fois (avec un poids de  $\frac{1}{16}$  chacun).
- ⇒ Si on calcul une fonction quelconque  $f : [0, 15] \rightarrow [0, 15]$ , alors en une passe, on calcule la valeur des 16 états à la fois (car l'équation de Schrödinger est *linéaire*).
- mais...**

# Magie de la superposition ?

## Superposition

- Avec 4 bits, on code les entiers de 0 à 15.
  - Avec 4 Qubits, on code les entiers de 0 à 15, mais aussi toutes superpositions de ces 16 entiers.
- ⇒ On peut être dans un état qui est la combinaison linéaire des 16 états à la fois (avec un poids de  $\frac{1}{16}$  chacun).
- ⇒ Si on calcul une fonction quelconque  $f : [0, 15] \rightarrow [0, 15]$ , alors en une passe, on calcule la valeur des 16 états à la fois (car l'équation de Schrödinger est *linéaire*).
- mais...**

## Mesure des Qubits

- Mesure uniquement un des 16 états avec la fréquence  $\frac{1}{16}$ 
  - Analogie avec un dé à 16 faces ou 4 tirages de pile ou face...

## Conclusion 1

Algorithme quantique doit tenir compte de la superposition et de la mesure.

- Algorithme de Shor : calcul la période d'une fonction mais pas ces valeurs.

## Conclusion 1

Algorithme quantique doit tenir compte de la superposition et de la mesure.

- Algorithme de Shor : calcul la période d'une fonction mais pas ces valeurs.

## Conclusion 2

Est-ce que le Qubit existe vraiment ?

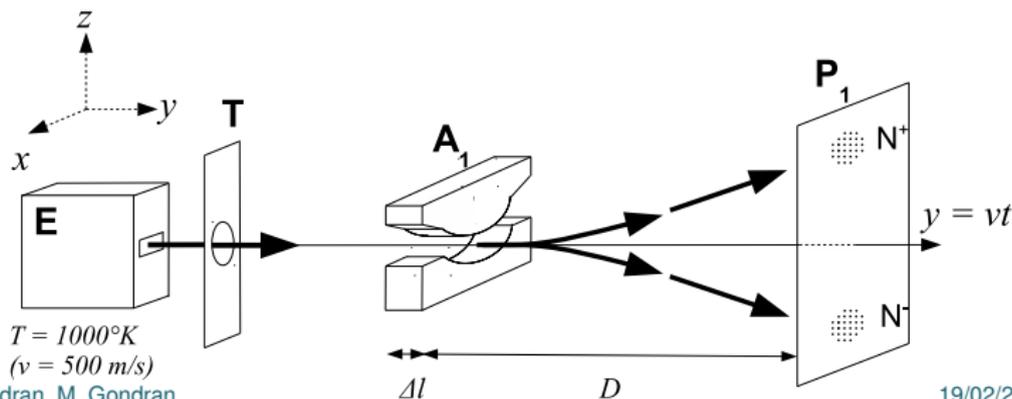
- Cela dépend des interprétations de la mécanique quantique

# Problème n°2 : Interprétations de la mécanique quantique

## Mesure d'un Qubit

- Mesure uniquement un des deux états
  - Analogie avec l'aléa du pile ou face
  - Chat de Schrödinger mort et/ou vivant
  - Problème de la mesure

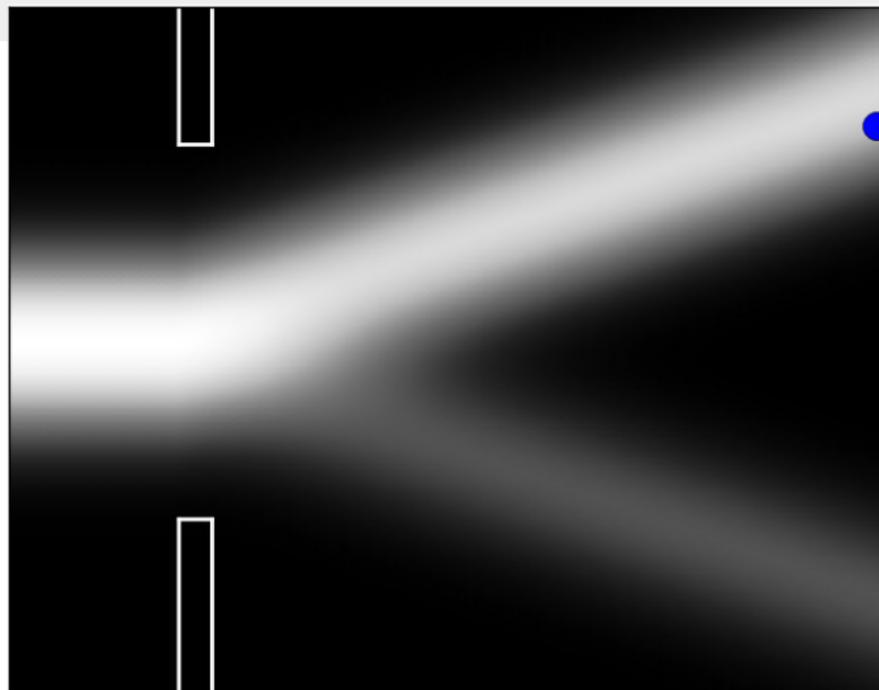
## Mesure du spin et expérience de Stern et Gerlach



# Expérience de Stern et Gerlach

État initial:  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  et  $\phi_0$  fixés

$$\Psi(z) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/4} \times e^{-z^2/4\sigma_0^2} \times \left( \cos \frac{\theta_0}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta_0}{2} |1\rangle \right)$$



$$75\% \\ = \cos^2 \frac{\theta_0}{2}$$

$$25\% \\ = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$$

## Non consistance de l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique

2 façon différentes de faire évoluer la fonction d'onde

- 1 Équation de Schrödinger (postulat 2)
  - 2 Réduction du paquet d'onde (postulat 6)
- ⇒ Pas de règles dans la théorie pour choisir lequel utiliser

Théorème:

3 assertions mutuellement incompatibles

- 1 La superposition n'existe pas à l'échelle macroscopique
- 2 L'équation de Schrödinger est linéaire et déterministe
- 3 La fonction d'onde décrit complètement tout système physique

Théorème:

3 assertions mutuellement incompatibles

- 1 La superposition n'existe pas à l'échelle macroscopique
- 2 L'équation de Schrödinger est linéaire et déterministe
- 3 La fonction d'onde décrit complètement tout système physique

Abandonner l'une des 3 assertions : 3 solutions

- 1 Coexistence des états macroscopiques distincts  
⇒ Interprétation des mondes multiples ou d'Everett

# Le problème de la mesure

Théorème:

3 assertions mutuellement incompatibles

- 1 La superposition n'existe pas à l'échelle macroscopique
- 2 L'équation de Schrödinger est linéaire et déterministe
- 3 La fonction d'onde décrit complètement tout système physique

Abandonner l'une des 3 assertions : 3 solutions

- 1 Coexistence des états macroscopiques distincts  
⇒ Interprétation des mondes multiples ou d'Everett
- 2 Dynamique non linéaire et/ou stochastique  
⇒ GRW (G.C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber)

# Le problème de la mesure

Théorème:

3 assertions mutuellement incompatibles

- 1 La superposition n'existe pas à l'échelle macroscopique
- 2 L'équation de Schrödinger est linéaire et déterministe
- 3 La fonction d'onde décrit complètement tout système physique

Abandonner l'une des 3 assertions : 3 solutions

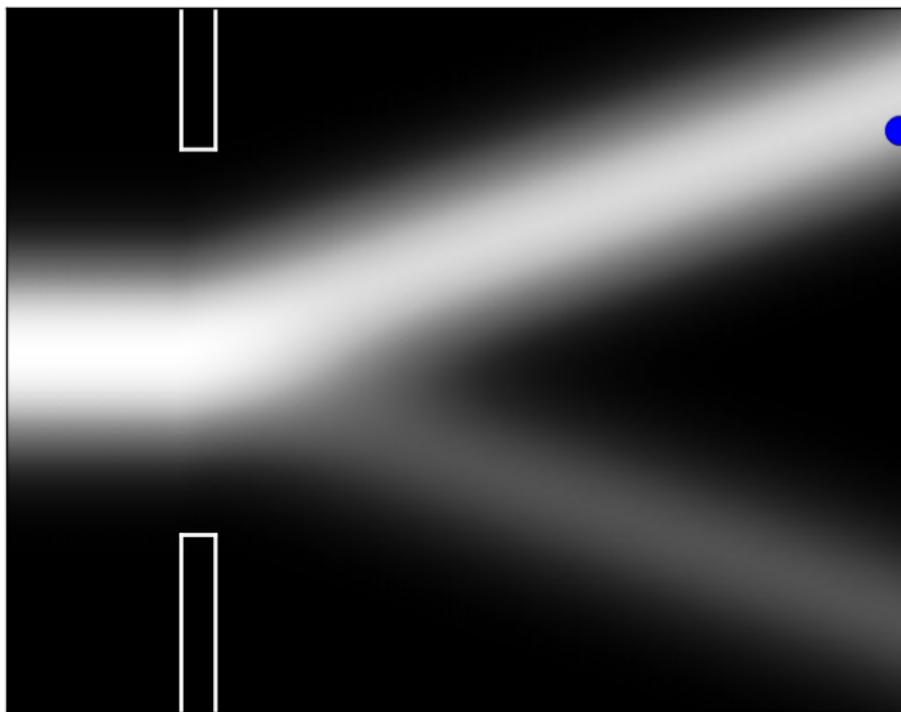
- 1 Coexistence des états macroscopiques distincts  
⇒ Interprétation des mondes multiples ou d'Everett
- 2 Dynamique non linéaire et/ou stochastique  
⇒ GRW (G.C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber)
- 3 Introduire des variables cachées en plus de la fonction d'onde  
⇒ Théorie de de Broglie-Bohm (dBB) ou de l'onde pilote

- Hugh Everett, 1956
  - Qubit = fonction d'onde
  - 1 Qubit dans une superposition de deux états = deux mondes dans lesquels ce Qubit est dans un état bien déterminé.
- ⇒ À chaque superposition, création de nouveaux mondes, qui par la suite peuvent re-fusionner.

# Expérience de Stern et Gerlach :

Interprétation de Copenhague

État initial:  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  et  $\phi_0$  fixés

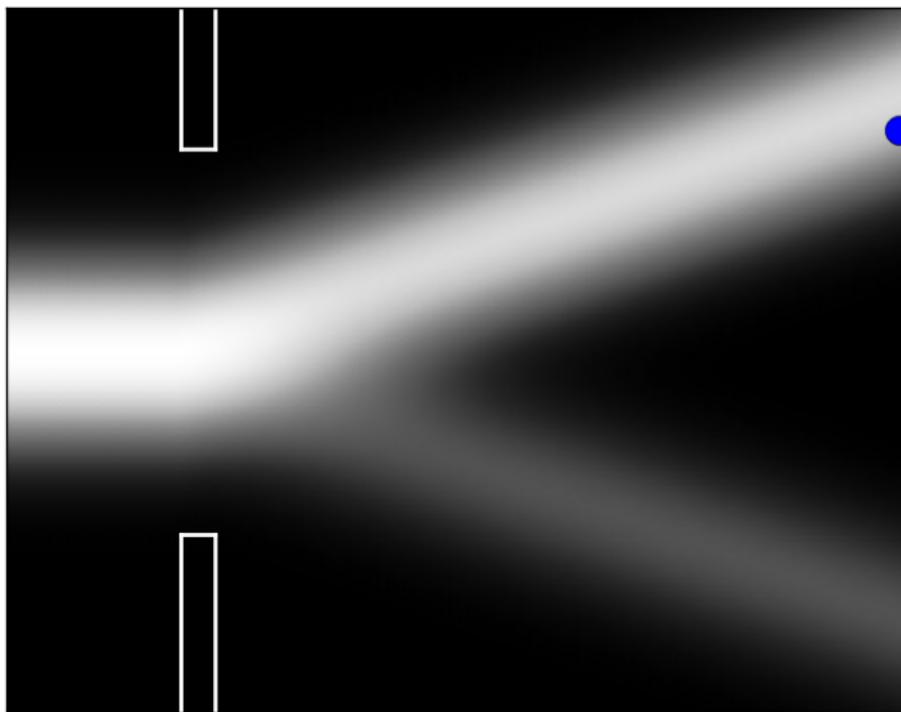


Création de la position au moment de la mesure

# Expérience de Stern et Gerlach :

Interprétation d'Everett

État initial:  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  et  $\phi_0$  fixés

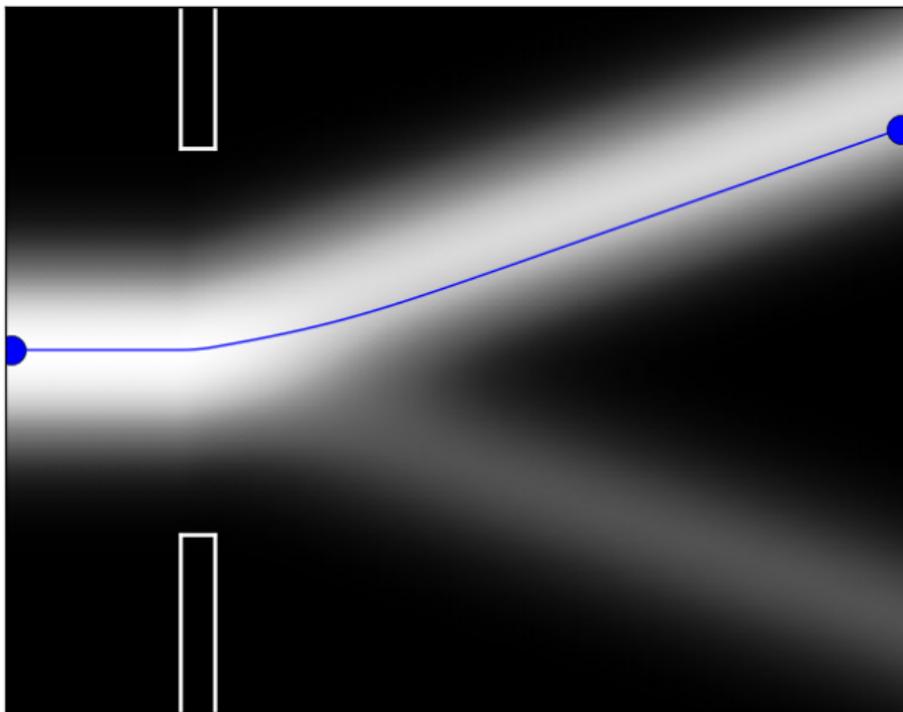


Création de deux mondes

# Expérience de Stern et Gerlach :

Théorie de de Broglie-Bohm

État initial:  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  et  $\phi_0$  fixés

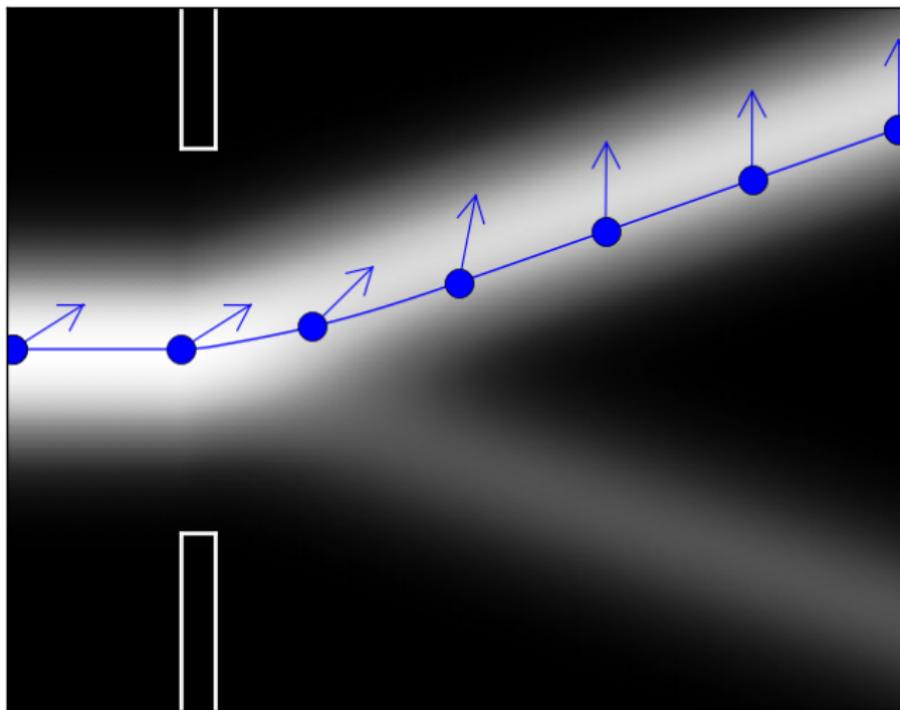


Qubit = fonction d'onde + **position**

# Expérience de Stern et Gerlach :

Théorie de de Broglie-Bohm

État initial:  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  et  $\phi_0$  fixés

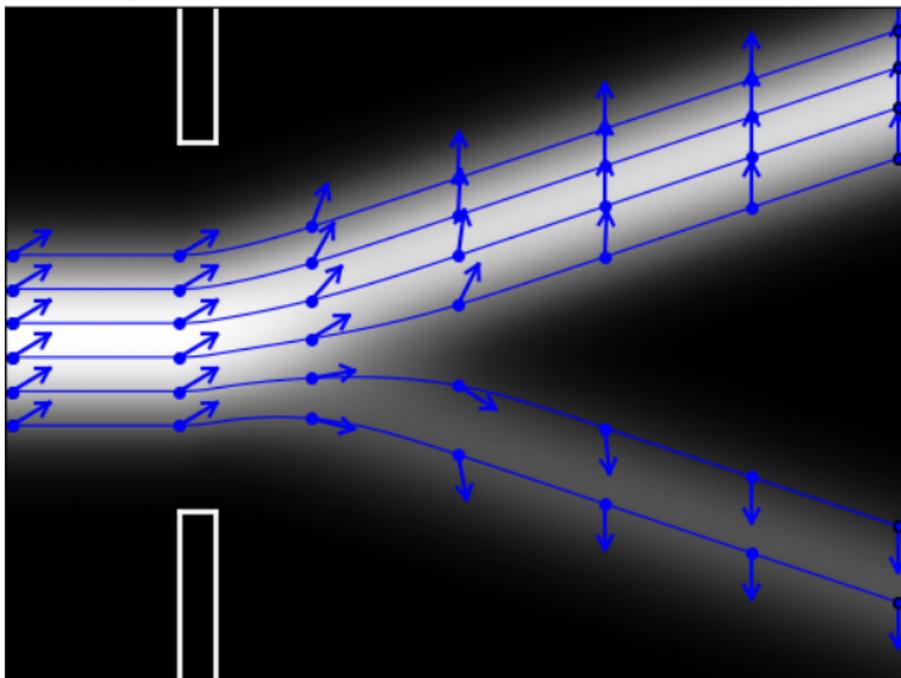


Orientation progressive du spin

# Expérience de Stern et Gerlach :

Théorie de de Broglie-Bohm

État initial:  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  et  $\phi_0$  fixés



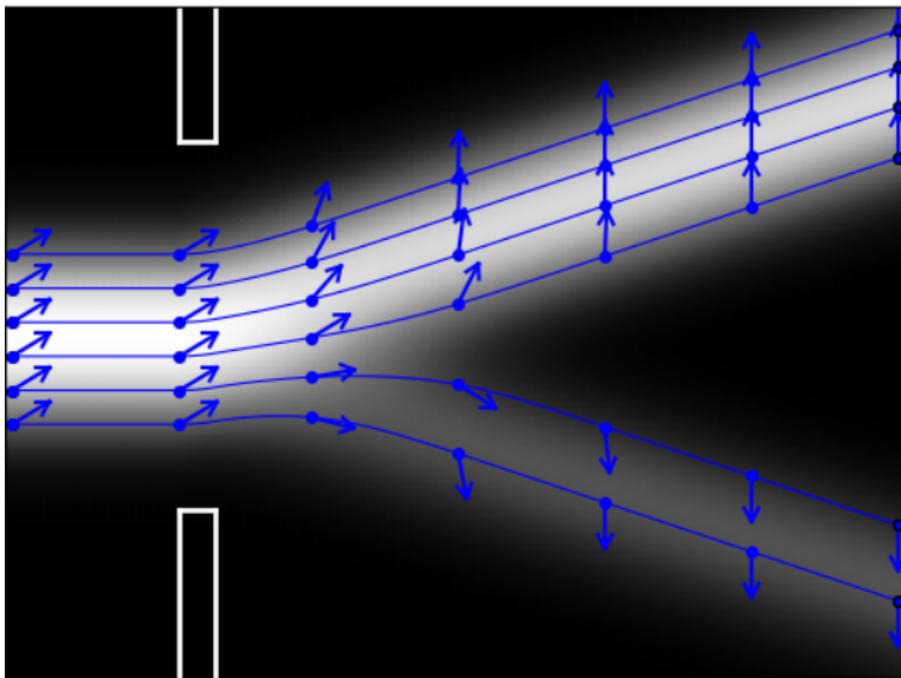
Position initiale différente  $\Rightarrow$  mesure différente

Aléa quantique = aléa classique (ignorance des conditions initiales)

# Expérience de Stern et Gerlach :

Théorie de de Broglie-Bohm

État initial:  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  et  $\phi_0$  fixés



chaque trajectoire = un des mondes d'Everett

## Qubit statistique

- 1 Qubit =  $10^6$  atomes (=  $10^6$  spins)
- Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) [Chuang 2001]
- Cela explique :
  - Les erreurs statistiques.
  - Le besoin d'un très grand nombre de Qubits de contrôle (moyenne de ces Qubits).
- Le Qubit individuel ne permet pas de faire de calcul.

- 1 Les Différents Ordinateurs Quantiques
- 2 Problème n°1 : Incomplétude des Qubits
- 3 Problème n°2 : Interprétations de la mécanique quantique
- 4 Conclusions**

## Interprétations de la mécanique quantique

- L'existence du calculateur quantique implique que l'interprétation des mondes multiples soit exacte.
  - Si on reste réaliste (théorie de dBB), le Qubit n'existe que statistiquement.
- ⇒ L'interprétation de la mécanique quantique n'est pas que la métaphysique.

## Interprétations de la mécanique quantique

- L'existence du calculateur quantique implique que l'interprétation des mondes multiples soit exacte.
  - Si on reste réaliste (théorie de dBB), le Qubit n'existe que statistiquement.
- ⇒ L'interprétation de la mécanique quantique n'est pas que la métaphysique.

- Pas d'inquiétude pour l'optimisation combinatoire classique.
- Physique : Manipulations individuels d'objets quantiques.
- Informatique : Pas d'applications pratiques.



ENAC Lab

<http://recherche.enac.fr>